Ограничения метода Гаусса-Зейделя в случае комплексных интервалов

В.С. Дронов

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

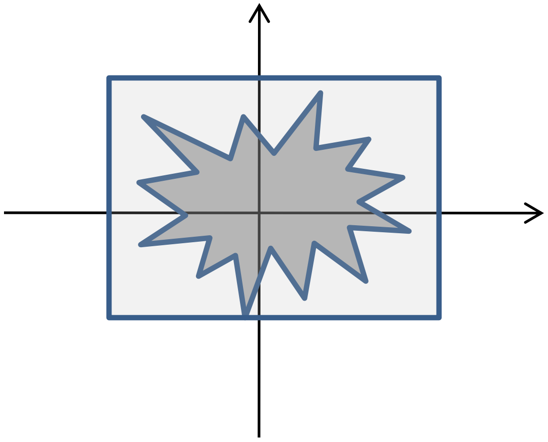
Новосибирск 2011

Ключевые объекты:

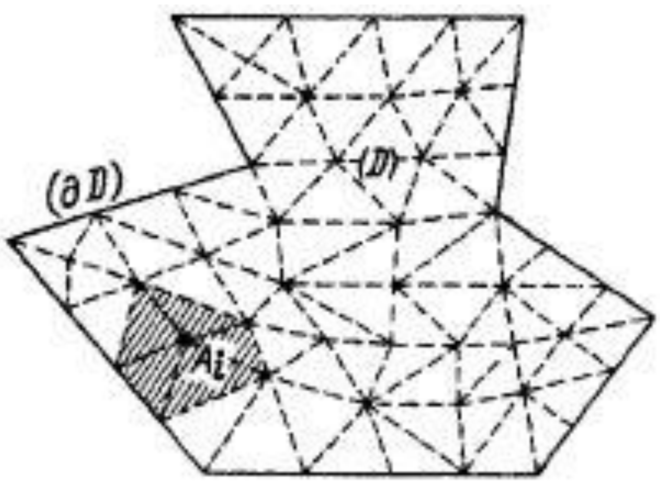
- Интервальная система линейных алгебраических уравнений: $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$
- Объединённое множество решений:

$$\boldsymbol{\Xi_{uni}} = \{x \in C^n \mid \exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}: Ax = b\}$$

- Внешняя оценка:



Примеры задач, порождающих комплексные ИСЛАУ:

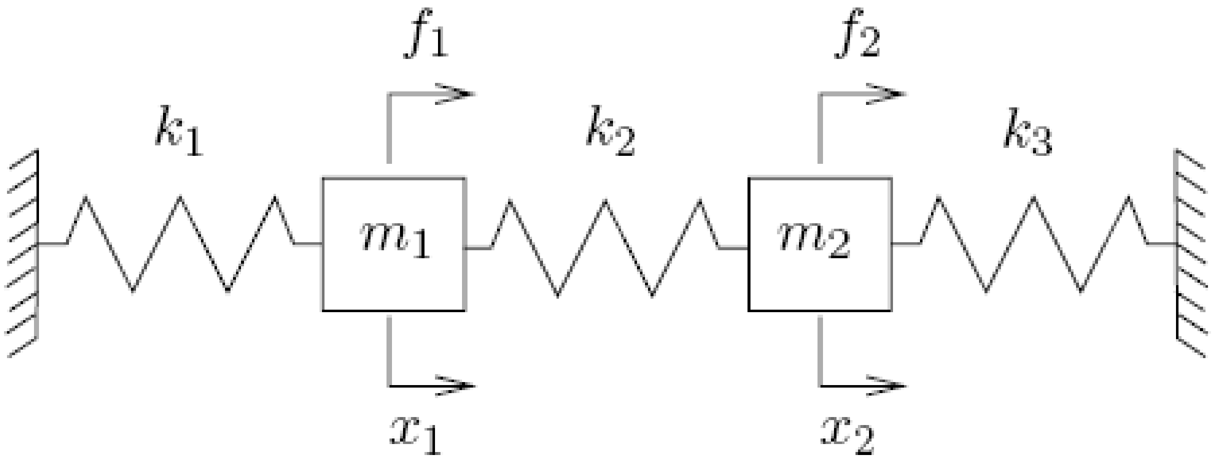


Метод конечных элементов для мезомеханики:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2EI}{9l} & \dfrac{-EI}{3l^2} \\ \dfrac{-EI}{3l^2} & \dfrac{2EI}{3l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}$$

Для задач с несколькими параметрами:

Olivier Dessombz, 2001:



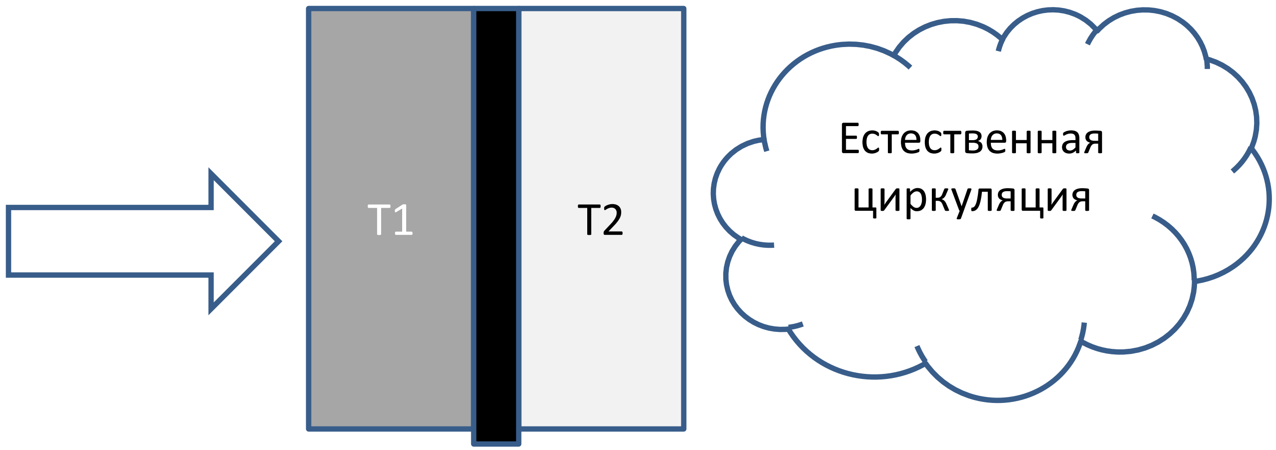
k – неизвестные, поддающиеся оценке,
f – приложенные силы, x – смещения

$$\left(\begin{bmatrix} (1+i\eta_1)k_1^0 + (1+i\eta_2)k_2^0 & -(1+i\eta_2)k_2^0 \\ -(1+i\eta_2)k_2^0 & (1+i\eta_2)k_2^0 + (1+i\eta_3)k_3^0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{e_1} \begin{bmatrix} (1+i\eta_1)k_1^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{e_2} \begin{bmatrix} (1+i\eta_2)k_2^1 & -(1+i\eta_2)k_2^1 \\ -(1+i\eta_2)k_2^1 & (1+i\eta_2)k_2^1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{e_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1+i\eta_3)k_3^1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{H_1} \\ \boldsymbol{H_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Для термодинамики:

Ibos, Candau, 2004



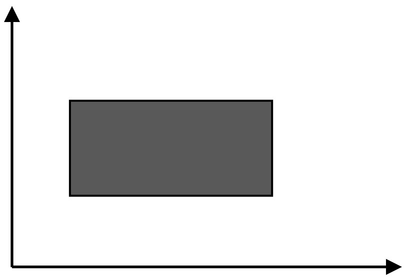
$$F(j\omega) \equiv \frac{T_2(j\omega)}{T_1(j\omega)} = \frac{1}{D_1 + D_2}$$

где

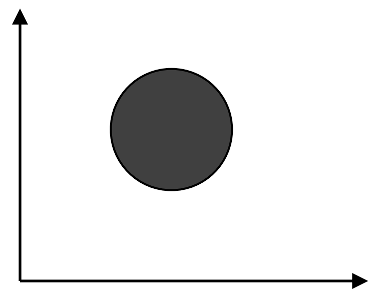
$$\begin{cases} D_1 = \cosh(\sqrt{j\omega\tau_2})\left[(1+Rh)\cosh(\sqrt{j\omega\tau_1}) + \dfrac{hR_1}{\sqrt{j\omega\tau_1}}\sinh(\sqrt{j\omega\tau_1})\right] \\ D_2 = \sinh(\sqrt{j\omega\tau_2})\left[(\dfrac{R}{R_2}\sqrt{j\omega\tau_2} + \dfrac{hR_2}{\sqrt{j\omega\tau_2}})\cosh(\sqrt{j\omega\tau_1}) + \dfrac{R_1}{R_2}\sqrt{\dfrac{\tau_2}{\tau_1}}\sinh(\sqrt{j\omega\tau_1})\right] \end{cases}$$

Здесь h – коэффициент конвекции,
R – термическое сопротивление,

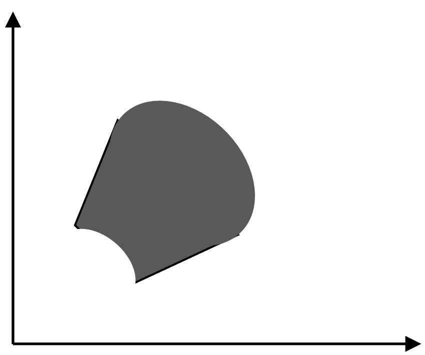
Комплексные интервалы:



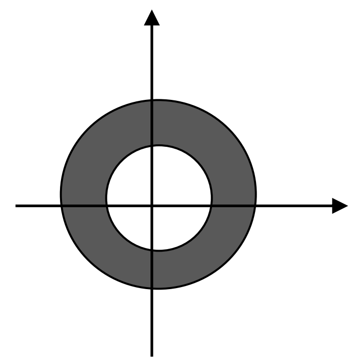
Прямоугольный:
- Нет ассоциативности умножения



Круговой:
- Требуется оболочка для пересечения



Секторный:
- Требуется оболочка при сложении



Кольцевой:
- Ограничения на центр

метод Гаусса-Зейделя

На входе: система уравнений ***A****x*=***b*,** оценка $\boldsymbol{\chi}$, точность έ.

DO WHILE (d > έ)

FOR i = 1 TO n

$$\chi_i := x_i \cap (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j) / a_{ij}$$

IF $\chi_i = \varnothing$ THEN STOP (Решений нет)

END IF

END FOR

d:= dist (x, ***x***)

x:= ***x***

END DO

Результаты для действительного случая:

- ***Теорема Барта-Нудинга***: Если матрица системы относится к классу М-матриц, то метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней оценке из любого начального приближения
- ***ТеоремаНоймайера***: Если матрица системы не относится к классу Н-матриц, то существует сколь угодно широкая начальная оценка, не улучшаемая методом Гаусса-Зейделя.

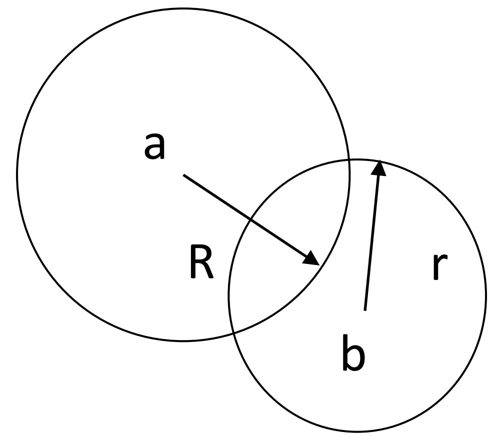
- М-матрица – матрица вида $sE-P$, $P>0$, $s>\rho(P)$
- Н-матрица – матрица, после принудительного назначения знаков элементов которой получается М-матрица

- **A** – Н-матрица, если mid(A) – Н-матрица и

$$\rho(\langle mid(A)\rangle^{-1} rad(A))<1$$

Для круговых интервалов:

Метод может быть обобщён с
 введением дополнительного шага.



$$hull(x_i \cap (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\chi_j)/a_{ij}) = (z, p), \textit{где}$$

$$p = \frac{\sqrt{(R + r + |a-b|)(R + r - |a-b|)(R - r + |a-b|)(r + |a-b| - R)}}{2|a-b|}$$

$$z = \frac{a\sqrt{r^2 - p^2} + b\sqrt{R^2 - p^2}}{\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{R^2 - p^2}}$$

Аналог теоремы Ноймайера для круговых интервалов:

К-матрица: матрица с преобладанием диагонали, то есть для центрир. на нуле U:

$$\left|\sum_{i \neq j} a_{ij} u_j\right| < |a_{ii} u_i|$$

Если матрица системы не является К-матрицей, то для ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x=0$ существует сколь угодно широкая начальная оценка, не улучшаемая методом Гаусса-Зейделя

Для системы с ненулевой правой частью имеет место схожий результат.

Мера отличия от К-матрицы – показатель **λ:**

$$\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}, mid(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0}, i = 1 \dots n$$

$$\left| \sum_{i \neq j} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{u}_j \right| \geq \lambda |\boldsymbol{a}_{ii} \boldsymbol{u}_i|$$

Теорема: при больших **λ** (см. ниже) улучшения нет

$$\lambda > \max_{i=1..n} \left\{ \frac{(|mid(\boldsymbol{a}_{ii})| + \boldsymbol{r}_{ii}^2)}{mid^2(\boldsymbol{a}_{ii}) - \boldsymbol{r}_{ii}^2} \sum_{j \neq i} |\boldsymbol{a}_{ij}| \right\}$$

Утверждение: Класс К-матриц для круговых интервалов пуст.

(Может быть показано из свойства произведения круговых интервалов $\langle ab, crR \rangle \subset \langle a, r \rangle \cdot \langle b, cR \rangle$

и матричных операций)

Таким образом:

- Для систем с нулевой правой частью в комплексных круговых интервалах не существует аналога теоремы Барта-Нудинга.
- Системы с ненулевой правой частью должны проходить проверку на свойства правой части перед применением.

Прямоугольный случай:

- Условие включения:

  вместо $\langle a, r\rangle \subset \langle b, R\rangle \Leftrightarrow |b - a| \leq R - r$

  рассматривается $\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b} \subset \boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{c}) \wedge (\boldsymbol{b} \subset \boldsymbol{d})$
- Аналог теоремы Ноймайера для нулевой правой части имеет место.
- Аналог теоремы Барта-Нудинга также не имеет места.

Таким образом:

- Метод Гаусса-Зейделя работоспособен в комплексном случае, но его полезность ограничена отсутствием аналога теоремы Барта-Нудинга.
- Перед применением метода необходимо производить проверку условий на правую часть (исходя из ограничений решения), в противном случае ширина итогового бруса не говорит ничего о ширине оцениваемого множества решений.