МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ТРЕФТЦА ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ В СЛОЖНО-ПОСТРОЕННЫХ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ С СИСТЕМАМИ СКВАЖИН

С.В. Костюченко

Кибернетический центр Томского политехнического университета, Томск, Россия

Основу математического моделирования процессов в нефте- и водонасыщенных пластах с системами скважин составляет задача расчета поля пластовых давлений. Эта проблема сводится к постановке и решению краевой задачи для уравнения с частными производными эллиптического или параболического типа.

При решении этих задач классическими численными методами - конечных разностей, конечных элементов и другими - известны проблемы, связанные с наличием у искомых решений особых точек (скважин) или особых поверхностей (фронтов вытеснения), резкими деформациями фронтов, а также мелкомасштабными неоднородностями. Эти проблемы стоят особенно остро при наличии большого числа точечных источников процессов фильтрации - вертикальных и наклонных скважин, линейных источников фильтрации - горизонтальных скважин, внутренних границ с идеальными (условия 4-го рода) или неидеальными условиями сшивки искомых решений. Эти проблемы переносятся и на программные реализации методов, в том числе и на коммерческие системам.

Нефтяной пласт со скважинами может быть представлен некоторой областью $\Omega(X)$, ограниченной замкнутой поверхностью $\partial\Omega$. Внутри области Ω размещены источники физических полей - скважины.

При известных допущениях общая постановка задачи может быть сведена к двум известным частным случаям для однородных и кусочно-однородных областей с точки зрения изменчивости гидропроводности пласта.

Так, для кусочно-однородной расчетной области $\mathbf{\Omega = \cup\Omega i,\ i=1,2,...,\nu,...n}$

$$\mathbf{G\nu * div\ (\ grad\ U\nu(X)\ ) = -\sum_{i=1}^{m}(\ Q_i * \delta(X-X_i)\ ),} \qquad (1)$$

Краевые условия на внешних границах расчетной области :

$$\mathbf{A * \partial U\nu / \partial n\nu + B * U\nu = \Phi\nu(Y),\ Y \in \Omega\nu 0,} \qquad (2)$$

При различных значениях коэффициентов **A, B** выражение (2) позволяет задавать условия I - III родов и смешанные.

Здесь использованы следующие обозначения:

G	-гидропроводность пласта,	**n(+)**	-вектор внешней нормали к границе,
		Q	- интесивность закачки / отбора,
ν,μ	-номер подобласти **Ων, Ωμ,**	**i, m**	- номер скважины, число скважин,
A, B	-известные коэффициенты,	**δ(•)**	- дельта - функция Дирака,
W	-частное решение дифференциального уравнения с правой частью **F,**	**F,Φ,q, p**	- известные функции,
R, Q	-параметры неидеальной сшивки решений ,	**(+),(-)**	-индексы: слева/справа от внутренней границы.

Yi = { yi1, yi2 } - векторы координат точек вхождения скважин в пласт, $Yi \in \Omega$;
X = { x1, x2 } - векторы координат текущей точки, $X \in \Omega \cup \partial\Omega$;
Zj={zj1,zj2} - векторы координат j-того узла, $Zj \notin \Omega \cup \partial\Omega$

Краевые условия на внутренних границах $\mathbf{\partial\Omega\nu\mu}$ расчетной области $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{U\nu = U\mu + R(Y) * G\mu * \partial U\mu/\partial n(-),} \quad (3)$$

$$\mathbf{G\nu * \partial U\nu/ \partial n(+) = - G\mu * \partial U\mu/ \partial n(-)+ Q(Y) , Y\in\partial\Omega\nu\mu}$$

Краевые условия (3) на границах $\partial\Omega\nu\mu$ определяют условия сопряжения, возникающие как следствие физических посылок о форме законов сохранения потоков флюидов через них:

1. При $\mathbf{R = 0, Q = 0}$ условия (3) называются “идеальными” условиями сопряжения.

2. При $\mathbf{R \neq 0, Q = 0}$ на внутренних границах расчетной области имеет место локальное сопротивление переносу флюидов.

3. При $\mathbf{R = 0, Q \neq 0}$ условия (3) позволяют учесть существование на внутренней границе расчетной области распределенный вдоль нее источник или сток пластовых флюидов.

Для скважин, осуществляющих отбор флюидов из пласта или закачку в пласт жидкости - вытеснителя, известны дебиты (q>0) или приемистость (q<0):

$$\mathbf{Q_i = q} \quad (4)$$

Для отдельных скважин известны также пластовые или забойные давления:

$$\mathbf{Q_i = q, U_i = p\ пл} \text{ или } \mathbf{U_i = p\ заб} \quad (5)$$

Некоторые скважины предназначены только для измерения пластового давления:

$$\mathbf{Q_i = 0 , U_i = p\ пл} \quad (6)$$

Условия (4) - (6) могут быть заданы также вдоль трещин гидроразрыва пласта.

Для решения задачи (1) - (6) применен модифицированный метод Трефтца. Модификация метода состоит в конструировании мимимизируемого функционала и системы базисных функций, учитывающих геометрическую информацию на аналитическом уровне, без какой-либо ее аппроксимации. При этом использован конструктивный аппарат теории R-функций [2], [3], который в методе Трефтца позволяет разделить “сферу влияния” неопределенных компонент решения на пограничную и внутреннюю подобласти области $\mathbf{\Omega}$. К пограничным подобластям отнесем некоторые окрестности границ расчетной области и окрестности точек - скважин с заданными на них значениями искомых функций.

Для реализации изложенного численно-аналитического метода разработан необходимый набор аналитических компонент: частное решение $\mathbf{W(X,Y,Q)}$ для совокупности точечных и линейных источников, аналитические описания $\mathbf{\omega(X), \omega\varepsilon(X)}$ геометрической информации о гонфигурации расчетной области и размещении внутри $\mathbf{\Omega}$ точек и линий с заданными краевыми условиями, формулы, позволяющие учесть краевые условия и продолжающие их внутрь области.

Произведена программная реализация этих компонент и проведены вычислительные эксперименты.

Созданное математическое и программное обеспечение предполагается апробировать в рамках коммерческой системы “Томограф” [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. С.В.Костюченко, А.Ф.Тузовский. Программная система "ТОМОГРАФ" для анализа и моделирования процессов в нефте- и водонасыщенных пластах с системами скважин. Новосибирск : "Вычислительные технологии ". Том 4, N 10 . Сборник научных трудов Института вычислительных технологий Со РАН. 1995 г., с. 245-251.

2. Ф.Ф.Коваль, С.В. Костюченко. Декомпозиция и точная аппроксимация краевых условий в задаче для эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами. - Казань, 1986 - 8 с. - Рукопись представлена ред.ж. “Известия вузов. Математика”. Деп. в ВИНИТИ 30 марта 1987 г., № 2253 В-87.

3. В.Л.Рвачев. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук.думка, 1982. - 552 с.