ВНУТРЕННЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВЯЗЯМИ

Людвин Д.Ю.

Институт вычислительных технологий СО РАН

Постановка задачи

Рассматриваются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1m}x_m & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2m}x_m & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{n2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{nm}x_m & = & \boldsymbol{b}_n \end{array}\right.$$

с интервалами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, или, в краткой форме,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

с интервальными $n \times m$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij}\,)$ и n-вектором $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i\,)$.

На коэффициенты матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ наложены дополнительные связи, т.е. они удовлетворяют условиям в виде равенств из множества

$$C \;=\; \left\{\, f_\nu(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, l \,\right\},$$

где f_ν – вещественные функции переменных a_{ij}, $\;i = \overline{1, n},\;\; j = \overline{1, m}$.

Интервальная система линейных уравнений со связями

есть множество

$$\{\, Ax \;=\; b \mid a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij},\ b_i \in \boldsymbol{b}_i,\ f_\nu(a_{11}, \dots, a_{nn}) = 0,\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, \nu = \overline{1,l} \,\}$$

точечных линейных систем $Ax = b$ с матрицами $A \in \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$, для которых выполняются соотношения из C.

Объединённое множество решений

интервальной линейной системы уравнений со связями – множество

$$\begin{aligned}\Xi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid & (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b}) \\ & ((\, Ax = b\,) \,\&\, (\text{справедливы условия из } C\,))\,\},\end{aligned}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, причем коэффициенты матриц A удовлетворяют ограниченям C.

Частный случай интервальной линейной системы со связями есть множество

$$\{\, A(p)x \;=\; b \mid a_{ij} = a_{ij}(p),\; b_i \in \boldsymbol{b}_i,\; p \in \boldsymbol{p},\; i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \,\}.$$

Коэффициенты матрицы системы зависят от некоторых параметров $p_1, p_2, \dots, p_k$, принимающих значения из интервалов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_k$ соответственно, т.е. $a_{ij} \;=\; a_{ij}(p)$, где $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$.

Интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ системы образована точечными матрицами $A(p)$, где $p \in \boldsymbol{p}$.

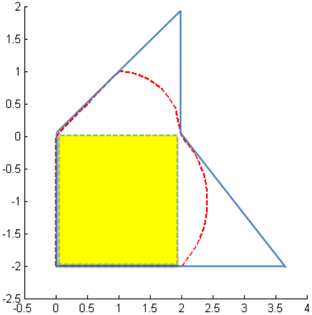
Объединённым множеством решений

интервальной системы, матрица которой зависит от параметров $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, называется множество

$$\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, p \in \boldsymbol{p})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, A(p)x = b \,) \,\},$$

образованное всеми решениями точечных систем $A(p)x = b$ с $p \in \boldsymbol{p}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Нас будет интересовать задача нахождения наибольшего интервального вектора $\boldsymbol{U} \in \mathbb{IR}^n$, содержащегося в объединенном множестве решений интервальной системы со связями, т.е. задача внутреннего интервального оценивания этого множества решений.



На рисунке изображены:

— объединенное множество решений интервальной системы без связей,

— множество решений системы со связями,

— максимальная интервальная внутренняя оценка.

Формальный подход

Нахождение внутренней оценки множества решений ИСЛАУ, как было показано С.П. Шарым и Л.В. Куприяновой, можно свести к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений.

Если правильный интервальный вектор $\boldsymbol{x}$ есть формальное решение уравнения

$$(\mathrm{dual}\boldsymbol{A})x \;=\; \boldsymbol{b},$$

то $\boldsymbol{x}$ является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Таким образом, формальный подход позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче решения уравнения в дуализациях, т. е. к задаче численного анализа.
В работах С.П. Шарого предлагается в качестве эффективного численного метода нахождения формальных решений ИСЛАУ субдифференциальный метод Ньютона.

Адаптивное дробление интервальных параметров системы

позволяет учитывать связи, наложенные на параметры системы.

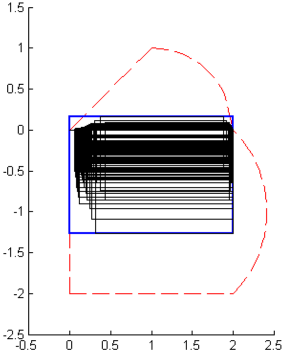
- В векторе параметров $\boldsymbol{p}$ выбираем элемент $\boldsymbol{p}_r$, имеющий наибольшую ширину. Порождаем два вектора-потомка $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$. Вектор $\boldsymbol{p}'$ получается из $\boldsymbol{p}$ заменой элемента $\boldsymbol{p}_r$ на $[\underline{\boldsymbol{p}}_r, \operatorname{mid} \boldsymbol{p}_r]$, а вектор $\boldsymbol{p}''$ — заменой $\boldsymbol{p}_r$ на $[\operatorname{mid} \boldsymbol{p}_r, \overline{\boldsymbol{p}}_r]$.
- Находим формальные решения $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ систем $\boldsymbol{A}'x = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{A}''x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A}' = \{A(p) \mid p \in \boldsymbol{p}'\}$ и $\boldsymbol{A}'' = \{A(p) \mid p \in \boldsymbol{p}''\}$. Процедуру дробления повторяем по отношению к полученным ранее векторам-потомкам.
- Организуем список $\mathcal{L}$, в котором храним формальные решения систем-потомков и их векторы параметров. Из списка $\mathcal{L}$ для дробления выбираем тот вектор $\boldsymbol{p}$, который имеет наибольшую величину $\max\limits_{1 \le i \le k} \operatorname{wid} \boldsymbol{p}_i$.
- Дробление продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута необходимая малость ширины интервальных параметров, находящихся в списке $\mathcal{L}$.

Пример 1

Интервальная симметричная система линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

где $p_1 = 1$, $p_2 \in [0, 1]$, $p_3 \in [-4, -1]$, $b_i \in [0, 2]$, $i = 1, 2$.



На рисунке изображены:

— объединенное множество решений системы,

— правильные формальные решения, полученные в результате 100 итераций алгоритма дробления параметров,

— интервальная оболочка

$\boldsymbol{x} = ([0,2];\ [-1.2632, 0.1564])^{\mathrm{T}}$

правильных формальных решений.

«Центровой» подход

Основная идея метода (С.П. Шарый,1990) состоит в выборе некоторой точки $t \in \mathbb{R}^n$, принадлежащей множеству решений интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связями, т.е. $t \in \varXi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, и построении бруса $\boldsymbol{U} = (t + \rho\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} = ([-1,1], \dots, [-1,1])^\top$ с центром в точке t, содержащемся во множестве решений $\varXi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.
Размер ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ можно вычислить по формуле:

$$\rho = \min_{1 \le i \le n} \max_{A \in \boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \right\},$$

причем максимумы по $A \in \boldsymbol{A}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ находятся с учетом заданных ограничений.

Если матрица ИСЛАУ зависит от параметров, то необходимо решить для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ задачу условной оптимизации:

максимизировать функцию $$\Phi(p) = \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}(p) t_j \right|}{\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}(p)|}$$

при условиях $$p \in \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k).$$

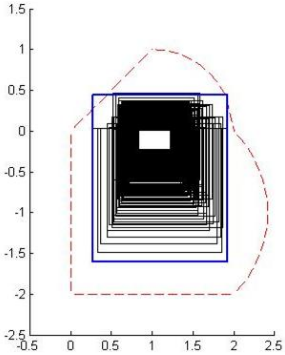
Для решения задачи условной оптимизации используем метод проекции градиента. На каждой итерации находится точка

$$p^{(m+1)} := Pr(p^{(m)} + \gamma^{(m)} \nabla \Phi(p^{(m)})), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\nabla \Phi(p)$ – градиент целевой функции, $\gamma^{(m)} \in \mathbb{R}$ – длина шага на m-ой итерации, $Pr(p^{(m)} + \gamma^{(m)} \nabla \Phi(p^{(m)}))$ – проекция точки $p^{(m)} + \gamma^{(m)} \nabla \Phi(p^{(m)})$ на множество допустимых значений, определяемое заданными ограничениями.

Пример 2

Для решения задачи внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ, описанной в Примере 1, применили алгоритм адаптивного дробления параметров, на каждом шаге которого для систем-потомков находили внутреннюю оценку «центровым» методом.



На рисунке изображены:

— объединенное множество решений системы,

— внутренние интервальные оценки, полученные в результате 100 итераций алгоритма дробления параметров с использованием «центрового» подхода,

— интервальная оболочка $x = ([0.2780, 1.9192]; \ [-1.6093, 0.4408])^{\mathrm{T}}$ полученных решений.

Практический пример

В качестве практического примера описанной выше постановки задачи внутреннего оценивания ИСЛАУ со связями рассмотрим синтез восьмизвенного рычажного механизма.
Любой рычажный механизм может быть представлен в виде механической цепи последовательно соединенных диад, т.е. простейших рычажных систем, состоящих из двух рычагов. Каждая диада описывается парой уравнений, линейных относительно скоростей точек, в которых расположены шарниры механизма.

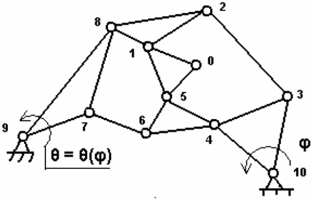


Рис. 1 Структурная схема рычажного механизма

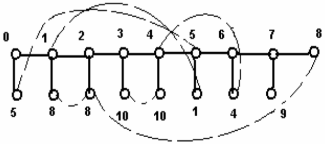


Рис. 2 Схема соединения диад в механизме

В рассматриваемом примере механизм образуется из восьми диад, поэтому система уравнений состоит из восьми пар уравнений, соответствующих диадам:

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} x_7' \\ y_7' \end{pmatrix} = J1 \cdot \begin{pmatrix} x_8' \\ y_8' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_6' \\ y_6' \end{pmatrix} = J2 \cdot \begin{pmatrix} x_7' \\ y_7' \end{pmatrix} + J3 \cdot \begin{pmatrix} x_4' \\ y_4' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_5' \\ y_5' \end{pmatrix} = J4 \cdot \begin{pmatrix} x_6' \\ y_6' \end{pmatrix} + J5 \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_4' \\ y_4' \end{pmatrix} = J6 \cdot \begin{pmatrix} x_5' \\ y_5' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix} = J7 \cdot \begin{pmatrix} x_4' \\ y_4' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = J8 \cdot \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix} + J9 \cdot \begin{pmatrix} x_8' \\ y_8' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = J10 \cdot \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} + J11 \cdot \begin{pmatrix} x_8' \\ y_8' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = J12 \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} + J13 \cdot \begin{pmatrix} x_5' \\ y_5' \end{pmatrix},
\end{cases}$$

Скорости x_0', y_0' считаются известными.

Матрицы $J1 - J13$ являются матрицами передаточных функций диад. Компоненты матриц передаточных функций, входящих в векторное уравнение, зависят от двух параметров. Например,

$$J2 = \begin{pmatrix} p_1 & -\frac{p_1(p_1+1)}{p_2} \\ p_2 & -p_1 - 1 \end{pmatrix},$$

$$J3 = \begin{pmatrix} -p_1 - 1 & \frac{p_1(p_1+1)}{p_2} \\ -p_2 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Параметры p_1, p_2 принимают значения из интервалов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ соответственно. Данные интервалы определяются исходя из условий работоспособности механизма.

Учитывая своеобразие наложенных на систему связей, можно решить отдельно каждое из восьми векторных уравнений, входящих в систему, а затем найти пересечение всех полученных при этом множеств решений.

Рассмотрим задачу внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ, описывающей одну диаду механизма.

Коэффициенты матрицы системы зависят от двух параметров p_1, p_2, принимающих значения из интервалов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ соответственно, т.е. $a_{ij} = a_{ij}(p)$, где $p = (p_1, p_2), i = 1, 2,\ j = \overline{1, m}$.
Отметим, что вектор правых частей уравнений не является интервальным.

В этом случае «центровой» подход напрямую не применим, поскольку невозможно использовать приведенную выше формулу для вычисления размера ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$.

Модификация «центрового» подхода

Найдем координаты центровой точки $t \in \mathbb{R}^n$, принадлежащей множеству $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ решений ИСЛАУ со связями, например, как решение точечной системы $A(\operatorname{mid} \boldsymbol{p})x = b$, положив параметры системы равными серединам соответствующих интервалов.

Далее решим две задачи условной максимизации функции:

$$\Phi(p) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(|d_1(p) + d_2(p)| - |d_1(p) - d_2(p)|\right),$$

где

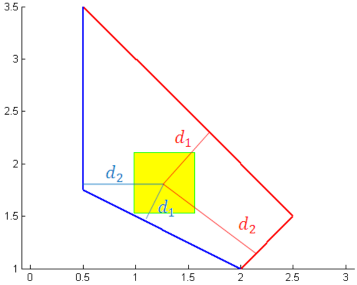
$$d_i(p) = \frac{\left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p) t_j \right|}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2(p) \right)^{\frac{1}{2}}}, \; i = 1, 2,$$

при двух вариантах условий:

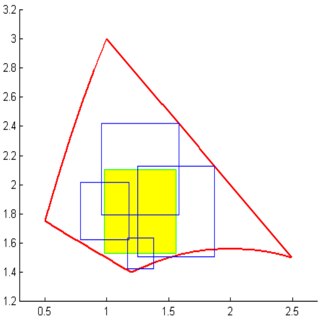
1) $d_i(p) \le 0, \; p \in \boldsymbol{p}, i = 1, 2,$
2) $d_i(p) \ge 0, \; p \in \boldsymbol{p}, i = 1, 2.$

Поясним содержательный смысл целевой функции. Величины $d_i(p)$ равны расстояниям от центровой точки до пары плоскостей, описываемых уравнениями системы. Значение функции $\Phi(p)$ равно минимуму из расстояний $d_1(p)$ и $d_2(p)$, деленному на $\sqrt{2}$.
В результате решения задач условной оптимизации получим два максимальных значения Φ_1 и Φ_2 целевой функции. В качестве размера ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ возьмем минимальное из этих двух значений, т.е.

$$\rho \ = \ \min\{\Phi_1, \Phi_2\},$$



Поскольку множество решений ИСЛАУ со связями могут быть весьма сложно устроенными, следует находить брус $\boldsymbol{U} = (t + \rho \boldsymbol{e})$ не для одного, а нескольких центров. Новые центры можно выбирать на гранях уже построенных ранее брусов. Для хранения оценок, полученных в процессе работы алгоритма, организуем список $\mathcal{L}$.



На рисунке изображены:

— множество решений системы,

— начальная интервальная внутренняя оценка,

— интервальные внутренние оценки, построенные вокруг центровых точек, принадлежащих граням начальной оценки.

Выбор нового центра t выполняем следующим образом.

Для очередного бруса из списка $\mathcal{L}$ на каждой его грани пытаемся найти точку, которая:

1) принадлежит множеству $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, т.е существует вектор $p \in \boldsymbol{p}$ такой, что $A(p)x \; = \; b$,
2) не принадлежит внутренности какой-либо интервальной оценки, находящейся в списке $\mathcal{L}$.

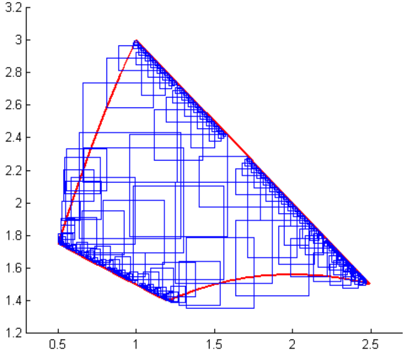
Вокруг найденных центровых точек строим внутренние оценки $\boldsymbol{U} \; = \; (t + \rho\boldsymbol{e})$ и заносим их в список $\mathcal{L}$, если размер ρ внутренних оценок $\boldsymbol{U}$ не меньше некоторой заданной величины $\varepsilon > 0$. Далее выбираем следующий по порядку брус из списка и повторяем описанную процедуру.

Пример 3

Интервальная симметричная система линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

где $p_1 = 1$, $p_2 \in [1,2]$, $p_3 \in [-1,0]$, $b_1 = 4$, $b_2 = 1$.



На рисунке изображены:

— множество решений системы,

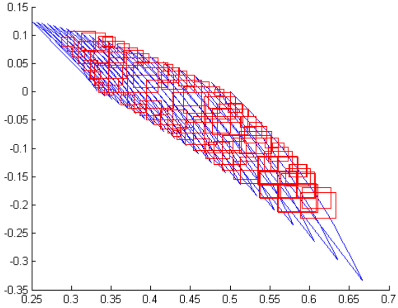
— интервальные внутренние оценки, полученные на основе предложенной модификации «центрового» подхода.

Пример 4

Интервальная симметричная система линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} p_1 & \frac{p_1+1}{p_2} \\ p_2 & p_1+1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

где $p_1 \in [2,3]$, $p_2 \in [2,3]$, $b_1 = b_2 = 1$.



На рисунке изображены:

— множество решений системы, коэффициенты матрицы которой зависят нелинейно от параметров,

— интервальные внутренние оценки, полученные на основе предложенной модификации «центрового» подхода.

Заключение

Для нахождения внутренней оценки множества решений ИСЛАУ со связями разработаны и апробированы на тестовых примерах алгоритмы адаптивного дробления параметров с использованием:

- формального подхода,
- «центрового» подхода.

Предложена модификация «центрового» подхода для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ, коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным.

Реализован соответствующий алгоритм и опробирован на тестовых примерах. В качестве практического приложения алгоритма рассмотрена задача синтеза рычажного механизма.

Спасибо за внимание