ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ
МКВМ-2004 РАБОЧИЕ СОВЕЩАНИЯ С. 219–224

Модификация метода граничных реализаций для интервальных импульсных последовательностей смешанного типа

С.Ю. Калинкина, С.Г. Пушков*

Аннотация. Рассматривается проблема реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем с дискретным временем. Предложены методы нахождения алгебраических реализаций для полностью неотрицательных и полностью неположительных систем. Представлена модификация метода граничных реализаций для систем "смешанного" типа. Приведены иллюстрирующие численные примеры.

Введение

Одной из распространенных форм представления управляемых объектов и систем управления является представление в пространстве состояний. Задача представления информации об объекте тесно связана с проблемой реализации динамических систем. Эта проблема состоит в построении модели пространства состояний для динамической системы с известным соотношением между ее входными и выходными сигналами.

Моделируя любой динамический процесс, мы часто имеем дело с неопределенностями и неоднозначностями в данных, источники которых могут быть различны: ошибки округления, погрешности измерений из-за естественного несовершенства приборов, использование приближенных чисел и т. д. Одним из приемов, позволяющим учесть такие неопределенности, является представление параметров объекта в виде некоторых множеств. В том случае, когда эти множества представляют собой интервалы, мы имеем дело с интервальной неопределенностью.

Проблема реализации для интервальных динамических систем и виды таких систем рассматривались в [1]. А в данной работе сосредоточим внимание на нахождении алгебраических реализаций интервальных динамических систем с помощью метода граничных реализаций.

1. Проблема реализации для интервальных систем

Классическая проблема реализации состоит в определении модели в пространстве состояний для динамической системы, заданной своим поведением вход-выход. Поведение вход-выход линейной стационарной многомерной управляемой системы может быть охарактеризовано импульсной последовательностью матриц размера $p \times m$ (m – число входов, p — число выходов системы): $\{A_1, A_2, \ldots\}$.

*Бийский технологический институт Алтайского государственного технического университета.

В этом случае для заданной последовательности векторов управлений (входной последовательности) $u(0), u(1), \ldots \in U$ выходная последовательность векторов $y(0), y(1), \ldots \in Y$ определяется соотношениями

$$y(t) = \sum_{i=1}^{t} A_i u(t-i), \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Задача реализации для данного класса систем состоит в определении математической модели этой системы в пространстве состояний, которая описывается разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t), \qquad t = 0, 1, \ldots, \end{aligned}$$

где $x(t)$ и $x(t+1)$ – векторы состояний в моменты времени t и $(t+1)$ соответственно. Хорошо известно [2], что задача реализации в этом случае сводится к нахождению тройки матриц (F, G, H) таких, что

$$A_i = HF^{i-1}G, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Одной из возможных формулировок задачи реализации для интервальных систем может быть такая:

Для заданной последовательности интервальных матриц размера $p \times m$

$$\{\mathbf{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots\}, \quad \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{IR}^{p\times m}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

определить размерность n и тройку интервальных матриц $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$ таких, что выполняются интервальные уравнения

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{i-1}\boldsymbol{G}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\boldsymbol{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}$, $\boldsymbol{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$, а матричные произведения выполняются справа налево, т. е. сначала вычисляется произведение $\boldsymbol{FG}$, затем $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{FG})$ и т. д.

Под интервальной линейной стационарной динамической системой с дискретным временем (с m входами, n состояниями и p выходами) будем понимать такую систему $[\Sigma] = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$, динамическое поведение которой описывается уравнениями

$$x(t+1) = \boldsymbol{F}x(t) + \boldsymbol{G}u(t), \quad y(t) = \boldsymbol{H}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t), x(t+1) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, и понимать как семейство математических моделей

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

матрицы (F, G, H) которых принадлежат заданным интервальным матрицам $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$, т. е. $F \in \boldsymbol{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $G \in \boldsymbol{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}$, $H \in \boldsymbol{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$.

Другие возможные определения интервальных динамических систем можно найти в [1].

Указанную выше задачу мы далее будем называть *задачей алгебраической реализации*, а тройку интервальных матриц $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$ будем называть *алгебраической интервальной реализацией.*

2. Граничные реализации

С импульсной последовательностью интервальных матриц можно связать две обычные (вещественные) импульсные последовательности, определяемые верхними и нижними границами интервальных матриц.

Для последовательности интервальных матриц

$$\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots\} = \big\{[\underline{A}_1, \overline{A}_1], [\underline{A}_2, \overline{A}_2], \ldots\big\} \tag{1}$$

реализации последовательности $\{\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots\}$ будем называть нижними граничными реализациями последовательности (1), а реализации последовательности $\{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots\}$ будем называть верхними граничными реализациями последовательности (1).

Для полностью неотрицательных интервальных систем метод граничных реализаций опирается на следующие утверждения.

Предложение 1. *Если для нижней и верхней граничных реализаций одинаковой размерности* $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ *и* $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ *некоторой последовательности интервальных матриц выполняется*

1) $\underline{F}$, $\underline{G}$, $\underline{H}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$ *– неотрицательные;*
2) $\underline{F} \le \overline{F}$, $\underline{G} \le \overline{G}$, $\underline{H} \le \overline{H}$, *то интервальная система* $([\underline{F}, \overline{F}], [\underline{G}, \overline{G}], [\underline{H}, \overline{H}])$ *является интервальной точной (алгебраической) реализацией этой последовательности.*

Предложение 2. *Если для граничных реализаций одинаковой размерности* $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ *и* $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ *некоторой последовательности интервальных матриц найдутся такие матрицы* T_1 *и* T_2*, что выполняются неравенства*

$$\hat{\underline{F}} \le \hat{\overline{F}}, \hat{\underline{G}} \le \hat{\overline{G}}, \hat{\underline{H}} \le \hat{\overline{H}},$$

где

$$\hat{\underline{F}} = T_1 \underline{F} T_1^{-1}, \hat{\underline{G}} = T_1 \underline{G}, \hat{\underline{H}} = \underline{H} T_1^{-1}, \tag{2}$$

$$\hat{\overline{F}} = T_2 \overline{F} T_2^{-1}, \hat{\overline{G}} = T_2 \overline{G}, \hat{\overline{H}} = \overline{H} T_2^{-1}, \tag{3}$$

$\hat{\underline{F}}$, $\hat{\underline{G}}$, $\hat{\underline{H}}$, $\hat{\overline{F}}$, $\hat{\overline{G}}$, $\hat{\overline{H}}$ *– неотрицательные, то интервальная система*

$$\big([\hat{\underline{F}}, \hat{\overline{F}}], [\hat{\underline{G}}, \hat{\overline{G}}], [\hat{\underline{H}}, \hat{\overline{H}}]\big)$$

является интервальной алгебраической реализацией этой последовательности.

Таким образом, решение задачи реализации для интервальных полностью неотрицательных систем может быть осуществлено с помощью следующего алгоритма:

Алгоритм 1.

1. Находим нижнюю и верхнюю граничные реализации одинаковой размерности для заданной импульсной последовательности интервальных матриц.
2. Если найденные граничные реализации удовлетворяют условиям предложения 1, то соответствующая интервальная реализация и будет искомой, иначе
3. В соответствии с предложением 3, с помощью преобразований подобия (2), (3) попытаемся найти эквивалентные (с точностью до изоморфизма) граничные реализации, для которых условия предложения 1 выполняются.

Заметим, что при выполнении шага 1 данного алгоритма для вычисления граничных реализаций могут применяться, например, алгоритм Б.Л. Хо [2] или другие методы вычисления конечномерных реализаций [3, 4].

Пример 1. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_1 = [0, 0.21], && \boldsymbol{A}_2 = [0.684, 1.357], \\ &\boldsymbol{A}_3 = [0.599, 1.915], && \boldsymbol{A}_4 = [1.072, 3.805]. \end{aligned} \tag{4}$$

Нижняя и верхняя граничные реализации имеют вид:

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0.81 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81 \end{pmatrix}, \qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 12.2 & 1 \\ -133.1 & -11 \end{pmatrix}, \qquad \overline{G} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта пара не удовлетворяет условиям предложения 2. Применив к этим реализациям преобразования подобия

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.876 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6.462 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим пару реализаций в наблюдаемой канонической форме:

$$\hat{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.876 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.684 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.043 & 1.25 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0.21 \\ 1.357 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная нами интервальная система

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.8, 1.043] & [0.876, 1.25] \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{G}} = \begin{pmatrix} [0, 0.21] \\ [0.684, 1.357] \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{H}} = \big([1,1][0,0]\big).$$

отвечает условиям предложения 1 и является интервальной реализацией исходной последовательности матриц (4).

Для полностью неположительных интервальных импульсных последовательностей матриц можно использовать следующйи алгоритм.

Алгоритм 2.

1. Образуем симметричную относительно нуля последовательность матриц
$$\big\{[-\overline{A}_1, -\underline{A}_1], [-\overline{A}_2, -\underline{A}_2], \ldots\big\}.$$
2. Для полученной таким образом последовательности матриц (которая является полностью неотрицательной) с помощью алгоритма 1 вычисляем интервальную реализацию $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$.
3. Строим реализацию исходной полностью неположительной последовательности, в качестве которой могут быть системы $(\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$ или $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, -\boldsymbol{H})$.

3. Реализация импульсных последовательностей смешанного типа

В случае “смешанных” интервальных систем, т. е. систем, в которых присутствуют и отрицательные и положительные элементы, можно использовать следующую модификацию метода граничных реализаций.

Разложим исходную импульсную последовательность интервальных матриц (5) на неположительную и неотрицательную последовательности:
$$\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots\} = \{\boldsymbol{A}_1^-, \boldsymbol{A}_2^-, \ldots\} + \{\boldsymbol{A}_1^+, \boldsymbol{A}_2^+, \ldots\}, \tag{5}$$
где $\boldsymbol{A}_i^-$ и $\boldsymbol{A}_i^+$ $(i = 1, 2, \ldots)$ отрицательная и положительная части матрицы $\boldsymbol{A}_i$. Последовательность $\{\boldsymbol{A}_1^-, \boldsymbol{A}_2^-, \ldots\}$ (которая является полностью неположительной), будем называть отрицательной частью последовательности (5). Аналогично последовательность $\{\boldsymbol{A}_1^+, \boldsymbol{A}_2^+, \ldots\}$ (которая является полностью неотрицательной), будем называть положительной частью последовательности (5).

Имеет место следующий результат.

Предложение 3. *Если для положительной и симметричной относительно нуля отрицательной частей последовательности матриц* (5) *существуют неотрицательные интервальные алгебоаические реализации* $(\boldsymbol{F}^+, \boldsymbol{G}^+, \boldsymbol{H}^+)$ *и* $(\boldsymbol{F}^-, \boldsymbol{G}^-, \boldsymbol{H}^-)$ *соответственно, то интервальная система* $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$ *с блочными матрицами*
$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^- & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{F}^+ \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}^- \\ \boldsymbol{G}^+ \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{H}^+ \end{pmatrix}. \tag{6}$$
является интервальной алгебраической реализацией последовательности (5).

Заметим, что в соответствии с теоретико-системной терминологией система (6) является ни чем иным как параллельной композицией систем $(\boldsymbol{F}^+, \boldsymbol{G}^+, \boldsymbol{H}^+)$ и $(\boldsymbol{F}^-, \boldsymbol{G}^-, -\boldsymbol{H}^-)$.

Пример 2. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{A}_1 = [-0.44, 0.22], & \boldsymbol{A}_2 = [0.412, 1.504], \\ \boldsymbol{A}_3 = [-0.2216, 2.2528], & \boldsymbol{A}_4 = [-0.07592, 4.42156]. \end{array} \tag{7}$$

Образуем отрицательную и положительную части этой последовательности:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{A}_1^- = [-0.44, 0], & \boldsymbol{A}_2^- = [0, 0], & \boldsymbol{A}_3^- = [-0.2216, 0], & \boldsymbol{A}_4^- = [-0.07592, 0]; \\ \boldsymbol{A}_1^+ = [0, 0.22], & \boldsymbol{A}_2^+ = [0.412, 1.504], & \boldsymbol{A}_3^+ = [0, 2.2528], & \boldsymbol{A}_4^+ = [0, 4.42156]. \end{array}$$

Интервальные реализации, вычисленные с помощью алгоритмов 1 и 2, имеют вид

$$\boldsymbol{F}^- = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,1] \\ [0,0.504] & [0,0.343] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}^- = \begin{pmatrix} [0,0.44] \\ [0,0] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}^- = \begin{pmatrix} [-1,0] & [0,0] \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{F}^+ = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0,0.879] & [0,1.373] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}^+ = \begin{pmatrix} [0,0.22] \\ [0.412,1.504] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}^+ = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

Используя предложение 3, получаем искомую реализацию последовательности (7):

$$\boldsymbol{F}^- = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,1] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0.504] & [0,0.343] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,1] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0.879] & [0,1.373] \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}^- = \begin{pmatrix} [0,0.44] \\ [0,0] \\ [0,0.22] \\ [0.412,1.504] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}^- = \begin{pmatrix} [-1,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю. О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 1. – С. 75–85.

[2] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.

[3] Пушков С.Г. О вычислении конечномерной реализации // Кибернетика и системный анализ. – 1991. – № 6. – С. 107–112.

[4] Пушков С.Г. Конечномерные реализации импульсной характеристики, основанные на псевдообращении ганкелевой матрицы // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 5–11.