XV Международная школа-семинар
«Информационные технологии в задачах математического моделирования»
(Новые численные алгоритмы математической физики)

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Басараб М.А.

Институт проблем машиностроения НАН Украины, г. Харьков, Украина

В качестве простейшего примера рассматривается задача Дирихле для одномерного стационарного уравнения теплопроводности на отрезке $\overline{G} = \{0 \le x \le 1\}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(x), \quad x \in G, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \tag{1}$$

Введем в $\overline{G}$ равномерную сетку с шагом h:

$$\omega_h = \{x_i = ih \in \overline{G},\ i = 0,1,\ldots,N, \quad hN = 1\}.$$

Соответствующая разностная задача Дирихле имеет вид:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -f_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2,$$
$$y_i = y(ih),\ f_i = f(ih). \tag{2}$$

Как известно, схема простой итерации с параметром $\tau=h^2/2$ для решения такой задачи:

$$\overset{p}{y}_i = \frac{\overset{p-1}{y}_{i-1} + \overset{p-1}{y}_{i+1}}{2} + \frac{h^2}{2} f_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad p = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

позволяет вычислить значение y_i на p–м шаге при достаточно произвольном выборе начального приближения $\overset{0}{y}$. (Эту же схему можно рассматривать и как явную для конечно-разностного решения соответствующей нестационарной задачи теплопроводности с шагом по времени $\Delta t=h^2/2$.) Очевидно, что *общее количество арифметических действий для нахождения y_i на слое с номером p пропорционально величине pN.*

Выражение (3) запишем иначе, используя оператор сдвига $E_m y_i \equiv y_{i+m}$:

$$\overset{p}{y}_i = \left(\frac{E_{-1}}{2} + \frac{E_1}{2}\right) \overset{p-1}{y}_i + \frac{h^2}{2} E_0 f_i = \left(\frac{E_{-1}}{2} + \frac{E_1}{2}\right)^p \overset{0}{y}_i + h^2 \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{2^q} \left(\frac{E_{-1}}{2} + \frac{E_1}{2}\right)^{q-1} f_i,$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1, \quad p = 1,2,\ldots \tag{3'}$$

С помощью формулы бинома и свойств оператора сдвига ($E_m^{\,l} \cdot E_n^{\,k} = E_{lm+kn}$), предыдущее выражение примет формальный вид:

$$\overset{p}{y}_i = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \overset{0}{y}_{i-p+2k} + h^2 \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q-1} C_{q-1}^k f_{i-q+1+2k} \,, \tag{4}$$

который содержит значения y и f не только в узлах интервала $0 \le i \le N$, но и за его пределами. Последовательно применяя формулу (4) с p=1,2,... для граничных узлов (i=0,N) и учитывая краевые условия, можно записать следующие рекуррентные зависимости для определения y_i и f_i:

$$y_i = \left[\begin{array}{ll} \overset{0}{y}_i, & 0 \le i \le N \\ 2\mu_1 - y_{-i}, & i < 0 \\ 2\mu_2 - y_{2N-i}, & i > N \end{array}\right. , \qquad f_i = \left[\begin{array}{ll} f_i & 0 \le i \le N \\ -f_{-i}, & i < 0 \\ -f_{2N-i}, & i > N \end{array}\right. , \tag{5}$$

из которых можно вывести явные формулы:

$$\begin{gathered} y_i = \left[\begin{array}{ll} s(\mu_2 - \mu_1) + 2\mu_1 - \overset{0}{y}_{sN-i}, & s \bmod 2 = 0 \\ (s-1)(\mu_2 - \mu_1) + \overset{0}{y}_{(1-s)N+i}, & s \bmod 2 = 1 \end{array}\right. \\ f_i = \left[\begin{array}{ll} -f_{sN-i}, & s \bmod 2 = 0 \\ f_{(1-s)N+i}, & s \bmod 2 = 1 \end{array}\right. \qquad s = \left[\frac{i}{N}\right] + 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Двойной ряд в (4) можно свернуть, если с помощью следующих рекуррентных формул определить коэффициенты:

$$\begin{gathered} \Delta_p^0 = 1, \quad \Delta_p^{n+1} \equiv \sum_{q=0}^{n} C_p^q = \Delta_p^n + C_p^{n+1}, \quad n = 0,2,\ldots,\left[\frac{p}{2}\right] - 1, \\ G_p^0 = 1, \quad G_p^{m+1} = G_p^m + \Delta_p^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}, \quad G_p^{p+m} = G_p^{p-m-2}, \quad m = 0,1,\ldots,p-2. \end{gathered} \tag{7}$$

Окончательное выражение для определения y_i тогда примет вид:

$$\overset{p}{y}_i = \frac{1}{2^p}\left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k y_{i-p+2k} + h^2 \sum_{k=0}^{2p-2} G_p^k f_{i-p+k+1}\right) \tag{8}$$

Общее количество арифметических действий для нахождения $\overset{p}{y}$ *в одном узле оказывается пропорциональным числу итераций p.* Таким образом, если требуется нахождение неизвестной функции в небольшом числе узлов сетки, мы получаем значительный выигрыш в быстродействии.

Предложенный алгоритм допускает непосредственное обобщение на случай краевых условий 2-го или 3-го рода, а также, с различной степенью эффективности, может быть использован для произвольной конечно-разностной схемы порядка m на равномерной сетке в n-мерном пространстве.