ДОКАЗАТЕЛЬНОЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Панков П.С., Бейшенова А.К.

Институт Математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек

В [1] было предложено нахождение особых точек римановых поверхностей с помощью решения дифференциальных уравнений. Однако, в этой статье не были рассмотрены вопросы доказательности полученных результатов [2], [3]. Кроме того, во многих случаях римановы поверхности можно строить при помощи заданных многозначных функций. Подобное построение значительно быстрее, чем с помощью дифференциального уравнения, более того, оно может быть выполнено в режиме реального времени.

Пусть задано кинематическое метрическое пространство $\boldsymbol{C}$ (см. например [4]) и k-значная непрерывная функция $f:\boldsymbol{C}\to R^n$ (эквивалентная функции $\tilde{f}:C\to R^{nk}$, $\tilde{f}\equiv(f_1,...,f_k)$). Непрерывность понимается в том смысле, что для любого $z_2\in C$ и любого рационального $\varepsilon>0$ можно алгоритмически найти такое рациональное $\delta>0$, что для любого $z_1\in C$ такого, что $\rho(z_1,z_2)<\delta$, существует такая перестановка $P(m)$, $m=1,...,k$, что для всех m верно неравенство $\left\| f_m(z_1)-f_{P(m)}(z_2)\right\|<\varepsilon$.

Предположим, что заданное топологическое пространство $\boldsymbol{C}$ эквивалентно R^2. Множество интервальных векторов [5] пространства R^n обозначим через I^n, тогда $I^{nk}=I^n\times...\times I^n$ (k сомножителей). Данную функцию f аппроксимируем k-значной интервальной функцией $F(Z)$: для любого интервального вектора (прямоугольника) $Z\subset C$ из $z\in Z$ следует, что $f(z)\subset F(Z)$.

Требуется построить программу, которая по заданным начальной точке $z_0\in C$ и начальному значению ω_0, принадлежащему одной из компонент $f(z_0)$. дает возможность пользователю двигаться от точки местоположения в любом направлении (кроме точек ветвления) и строит наглядное изображение римановой поверхности. Для этой цели разобьем достаточно большой участок плоскости C на равные квадраты, имеющие каждый свой номер (метку). Элемент римановой поверхности над данным квадратом будет определяться следующим образом: $N=(Q$ - номер квадрата S, то есть метка на поверхности; L - номер листа; интервальный вектор W в I^n, соответствующий номеру листа).

Например: $N=(12;\ 1;\ [0.93,0.94]\times[0.03,0.06]\times[1.32,1.34])$ $(n=3)$.

Будем строить трехмерные изображения (двумерное пространство ***C*** и третья координата – вертикальные столбики для наглядности).

Алгоритм. а) Для квадрата *S*, содержащего точку z_0, полагаем $L=1$, W - та из компонент *F(S)*, которая содержит ω_0.

б) Пусть уже некоторые римановы элементы определены. Основной шаг алгоритма: вычисляем *F(S)* на квадрате *S*, находящимся с некоторым римановым элементом. Если какие-либо два компонента *F(S)* имеют непустое пересечение, то переходим к п. г), иначе – к п. в).

в) (Шаг на данный квадрат предварительно возможен). В качестве *W* выбираем ту из компонент F(S), которая имеет непустое пересечение с предыдущей *W*, (если эта компонента единственна, иначе вычисления для данного квадрата не производим); значение L совпадает с предыдущим, заносим номер квадрата в список.

г) (Шаг на данный квадрат невозможен). Делаем обход квадрата с обеих сторон по пункту в) и сравниваем интервальные векторы. Здесь могут возникнуть два случая. Если эти интервалы имеют непустое пересечение, то возможную точку ветвления внутри квадрата помечаем как «низкий столбик». Если интервалы имеют пустое пересечение, то квадрат *S* содержит точку ветвления, которую помечаем как «столбик бесконечной высоты», представляющий визуальный разрез.

д) Таким образом, продолжаем движение в выбираемом пользователем направлении. С каждой новой точки зрения ставим новые столбики (если они возникают) и определяем видимость «хороших квадратов». Если номер «хорошего квадрата» уже есть в списке, то сравниваем полученный интервальный вектор с интервальным вектором уже построенного риманова элемента над этим квадратом. Если они имеют пустое пересечние, то даем новый номер листа (новый римановый элемент).

е) Алгоритм продолжает работу и прекращает ее по требованию пользователя.

Литература

1. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Программное обеспечение для управления решением дифференциальных уравнений на римановых поверхностях // IV Республиканская конференция “Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики”. Бишкек: КГПУ, 1996. - Часть I, с. 39-41.
2. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
3. Панков П.С., Баячорова Б.Д., Югай С.А. Доказательные вычисления на ЭВМ и результаты их применения в различных разделах математики // Кибернетика. - 1982. - № 6. - С. 111-116.
4. Борубаев А.А., Панков П.С. Классификация компьютерных представлений топологических пространств //Вестник Кыргызского государственного педагогического университета. Серия: Математика. Физика. Информатика. 1998, № 1.
5. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986. - 222 с.