Гарантированно субоптимальные решения задач линейной оптимизации

А.Г. Ершов

Компания SIB3
Россия, 630090 г. Новосибирск
просп. Лаврентьева, 6

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос о возможности эффективного вычисления на ЭВМ субоптимальных решений задач линейной оптимизации, гарантированно удовлетворяющих условиям допустимости; вводится класс задач, для которых проблема поиска таких решений является в некотором смысле корректной — класс так называемых устойчиво допустимых задач линейной оптимизации. Представляется новый алгоритм поиска субоптимального гарантированно допустимого решения задачи линейной оптимизации, основанный на методе внутренних точек (Interior Point) и использующий технику малого возмущения решаемой задачи. Указывается способ построения с помощью такого алгоритма субоптимальной внешней и субмаксимальной внутренней интервальных оценок множества субоптимальных решений задачи линейной оптимизации.

Введение

Данная работа выполнялась в рамках экспериментальной системы — расширяемого вычислительного сервера, основанного на математическом аппарате программирования в ограничениях (рабочее название Solver). Программирование в ограничениях — это универсальный подход к решению систем ограничений, позволяющий работать с вычислительными моделями, содержащими переменные различных типов, связанные разнородными ограничениями (см. [5]). Помимо универсальности, такой подход имеет еще два важных преимущества: гарантированность вычислений и возможность работы с недоопределенными данными. Во время работы методов программирования в ограничениях происходит постепенное уточнение информации об области возможных значений переменных модели, - такой подход позволяет работать с недоопределенными данными. В системе Solver информация об области возможных значений вещественных переменных модели представляется в виде внешней интервальной оценки, то есть интервала, который содержит все возможные значения переменной. Известно, что алгоритмы программирования в ограничениях имеют экспоненциальную сложность вычислений, поэтому применение программирования в ограничениях оправдано для решения сложных систем алгебраических уравнений, содержащих трансцендентные функции, или сложных смешанных задач, анализ которых затруднен, но не слишком адекватно для решения хорошо изученных в вычислительной математике задач. К таким задачам относятся, например, системы линейных уравнений и задачи линейной оптимизации (также называемых задачами линейного программирования, далее ЗЛП), для которых существуют специальные полиномиальные методы решения. Мы будем исследовать вопрос о возможности получения гарантированных интервальных оценок на оптимальное значение целевой функции и множество решений ЗЛП с помощью полиномиальных алгоритмов.

В данной статье будем рассматривать задачи оптимизации — как классические, так и интервальные. Классическими постановками задач линейной оптимизации являются общая, каноническая и стандартная задачи линейной оптимизации

$$\begin{cases} \min \leftarrow c^T * x \\ A_1 * x = b_1 \\ A_2 * x \le b_2 \\ A_3 * x \ge b_3 \\ x \in R_+^n \end{cases} \quad (1о) \qquad \begin{cases} \min \leftarrow c^T * x \\ A * x = b \\ x \in R_+^n \end{cases} \quad (1к) \qquad \begin{cases} \min \leftarrow c^T * x \\ A * x \le b \\ x \in R_+^n \end{cases} \quad (1с)$$

Заметим, что эти постановки эквивалентны друг другу - задачу любого из трех видов можно преобразовать к любому другому виду.

<u>Определение</u>. Означивание переменных ЗЛП называется допустимым решением, если оно удовлетворяет всем ограничениям ЗЛП.

Определение. Означивание переменных задачи линейной минимизации (максимизации) называется оптимальным решением, если

1) Оно является допустимым решением.
2) Значение целевой функции на нем не больше (не меньше), чем на любом другом допустимом решении. Такое значение называется оптимальным значением целевой функции (далее ОЗЦФ).

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. $\begin{cases} \max \leftarrow x+y+z \\ 3*x+2*y=3 \\ 2*x+3*y=3 \\ x+z\le 1 \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$. Все коэффициенты в модели — представимые в ЭВМ целые, однако оптимальное решение $\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ не представимо в ЭВМ с обычной бинарной разрядной сеткой. Более того, множество допустимых решений $\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5},t\right), t\in[0,\frac{2}{5}]\right\}$ не содержит представимых в ЭВМ векторов.

Известно, что можно гарантировать существование у ЗЛП допустимого решения, если ЗЛП имеет так называемое "ε-допустимое решение с достаточно малым параметром ε" (см. [3]), однако оценка такого "достаточно малого ε" включает в себя неизвестные априори величины, вычисление которых затруднено, потому качественный анализ существования допустимого решения ЗЛП на практике не проводится. Таким образом, получение точного оптимального (или хотя бы точного допустимого) решения произвольной ЗЛП на ЭВМ, равно как и гарантирование его существования, либо невозможно, либо сложно в вычислительном плане. Возникают следующие вопросы:

1) Для какого класса задач линейной оптимизации существуют методы, позволяющие численно получать машинно-представимые оптимальные решения?
2) Каким образом можно ослабить условия оптимальности решения так, чтобы класс задач, для которых численный поиск машинно-представимых решений такого вида имел бы смысл, был достаточно широк?

Сначала мы займемся исследованием второго вопроса, изучив свойства множеств субоптимальных ("близких к оптимальным") решений задач линейного программирования.

Субоптимальные решения

Сформулируем условия субоптимальности решения ЗЛП:

1) Решение должно быть допустимым — то есть удовлетворять всем ограничениям ЗЛП.
2) Решение должно быть близко к оптимальному. Характеристики оптимальности могут быть разными, так, мы будем считать решение x субминимальным (субмаксимальным) с параметром ε в абсолютном смысле, если для любого допустимого решения y выполняется $c^T*y\ge c^T*x-\varepsilon$ (выполняется $c^T*y\le c^T*x+\varepsilon$) (2.1); субминимальным (субмаксимальным) с параметром ε в относительном смысле, если для любого допустимого решения y выполняется $c^T*y\ge(c^T*x)*(1-\varepsilon*sign(c^T*x))$ (соответственно выполняется $c^T*y\le(c^T*x)*(1+\varepsilon*sign(c^T*x))$) (2.2). Мы не будем далее рассматривать субоптимальные решения в относительном смысле для задач с нулевым ОЗЦФ.

Так как условия субоптимальности решения (2.1), (2.2) при $\varepsilon=0$ совпадают с условиями оптимальности, множество всех оптимальных решений (далее МОР) является частным случаем множества всех субоптимальных решений (далее МСР). Кроме того, МСР задачи (1o) совпадает с множеством всех допустимых решений (далее МДР) той же самой задачи с одним дополнительным ограничением $c^T*x\le l$ (2.3), где l - константа, зависящая от ε и типа субоптимальности; из этого следует выпуклость МСР. Раз все оптимальные решения являются субоптимальными, то МСР ЗЛП содержит МОР и содержится в МДР. Легко видеть, что МСР с параметром ε_1 содержит любое МСР с параметром ε_2 при $0\le\varepsilon_2\le\varepsilon_1$. Все перечисленные выше качественные свойства МСР не зависят от типа оптимальности (максимальность или минимальность) и типа субоптимальности (абсолютная или отрицательная).

Теперь мы докажем четыре предложения об общих свойствах МСР и МДР (предложения 1 и 2), МСР и МОР (предложения 3 и 4).

Предложение 1. Для любого типа субоптимальности, и для любого значения параметра субоптимальности $\varepsilon > 0$, мощность МСР совпадает с мощностью МДР.

Доказательство. Как известно, МДР может иметь мощность континуума, 1 или 0. Если допустимое решение единственно, то оно оптимально, а значит, и субоптимально. Если допустимых решений нет, то, так как любое субоптимальное решение допустимо, нет и субоптимальных решений. Докажем, что континуальность МДР ЗЛП влечет континуальность МОР той же самой ЗЛП для любого значения параметра субоптимальности, большего 0. Действительно, рассмотрим отрезок, соединяющий некоторое оптимальное решение с некоторым другим допустимым решением - по свойству выпуклости МДР, отрезок между ними целиком состоит из допустимых решений, а в силу линейности целевой функции, целый интервал ненулевой длины состоит из решений, удовлетворяющих условию субоптимальности.

В то же время мощность МОР (то есть МСР с параметром $\varepsilon = 0$) не всегда равна мощности МДР.

Предложение 2. МСР ЗЛП в абсолютной мере с параметром субоптимальности $\varepsilon > 0$ имеет внутреннюю точку тогда и только тогда, когда МДР той же ЗЛП имеет внутреннюю точку.

Доказательство. Достаточность. Пусть в МДР содержится некоторый шар X. Пусть y — некоторое оптимальное решение. Тогда множество $\{\gamma * x + (1-\gamma) * y \mid x \in X\}$ имеет внутреннюю точку для любого $\gamma \in (0,1]$, и состоит полностью из субоптимальных решений для всех достаточно малых γ. Необходимость очевидна, так как любое МСР содержится в МДР.

Аналогичный факт имеет место и для МСР в относительной мере для значения параметра субоптимальности $\varepsilon > 0$ при условии неравенства ОЗЦФ нулю. Заметим, что существование внутренней точки у МДР и МСР не влечет существование внутренней точки у МОР.

Предложение 3. МСР ЗЛП является ограниченным тогда и только тогда, когда МОР той же ЗЛП является ограниченным.

Доказательство. Как уже было замечено, МОР и МСР ЗЛП (1o) являются МДР ЗЛП, полученными из ЗЛП (1o) добавлениями ограничений вида $c^T * x \le l_o$ (для МОР) и $c^T * x \le l_c$ (для МСР). Ограниченность МДР задачи с добавленным ограничением эквивалентна ограниченности ЗЦФ всех задач вида $\begin{cases} \min \leftarrow x_i \\ c^T * x \le l_o \\ \ldots \end{cases}$ и $\begin{cases} \max \leftarrow x_i \\ c^T * x \le l_o \\ \ldots \end{cases}$ (для МОР) и $\begin{cases} \min \leftarrow x_i \\ c^T * x \le l_c \\ \ldots \end{cases}$ и $\begin{cases} \max \leftarrow x_i \\ c^T * x \le l_c \\ \ldots \end{cases}$ (для МСР). Если мы рассмотрим пары задач для МОР и МСР, отличающиеся лишь коэффициентом правой части в добавленном ограничении, то заметим, что двойственные к ним задачи будут отличаться только одной координатой вектора целевой функции, следовательно, МДР таких задач совпадают. Так как непустота МДР двойственной задачи определяет ограниченность ЗЦФ прямой задачи, мы получаем эквивалентность ограниченности МОР и МСР.

Очевидно, что МСР и МДР ЗЛП могут не являться одновременно ограниченными.

Определение. Внешней (внутренней) интервальной оценкой множества в R^n называют содержащий его (содержащийся в нем) n-мерный брус $[x_l, x_r]$ с гранями, параллельными координатным плоскостям (см. [4]).

Определение. Наименьшей внешней (наибольшей внутренней) интервальной оценкой называют такую оценку, что любая другая оценка содержит ее (содержится в ней). Такие оценки называют еще оптимальными.

Определение. Минимальной внешней (максимальной внутренней) интервальной оценкой называют такую оценку, что никакая другая оценка не содержится в ней (не содержит ее).

Предложение 4. Оптимальные внешние интервальные оценки ограниченного непустого МСР ЗЛП непрерывно зависят от параметра субоптимальности ε.

Доказательство. Оптимальная интервальная внешняя оценка МСР ЗЛП по координате i имеет границы, равные ОЗЦФ ЗЛП $\begin{cases}\min \leftarrow x_i \\ c^T * x \le l \\ \ldots\end{cases}$ и $\begin{cases}\max \leftarrow x_i \\ c^T * x \le l \\ \ldots\end{cases}$, полученных из исходной ЗЛП добавлением одного ограничения и изменением целевой функции, при этом l является величиной, непрерывно зависящей от ε. Для определенности рассмотрим ЗЛП для определения нижней границы. Ее МДР есть МСР исходной задачи. Двойственной к ней будет ЗЛП $\begin{cases}\max \leftarrow b^T * y + l * w \\ \ldots\end{cases}$, МДР которой никак не зависит от параметра ε. ОЗЦФ этой двойственной ЗЛП (равный искомой нижней границе внешней оценки по координате i) будет непрерывно зависеть от l, а значит, и от ε, что и доказывает предложение.

Устойчиво допустимые задачи линейного программирования.

Теперь мы вернемся к первому поставленному во введении вопросу, — для какого класса задач линейной оптимизации возможен поиск оптимальных, и для какого — субоптимальных решений. Вспомним, что МДР, МОР и МСР ЗЛП являются выпуклыми множествами, и что имеет место следующее предложение.

Предложение. Выпуклое множество в евклидовом пространстве имеет внутреннюю точку тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в какой гиперплоскости пространства.

Если множество содержится в некоторой гиперплоскости, то вряд ли оно содержит машинно-представимые элементы. Действительно, практическая вероятность того, что гиперплоскость в евклидовом пространстве имеет общие точки с некоторым фиксированным конечным множеством точек, крайне мала (она равна нулю, например, для случая равномерного распределения всех коэффициентов уравнения гиперплоскости в произвольных конечных интервалах ненулевой длины). Таким образом, можно считать поиск машинно-представимых элементов выпуклых множеств, не имеющих внутренних точек, некорректным. В то же время, если некоторое выпуклое множество имеет внутреннюю точку, то, в силу возможности аппроксимации любого вектора из R^n векторами из множества $\{k/2^n; k,n \in Z\}$, на ЭВМ с достаточно большой бинарной разрядной сеткой можно представить некоторые элементы такого выпуклого множества. Итак, мы будем считать проблему представления элементов выпуклых множеств на ЭВМ корректной для выпуклых множеств, имеющих внутреннюю точку.

Как уже было замечено, из существования внутренней точки у МДР следует существование внутренней точки у МСР, но не следует существование внутренней точки у МОР. Потому нам придется ввести два класса "хороших" ЗЛП.

Определение. ЗЛП называется устойчиво допустимой, если у нее существует допустимое решение, целая окрестность которого состоит из допустимых решений (то есть множество допустимых решений имеет внутреннюю точку).

Определение. ЗЛП называется устойчиво оптимизируемой, если у нее существует оптимальное решение, целая окрестность которого состоит из оптимальных решений.

Как уже было доказано, МДР и МСР одновременно имеют или не имеют внутренние точки, следовательно, устойчиво допустимые задачи являются также и "устойчиво субоптимизируемыми". К сожалению, рассматриваемые на практике задачи не являются устойчиво оптимизируемыми.

Предложение. Если вектор целевой функции не равен нулю, задача не является устойчиво оптимизируемой.

Доказательство. Пусть существует устойчиво оптимизируемая задача с ненулевым целевым вектором. Возьмем ее оптимальное решение x, целая окрестность которого состоит из оптимальных решений. Легко видеть, что значение целевой функции на x будет отличаться от значения целевой функции на другом оптимальном решении, полученным малым сдвигом из x по ненулевой координате целевого вектора, что противоречит условию оптимальности одного из этих решений.

Итак, класс устойчиво оптимизируемых задач является, в практическом смысле этого слова, вырожденным, что же касается класса устойчиво допустимых задач, то в него входят некоторые практически важные задачи ЗЛП.

Пример 2. $$\begin{cases} \max \leftarrow \sum_j c_j * x_j \\ \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} * x_j \le b_i, i \in \overline{1,n} \\ x_j \ge 0, j \in \overline{1,m} \\ b_i, c_j, a_{i,j} \in R_+^n \end{cases} \quad (3.1)$$

Задача оптимизации выпуска продукции. Предприятие занимается выпуском продукции m типов, производящейся из сырья n типов, на выпуск единицы продукции типа j требуется $a_{i,j}$ единиц сырья типа i. Запасы сырья типа i равны b_i. Выпуск единицы продукции типа j приносит прибыль c_j. Надо максимизировать прибыль от выпуска продукции. Легко видеть, что если все коэффициенты b_i строго положительны, задача является устойчиво допустимой. Если же какие-то коэффициенты b_i равны нулю, то после удаления ограничений, их содержащих, и множества переменных $\{x_j \mid \exists i, a_{i,j} > 0, b_i = 0\}$ задача становиться устойчиво допустимой.

Пример 3. $$\begin{cases} \min \leftarrow \sum_j c_{i,j,k} * x_{i,j,k} \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{t} v_k * x_{i,j,k} \le s_i, i \in \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,j,k} \ge d_{j,k}, j \in \overline{1,n}, k \in \overline{1,t} \\ x_{i,j,k} \in R_+, i \in \overline{1,n}, j \in \overline{1,n}, k \in \overline{1,t} \end{cases} \quad (3.2)$$

Задача об оптимальном транспортном плане. Есть n городов, на каждом есть склад объема s_i и магазин, нуждающийся в m типах товаров. На хранение единицы товара типа k требуется пространство v_k. Необходимо составить генеральный план перевозок $x_{i,j,k}$ из складов в магазины так, чтобы обеспечить наличие в магазине j товара типа k в количестве не менее $d_{j,k}$, и не превысить объема склада s_i. Эта задача является разрешимой при $\sum_{k=1}^{t}(\sum_{j=1}^{n} d_{j,k}) * v_k \le \sum_{i=1}^{n} s_i$, устойчиво допустимой при $\sum_{k=1}^{t}(\sum_{j=1}^{n} d_{j,k}) * v_k < \sum_{i=1}^{n} s_i$.

Пример 4. $$\begin{cases} \min \leftarrow \sum_j v_j * x_j \\ \sum_{j=1}^{n} (\sum_{s=1}^{t} d_{s,j}) * x_j \ge \sum_{s=1}^{t} p_t, t \in \overline{1,T} \\ x \in R_+^n \end{cases} \quad (3.3)$$

Задача о минимальном инвестировании. Есть n видов ценных бумаг, цена одной бумаги вида j равна v_j, а доход от нее за период времени $[t, t+1]$ равен $d_{t,j}$. Необходимо минимизировать общую цену покупаемых бумаг так, чтобы обеспечить покрытие трат p_t за периоды времени $[t, t+1]$. Эта задача всегда является устойчиво допустимой.

Естественной формой записи устойчиво допустимой ЗЛП является запись без равенств. Действительно, если в задаче есть хотя бы одно ограничение-равенство, то множество ее допустимых решений содержится в гиперплоскости, которая задается этим равенством, откуда следует, что задача не является устойчиво допустимой. Потому следует, если это возможно, формулировать ЗЛП в стандартном виде, не вводя дополнительные переменные для приведения ее к каноническому виду.

Получение гарантированных интервальных оценок.

Рассмотрим проблему поиска гарантированно субоптимального решения устойчиво допустимых задач линейной оптимизации. Для решения ЗЛП применим метод Interior Point. Методом используется возмущенная система Карош-Кунн-Такера ЗЛП в стандартной постановке

$$\begin{cases} A*x-t=b \\ A^T*y+z=c \\ X*Z=\mu*e \\ T*Y=\mu*e \\ t\in R_+^m, z\in R_+^n, x\in R_+^n, y\in R_+^m \end{cases} \quad (4),$$

последовательное решение с $\mu\to 0$ ее ньютоновских приближений позволяет решить прямую и двойственную задачу за полиномиальное время (см. [1], [2]). Теоретически, последовательные приближения лежат строго внутри МДР, но фактически они быстро прижимаются к его границе, не позволяя верифицировать их допустимость прямым счетом с направленными округлениями. Предлагается решать равномерно возмущенную задачу

$$\begin{cases} A_j*x-t_j=b_j+\varepsilon*\|A_j\| \\ (A^i)^T*y+z_i=c_i-\varepsilon*\|A^i\| \\ X*Z=\mu*e \\ T*Y=\mu*e \\ t\in R_+^m, z\in R_+^n, x\in R_+^n, y\in R_+^m \end{cases} \quad (5),$$

где $\varepsilon\to 0, \mu\to 0$. Заметим, что малое возмущение такого рода устойчиво допустимых задач дает устойчиво допустимые задачи. Такое возмущение позволит верифицировать допустимость промежуточных решений прямым счетом с направленными округлениями.

Кроме поиска гарантированного субоптимального решения (под гарантированным субоптимальным решением мы будем понимать субоптимальное решение, допустимость которого можно верифицировать на ЭВМ с помощью вычислений с направленными округлениями), представляет интерес оценка параметра субоптимальности такого решения. Из теории двойственности ясно, что гарантированной внешней интервальной оценкой (далее ГВИО) ОЗЦФ задачи линейной минимизации (максимизации) может служить любой интервал $[b^T y, c^T x]$ (соответственно, $[c^T x, b^T y]$), где x — произвольное допустимое решение прямой, а y - произвольное допустимое решение двойственной задачи. Получив такой интервал можно с легкостью оценить сверху величину параметра субоптимальности как в абсолютном, так и в относительном (если оценочный интервал не содержит нуля) смысле. В процессе работы метода, последовательно решающего возмущенные задачи с $\varepsilon\to 0$, мы будем, таким образом, получать на каждом шаге все более точные ГВИО ОЗЦФ (алгоритмы получения интервальных оценок такого рода называются последовательно гарантирующими — см. [6]).

При успешном интервальном оценивании ОЗЦФ далее можно проводить интервальное внешнее оценивание МСР (а значит - МОР), решая задачи покоординатной оптимизации

$$\begin{cases} \min\leftarrow x_i \\ c^T*x\le l_+ \\ A\ *x\le b \\ x\in R_+^n \end{cases}, \text{ и } \begin{cases} \max\leftarrow x_i \\ c^T*x\le l_+ \\ A\ *x\le b \\ x\in R_+^n \end{cases},$$

где l_+ — гарантированная верхняя оценка на ОЗЦФ.

Полученная таким образом внешняя оценка МСР будет субоптимальной с известной ГВИО на меру субоптимальности по каждой координате и по каждой границе, а значит — субоптимальной внешней оценкой МОР. Заметим, что при условии несовпадения l_+ с ОЗЦФ задачи (1о), эти задачи будут устойчиво допустимыми тогда и только тогда, когда будет устойчиво допустимой исходная задача (1о). В любом случае, можно в качестве l_+ вместо полученной гарантированной верхней оценки целевой функции задачи (1о) подставить в задачи покоординатной оптимизации увеличенное на малое $\varepsilon>0$ ее значение, гарантируя тем самым сохранение устойчивой допустимости.

Для получения интервальных внутренних оценок МСР можно использовать алгоритм улучшения внутренней интервальной оценки, начиная с гарантированно субоптимального решения (которое является точечной внутренней интервальной оценкой МСР). Имея внутреннюю интервальную оценку $X_{i-1}=[X_{i-1}^-, X_{i-1}^+]$, мы можем получить оценку $X_i = [X_{i-1}^- - \alpha_i * d_i^- * e_i, X_{i-1}^+ + \alpha_i * d_i^+ * e_i]$, где коэффициент $\alpha_i \in [0,1]$, e_i — i-тый базисный орт, а величины d_i^-, d_i^+ равны:

$$d_i^+ = \min_j \begin{cases} \left\lfloor \left\lceil (b_j - \min\limits_{x \in X_{i-1}} (a_j^T * x)) \right\rceil / a_{i,j} \right\rfloor & \textit{для отношения вида } a_j^T * x \ge b_j, \textit{где } a_{i,j} < 0 \\ \left\lfloor \left\lfloor (b_j - \max\limits_{x \in X_{i-1}} (a_j^T * x)) \right\rfloor / a_{i,j} \right\rfloor & \textit{для отношения вида } a_j^T * x \le b_j, \textit{где } a_{i,j} > 0 \\ 0, \textit{ для отношения вида } a_j^T * x = b & \\ \infty, \textit{ во всех других случаях} & \end{cases},$$

$$d_i^- = \min_j \begin{cases} \left\lfloor \left\lfloor (\min\limits_{x \in X_{i-1}} (a_j^T * x) - b_j) \right\rfloor / a_{i,j} \right\rfloor & \textit{для отношений вида } a_j^T * x \ge b_j, \textit{где } a_{i,j} > 0 \\ \left\lfloor \left\lceil (\max\limits_{x \in X_{i-1}} (a_j^T * x) - b_j) \right\rceil / a_{i,j} \right\rfloor & \textit{для отношений вида } a_j^T * x \le b_j, \textit{где } a_{i,j} < 0 \\ 0, \textit{ для отношений вида } a_j^T * x = b & \\ \infty, \textit{ во всех других случаях} & \end{cases},$$

а $\min\limits_{x \in X_{i-1}} (a_j^T * x) = \left\lfloor \sum_k \left\lfloor a_{k,j} * \begin{cases} (X_{i-1}^-)_k^-, a_{k,j} \ge 0 \\ (X_{i-1}^+)_k^+, a_{k,j} < 0 \end{cases} \right\rfloor \right\rfloor$, $\max\limits_{x \in X_{i-1}} (a_j^T * x) = \left\lceil \sum_k \left\lceil a_{k,j} * \begin{cases} (X_{i-1})_k^+, a_{k,j} \ge 0 \\ (X_{i-1})_k^-, a_{k,j} < 0 \end{cases} \right\rceil \right\rceil$.

Если последовательно по каждой координате таким образом улучшать внутреннюю оценку, полагая $\alpha_i = 1$, мы получим субмаксимальную внутреннюю интервальную оценку (если не принимать в расчет ошибки округлений, то она является максимальной). Временные затраты получения внутренней оценки равны $O(n^2 * m)$, что позволяет считать ее вычисление эффективным.

Таким образом, мы получаем численный, корректно реализуемый на ЭВМ способ построения гарантированных субоптимальных решений и гарантированных субоптимальных внешних и субмаксимальных внутренних интервальных оценок множества всех субоптимальных решений устойчиво допустимой задачи линейной оптимизации.

Интервальные данные в задачах линейной оптимизации.

Входные данные ЗЛП — это матрица ограничений, вектор правой части и вектор коэффициентов целевой функции. Рассмотрим задачу $\begin{cases} \min \leftarrow (c^T * x) \\ [A_1^-, A_1^+] * x = [b_1^-, b_1^+] \\ [A_2^-, A_2^+] * x \le [b_2^-, b_2^+] \\ [A_3^-, A_3^+] * x \ge [b_3^-, b_3^+] \\ x \in R_+^n \end{cases}$ (6.1), возникающую из задачи (1o) при интервализации матрицы ограничений и вектора правой части. Легко видеть, что в силу условия неотрицательности переменных, возникающие линейные интервальные ограничения эквивалентны линейным скалярным ограничениям:

$$\sum_j [a_{i,j}^-, a_{i,j}^+] * x_j = [b_i^-, b_i^+] \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_j a_{i,j}^- * x_j \le b_i^+ \\ \sum\limits_j a_{i,j}^+ * x_j \ge b_i^- \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\sum_j [a_{i,j}^-, a_{i,j}^+] * x_j \le [b_i^-, b_i^+] \Leftrightarrow \sum_j a_{i,j}^- * x_j \le b_i^+ \quad (6.3)$$

$$\sum_j [a_{i,j}^-, a_{i,j}^+] * x_j \ge [b_i^-, b_i^+] \Leftrightarrow \sum_j a_{i,j}^+ * x_j \ge b_i^- \quad (6.4)$$

Таким образом, ЗЛП (1о) с интервальной матрицей ограничений и вектором правой части эквивалентна обычной ЗЛП вида (1с). Если на переменные модели не накладывать условия неотрицательности, то задача с интервальными коэффициентами в ограничениях $\begin{cases} \min \leftarrow (c^T * x) \\ [A_1^-, A_1^+] * x = [b_1^-, b_1^+] \\ [A_2^-, A_2^+] * x \le [b_2^-, b_2^+] \\ [A_3^-, A_3^+] * x \ge [b_3^-, b_3^+] \\ x \in R^n \end{cases}$ (6.5) в общем случае уже не будет иметь эквивалентной ЗЛП. Действительно, в общем случае множество решений интервальной системы линейных уравнений, которое является множеством допустимых решений такой интервальной задачи, не является выпуклым, можно утверждать лишь выпуклость его пересечения с каждым из пространственных ортантов (см. [4]). Таким образом, невозможно применить к (6.5) впрямую методы линейного программирования. Одним из способов решения (6.5) может быть решение исходной задачи в каждом из ортантов, то есть решение задачи вида (6.1), и выбор среди полученных решений оптимального, однако такой подход очевидно неэффективен в силу экспоненциального роста временных затрат с увеличением числа переменных.

Интервальность коэффициентов целевой функции приводит к задаче: $\begin{cases} \min \leftarrow \sum_{i=1}^{n} [c_i^-, c_i^+] * x_i \\ A_1 * x = b_1 \\ A_2 * x \le b_2 \\ A_3 * x \ge b_3 \\ x \in R_+^n \end{cases}$ (6.6). Легко видеть, что все свойства допустимых решений и их множеств (например, выпуклость) задачи (1о) справедливы и для задачи (6.6). Тем не менее, МОР такой задачи может быть невыпуклым.

Пример 5. $\begin{cases} \min \leftarrow [-1,-1] * x + [-2,2] * y \\ x + y \le 1 \\ -x + y \le 1 \\ x - y \le 1 \\ -x - y \le 1 \end{cases}$. Множеством всех допустимых решений является множество $\{y = -x - 1, x \in [-1,0]\} \cup \{y = x + 1, x \in [-1,0]\}$, легко видеть, что оно не является выпуклым, то же касается и МСР с достаточно малым параметром субоптимальности. Следовательно, не существует задачи вида (1о), эквивалентной данной.

Экспериментальные результаты

Сравнение проводилось с демо-версией специализированного оптимизационного пакета OPL Studio, использующего решатель ILOG CPLEX. К сожалению, из-за встроенного в нее лимита на число переменных и ограничений задачи не удалось сравнить производительность систем на достаточно больших задачах. Тем не менее, результаты позволяют говорить о достаточно высокой эффективности реализованного в Solver метода Interior Point.

Задача	Число переменных	Число ограничений	OPL Studio CPLEX	Solver Interior Point Method
Trans256	256	16	0.04	0.04
Gas	300	40	0.28	0.22
Trans4096	4096	64	X	3.62
Bonds	2500	20	X	6.95

X — решения не найдено.

Кроме того, в результате работы Solver мы имеем ГВИО ОЗЦФ, гарантию допустимости полученного решения и гарантию того, что оно отличается от оптимального не более чем на ширину ГВИО ОЗЦФ.

Задача	Гарантированная интервальная оценка оптимального значения
Trans256	[410.64898,410.64915]
Gas	[-4634621.786,-4634621.751]
Trans4096	[32367.361, 32367.367]
Bonds	[15365.3033,15365.3038]

Задачи Trans256, Trans4096 — это задачи (3.2) с данными разных объемов, задача Gas — это задача о планировании производства (3.1), задача Bonds — задача о минимальном инвестировании (3.3).

Список литературы

1. J. Gondzio, T.Terlaky. “A Computational View of Interior-Point Methods for Linear Programming”, 1994.
2. E.D.Andersen, J.Gondzio, C.Meszaros, Xiaojie Xu. “Implementation of Interior Point Method for Large Scale Linear Programming” // Interior Point Methods of Mathematical Programming”, Chapter 6. — Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996.
3. Хачиян Л. Г. “Сложность задач линейного программирования”. — М.: Знание, 1987.
4. Шарый С. П. “Интервальные алгебраические задачи и их численное решение”. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. —Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2000.
5. Кашеварова Т.П. “Применение метода недоопределенных вычислений в математическом моделировании”. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Новосибирск: ИСИ СО РАН, 1999.
6. Шокин Ю.И. Об интервальных задачах, интервальных алгоритмах и их трудоемкости // *Вычислительные технологии.* — 1996. — Т. 1, № 1.