Интервальные итерационные методы для расчета установившихся режимов электрических систем

А.А.Ибрагимов, alim-ibragimov@mail.ru

Национальный университет Узбекистана
Механико-математический факультет

Новосибирск, Россия
30 мая – 4 июня 2011г.

Введение

Расчеты установившихся режимов являются основными при решении задач, связанных с проектированием и эксплуатацией электрических систем. Результаты этих расчетов используются

- при планировании режимов;
- в оперативном управлении ЭС;
- служат базой для выполнения оптимизации;
- анализа устойчивости и надежности.

Большинство разработанных и используемых в настоящее время методов для расчёта режимов и потерь электроэнергии (ЭЭ) в сетях всех ступеней напряжения основаны на детерминированном представлении исходной информации, т.е. используют те или иные допущения. Фактически, имеющаяся исходная информация для расчетов обладает неопределённостью (является неполной или ограниченно достоверной), в частности, характеризуются заданием интервальных значений параметров элементов и режимов работы, обусловленным их естественным разбросом, вариацией в процессе функционирования, погрешностями измерений режимов или другими факторами.

Актуальность

Применение детерминированных или вероятностно-статистических методов для расчёта режимов и потерь ЭЭ не учитывает указанные выше особенности исходной информации. Результаты расчётов, получаемые в виде детерминированных значений также не отражают возможные диапазоны изменения режимных переменных. Применение же вероятностно-статистических методов требует получения большого объёма статистических данных и построения сложных моделей, что само по себе вызывает известную неопределённость. Поэтому основным направлением совершенствования методов расчёта режимов и потерь для повышения эффективности передачи и распределения ЭЭ является максимально возможная их адаптация к существующей информационной обеспеченности расчётов в энергосистеме или в каждом электросетевом предприятии. Одним из путей такого совершенствования является использование методов интервального анализа. Интервальный подход позволяет внести математическую строгость в построение численных алгоритмов, учитывающих интервальную неопределенность значений параметров режима ЭС.

Работы по приложению аппарата интервального анализа в теории ЭЦ

Применение интервального аппарата в теории ЭЦ не являются абсолютно новой методологией, в настоящее время по этой теме имеются достаточное количество работ исследователей из разных стран мира, например

- Kolev L.V. *Interval methods for circuit analysis.* Singapore•New Jersey•London•Hong-Kong, World Scientific. 1993.
- Киншт Н.В., Кац М.А. Интервальный анализ в задачах теории электрических цепей. *Электричество*. 1999. №10. С. 45–57.
- Barboza L.V., Dimuro G.P., Reiser R.H.S. Interval Mathematics Applied to the Load Flow Analysis. Proc. of the 17-th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France, 2005.
- Wang Z., Alvarado F.L. Interval Arithmetic in Power Flow Analysis. *Transactions on Power Systems* vol. 7, n3, p. 1341-1349, 1992.
- Манусов В.В., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ режимов электрических систем. *Изв. вузов. Электромеханика* №9, 1998.

Математическая постановка задачи

Математически задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, связывающих токи и напряжения в узлах сети:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \frac{s_i}{\dot{x}_i} - a_{i0} x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь
a_{ij} — элементы комплексной матрицы собственных и взаимных проводимостей системы;
s_i — значение мощности в i-ом узле;
x_i — вектор-столбец напряжений узлов, а $\dot{x}_i$ — комплексно-сопряженное число для x_i;
a_{i0} — матрица-столбец проводимостей ветвей связи балансирующего узла с остальными узлами;
x_0 — напряжения балансирующего узла.

Основные обозначения и определения

В интервальном анализе в качестве комплексных интервалов чаще всего используются прямоугольные и круговые комплексные интервалы. Соответствующие их множества обозначается через $\mathbb{IC}_{rect}$ и $\mathbb{IC}_{circ}$. Ниже мы будем рассматривать интервалы только из $\mathbb{IC}_{rect}$ и далее, для краткости обозначим это множество просто $\mathbb{IC}$:

$$\boldsymbol{a} = \{a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C} \mid a_1 \in \boldsymbol{a}_1, a_2 \in \boldsymbol{a}_2\}$$

для вещественных интервалов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IR}$.

Определение

Пусть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IC}$. *Тогда величина* $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}_1| + |\boldsymbol{a}_2|$ *называется абсолютной величиной или модулем интервала* $\boldsymbol{a}$.

Определение

Пусть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IC}$. *То шириной интервала* $\boldsymbol{a}$ *будем называт величину* $\operatorname{wid}\boldsymbol{a} = \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_1 + \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_2$.

Основные обозначения и определения

Введем Хаусдорфова метрику на пространстве $\mathbb{IC}^n$.

Определение

Пусть $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2], \boldsymbol{b} = [b_1, b_2] \in \mathbb{IR}$. Тогда расстояние между элементами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вводится следующим образом:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Определение

Пусть $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2], \boldsymbol{y} = [y_1, y_2] \in \mathbb{IR}^n$. Тогда метрика на многомерном интервальном пространстве для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяется как:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max\{\| x_1 - y_1 \|, \| x_2 - y_2 \|\},$$

где $\| \cdot \|$ — абсолютная векторная норма на $\mathbb{R}^n$.

Определение

Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + i\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + i\boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{IC}^n$. Тогда метрика на пространстве $\mathbb{IC}^n$ для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяется соотношением:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2).$$

Интервальная постановка задачи

Теперь запишем систему (1) в интервальном виде, который соответствует режимным параметрам с интервальной неопределенностью:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i} - a_{i0} x_0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

или

$$\dot{x}_i \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j = \boldsymbol{s}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Обозначая левую часть последней системы через $F(\boldsymbol{a}, x)$, можем записать её в кратком виде как

$$F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{s} \text{ для } a \in \boldsymbol{a},\ s \in \boldsymbol{s}. \tag{4}$$

Для системы (3) объединенным множеством решений называют множество

$$\Xi(F, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}) = \{x \in \mathbb{C} | (\exists a \in \boldsymbol{a})(\exists s \in \boldsymbol{s})(F(a, x) = s)\}, \tag{5}$$

и ниже мы будем рассматривать задачу его внешнего интервального оценивания. Таким образом, нашей целю является нахождение, по-возможности, налучшего (т.е. наименьшего по включению) интервального вектора, ограничивающего множество решений $\Xi(F, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s})$.

Интервальные итерационные методы расчета

1. Метод простой итерации. Он определяется из соотношения

$$\boldsymbol{a}_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k)} = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x_i}^{(k)}} - a_{i0}x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

в котором можно считать, что $0 \notin \boldsymbol{a}_{ii}$. В противном случае, при $0 \in \boldsymbol{a}_{ii}$, путём перестановки уравнений системы можно добиться того, чтобы все диагональные элементы неособенной матрицы системы не содержали нуля. Далее расчёт производится по формуле

$$\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} := \boldsymbol{x}_i^{(k)} \cap \boldsymbol{a}_{ii}^{-1} \left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j^{(k)} + \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}} - a_{i0}x_0 \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{x}_i^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}_i^{(k+1)}$ — значения компонент интервального вектора решения $\boldsymbol{x}$, соответственно, при k-й и $(k+1)$-й итерациях.

2. Метод обратной итерации.

Итерационная формула определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k)} = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i^{(k+1)}} - a_{i0} x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

а затем расчёт производится по формуле

$$\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} := \boldsymbol{x}_i^{(k)} \cap \dot{\boldsymbol{s}}_i \left(\sum_{j=0}^{n} \dot{\boldsymbol{a}}_{ij} \dot{\boldsymbol{x}}_j^{(k)} \right)^{-1}, \quad x_0^{(k)} = x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

3. Метод обратной матрицы.

Расчетная формула определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k+1)} = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i^{(k)}} - a_{i0} x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

и, следовательно, расчёт производится по формуле

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{y}^{(k)}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 / \dot{\boldsymbol{x}}_1^{(k)} - a_{10} x_0 \\ \boldsymbol{s}_2 / \dot{\boldsymbol{x}}_2^{(k)} - a_{20} x_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}_n / \dot{\boldsymbol{x}}_n^{(k)} - a_{n0} x_0 \end{pmatrix}.$

Итерационный расчёт продолжается по формулам (7),(9),(11), пока не выполнится условие $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k-1)}) < \epsilon$, где ϵ – требуемая точность.

Исследование на сходимость

В дальнейших рассуждениях мы опираемся на понятие нормы интервальных векторов и матриц. Векторная норма будет произвольной, причём справедливо $\|\boldsymbol{x}\| = \|\dot{\boldsymbol{x}}\|$ для любого интервального вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IC}^n$. Матричная норма определяется стандартно, как подчинённая норма

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

При условиях, наложенных на векторную норму, для любой диагональной интервальной матрицы $\boldsymbol{D}$ будем иметь $\|\boldsymbol{D}\| = \max_i |\boldsymbol{d}_{ii}|$.

1. Метод простой итерации.

Обозначим $\boldsymbol{z}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}$. Тогда в силу (6), имеем

$$\boldsymbol{z}_i^{(k+1)} = \boldsymbol{x}_i^{(k+1)} - \boldsymbol{x}_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\boldsymbol{a}_{ij}}{\boldsymbol{a}_{ii}} (\boldsymbol{x}_j^{(k)} - \boldsymbol{x}_j) - \frac{\boldsymbol{s}_i}{\boldsymbol{a}_{ii}\dot{\boldsymbol{x}}_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}} (\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)} - \dot{\boldsymbol{x}}_i),$$

или в матричном виде

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}^{(k)} + \boldsymbol{D}_1^{(k)} \dot{\boldsymbol{z}}^{(k)}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{\boldsymbol{a}_{12}}{\boldsymbol{a}_{11}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{a}_{1n}}{\boldsymbol{a}_{11}} \\ \frac{\boldsymbol{a}_{21}}{\boldsymbol{a}_{22}} & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{a}_{2n}}{\boldsymbol{a}_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\boldsymbol{a}_{n1}}{\boldsymbol{a}_{nn}} & \frac{\boldsymbol{a}_{n2}}{\boldsymbol{a}_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1^{(k)} = -\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{s}_1}{\boldsymbol{a}_{11}\dot{\boldsymbol{x}}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{s}_2}{\boldsymbol{a}_{22}\dot{\boldsymbol{x}}_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{s}_n}{\boldsymbol{a}_{nn}\dot{\boldsymbol{x}}_n\dot{\boldsymbol{x}}_n^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

Другой подход

Из системы (2) записываем уравнению

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k)} + \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i^{(k)} x_i^{(k)}} x_i^{(k)} - a_{i0}x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или в матричном виде имеем итерационную формулу $x^{(k+1)} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})x^{(k)} + c_0$, где $c_0 = (a_{10}x_0, a_{20}x_0, \ldots, a_{n0}x_0)^\top$ и

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{\boldsymbol{a}_{12}}{\boldsymbol{a}_{11}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{a}_{1n}}{\boldsymbol{a}_{11}} \\ \frac{\boldsymbol{a}_{21}}{\boldsymbol{a}_{22}} & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{a}_{2n}}{\boldsymbol{a}_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\boldsymbol{a}_{n1}}{\boldsymbol{a}_{nn}} & \frac{\boldsymbol{a}_{n2}}{\boldsymbol{a}_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{s}_1}{\dot{\boldsymbol{x}}_1 \boldsymbol{x}_1^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{s}_2}{\dot{\boldsymbol{x}}_2 \boldsymbol{x}_2^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{s}_n}{\dot{\boldsymbol{x}}_n \boldsymbol{x}_n^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

Теорема сходимости

Утверждением, сходимости созданного итерационного процесса является, следующая

Теорема: *Итерационный процесс*

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}^{(k)} + c_0, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

с произвольным начальным интервальным вектором $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{IC}^n$ *сходится к единственной неподвижной точке* $\boldsymbol{x}^*$ *тогда и только тогда, когда* $\rho(|\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{D}|) < 1$.

Где $\rho(\cdot)$ *– спектральный радиус матрицы* $|\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{D}|$.

Метод простой итерации.

Используя (12) и учитывая $\|\boldsymbol{z}\| = \|\dot{\boldsymbol{z}}\|$, мы имеем

$$\|\boldsymbol{z}^{(k+1)}\| \le (\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{D}_1^{(k)}\|)\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|,$$

и метод будет сходится, если $\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{D}_1^{(k)}\| \le q < 1$ при всех k.
Для оценки нормы интервальной матрицы $\boldsymbol{B}$ пригодны любые способы, используемые при решении интервальных систем линейных алгебраических уравнений.

$$\boldsymbol{D}_1^{(k)} = \max_{1\le i\le n} \left| \frac{\boldsymbol{s}_i}{\boldsymbol{a}_{ii}\dot{\boldsymbol{x}}_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}} \right|.$$

В процессе счета её можно принимать приближенно равной

$$\boldsymbol{D}_1^{(k)} = \max_{1\le i\le n} \frac{|\boldsymbol{s}_i|}{|\boldsymbol{a}_{ii}|\,|\boldsymbol{x}_i^{(k)}|^2}.$$

2. Метод обратной итерации.

Из (8) следует

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left(\left(\frac{\boldsymbol{s}}{\dot{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}} - a_0x_0\right) - \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\dot{\boldsymbol{x}}} - a_0x_0\right)\right),$$

поэтому

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{s}}{\dot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}}(\dot{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} - \dot{\boldsymbol{x}}).$$

Теперь можем записать

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k)} = -\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k+1)}, \qquad \text{так что} \qquad \dot{\boldsymbol{z}}^{(k+1)} = -\left(\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k)},$$

где $\boldsymbol{z}^{(k)}$ и $\boldsymbol{A}$ имеют прежнее значение и

$$\boldsymbol{D}_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{s}_1}{\dot{\boldsymbol{x}}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{s}_2}{\dot{\boldsymbol{x}}_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{s}_n}{\dot{\boldsymbol{x}}_n\dot{\boldsymbol{x}}_n^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

$$\|\boldsymbol{z}^{(k+1)}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\left(\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}\right)^{-1}\|\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|.$$

3. Метод обратной матрицы.

Воспользуемся теми же обозначениями, которые применялись для исследования сходимости методов простой и обратной итерации. Имеем $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}_2^{(k)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k)}$, или $\boldsymbol{z}^{(k+1)} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}_2^{(k)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k)}$. Отсюда $\|\boldsymbol{z}^{(k+1)}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{D}_2^{(k)}\|\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|$.
В последних двух случаях мы также имеем одну фиксированную матрицу $\boldsymbol{A}$ и одну переменную матрицу $\boldsymbol{D}_2^{(k)}$ или $\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}$. Если матрицы $\boldsymbol{D}_2^{(k)}$ и $\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}$ близки друг к другу в последних методах, то сходимость одного из методов будет означать расходимость другого, и наоборот.

Спасибо за внимание