

Необходимые и достаточные условия невыврожденности интервальных матриц

В.И. Ерохин*

Аннотация. Рассмотрены необходимые и достаточные условия невырожденности интервальных матриц с невырожденной центральной матрицей и одноранговой матрицей радиуса

Введение

Пусть

$$A(A_c, \Delta_A) \triangleq [A_c - \Delta_A, A_c + \Delta_A] \quad - \quad (1)$$

интервальная матрица такая, что $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{rank } A_c = n$, $\Delta_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{rank } \Delta_A = 1$. Заметим, что последнее условие эквивалентно условию

$$\Delta_A = \varepsilon \cdot uv^T, \quad (2)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \geq 0$ — некоторые векторы.

В дальнейшем окажется важным выполнение условий

$$\|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1, \quad (3)$$

$$u, v > 0. \quad (4)$$

Таким образом, основным объектом исследования в настоящей работе является интервальные матрицы, удовлетворяющие условиям (1)–(4). Заметим, условиям (1)–(4) удовлетворяют и интервальные матрицы специального (достаточно простого) вида

$$A(A_c, \varepsilon) \triangleq [A_c - \varepsilon E, A_c + \varepsilon E], \quad (5)$$

где $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — центральная матрица, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица, все элементы которой — единицы. Действительно, пусть все компоненты векторов u и v — единицы. Очевидно, что при этом условия (3), (4) выполняются и, в то же время, $uv^T = E$.

Как известно (см., напр., [6]), задача проверки невырожденности интервальной матрицы общего вида является NP-трудной. В работе [8] было показано, что проверка невырожденности интервальной матрицы вида (5) для произвольного рационального $\varepsilon > 0$ и некоторой симметричной положительно определенной матрицы с неотрицательными рациональными элементами A_c также является NP-трудной. В связи с этим становится актуальной проблема получения некоторых относительно простых и практичных в вычислительном

*Борисоглебский государственный педагогический институт.

плане критериев (“verifiable conditions”), способных выполнять роль достаточных условий невырожденности интервальных матриц. Одной из последних серьезных работ, посвященных указанной теме, является, по-видимому, [7]. В то же время, автору настоящей работы удалось, опираясь на некоторые полезные свойства обобщенных матричных норм и технику матричной коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений, рассмотренные в работе [1], получить некоторые новые результаты из области критериев невырожденности интервальных матриц как общего вида, так и вида (5) [2]. В частности, для интервальных матриц вида (5) были получены новые необходимые и достаточные условия невырожденности. В настоящей работе указанный результат обобщается на интервальные матрицы вида (1)–(4).

1. “Инструментарий”

Определим матричную норму $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ соотношением [4]:

$$\|A\|_{\varphi,\psi} \triangleq \max_{x \neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}, \quad (6)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ – произвольные векторные нормы (не обязательно нормы Гельдера) соответственно в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и соотношение между m и n произвольное. Заметим, что в общем случае норма $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ удовлетворяет только аксиомам векторных норм (т. е., не является мультипликативной).

Определим векторную норму $\varphi^*(\cdot)$, двойственную к заданной векторной норме $\varphi(\cdot)$ относительно скалярного произведения [4] как:

$$\varphi^*(y) \triangleq \max_{x \neq 0} \frac{|y^T x|}{\varphi(x)}, \quad (7)$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$ – некоторые векторы.

Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ будем называть двойственным к ненулевому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$, если выполняется условие [4]:

$$\varphi^*(y) \cdot \varphi(x) = y^T x = 1. \quad (8)$$

Следует заметить, что объекты, задаваемые формулами (6)–(8), действительно определены корректно и всегда существуют, а использование “max” вместо “sup” оправдано, поскольку соответствующие верхние грани всегда достигаются [4].

Теперь обратимся к приведенной в работе [1] лемме, обобщающей полученное А. Н. Тихоновым [3] минимальное по евклидовой норме решение системы линейных уравнений $Ax = b$ относительно неизвестной матрицы A на случай произвольной нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$:

Лемма 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ – произвольные векторы, $x \neq 0$. Тогда система уравнений $Ax = b$ разрешима относительно A и при этом существует решение $\hat{A}$ из класса одноранговых матриц размера $m \times n$, минимальное по норме $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$, которое дается формулой

$$\hat{A} = by^T, \quad (9)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор, двойственный вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом

$$\|\hat{A}\|_{\varphi, \psi} = \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}. \quad (10)$$

Предположим теперь, что некоторая матрица $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является невырожденной, что эквивалентно отсутствию нетривиальных решений соответствующей однородной системы линейных алгебраических уравнений. Зафиксируем некоторый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, и рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$(A_c + H)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Hx = -A_c x, \quad (11)$$

где $H = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – некоторая матрица.

В силу леммы 1 для любого вектора $x \neq 0$ система (11) разрешима относительно матрицы H , и поэтому, в свою очередь, матрица $A_c + H$ оказывается вырожденной. При этом минимальная по $\|\cdot\|_{\varphi, \psi}$ норме матрица $\hat{H}$ при фиксированном ненулевом векторе x имеет вид

$$\hat{H}(x) = -A_c xy^T,$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор, двойственный вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом

$$\|\hat{H}(x)\|_{\varphi, \psi} = \frac{\psi(A_c x)}{\varphi(x)} \triangleq \Phi(x).$$

Несложно показать [2], что

$$\inf_{x \neq 0} \Phi(x) = \|A_c^{-1}\|_{\psi, \varphi}^{-1}$$

и достигается для любой квадратной невырожденной матрицы A_c .

Более того, пусть $\mathfrak{A}(A_c, H)$ – множество всех вырожденных матриц вида $A_c + H$, где $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица. Справедлива следующая

Теорема 1 [2].

$$\min_{\mathfrak{A}(A_c, H) \neq \emptyset} \|H\|_{\varphi, \psi} = \|A_c^{-1}\|_{\psi, \varphi}^{-1}. \quad (12)$$

При этом существуют такие ненулевые векторы $u, x, y \in \mathbb{R}^n$, где y – вектор, двойственный вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$, что

$$\begin{aligned} x &= A_c^{-1}u, & H &= -uy^T, \\ (A_c + H) &\in \mathfrak{A}(A_c), & (A_c + H)x &\equiv 0, \\ \|H\|_{\varphi, \psi} &= \frac{\psi(u)}{\varphi(A_c^{-1}u)} = \|A_c^{-1}\|_{\psi, \varphi}^{-1}. \end{aligned}$$

Следствие [2]. Пусть матрица A_c – невырождена и

$$\|\Delta_A\|_{\varphi, \psi} < \|A_c^{-1}\|_{\psi, \varphi}^{-1}. \quad (13)$$

Тогда интервальная матрица $\mathbf{A}$ является невырожденной.

Конкретный вид условия (13) зависит от вида используемых векторных норм $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, которые в общем случае не обязаны быть нормами Гельдера. Но даже при использовании только гельдеровских векторных норм класс $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ норм оказывается достаточно представительным. К нему, например, принадлежат такие известные и широко употребляемые на практике нормы (см., напр., [4]), как

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_1} = \|A\|_{\ell_{\infty}} = \max_{ij} |a_{ij}|, \quad (14)$$

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad (15)$$

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2 = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(A^T A), \quad (16)$$

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \|A\|_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad (17)$$

Очевидно, что при исследовании интервальных матриц вида (5) (с интервалами равной величины) наиболее полезной оказывается $\|\cdot\|_{1,\infty}$ норма. Ее использование позволяет получить [1] относительно простой и достаточно практичный критерий невырожденности, имеющий вид необходимого и достаточного условия.

Теорема 2 [2]. *Для того, чтобы интервальная матрица $A(A_c, \varepsilon)$ с невырожденной центральной матрицей $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varepsilon < \|A_c^{-1}\|_{\infty,1}^{-1}. \quad (18)$$

2. Необходимые и достаточные условия невырожденности интервальной матрицы с одноранговой матрицей радиуса

Приведем теперь новый, ранее не публиковавшийся результат, являющийся обобщением рассмотренной выше теоремы 2 на случай интервальной матрицы с невырожденной центральной матрицей и одноранговой матрицей радиуса.

Пусть

$$\varepsilon^* \triangleq \|\text{diag}(v) \cdot A_c^{-1} \cdot \text{diag}(u)\|_{\infty,1}^{-1}. \quad (19)$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Для того, чтобы интервальная матрица $A(A_c, \Delta_A)$ с невырожденной центральной матрицей $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и матрицей радиуса $\Delta_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющей условиям (2)–(4), была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\varepsilon < \varepsilon^*$.*

Доказательство.

Достаточность. Пусть

$$\varphi(x) \triangleq \|\text{diag}(v) \cdot x\|_1, \quad \psi(x) \triangleq \|\text{diag}^{-1}(u) \cdot x\|_\infty. \quad (20)$$

Легко показать (см., напр., [4]), что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются векторными нормами. При этом функция

$$\Psi(H) \triangleq \|\text{diag}^{-1}(u) \cdot H \cdot \text{diag}^{-1}(v)\|_{1,\infty} \quad (21)$$

является $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ нормой, т. е., $\Psi(H) = \|H\|_{\varphi,\psi}$. В силу теоремы 1 и формул (20), (21),

$$\min_{\mathfrak{A}(A_c, H) \neq \emptyset} \|H\|_{\varphi,\psi} = \|A_c^{-1}\|_{\psi,\varphi}^{-1} = \|\text{diag}(v) \cdot A_c^{-1} \cdot \text{diag}(u)\|_{\infty,1}^{-1} = \varepsilon^*. \quad (22)$$

В то же время, в силу формул (2), (20), (21)

$$\|\Delta_A\|_{\varphi,\psi} = \varepsilon \cdot \|\text{diag}^{-1}(u) \cdot uv^T \cdot \text{diag}^{-1}(v)\|_{1,\infty} = \varepsilon \cdot \|E\|_{1,\infty} = \varepsilon.$$

Для завершения обоснования достаточности сопоставляем формулы (18), (22) и опираемся на следствие теоремы 1.

Необходимость. Пусть интервальная матрица $\mathbf{A}(A_c, \Delta_A)$ невырождена, но при этом $\varepsilon \geq \varepsilon^*$. В соответствии с теоремой 1 можно построить матрицу H такую, что матрица $(A_c + H)$ является вырожденной, и, в то же время,

$$\|H\|_{\varphi,\psi} = \|\text{diag}^{-1}(u) \cdot H \cdot \text{diag}^{-1}(v)\|_{1,\infty} = \max_{i,j} \left| \frac{h_{ij}}{u_i \cdot v_j} \right| = \varepsilon^*. \quad (23)$$

“Сняв” символ “max” в цепочке равенств (23), ее можно продолжить как цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^* \cdot u_i \cdot v_j &\leq h_{ij} \leq \varepsilon^* \cdot u_i \cdot v_j \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon^* \cdot uv^T \leq H \leq \varepsilon^* \cdot uv^T \quad \Leftrightarrow \\ A_c - \varepsilon^* \cdot uv^T &\leq A_c + H \leq A_c + \varepsilon^* \cdot uv^T \quad \Rightarrow \\ A_c - \varepsilon \cdot uv^T &\leq A_c + H \leq A_c + \varepsilon \cdot uv^T \quad \Leftrightarrow \\ (A_c + H) &\in \mathbf{A}(A_c, \Delta_A) - \text{противоречие.} \quad \square \end{aligned}$$

3. Обсуждение результатов

Попробуем вначале разобраться, насколько практичными (“verifiable”) могут оказаться результаты теоремы 3. Мы будем оценивать два показателя: трудоемкость вычисления параметра ε^* и чувствительность результатов этих вычислений к погрешностям в элементах векторов u, v и матрицы A_c . При этом, как очевидно, трудоемкость вычисления ε^* есть не что иное как трудоемкость проверки необходимых и достаточных условий невырожденности интервальной матрицы вида (1)–(4), а погрешность в вычислении ε^* – это погрешность указанной проверки.

Заметим, что явная формула, связывающая значение $\|\cdot\|_{\infty,1}$ нормы произвольной матрицы со значениями ее элементов, неизвестна. Если же для вычисления $\|\cdot\|_{\infty,1}$ нормы непосредственно использовать определение (6), получаем

задачу невыпуклого математического программирования, для которой не гарантирована полиномиальная трудоемкость. А так как вычисление $\|\cdot\|_{\infty,1}$ нормы – составная часть вычисления параметра ε в соответствии с формулой (19), то необходимо признать, что в общем случае для вычисления параметра ε^* не гарантирована полиномиальная трудоемкость. В то же время, можно указать класс интервальных матриц, для которых параметр ε^* может быть вычислен за полиномиальное время. Существенной особенностью интервальных матриц указанного выше класса является выполнение условия

$$\|A_c^{-1}\|_{\infty,1} = \|A_c^{-1}\|_{\ell_1}, \quad (24)$$

где, при условии $A_c^{-1} = (\alpha_{ij})$,

$$\|A_c^{-1}\|_{\ell_1} \triangleq \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|. \quad (25)$$

Объект, задаваемый формулой (25), является мультипликативной матричной нормой [4].

Как несложно заметить, и обращение матрицы A_c , и вычисление ее $\|\cdot\|_{\ell_1}$ нормы, и проверка выполнения неравенства (18) могут быть выполнены за полиномиальное время (при стандартных предположениях о представлении входных данных и трудоемкости арифметических операций).

Таким образом, главное, что необходимо выяснить – это условия, при которых справедливо равенство (24).

В начале покажем, что справедлива следующая

Лемма 2. *Для произвольной матрицы A имеет место неравенство*

$$\|A\|_{\infty,1} \leq \|A\|_{\ell_1}. \quad (26)$$

Доказательство. В силу (6)

$$\|A\|_{\infty,1} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_{\infty}} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_1. \quad (27)$$

Пусть все элементы матрицы A являются неотрицательными числами, а все компоненты вектора x – единицы. В этом случае $\|x\|_{\infty} = 1$, $\|Ax\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}| = \|A\|_{\ell_1}$. Аналогичный результат получается, если вектор x составлен из чисел -1 . Легко убедиться, что при любом другом выборе вектора x , отвечающего условию $\|x\|_{\infty} = 1$, справедливо неравенство $\|Ax\|_1 < \|A\|_{\ell_1}$, из чего, в силу (27) следует, что для любой матрицы с неотрицательными элементами

$$\|A\|_{\infty,1} = \|A\|_{\ell_1}. \quad (28)$$

Теперь заметим, что равенство (28) справедливо и для любой матрицы с неположительными элементами в силу аксиомы абсолютной однородности матричной нормы.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть матрица A содержит положительные, отрицательные и, возможно, нулевые элементы. Тогда она может быть

представлена в виде $A = A_+ + A_-$, где A_+ – матрица, составленная из неотрицательных элементов, A_- – матрица, составленная из неположительных элементов. Используя неравенство треугольника, определение (25) и соотношения, полученные для неотрицательных (неположительных) матриц, имеем:

$$\|A\|_{\infty,1} \leq \|A_+\|_{\infty,1} + \|A_-\|_{\infty,1} = \|A_+\|_{\ell_1} + \|A_-\|_{\ell_1} = \|A\|_{\ell_1},$$

что и требовалось доказать.

Теперь обратимся к обсуждению основного результата.

Теорема 4. *Невырожденность интервальной матрицы $\mathbf{A}(A_c, \Delta_A)$ с невырожденной матрицей A_c и одноранговой матрицей Δ_A может быть проверена за полиномиальное время, если матрица $A_c^{-1} = (\alpha_{ij})$ является такой, что*

$$\alpha_{ij} = l_i \cdot |\alpha_{ij}| \cdot r_j \Leftrightarrow A_c^{-1} = \text{diag}(l) \cdot |A_c^{-1}| \cdot \text{diag}(r), \quad (29)$$

где $l, r \in \mathbb{R}^n$ – векторы, компоненты которых принимают только значения $\{-1, 1\}$, $|A_c^{-1}|$ – матрица, составленная из абсолютных величин элементов матрицы A_c .

Доказательство. Учитывая уже проделанные выше рассуждения, для обоснования утверждения теоремы достаточно показать, что в рамках предположения (29) оказывается справедливым условие (24).

Действительно, пусть $x = r$. Легко проверить, что в этом случае $\|x\|_{\infty} = 1$. В то же время, в силу (29)

$$A_c^{-1}x = \text{diag}(l) \cdot |A_c^{-1}| \cdot 1,$$

где 1 – вектор, состоящий из единиц. Но

$$\|\text{diag}(l) \cdot |A_c^{-1}| \cdot 1\|_1 = \sum_{i,j} |\alpha_{ij}| = \|A_c^{-1}\|_{\ell_1},$$

что, с учетом леммы 2, и завершает доказательство.

Обратимся ко второму вопросу, затронутому в начале данного параграфа, – вопросу о влиянии погрешностей в коэффициентах матрицы A_c и элементах векторов u, v . Следует признать, что этот вопрос еще требует исследования. Возможно, на этом пути окажется полезной рассмотренная в работе [2] теорема, позволяющая оценивать абсолютную погрешность величины ε^* для интервальной матрицы вида (5) по возмущениям центральной матрицы:

Теорема 5. *Пусть некоторой точной невырожденной матрице $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющей условию*

$$\varepsilon^* = \|A_c^{-1}\|_{\infty,1}^{-1} = \|A_c^{-1}\|_{\ell_1}^{-1}$$

сопоставлена приближенная матрица $\tilde{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такая, что

$$\delta = \|\tilde{A}_c - A_c\|_{1,\infty} < \varepsilon^*.$$

Тогда абсолютная погрешность σ определения минимального радиуса ε^ вырожденной интервальной матрицы $\mathbf{A}(A_c, \varepsilon)$, возникающая при замене A_c на $\tilde{A}_c$, не превосходит числа δ .*

Благодарности. Автор благодарит своего научного руководителя д.ф.-м.н., профессора Горелика Виктора Александровича за ценные замечания и внимание к работе. Особую благодарность автор выражает д.ф.-м.н. Шарому Сергею Петровичу за то, что именно он обратил внимание автора на проблему исследования невырожденности интервальных матриц, а также любезно предоставил труднодоступные для автора полные тексты статей [5], [7] и большое количество других материалов по интервальным вычислениям.

Список литературы

- [1] Ерохин В.И. Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2002. – Т. 9, № 2. – С. 41–77.
- [2] Ерохин В.И. Об условиях невырожденности интервальных матриц // Электронный журнал “Исследовано в России”. – 2003. – С. 2488–2508. – <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/214.pdf>.
- [3] Тихонов А.Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 3. – С. 549–554.
- [4] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир. 1989.
- [5] Coxson G.E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix in NP-hard // Reliable Computing. – 1999. – Vol. 5, № 2. – P. 137–142.
- [6] Nemirovskii A. Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // Mathematics of Control, Signals and Systems. – 1993. – Vol. 6, № 1. – P. 99–105.
- [7] Rex G., Rohn J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1999. – Vol. 20, № 2. – P. 437–445.
- [8] Rohn J. Checking positive definiteness or stability of symmetric interval matrices is NP-hard // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1994. – Vol. 35, № 4. – P. 795–797.