Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН

г. Новосибирск

I. Теория

Постановка и обсуждение задачи

Линейные системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с $m \times n$-матрицей $A = (\, a_{ij})$ и m-вектором $b = (\, b_i)$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n}x_n = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n}x_n = \boldsymbol{b}_2, \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 + \boldsymbol{a}_{m2}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{mn}x_n = \boldsymbol{b}_m, \end{cases}$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальными $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ и m-вектором $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Множество решений
интервальной линейной системы уравнений —

$$\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \Big\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\Big\}$$

Также *объединённое множество решений* . . .

Разрешимость интервальных уравнений

— непустота множества решений, т. е. $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$

Вообще говоря, различают сильную и слабую разрешимость . . .

В общем случае распознавание разрешимости NP-трудно

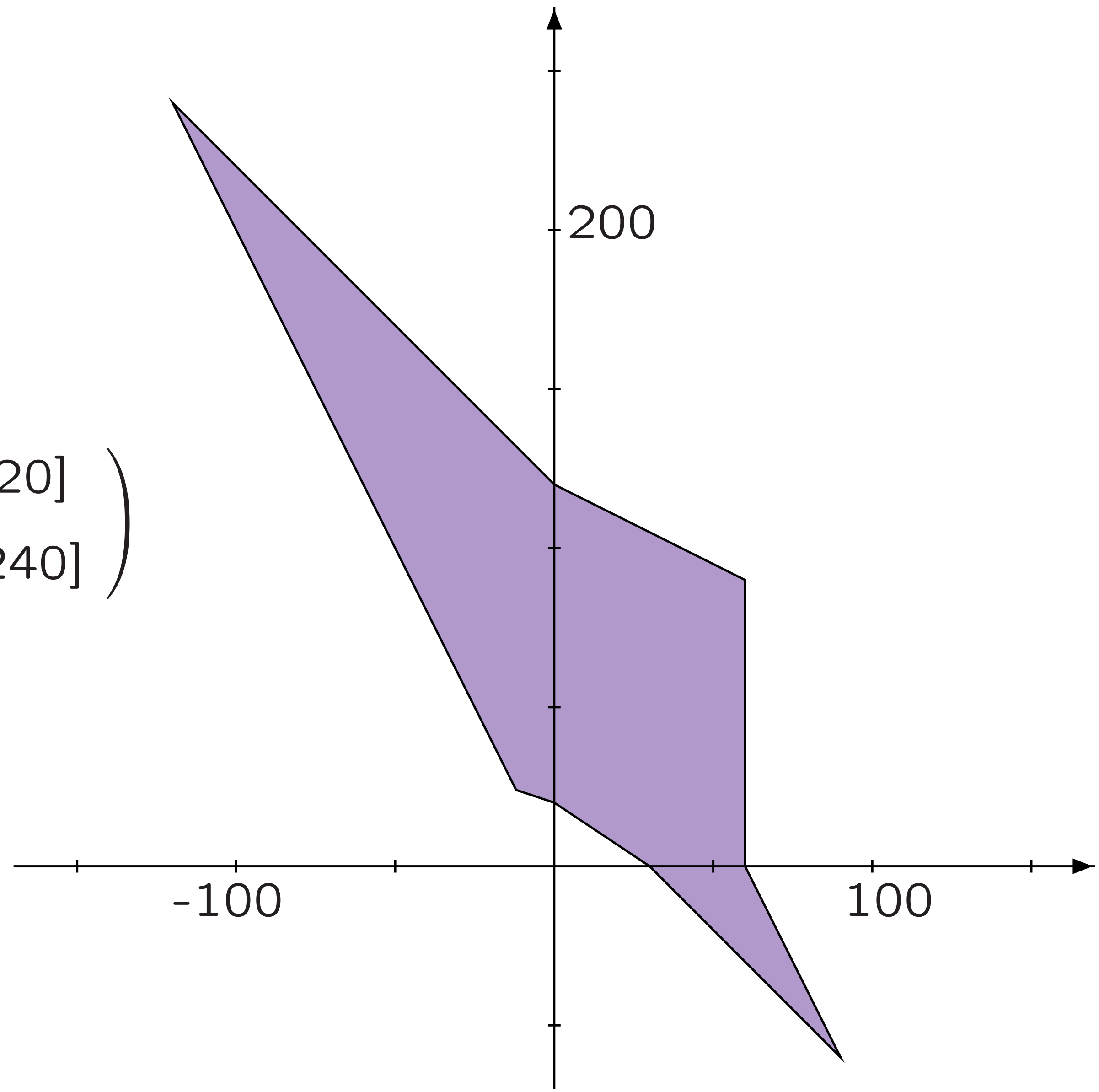
А.В. Лакеев и С.И. Носков — 1993

V. Kreinovich,

J. Rohn

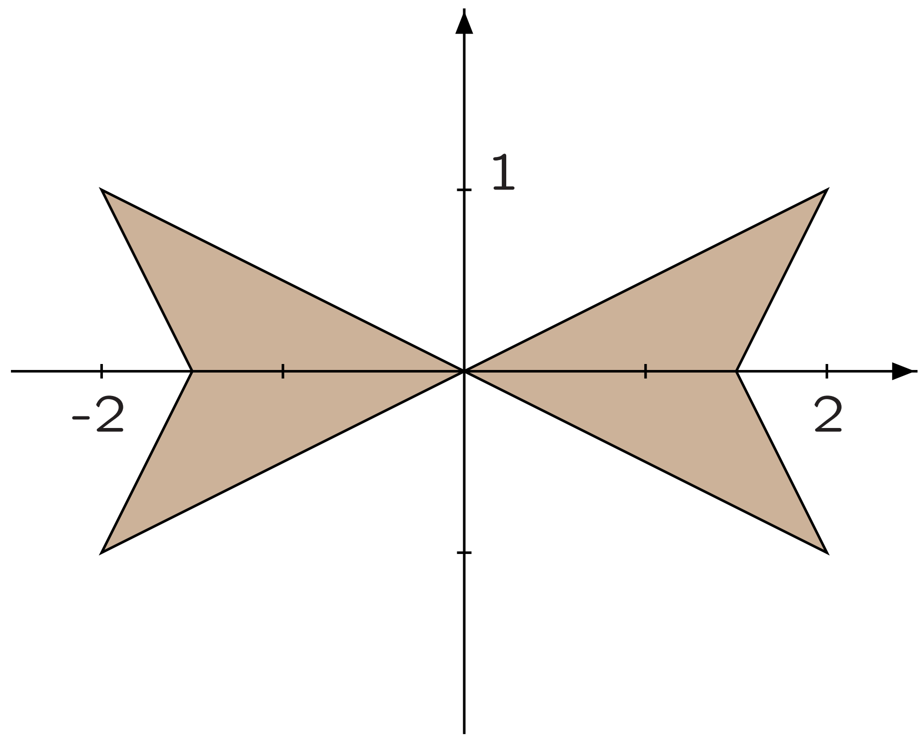
Пример — система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

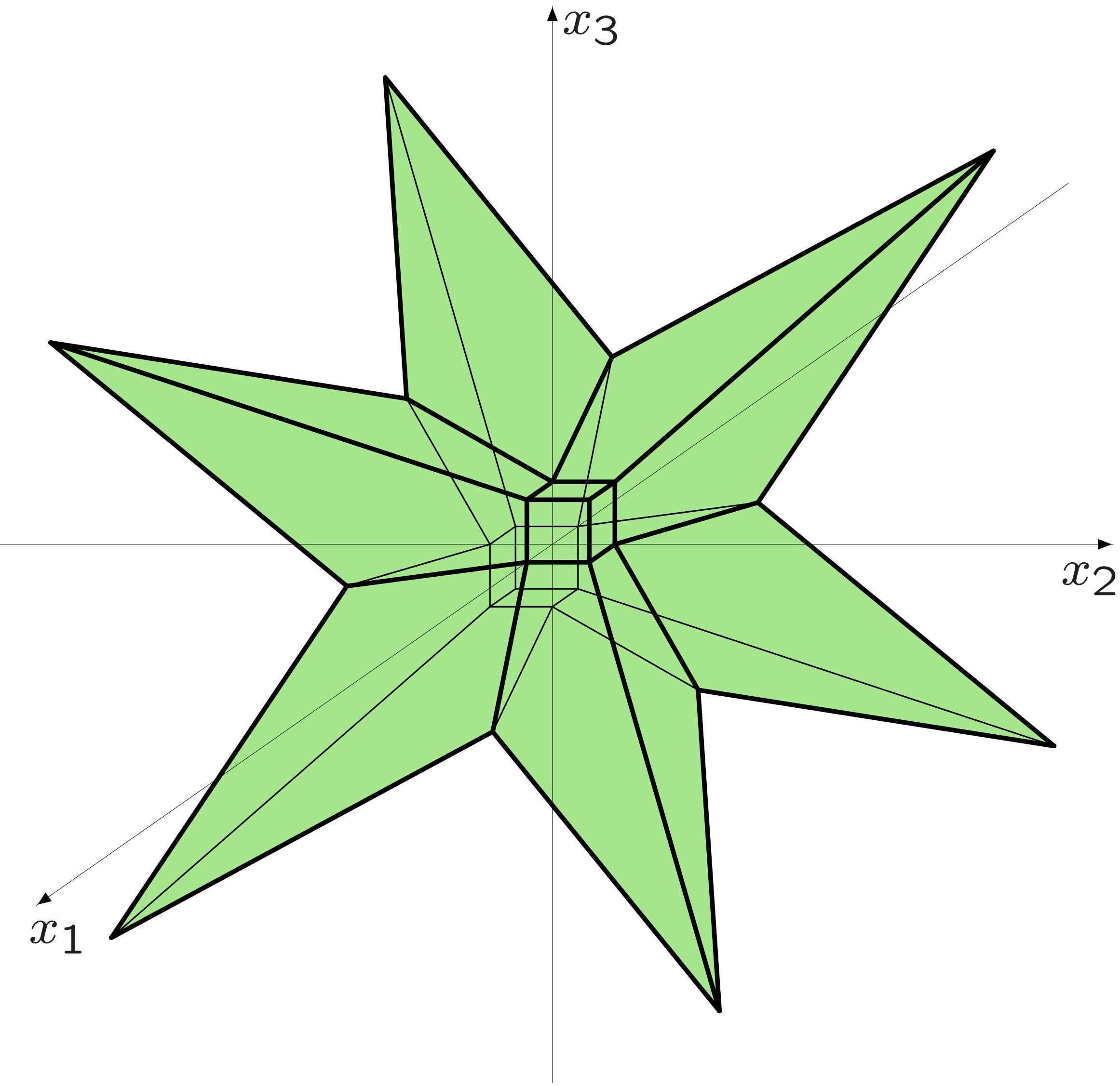


Пример — почти несвязное множество решений

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix}$$



Пример — система Ноймайера



$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Разрешимость интервальных уравнений

Пересечение множества решений интервальной линейной системы с каждым ортантом $\mathbb{R}^n$ — выпуклое многогранное множество.

$\Longrightarrow$ множество решений интервальной линейной системы — объединение не более чем 2^n выпуклых многогранных множеств, для которых уравнения ограничивающих гиперплоскостей выписываются по $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Распознавание разрешимости NP-трудно

Распознавание особенности/неособенности квадратной интервальной матрицы NP-трудно

II. Теория

Метод распознающего функционала

Распознающий функционал множества решений

$$x \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\exists \tilde{A} \in \boldsymbol{A})\ \tilde{A}x \in \boldsymbol{b}$$

Это эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \ \in\ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i + \left[-\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i \right], \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i \ =\ \tfrac{1}{2}(\, \overline{\boldsymbol{b}}_i + \underline{\boldsymbol{b}}_i \,) \qquad \text{— середина интервала,}$$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i \ =\ \tfrac{1}{2}(\, \overline{\boldsymbol{b}}_i - \underline{\boldsymbol{b}}_i \,) \qquad \text{— радиус интервала.}$$

Распознающий функционал множества решений

Добавив по $(-\text{mid}\,\boldsymbol{b}_i)$ к обеим частям включений, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \; - \text{mid}\,\boldsymbol{b}_i \;\in\; \Big[-\text{rad}\,\boldsymbol{b}_i, \text{rad}\,\boldsymbol{b}_i\Big], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

что равносильно

$$\left|\; \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \; - \text{mid}\,\boldsymbol{b}_i \right| \leq \text{rad}\,\boldsymbol{b}_i \;, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Распознающий функционал множества решений

Как следствие,

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \right| \geq 0 \qquad (\star)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Итак, $x \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, если и только если для каждого i существуют такие $\tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, что справедливы все неравенства $(\star)$.

Это эквивалентно выполнению для $i = 1, 2, \ldots, m$ условий

$$\max_{\substack{\tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}, \\ j=1,2,\ldots,n}} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0.$$

Распознающий функционал множества решений

Вносим максимум внутрь скобок

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i \; - \min_{\tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}} \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \right| \; \geq \; 0.$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Но для выражения под знаком модуля естественное интервальное расширение совпадает с его областью значений:

$$\left\{ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \;\middle|\; \tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} \right\} \; = \; \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j,$$

где справа арифметические операции — интервальные.

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

— алгебраическая система, образованная интервалами $\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \subset \mathbb{R}$ так, что

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} = \left\{ x \star y \mid x \in \boldsymbol{x},\, y \in \boldsymbol{y} \right\} \qquad \text{для} \qquad \star \in \{+, -, \cdot, /\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \left[\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}\right] \\
\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &= \left[\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\right] \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= \left[\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\right] \\
\boldsymbol{x} / \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x} \cdot \left[1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}}\right] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0
\end{aligned}}$$

Распознающий функционал множества решений

Используя операцию взятия *мигнитуды интервала*

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle := \min\{\, |a| \mid a \in \boldsymbol{a} \,\} = \begin{cases} \min\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|,\ |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\}, & \text{если} \quad 0 \notin \boldsymbol{a}, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \in \boldsymbol{a}, \end{cases}$$

наименьшего из модулей точек $\boldsymbol{a}$, получим из ($\star$)

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right\rangle \ \geq \ 0$$

для $i = 1, 2, \ldots, m.$

Наконец, взятием минимума по i

мы можем свернуть m полученных условий в одно . . .

Распознающий функционал множества решений

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ *— интервальная* $m\times n$*-матрица,* $\boldsymbol{b}$ *— интервальный* m*-вектор. Тогда выражением*

$$\mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m}\left\{\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}\,x_j\,\right\rangle\,\right\}$$

задается функционал $\mathrm{Uni}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$*, такой что принадлежность точки* $x\in\mathbb{R}^n$ *множеству решений* $\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы* $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ *равносильна неотрицательности в* x *функционала* Uni*,*

$$x\in\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\geq 0.$$

Свойства распознающего функционала

Предложение 1

Функционал Uni *непрерывен по Липшицу.*

Предложение 2

Функционал Uni *— вогнутый по* x *в каждом ортанте* $\mathbb{R}^n$*.*
Если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ *некоторые столбцы являются целиком точечными, то* $\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *вогнут и на объединениях нескольких ортантов.*

Предложение 3

Функционал $\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *— полиэдральный.*

Пример

Рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,3] \\ [0,1] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [0,1] \\ [-1,0] \end{pmatrix}$$

Для её множества решений . . .

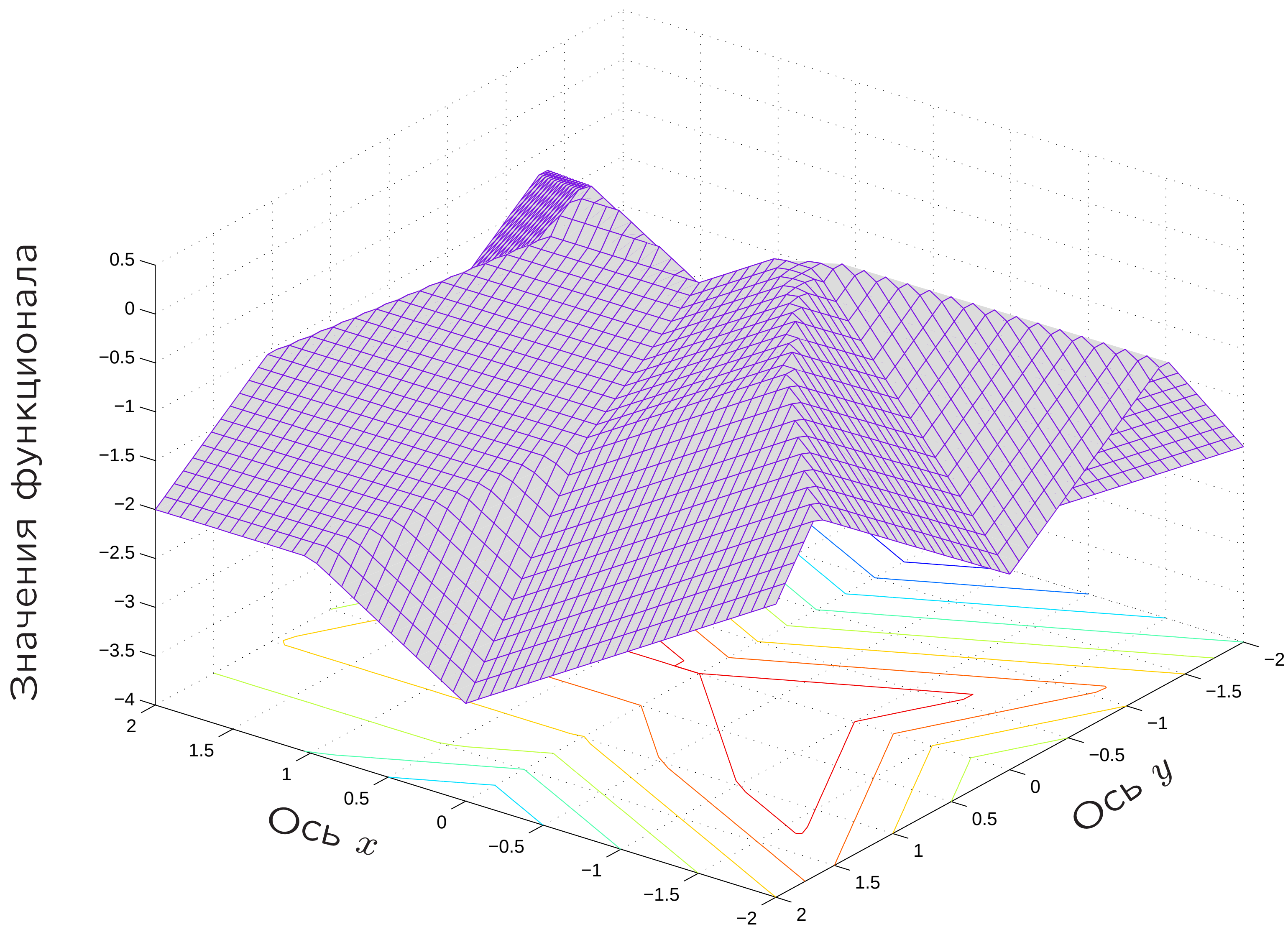
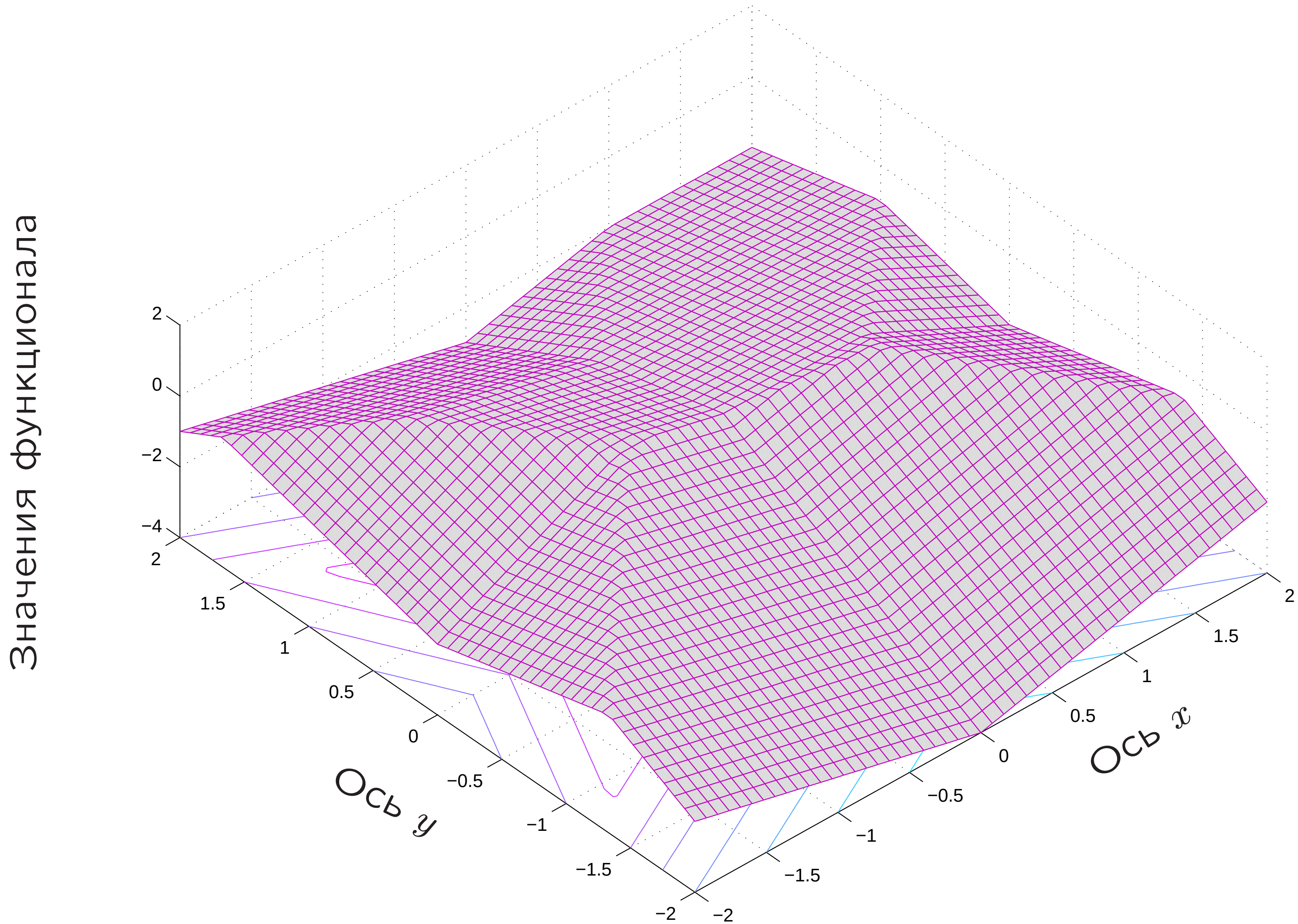


график распознающего функционала



. . . и с другой точки зрения

Свойства распознающего функционала

Предложение 4

Функционал $\operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *достигает конечного максимума на всём пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Предложение 5

Если $\operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, *то* x *— точка топологической внутренности* $\mathit{int}\, \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *множества решений.*

Предложение 6

Пусть $\mathcal{O}$ *— ортант пространства* $\mathbb{R}^n$. *Если матрица* $\boldsymbol{A}$ *не имеет нулевых строк, а вектор* $\boldsymbol{b}$ *не имеет точечных компонент, то из* $x \in \operatorname{int} \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \mathcal{O}$ *следует* $\operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.

Исследование разрешимости интервальной линейной системы уравнений

Для интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала $\operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Пусть $U = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $U \geq 0$, то $\tau \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, т. е. интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ разрешима и τ лежит во множестве решений;

- если $U > 0$, то $\tau \in \operatorname{int} \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$, и принадлежность точки τ множеству решений устойчива к малым возмущениям $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$;

- если $U < 0$, то $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \varnothing$, т. е. интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ неразрешима.

Коррекция интервальной системы уравнений

$$\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \;\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left\langle \;\mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \;\right\rangle \;\right\}$$

— величины rad $\boldsymbol{b}_i$ входят аддитивно во все образующие

Поэтому если

$$\boldsymbol{e} = \Big([-1, 1], \ldots, [-1, 1]\Big)^{\top},$$

то для системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}$ с уширенной правой частью

$$\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) \;=\; \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C,$$

$$\max_x\, \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) \;=\; \max_x\, \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C,$$

III. Приложения

Задача восстановления зависимостей по неточным данным

Задача восстановления зависимостей

— по эмпирическим данным требуется построить зависимость заданного вида между «входными» и «выходными» величинами

Пусть

$$b = x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

с неизвестными коэффициентами x_i, причём заданы наборы значений

$$\begin{array}{ccccc}
a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)}, & b^{(1)}, \\
a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_n^{(2)}, & b^{(2)}, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_1^{(m)}, & a_2^{(m)}, & \ldots, & a_n^{(m)}, & b^{(m)}.
\end{array}$$

Задача восстановления зависимостей

= задача идентификации параметров объекта

— структурная схема «объекта идентификации»

задаём значения на входе — измеряем отклики на выходе

Задача восстановления зависимостей

Переобозначая $a_{ij} := a_j^{(i)}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ x_0 + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с $m \times (n+1)$-матрицей $A = (\, a_{ij})$ и m-вектором $b = (\, b_i)$.

Её решение — обычное или в обобщённом смысле — принимается за оценку параметров $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Задача восстановления зависимостей по неточным данным

Неопределённости и неточности в данных удобно описывать интервально

Даны интервальные оценки величин, т. е. принадлежности a_{ij} и b_i некоторым интервалам,

$$a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}] \qquad \text{и} \qquad b_i \in \boldsymbol{b}_i = [\underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i],$$

причём в эти интервалы включаются как случайные,

так и систематические ошибки.

Л.В. Канторович — 1962 год

С.И. Спивак, Н.М. Оскорбин, А.П. Вощинин, С.И. Жилин,

О.Е. Родионова, А.Л. Померанцев, ...

J.P.Norton, M. Milanese, G. Belforte, L. Pronzato, E. Walter ...

Задача восстановления зависимостей по неточным данным

Набор параметров x_0, x_1, ..., x_n объекта *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in}, \boldsymbol{b}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если для каждого наблюдения i в пределах измеренных интервалов найдутся такие представители $a_{i1} \in \boldsymbol{a}_{i1}$, $a_{i2} \in \boldsymbol{a}_{i2}$, ..., $a_{in} \in \boldsymbol{a}_{in}$ и $b_i \in \boldsymbol{b}_i$, что

$$x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$

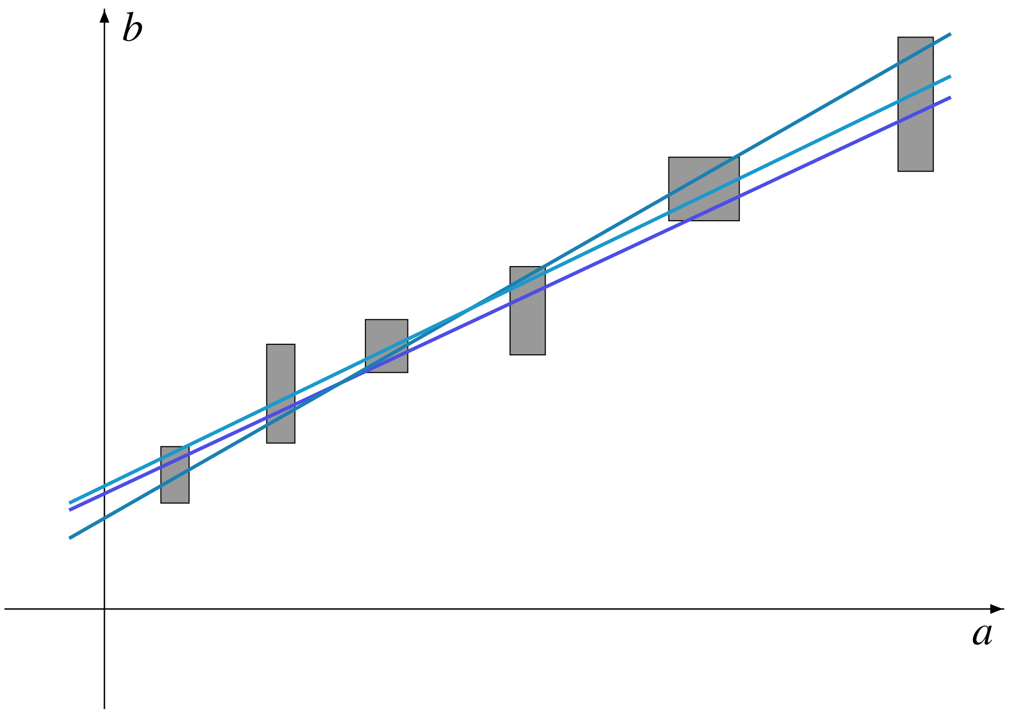
Множество параметров, согласующихся с данными, — *информационное множество, множество возможных значений параметров и т.п.* — есть

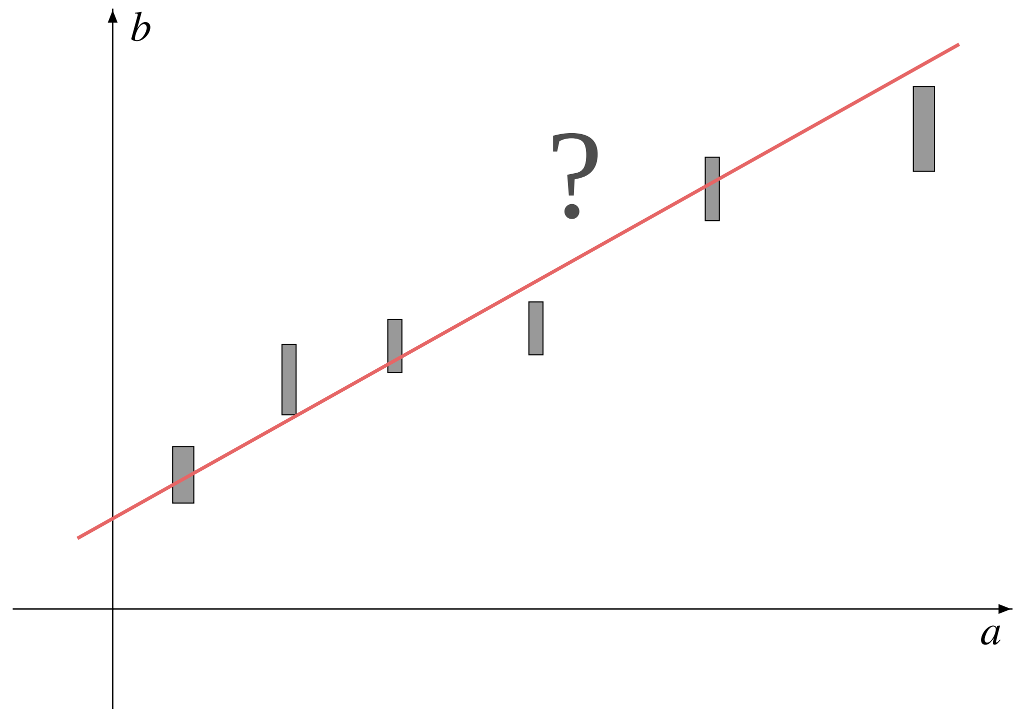
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \Big(\exists (a_{ij}) \in (\boldsymbol{a}_{ij}) \Big) \Big(\exists (b_i) \in (\boldsymbol{b}_i) \Big) \Big(Ax = b \Big) \right\}$$

где $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, т. е. является *множеством решений ИСЛАУ*

Парадокс интервального оценивания

«*Чем лучше, тем хуже . . .*»





Парадокс интервального оценивания

Чем меньше интервалы неопределённости,
тем хуже проводить через них регрессионную линию!

Парадокс интервального оценивания

Чем меньше интервалы неопределённости,
тем хуже проводить через них регрессионную линию!

?! . . .

Пути преодоления «парадокса интервального оценивания»

- Если интервалы данных адекватно отражают неопределённости, то неадекватна модель и её нужно сменить.

- Если

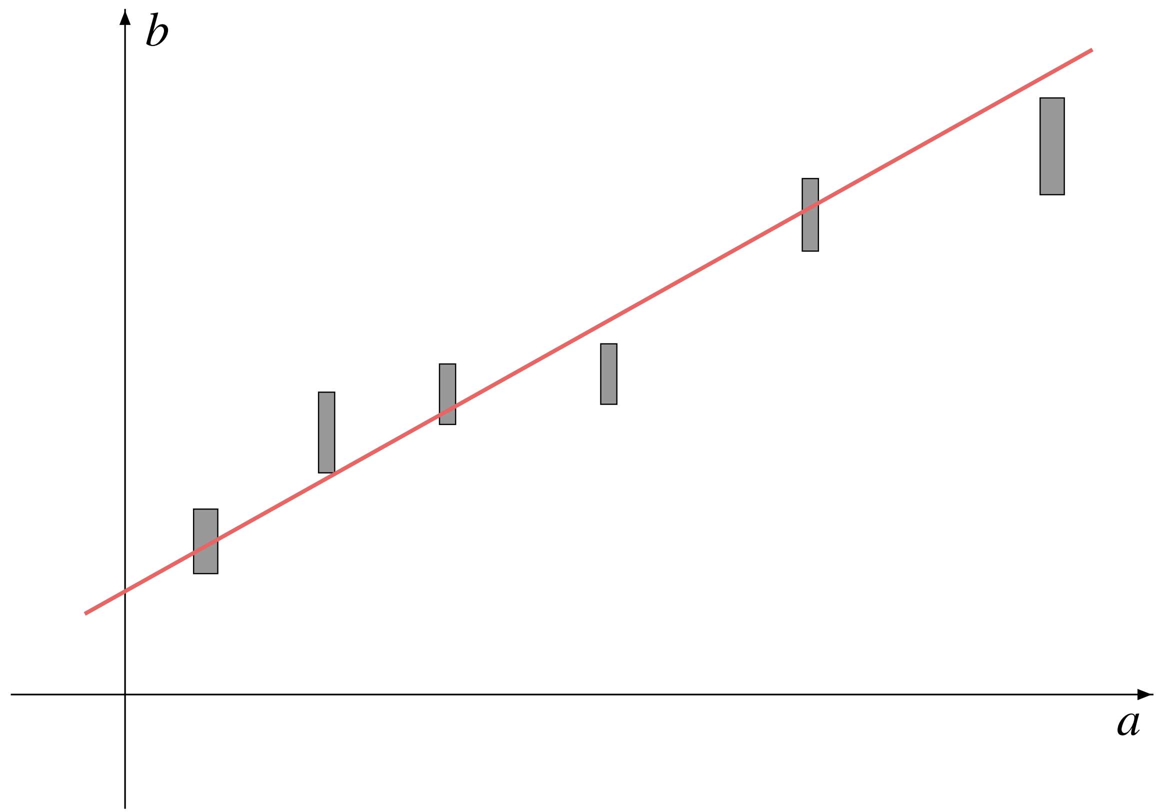
  – необходимо сохранить модель (вид зависимости) или

  – данные не являются абсолютно гарантированными,

  то *нужно допустить несогласованность параметров и данных*.

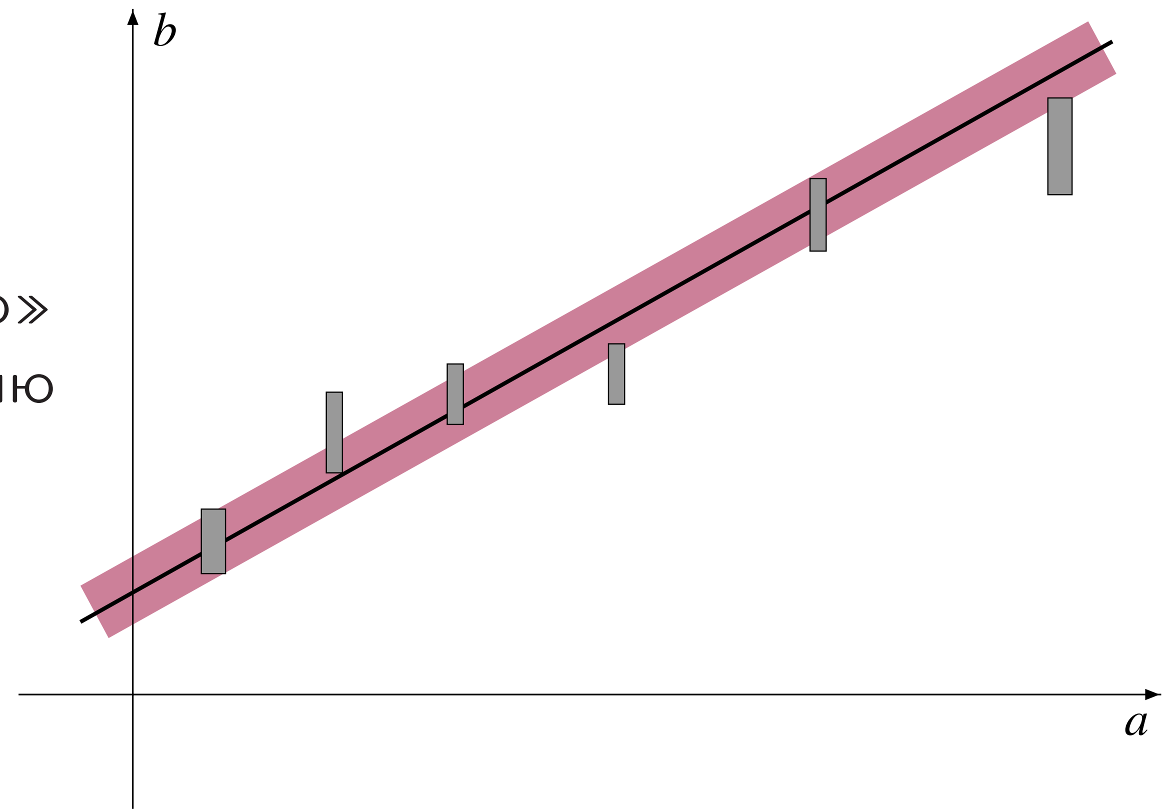
Пути преодоления «парадокса интервального оценивания»

...нужно допустить несогласованность параметров и данных



Пути преодоления «парадокса интервального оценивания»

. . . нужно допустить «толстую» регрессионную линию



Пути преодоления «парадокса интервального оценивания»

Какой взять «меру согласования / несогласования»?

При непустом информационном множестве она должна быть положительной для точек из этого множества, на которых «согласование» в самом деле достигается

Очень подходит распознающий функционал Uni

Метод максимума согласования

Оценкой параметров берём точку, в которой достигается наибольшее значение распознающего функционала Uni

- Если $\max \mathrm{Uni} \geq 0$, то эта точка лежит во множестве параметров, согласующихся с данными.

- Если $\max \mathrm{Uni} < 0$, то множество параметров, согласующихся с данными, пусто, но эта точка *минимизирует несогласованность*.

Метод максимума согласования: интерпретация-1

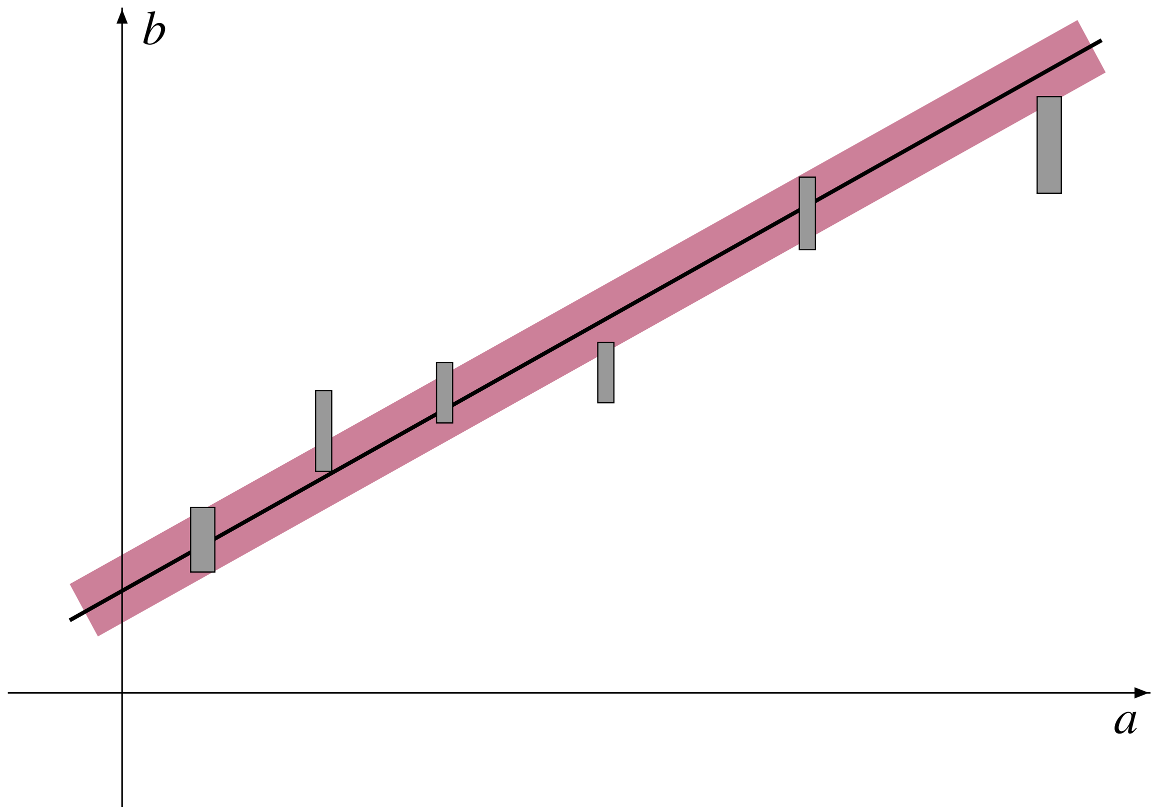
$\arg\max \mathrm{Uni}$ — первая точка, которая появится в информационном множестве при равномерном уширении вектора правой части относительно его середины

$$\max_x \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) \;=\; \max_x \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C,$$

где $\boldsymbol{e} = \Big([-1, 1], \ldots, [-1, 1]\Big)^{\top}$

Метод максимума согласования: интерпретация-2

$\arg\max \mathrm{Uni}$ соответствует регрессионной линии, которую необходимо минимально уширить до «регрессионной полосы», которая будет иметь «согласование» с данными



Практическая реализация

— решающим образом зависит от эффективности нахождения max Uni

В общем случае — задача глобальной оптимизации
с негладкой целевой функцией

. . . методы глобальной оптимизации липшицевых функций
с учётом специфики функционала Uni

Важнейший частный случай

— *значения входных величин* a *точны,*
интервальная неопределённость присутствует лишь на выходе b

Интервальная линейная система

$$Ax = \boldsymbol{b}$$

с точечной матрицей $A = (a_{ij})$, и потому

$$\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \;\mathrm{rad}\; \boldsymbol{b}_i - \left|\; \mathrm{mid}\; \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \;\right| \;\right\}$$

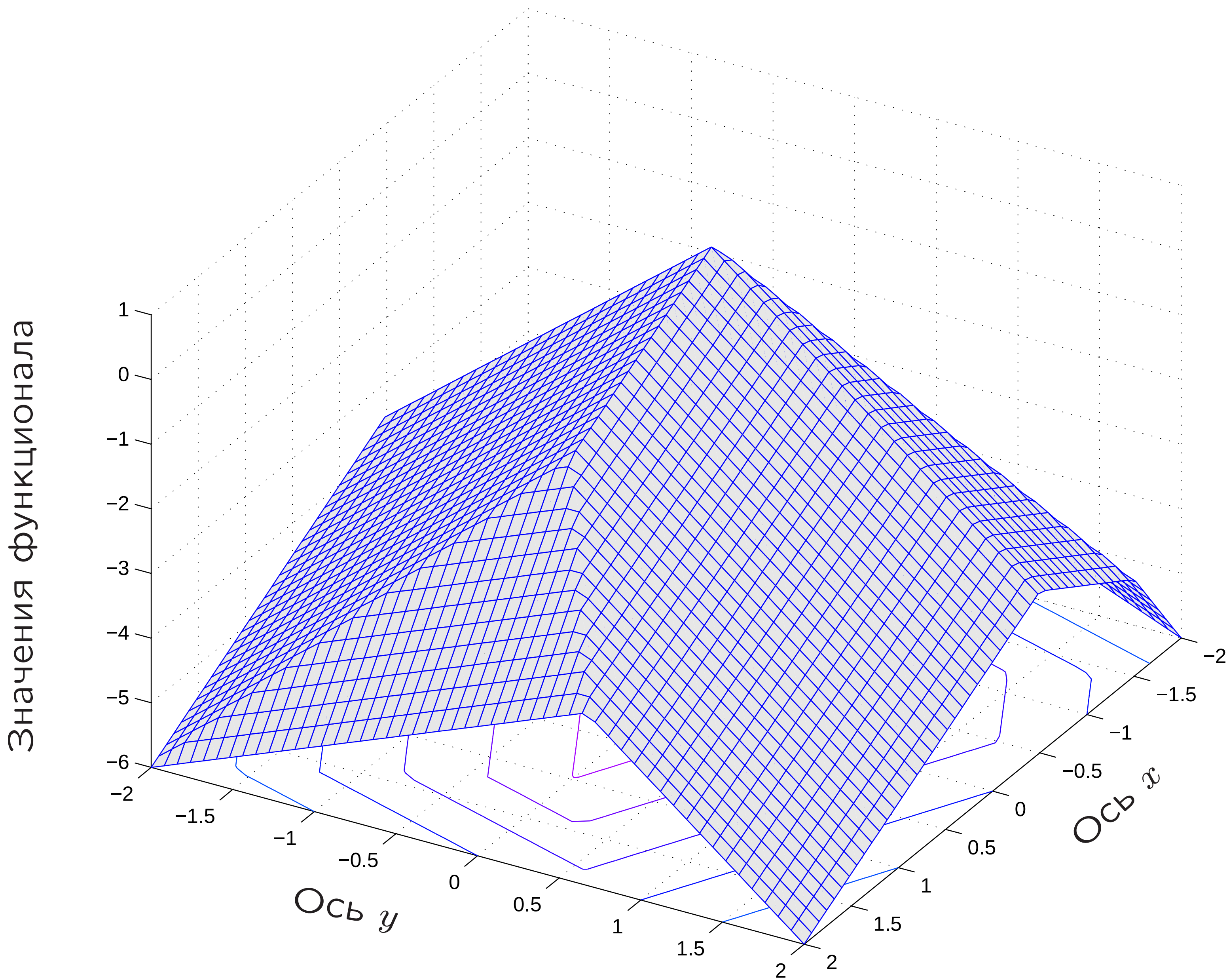
$\Longrightarrow$ распознающий функционал Uni — глобально вогнутый

Важнейший частный случай

— значения входных величин a точны,
интервальная неопределённость присутствует лишь на выходе b

$\Longrightarrow$ распознающий функционал Uni — глобально вогнутый

Это соответствует условиям применения традиционного регрессионного анализа, в условиях которого получены наиболее сильные результаты об оптимальности МНК.



Значения функционала
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
Ось y
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
Ось x

— график распознающего функционала

множества решений интервальной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [0,1] \\ [-1,0] \end{pmatrix}$$

Практическая реализация

— максимизация Uni в случае точечной матрицы $\boldsymbol{A}$
может опираться на развитые методы негладкой выпуклой оптимизации
(школа Н.З. Шора в Киеве, Е.А.Нурминский, . . .)

Свободно распространяемая программа, реализующая метод максимума согласования использует в качестве основы код `ralgb5` П.И. Стецюка

. . . лежит, в частности, на сайте
«Интервальный анализ и его приложения» —
`http://www.nsc.ru/interval`

Итоги и выводы

- Введением распознающего функционала множества решений задача исследования разрешимости ИСЛАУ сводится к удобной аналитической форме.

- *Метод максимума согласования* — перспективный метод обработки данных с интервальными неопределённостями основанный на максимизации распознающего функционала.

  Он может служить хорошей альтернативой традиционному методу наименьших квадратов.

Пример И.А.Шарой

— когда оценка по методу наименьших квадратов не лежит в информационном множестве

Пусть переменная $y \in \mathbb{R}$ линейно зависит от переменной $x \in \mathbb{R}$, так что

$$y = \alpha x + \beta.$$

Неизвестные значения α и β надо определить по результатам следующих измерений

Номер опыта	1	2	3
x	0	1	2
y	1	2	-0.5

Пример И.А.Шарой

В каждом опыте

- переменная x измеряется точно,
- для переменной y измерения дают такой интервал, что
  - центр интервала представлен в таблице,
  - радиус интервала равен единице,
  - истинное значение y может быть любым числом из интервала (статистических предположений нет!)

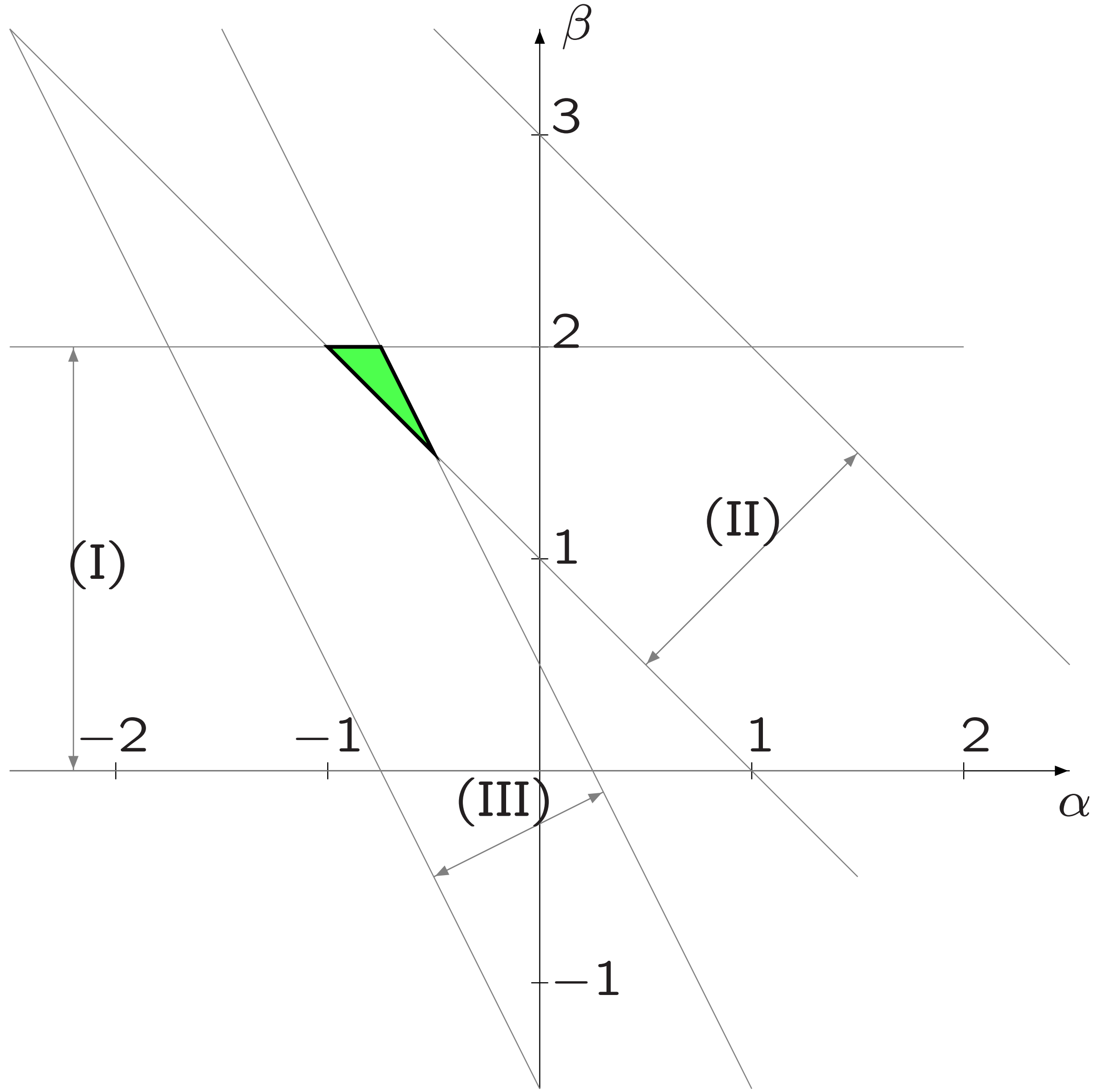
Пример И.А.Шарой

Информационное множество, т.е. множество пар α и β, согласованных с измерениями, описывается системой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 + [-1, 1] \\ 2 + [-1, 1] \\ -0.5 + [-1, 1] \end{pmatrix}$$

и представляет собой пересечение трех полос в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && \beta \in [0, 2], \\ &\text{(II)} && \beta \in -\alpha + [1, 3], \\ &\text{(III)} && \beta \in -2\alpha + [-1.5, 0.5]. \end{aligned}$$



— информационное множество выделено зеленым цветом.

Это треугольник с вершинами $(-1, 2)$, $(-0.5, 1.5)$ и $(-0.75, 2)$

Пример И.А.Шарой

Оценка α и β по МНК определяется из нормальной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\star \\ \beta^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

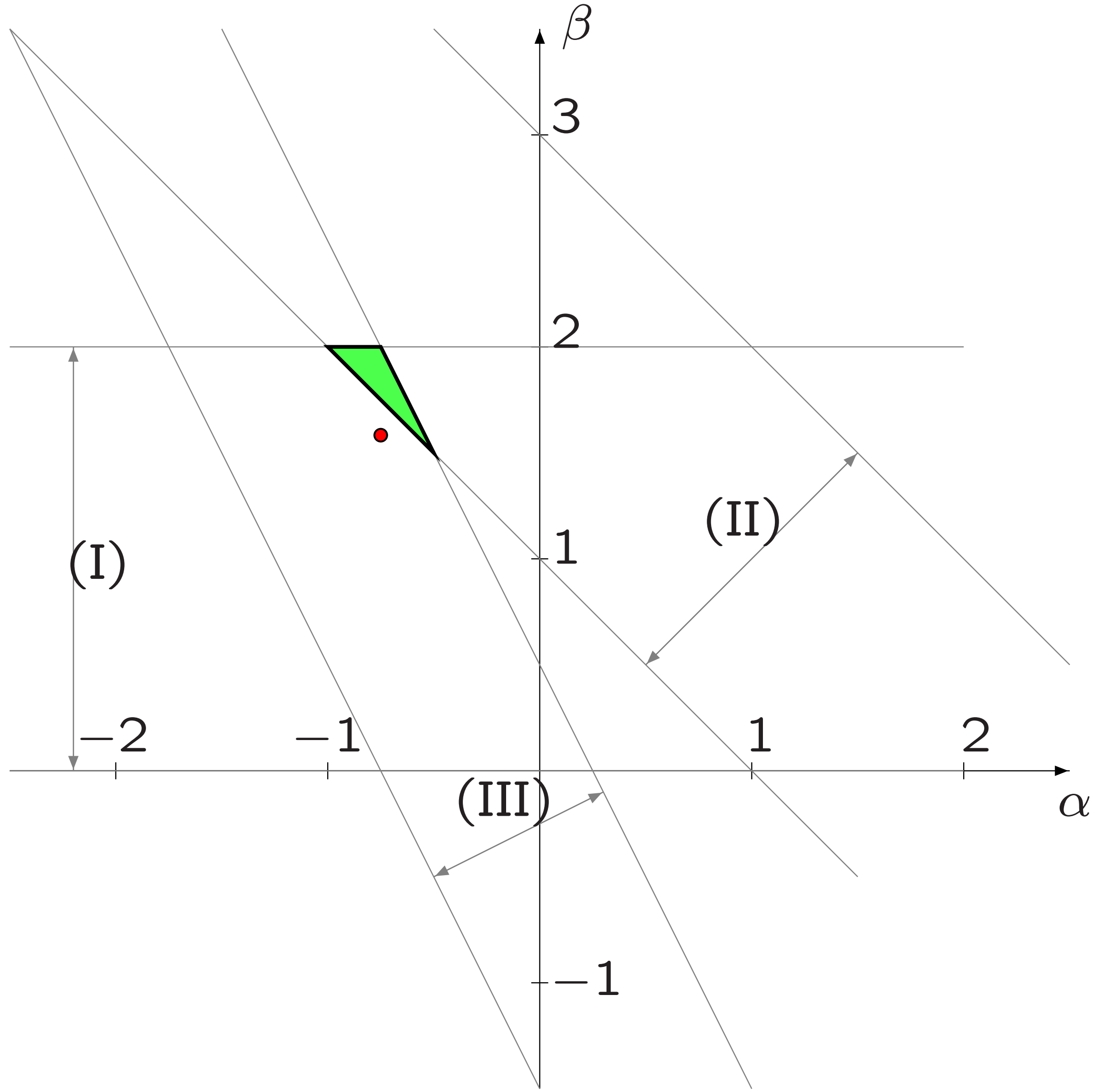
Имеем

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\star \\ \beta^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 6, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

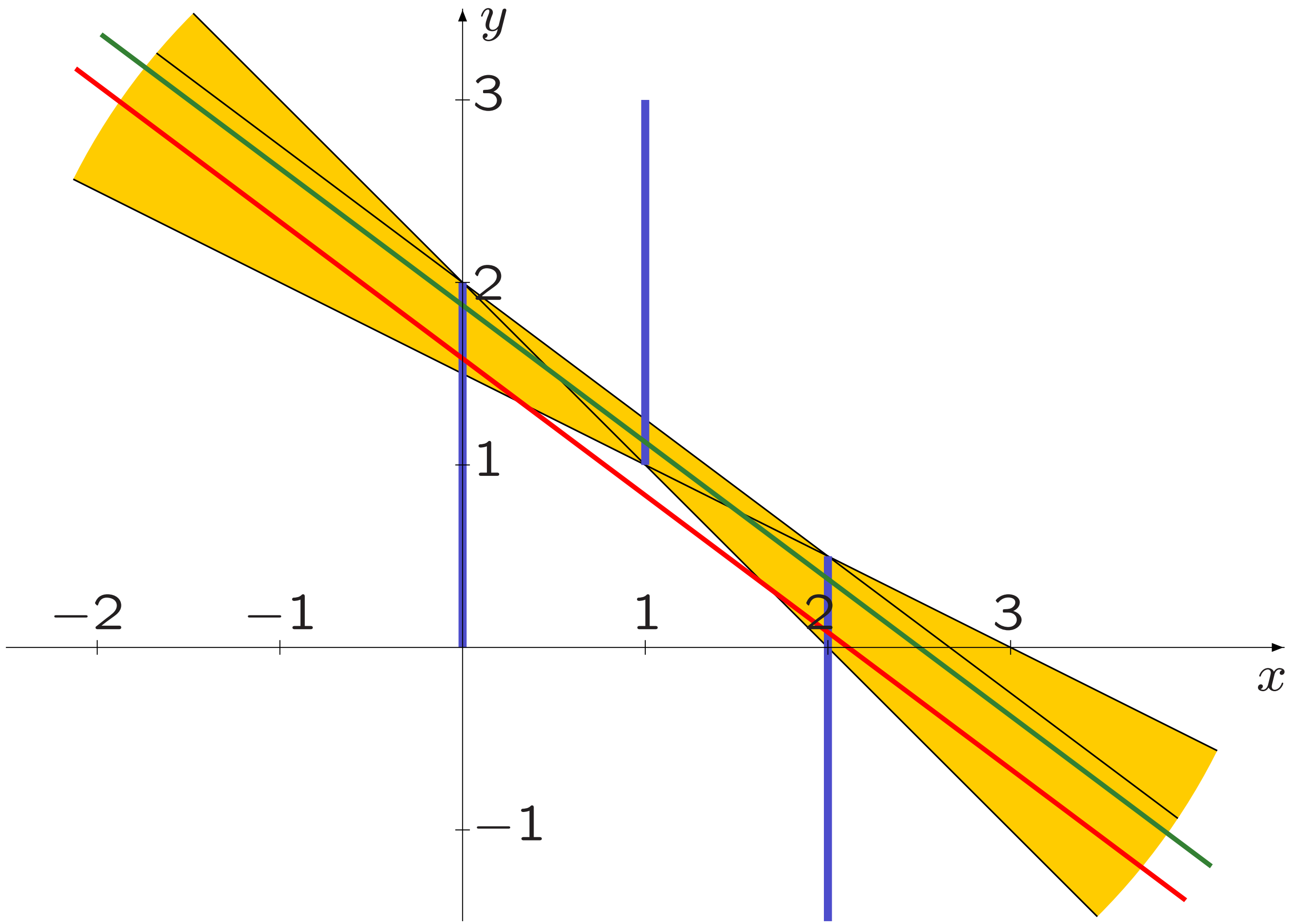
и потому оценка равна

$$\begin{pmatrix} \alpha^\star \\ \beta^\star \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4.5 \\ 9.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 19/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1.5833\ldots \end{pmatrix}.$$



В пространстве переменных α и β оценка по МНК (красная точка) не лежит в информационном множестве (зеленый треугольник)

Сравнение оценки по МНК с множеством согласованных оценок в координатах (x, y)



В пространстве пар (x, y) прямая $y = \alpha^\star x + \beta^\star$ не лежит во множестве всех прямых, проходящих через наблюдаемые в опытах интервалы

Оценка по методу максимума согласования

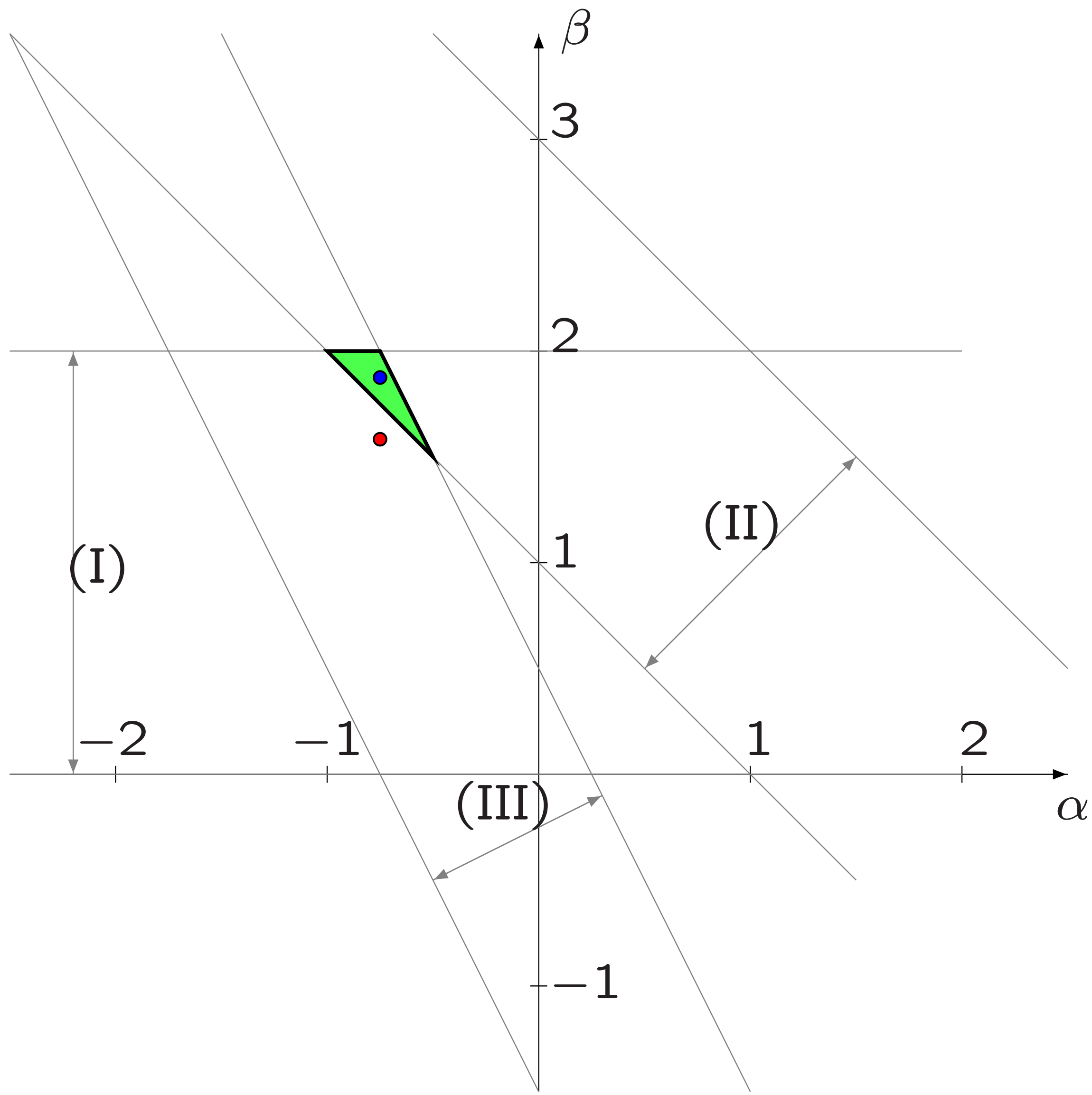
$$\max \mathrm{Uni} = 0.125$$

— множество согласованных с данными параметров непусто

Значения параметров

$$\arg\max \mathrm{Uni} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1.875 \end{pmatrix}$$

— им соответствует зелёная прямая внутри жёлтого пучка на рисунке



...оценка по методу максимума согласования

хорошо лежит в информационном множестве

Спасибо за внимание

Общий случай

Интервальная система уравнений

$$F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{b}$$

Множество решений

$$\varXi(F, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;=\; \Big\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, a \in \boldsymbol{a})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, F(a, x) = b\,)\,\Big\}$$

Распознающий функционал множества решений

$$\mathrm{Uni}_{\,F}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1 \le i \le m} \Big\{ \,\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \Big\langle\, \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - F_i(\boldsymbol{a}, x)\,\Big\rangle \Big\}$$