МКВМ-2004 РАБОЧИЕ СОВЕЩАНИЯ С. 255–257

Приближение решения задачи Гурса интервальными многочленами Тейлора

Е.Г. Филиппенко, В.С. Зюзин*

Аннотация. Предлагается методика нахождения коэффициентов рядов Тейлора для решения уравнения в частных производных с начальными данными, примененная для нахождения интервального решения задачи Гурса.

Аналогичная методика нахождения коэффициентов рядов Тейлора разработана для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [3].

Находим многочлен до n степени и оцениваем остаточный член $(n+1)$-порядка. Используя интервальные методы получаем гарантированные, апостериорные оценки погрешности, включая погрешности вычисления приближенного решения задачи Гурса.

В статье предлагается метод приближения решения задачи Гурса многочленами Тейлора с интервальной оценкой остаточного члена.

В общем виде задача Гурса имеет вид [1, 2]:

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi_1(y), \qquad y_0 \le y \le y_0 + h_2, \\ u(x, y_0) &= \varphi_2(x), \qquad x_0 \le x \le x_0 + h_1, \end{aligned} \tag{2}$$

причем $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$.

Предполагается, что правая часть (1) имеет рациональный вид и непрерывные частные производные любого порядка, также предполагается дифференцируемость функций $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ достаточное число раз.

Решение задачи (1), (2) находим с помощью ряда Тейлора

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (u)_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j + R_{n+1}, \tag{3}$$

где остаточный член

$$R_{n+1} := \sum_{i=0}^{n+1} \big(u(x_0 + \tau_1 x, y_0 + \tau_2 y) \big)_{i,n+1-i} (x - x_0)^i (y - y_0)^{n+1-i}, \tag{4}$$

где $x_0 \le \tau_1 \le x_0 + h_1$, $y_0 \le \tau_2 \le y_0 + h_2$,

$$(u)_{ij} := \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}. \tag{5}$$

Для нахождения коэффициентов ряда Тейлора (3) выведены следующие рекуррентные формулы. Пусть $u(x, y)$ и $u_1(x, y)$ имеют частные производные любого порядка, тогда имеют место

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.

$$\begin{aligned}
&(u_x)_{ij} = (i+1)(u)_{i+1,j}, \quad (u_y)_{ij} = (j+1)(u)_{i,j+1},\\
&(u_{xy})_{ij} = (i+1)(j+1)(u)_{i+1,j+1},\\
&(u_{xx})_{ij} = (i+1)(i+2)(u)_{i+2,j}, \quad (u_{yy})_{ij} = (j+1)(j+2)(u)_{i,j+2},\\
&(u \pm u_1)_{ij} = (u)_{ij} \pm (u_1)_{ij}, \quad (uu_1)_{ij} = \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}(u)_{kl}(u_1)_{i-k,j-l}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Применение выведенных формул избавляет от необходимости последовательного дифференцирования правой части (1) (аналогичная методика нахождения коэффициентов рядов Тейлора для обыкновенных дифференциальных уравнений приведена в [3]).

Если нам известна двусторонняя оценка решения $(u \pm u_1)_{ij} = (u)_{ij} \pm (u_1)_{ij}$ задачи (1), (2) на области $[x_0, x_0 + h_1] \times [y_0, y_0 + h_2]$ ($\underline{u} \le u(x,y) \le \overline{u}$ или $u(x,y) \in [\underline{u}, \overline{u}] =: [u]$), то используя рекуррентные формулы (6) можно получить двустороннюю оценку остаточного члена (5).

В случае, когда нам неизвестна двусторонняя оценка решения $(u \pm u_1)_{ij} = (u)_{ij} \pm (u_1)_{ij}$ задачи (1), (2) в рассматриваемой области, ниже приводится вариант нахождения указанной двусторонней оценки.

Для этого аналогично как и в [2] сводим задачу (1),(2) к системе интегральных уравнений, обозначив

$$v := u_x, \qquad w := u_y,$$

$$\begin{cases}
v(x,y) = T_v v := \varphi_2'(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} f(x,y,u,v,w)\,dy,\\
w(x,y) = T_w w := \varphi_1'(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x,y,u,v,w)\,dx,\\
u(x,y) = T_u u := \varphi_2(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w\,dy.
\end{cases} \tag{7}$$

Пусть

$$z := (v, w, u), \quad Tz := (T_v v, T_w w, T_u u) \quad \Rightarrow \quad z = Tz. \tag{8}$$

Предположим, что функция $f(x,y,v,w,u)$ по переменным u, v, w удовлетворяет условию Липшица

$$\big|f(x,y,u,v,w) - f(x,y,u_0,v_0,w_0)\big| \le L\left\{\big|u-u_0\big| + \big|v-v_0\big| + \big|w-w_0\big|\right\}, \tag{9}$$

где $L > 0$ — некоторая константа.

Введем расстояние, предложенное в работе [4]

$$\rho(z,z_0) := \max_{\substack{x_0 \le x \le x_0+h_1\\ y_0 \le y \le y_0+h_2}} \left\{e^{-\alpha(x-x_0)-\beta(y-y_0)}\big[|u-u_0| + |v-v_0| + |w-w_0|\big]\right\}, \tag{10}$$

где $\alpha, \beta > 0$.

С помощью расстояния (9) показываем, что оператор T есть оператор сжатия, при соответствующем выборе $\alpha, \beta > 0$, т. е.

$$\rho(Tz, Tz_0) \le q\rho(z,z_0), \quad \text{где } 0 < q < 1.$$

Следовательно, оператор T с расстоянием (9) обеспечивает сжатое отображение на заданной области.

Приведенная ниже теорема способствует установлению двусторонней оценки решения $(u \pm u_1)_{ij} = (u)_{ij} \pm (u_1)_{ij}$ задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть интервальный вектор* $[z^0] := \big([v^0], [w^0], [u^0]\big)$ *такой, что*

$$[z^1] := T[z^0] \subseteq [z^0]. \tag{11}$$

Тогда задача (1), (2) *на области* $[x_0, x_0 + h_1] \times [y_0, y_0 + h_2]$ *имеет единственное решение* $u(x, y) \in [z^1] \subseteq [z^0]$.

Доказательство. Выше было установлено, что оператор T есть оператор сжатия и согласно (10) отображает замкнутую область $[z^0] := [\underline{z}^0, \overline{z}^0]$ в себя. Согласно следствию теоремы Банаха о неподвижной точке, оператор T имеет единственную неподвижную точку $z^* := (v^*, w^*, u^*)$ в $[z^1] := \big([v^1], [w^1], [u^1]\big)$. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Установленную оценку $[u^1] := [\underline{u}^1, \overline{u}^1]$ можно использовать для оценки остаточного члена (4), используя рекуррентные формулы (6).

Предлагаемый метод позволяет находить приближения решения $(u \pm u_1)_{ij} = (u)_{ij} \pm (u_1)_{ij}$ задачи (1), (2) в аналитическом виде, а именно, в виде многочлена Тейлора с интервальной оценкой остаточного члена. При вычислении на Pascal–XSC, получаем гарантированные двусторонние приближения точного решения с учетом погрешности округлений.

Замечания

Требование рациональности правой части уравнения (1) не ограничивает общности. В основном большой класс уравнений путем замены переменных можно свести к рациональному виду.

В формулах (6) не рассмотрен случай операции деления. Если у функции рационального вида встречается операция деления, то ее можно избежать опять путем замены переменных.

Обращаем внимание на то, что не обязательно знать точно константу Липшица – L в (8). Единственное требование, чтобы $L \neq \infty$.

Список литературы

[1] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.

[2] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954.

[3] Moore R.E. Interval analysis. – Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966.

[4] Walter W. Gewohnliche Differentialgleichungen. – Springer-Verlag, 1976.