МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.М.Бодунов, Г.В.Дружинин

Казанский государственный технический университет, г.Казань, Россия

В данной работе изложен алгоритм получения базисных функций на основе инвариантно-групповых решений уравнений математической физики. На основе этих базисных функций предлагается численно-аналитический метод решения задач математического моделирования для исследования процессов в сплошных средах (задачи математической физики, упругости и пластичности, гидродинамики, устойчивости конструкций, химической технологии, биотехнологии и т.д.). С математической точки зрения эти задачи описываются соответствующими дифференциальными уравнениями в частных производных. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными существует целый ряд численных методов (в основном различные варианты конечно-разностных методов, метода конечных элементов и др.), каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками.

Предлагаемый метод основан на применении различных вариантов метода последовательных приближений, при которых исходная нелинейная задача сводится к последовательности решения линейных задач, а также на использовании свойства инвариантности преобразованных уравнений относительно группы непрерывных преобразований, порождаемых операторами растяжения и переноса по независимым и зависимым переменным. Например, для линейного параболического уравнения (в безразмерном виде) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial U}{\partial t}$ ищем инвариантно-групповое решение следующим образом /1-3/:

$$U(x,y,z,t)=(x-l)^{\alpha/2}\sum_{i=1}^{3}u_i(\eta_i),\ \eta_1=\frac{(x-l)}{\sqrt{(t-d)}},\ \eta_2=\frac{(y-h)}{\sqrt{(t-d)}},\ \eta_3=\frac{(z-c)}{\sqrt{(t-d)}},$$

где α, l, h , c, d - произвольные действительные числа. Можно записать и другие комбинации инвариантно-групповых решений. Подстановка указанного решения в исходное уравнение редуцирует его к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $u_i(\eta_i)$, которые имеют одинаковый вид. Отыскание решения $u_i(\eta_i)$ в виде ряда

$$u_i(\eta_i)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\eta_i^k,$$

по целым степеням показывает, что при определенных значениях параметрах α решение может быть получено в виде конечной суммы полинома (используя принцип суперпозиции). Класс полученных выше решений удалось расширить на любые действительные числа α. Инвариантно-групповые решения представляют собой полиномы с некоторыми заранее неизвестными коэффициентами, которые определяются, например, методом взвешенных невязок (в том числе с помощью метода коллокаций), вариационным методом или методом разложения по неортогональным функциям. Количество неизвестных коэффициентов зависит от выбора метода и оценки точности приближенного решения.

Данный метод дает алгоритм построения глобальных полиномиальных базисных функций удовлетворяющих тождественно (внутри рассматриваемой области интегрирования) каноническим уравнениям математической физики. Предложенный алгоритм формирования базисных функций позволяет значительно расширить полиномиальные представления базисных функций всех основных уравнений математической физики. Кроме того, предлагаемый класс (би)гармонических, волновых: параболических и др. полиномов обладает более удобными аналитическими и вычислительными свойствами по сравнению с рядом известных решений (с решениями полученными через шаровые функции и т.д.), а также с решениями, выраженными через ряды, например, тригонометрических и экспоненциальных функций. Наличие в решениях свободных параметров позволяет отыскивать и другие линейно независимые решения (не связанных с отысканием конечных преобразований) из ранее найденных по известному алгоритму, приведенному в работах Л.В.Овсянникова.

Найдены базисные функции, которые являются точными решениями уравнений Навье-Стокса с сохранением всех конвективных членов и всех членов учитывающих вязкость для потенциального и нестационарного плоского течения, уравнений Ламе через решение Папковича-Нейбера, уравнений анизотропной теории упругости, динамических уравнений теории упругости через решение Штернберга-Юбанкса, уравнений плоского течения идеально пластических тел. С помощью разумного подбора полученных базисных функций можно решить весьма широкий класс задач механики как линейных, так и нелинейных с произвольными граничными условиями. При численной реализации данный метод приводит к существенному сокращению размерности алгебраической системы уравнений относительно неизвестных параметров по сравнению с методом конечных разностей и методом конечных элементов, например, для задач теории упругости и для уравнений Навье-Стокса строится аппроксимация решения только для границы. Кроме того, наличие в приближенных решениях свободных параметров позволяет редуцировать разрешающую систему алгебраических уравнений, что дополнительно сокращает количество вычислительных операций и время расчетов при приемлемой потере точности. К настоящему времени решен ряд тестовых и практических задач /4,5/.

Литература

1. Дружинин Г.В. Базисные системы полиномиальных решений уравнений механики / Казан. гос. техн. ун-т. Казань, 1997. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 15.10.97. №3044-В97.

2. Бодунов Н.М., Дружинин Г.В. Об интегрировании уравнений плоского течения идеально пластических тел // Казан. гос. техн. ун-т. Казань. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 17.09.96. № 2825-В96.

3. Дружинин Г.В., Овчинников В.А. О новом методе решения уравнений Навье-Стокса // Тез. докл. Междунар. научно-техн. конф. "Экраноплан-96" / Казань. КГТУ. 1996. С.36.

4. Zakirov I.M., Bodunov N.M., Mart'yanov A.G., Druzhinin G.V. Mathematical modeling of stress-strained state in elastic forming elements // International conference "Technologia'97". Proceedings Volume 2. (сборник докладов). Slovak University Technology, Bratislava. 1997. P. 492-495.

5. Закиров И.М., Дружинин Г.В., Бодунов Н.М., Мартьянов А.Г. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния в эластичных формующих элементах ротационных гибочных машин // Изв. вузов "Авиационная техника". 1997. №1. С.43-49.