ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ
МКВМ-2004 РАБОЧИЕ СОВЕЩАНИЯ С. 179–183

Специальные приближения множеств решений

Б.С. Добронец*

Аннотация. В статье рассматриваются специальные приближения множеств решений задач с интервальными входными данными. Приближения основаны на объединении геометрических тел, определяемых вектором параметров. Приведены примеры приближения множества решений для системы линейных алгебраических уравнений и задачи Коши для системы ОДУ.

1. Введение

Интервальная математика традиционно использует для приближения множеств решений интервальные вектора или n-мерные параллелепипеды, со сторонами параллельными координатным осям.

Интервальные вектора часто дают лишь весьма приближенное представление о виде множества решения. Невозможность представить достаточно точно множество решений снижает эффективность применения интервальных методов и приводит к таким эффектам как "эффект упаковывания" (wrapping effect). Это приводит к неоправданно сильному расширению трубки решений задач Коши для систем ОДУ. В настоящее время существует постоянная потребность в повышении точности приближений множеств решений.

Стремление избежать подобных эффектов приводит к использованию алгоритмов, которые для приближения множеств решений применяют различные геометрические тела: шары, эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и т. п.

В работе [2] рассмотрены приближения областями, зависящими от параметров, в частности – параллелепипедами. В [3] специальные приближения представлены как объединения геометрических объектов – шаров и параллелепипедов. В работе [4] рассмотрены приближения множеств решений систем ОДУ эллипсоидами.

В данной работе продолжаются исследования по построению специальных приближений для множеств решений задач с интервальными входными данными. Множества решений аппроксимируются объединением геометрических тел вдоль некоторой гладкой кривой. Такие приближения, с одной стороны, дают достаточную простоту представления и с другой – обладают достаточной гибкостью.

Рассмотрим примеры геометрических тел Ω из R^n. Шары – наиболее простые из геометрических тел, они характеризуются своим центром $x_0 \in R^n$ и радиусом R, эллипсоиды задаются так же своим центром и симметричной, положительно определенной матрицей A, параллелепипеды однозначно определяются одной из вершин x_0 и ребрами x_i. Таким образом, для задания шара

*КГТУ, Красноярск.

необходим $n+1$ параметр, для эллипсоида – $n+n(n+1)/2$ параметр и соответственно для параллелепипеда – $n(n+1)$ параметр. Далее x_0 будем называть *точкой привязки* геометрического тела.

Таким образом, будем считать, что положение геометрического тела определяется точкой привязки и некоторым вектором параметров $p \in R^m$.

Рассмотрим один из возможных вариантов приближения множеств решений из R^n в виде объединения $\Omega(z,r)$ из R^{n-1}

$$\mathcal{X} \subseteq \bigcup_{\eta} \Omega\big(z(\eta), r(\eta)\big).$$

Здесь $z \in R^n$ – гладкая параметрическая кривая, значения $z(\eta)$ определяют точки привязки. Для однозначного задания будем считать, что $\Omega(z(\eta), r(\eta))$ лежит в гиперплоскости Γ: $(x-z(\eta), \nu(\eta))$, в частности можно положить $\nu(\eta) = z'(\eta)$.

Функции z, r, в зависимости от представления, характеризуются своими наборами параметров. Таким образом, определим множество $\Omega(p)$:

$$\Omega(p) = \bigcup_{\eta} \Omega\big(z(\eta), r(\eta)\big),$$

где $p \in R^m$ – вектор параметров.

2. Построение приближений

В каждом конкретном случае выбор геометрического тала $\Omega(z,r)$ и кривой z определяется геометрическим видом $\mathcal{X}$, свойствами аппроксимации и простотой использования.

Таким образом, на первом шаге зададим параметрическую кривую $z(\eta) \in R^n$, $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$. Зафиксируем η и построим плоскость Γ: $(x - z(\eta), \nu)$, где $\nu = x_0'(\eta)$ — вектор касательный к кривой z. Далее на плоскости Γ зададим систему координат с началом в точке $z(\eta)$ и базисными векторами $e_i(\eta)$. Пусть $\mathcal{X}_\eta = \mathcal{X} \cap \Gamma$ и определим тело $\Omega(z,r)$ с параметрами r, такое что $\Omega(z,r) \supseteq \mathcal{X}_\eta$.

Безусловно, это самая важная часть процедуры построения приближений и ее конкретная реализация зависит от исходной задачи. В частности, при приближении множеств решений систем линейных алгебраических уравнений, можно пользоваться известными свойствами этих множеств.

Рассмотрим интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, а $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$. Предположим так же, что интервальная матрица системы (1) регулярна.

Решением задачи (1) будем называть множество

$$\mathcal{X} = \{x \mid Ax = b,\ A \in \boldsymbol{A},\ b \in \boldsymbol{b}\}.$$

Множество $\mathcal{X}$ может быть описано следующим образом [1]:

$$\mathcal{X} = \{x \mid x \in R^n,\ \boldsymbol{A}x \cap \boldsymbol{b} \neq \emptyset\} \tag{2}$$

или

$$\{x \mid x \in R^n,\ 0 \in \boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b}\}.$$

Для простоты изложения, предположим, что $\mathcal{X}$ полностью содержится в одном квадранте и $\mathcal{X} \subset R^3$. В качестве геометрических тел выберем круги. Для определения радиуса круга введем на Γ полярную систему координат (r, φ). Тогда $z_1 = r\cos\varphi$, $z_2 = r\sin\varphi$ и $x = z_1e_1 + z_2e_2$. Фиксировав φ, найдем верхнюю границу $\bar{r}(\varphi)$, при котором выполнено условие (2). Далее определим $R(\eta) = \max_{[0,2\pi]} \bar{r}(\varphi)$ и $K(\eta) : |z| \leq R(\eta)$.

Таким образом, пара $(R(\eta), z(\eta))$ будет определять параметрическое множество $\Omega(z, R) = \bigcup_\eta K(\eta) \supseteq \mathcal{X}$.

Несколько иначе выглядит построение множества $\Omega(z, r)$ для для задачи Коши для систем ОДУ.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} &x_i' = f_i(t, x, k), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in (0, l), \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_0 \in R^n$ – вектор начальных значений, $x_0 \in \boldsymbol{x}_0$; $k \in R^m$ – вектор параметров, $k \in \boldsymbol{k}$; $x \in R^n$ – вектор неизвестных.

Далее будем считать, что x есть функция t, k, x_0:

$$x = x(t, k, x_0). \tag{4}$$

Обозначим через $\mathcal{X}(t)$ множество решений системы ОДУ

$$\mathcal{X}(t) = \{x(t, k, x_0) \mid x_0 \in \boldsymbol{x}_0,\ k \in \boldsymbol{k}\}.$$

Рассмотрим задачу оценки в фазовом пространстве множества решений $\mathcal{X}(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений множеством $\Omega(p(t))$.

Будем считать, что начальное состояние системы (3) можно представить $\boldsymbol{x}(0) \subseteq \Omega(p(0))$. Предположим, что в некоторый момент времени t нам известно множество $\Omega(p(t))$, содержащее множество решений $\mathcal{X}(t)$ исходной системы ОДУ. Рассмотрим задачу построения множества $\Omega(p(t + \tau))$:

$$\Omega(p(t + \tau)) \supseteq \mathcal{X}(t + \tau).$$

Построим приближенно $\mathcal{X}^\tau(t + \tau)$, используя методы численного интегрирования, например, метод Эйлера:

$$\mathcal{X}^\tau(t+\tau, \boldsymbol{k}, x_0) \supseteq \{x^\tau(t+\tau) \mid x^\tau(t+\tau) = x(t) + \tau f(t, x(t), k),\ x(t) \in \Omega(p(t)),\ k \in \boldsymbol{k}\},$$

Ясно, что в данном случае граница $\mathcal{X}^\tau(t+\tau)$ отличается от истинной на величину, не превышающую $O(\tau^2)$. Таким образом, зная $\Omega(p(t))$ в некоторый момент времени t, можно построить $\Omega(p(t + \tau))$.

Существует известный произвол при построении таких множеств, обычно их строят таким образом, чтобы они имели наименьший объем.

Если $\forall\, t, \tau > 0$ известны векторы $p(t)$ и $p(t + \tau)$, описывающие поведение $\Omega(p(t)$, то можно предельным переходом построить систему ОДУ, описывающую поведение p:

$$p_i'(t) = \lim_{\tau\to 0}(p_i(t+\tau) - p_i(t))/\tau = g(t,p).$$

Таким образом,

$$p' = g(t,p), \qquad p(0) = p_0. \tag{5}$$

3. Примеры

Пример 1. Пусть необходимо решить систему интервальных линейных алгебраических уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,2] \\ 0 \\ [0,2] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Как нетрудно убедиться, минимальный интервальный вектор, содержащий множество ее решений – $\boldsymbol{x} = ([0,2],[0,2],[0,2])^T$.

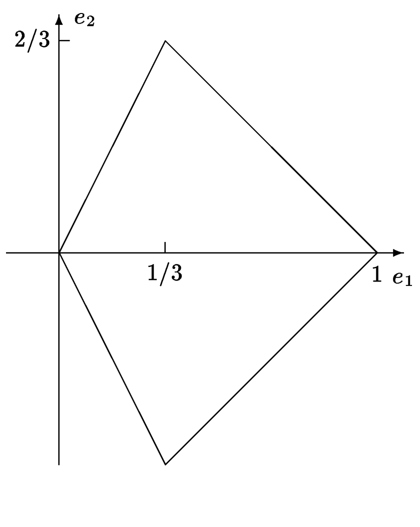
Множество решений данной системы можно описать следующим образом. Определим параметрическую кривую z:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t, \qquad t \in [0,1].$$

Круги в нашем случае вырождаются в отрезки, точка привязки – середина отрезка. Радиусы определяются следующим образом:

$$R(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1/3], \\ -t+1, & t \in [1/3,1]. \end{cases}$$

Множество решений системы (6) лежит в плоскости векторов $e_1 = (2,2,2)$, $e_2 = (-1,0,1)$ и может быть представлено в следующем виде:



Пример 2. Рассмотрим в качестве еще одного примера линейную систему ОДУ с интервальным параметром $\boldsymbol{k}$:

$$x_1' = kx_2, \quad x_2' = -kx_1, \qquad k \in \boldsymbol{k} = [1, 2],$$
$$x(0) = x_0 \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon].$$

Для построения множества $\Omega(z, r)$ перейдем в полярную систему координат. В качестве параметрической кривой z выберем $r = \mathrm{const}$, $\varphi \in [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}]$, геометрические тела – отрезки перпендикулярные z, точки привязки – их середины. Представим

$$\Omega\big(\varphi(0), r(0)\big) = [\,\underline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_0] \times [\underline{r}_0, \overline{r}_0\,].$$

Система ОДУ для R, r, $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ выглядит следующим образом:

$$R' = 0, \qquad r' = 0, \qquad \underline{\varphi}' = \underline{k}, \qquad \overline{\varphi}' = \overline{k},$$

с начальными данными

$$R(0) = (\overline{r}_0 - \underline{r}_0)/2, \qquad r(0) = (\underline{r}_0 + \overline{r}_0)/2,$$
$$\underline{\varphi}(0) = \underline{\varphi}_0, \qquad \overline{\varphi}(0) = \overline{\varphi}_0.$$

Таким образом, хотя полученное представление множества решений отличается от оптимального, эффект упаковывания полностью отсутствует.

Список литературы

[1] Beeck H. Über die struktur und abschätzungen der lösungsmenge von linearen gleichungssystemen mit intervallkoeffizienten // Computing. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.

[2] Dobronets B.S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // Interval Computations. – 1992. – Vol. 1, № 3. – P. 6–19.

[3] Добронец Б.С., Рощина С.Л. Специальные приближения множеств решений систем ОДУ с интервальными параметрами // Вопросы математического анализа. – Красноярск: Изд. КГТУ, 2002. – Вып. 5. – С. 12–17.

[4] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320 с.