К построению аналога производной интервальных величин

Л.С. Терехов

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

e-mail: lev.terekhov@gmail.com

Содержание

Введение

Основа конструирования производной - интервал «физического происхождения». В отличие от интервала, определяемого в интервальном анализе как расширение понятия вещественного числа (Ю.И. Шокин), интервал «физический» определён в разработке как параметр физического явления. Кроме того, выявлена роль интервала как инструмента уменьшения погрешности натурных измерений. Поэтому в сообщении уделено много внимания свойствам интервала как необходимого инструмента конструирования разностной производной, разности которой - данные натурных измерений.

Цель сообщения – обратить внимание математиков на интервал «физического происхождения» как на возможный дополнительный инструмент интервального анализа.

Определения

В интервальном анализе:

Ю.И. Шокин в книге «Интервальный анализ» пишет об интервале как расширении понятия вещественного числа.

С.П. Шарый в книге «Конечномерный интервальный анализ»: «Интервал – это замкнутый числовой промежуток. Например, интервал между 2 и 3 содержит все вещественные числа между 2 и 3, включая их самих, и обозначается как [2, 3]. Соответственно, интервальная неопределённость – это состояние неполного (частичного) знания об интересующей нас величине, когда мы можем лишь указать её принадлежность данному интервалу…»

В настоящей работе:

Интервал неопределённости (равносильно - интервал) - один из сомножителей обобщённого соотношения неопределённостей (СН), - параметр - неустранимая неопределённость физического явления, в частности - натурного измерения. Интервал неопределённости не содержит метрологических, инструментальных, методических и никаких других устранимых компонентов погрешности.

Погрешность используется в общепринятом смысле. Погрешность, «очищенная» от всех артефакт'ных погрешностей, сводится к единственной и неустранимой неопределённости натурного измерения - интервалу неопределённости > 0.

Истинное значение, при условии определения его как вещественного, точечного числа, в настоящей разработке в согласии со следствием обобщённого СН, не имеет места даже потенциально.

Актуальность : огрех при вычислении обыкновенной производной

Известно, что погрешности измерения при оцифровке сигнала по В.А.Котельникову оказываются б′ольшими, нежели это следует из его чисто математической модели отсчётов, не осложнённой закономерностями физики.

Так, согласно теореме Котельникова - чем выше частота дискретизации сигнала – тем выше разрешение по частоте. Что находится в прямом противоречии с классическим СН.

Имеется также источник до сих не учитываемой погрешности - это усреднение сигнала, проводимое без адаптации ширины интервала усреднения к производной и отношению сигнал-шум (например, усреднение на фиксированном интервале «времени преобразования» в АЦП).

Актуальность: огрех (изъян) при вычислении обыкновенной производной

Необходимость в разработке разностной производной, соответствующей данным натурных измерений, выявляется при повышении точности измерений, сопровождаемом уменьшением интервала усреднения Δt:

$$\Delta f \cdot \Delta t \geq 1,$$
$$\Delta f / \Delta t = 1/(\Delta t)^2,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} (\Delta f / \Delta t) \to \infty,$$

независимо от вида зависимости $f = f(t)$. Источник огреха: модель вещественного числа и в физике, и в математике.

Интервал неопределённости классического СН

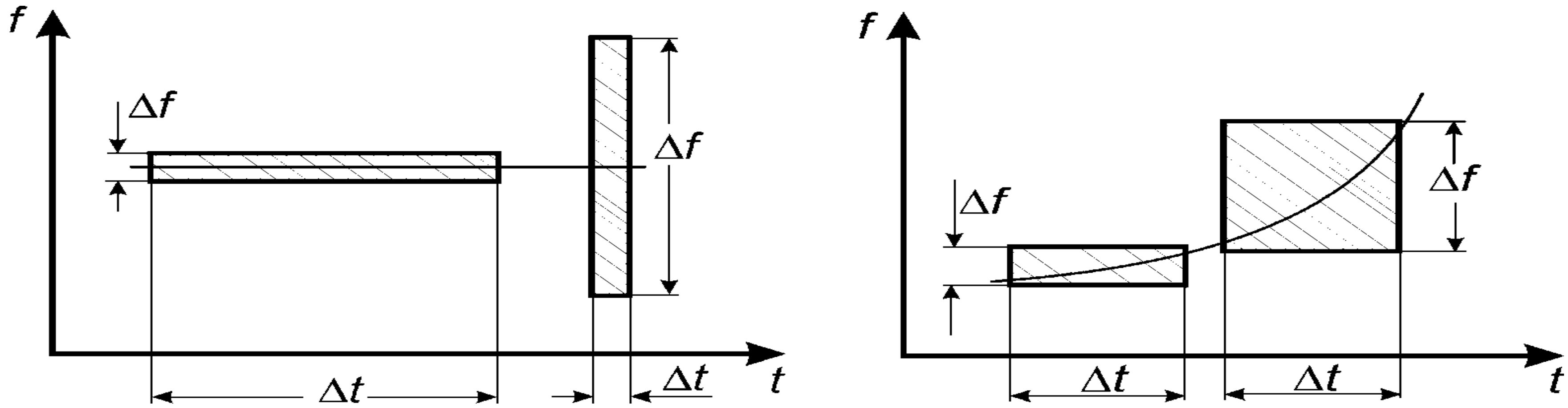
Известно, что эффективные длительность сигнала $\Delta t_{эфф}$ и полоса частот $\Delta f_{эфф}$ могут быть найдены (Фурье) из определений моментов $\Delta t^2_{эфф}=\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, s^2(t) dt$ и $\Delta f^2{}_{эфф} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, S^2(\omega) d\omega$.

Из которых следует соотношение неопределённостей (СН), независимо известное и в классической физике:

$$\Delta t_{эфф} \Delta f_{эфф} = \text{const}.$$

Вывод СН по Фурье позволяет видеть заметное отличие определений для ширины и длительности сигнала, вычисляемых как функционалы, от определения интервала в интервальном анализе. Хотя при этом классическое СН всё же потенциально допускает точное значение одного из сомножителей.

Область определения классического СН: $f = const$



Оптика, акустика (процесс дтрм.), XIX век $\Delta f \cdot \Delta t \geq 1$

Радиолокация (процесс слчн.), XX век $\Delta f \cdot \Delta t \geq \frac{1}{\sqrt{\mu}}$

Обобщение СН: $f = f(t)$

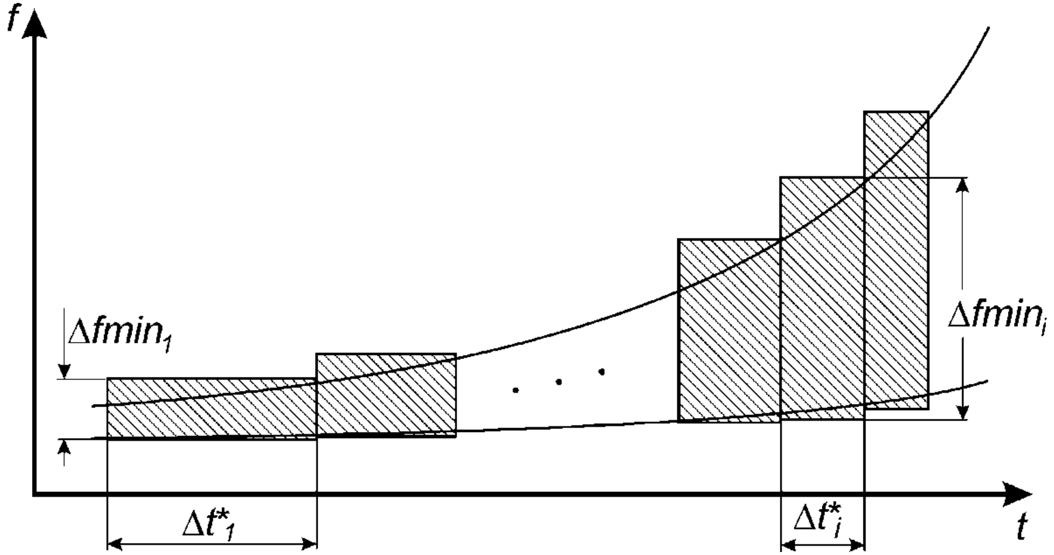
Основное допущение

$$\Delta f = \frac{1}{2\sqrt{\mu} \cdot \Delta t} + \frac{f(t)' \cdot \Delta t}{2}$$

Минимум неопределённости → минимум Действия → оптимальный интервал ≡ интервал неопределённнсти

$$\Delta f_{min}(\Delta t^*) \cdot \Delta t^*\big(\mu, f'(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

Процесс в <u>макро</u>мире квантован оптимальными интервалами



$$\Delta f_{min}(\Delta t^*) \cdot \Delta t^*\big(\mu, f'(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

$$\Delta f_{min}(\Delta t^*) \equiv \Delta f_{min}\big(\mu, f'(t)\big)$$

Квантование естественными интервалами

При отсчётах изменяющейся величины генерируется адаптируемая на каждом шаге сетка узлов (отсчётов), размечающих последовательность оптимальных интервалов, в пределах каждого из которых измеряемая величина имеет наименьшую неопределённость измерения, однако $\Delta f_{min} > 0$. И даже потенциально $\Delta f_{min} \neq 0$.

В отличие от Фурье –анализа получаем не размазанный спектр по всей установленной ширине окна, а - в соответствии с адаптивным алгоритмом - «нарезку» процесса оптимальными интервалами с выявлением и временной локализацией как крупных, так и мелких элементов динамики процесса.

Разностный аналог производной

<u>Технология вычисления:</u> рекурсия …

$$\Delta t_i^* = 1/\left(\sqrt{\mu_{i-1}} \cdot \left|\frac{\Delta f_{min}(\Delta t_{i-1}^*)}{\Delta t_{i-1}^*}\right|\right)^{0.5} \quad [\text{ если } \mu \gg 1 \dots] \quad (1)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i)) \quad (2)$$

$$\Delta f_{min}(\Delta t_i^*)=\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{i-1}}}\left|\frac{\Delta f_{min}(\Delta t_{i-1}^*)}{\Delta t_{i-1}^*}\right|\right)^{0.5} \quad (3)$$

<u>Физика процесса:</u> адаптация параметра измерителя к измеряемому параметру физического объекта

Разностный аналог производной (разностное отношение)

Допущение: <u>искомое разностное отношение</u> находится отсчётами и вычислениями по алгоритму (1) – (3):

$$f\left(\Delta f_{min(i)}, \Delta t_i^*\right) = \frac{\Delta f_{min(i)}}{\Delta t_i^*} = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \qquad (4)$$

Здесь: $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i^*$, $f(t_i) - f(t_{i-1}) = \Delta f_{min(i)}$

Разностное отношение (4) защищено от огреха, порождаемого несовместимостью чисел вещественных и величин, отображающих данные натурных измерений (или – сомножителей СН…).

Натурный эксперимент

ного рассеяния

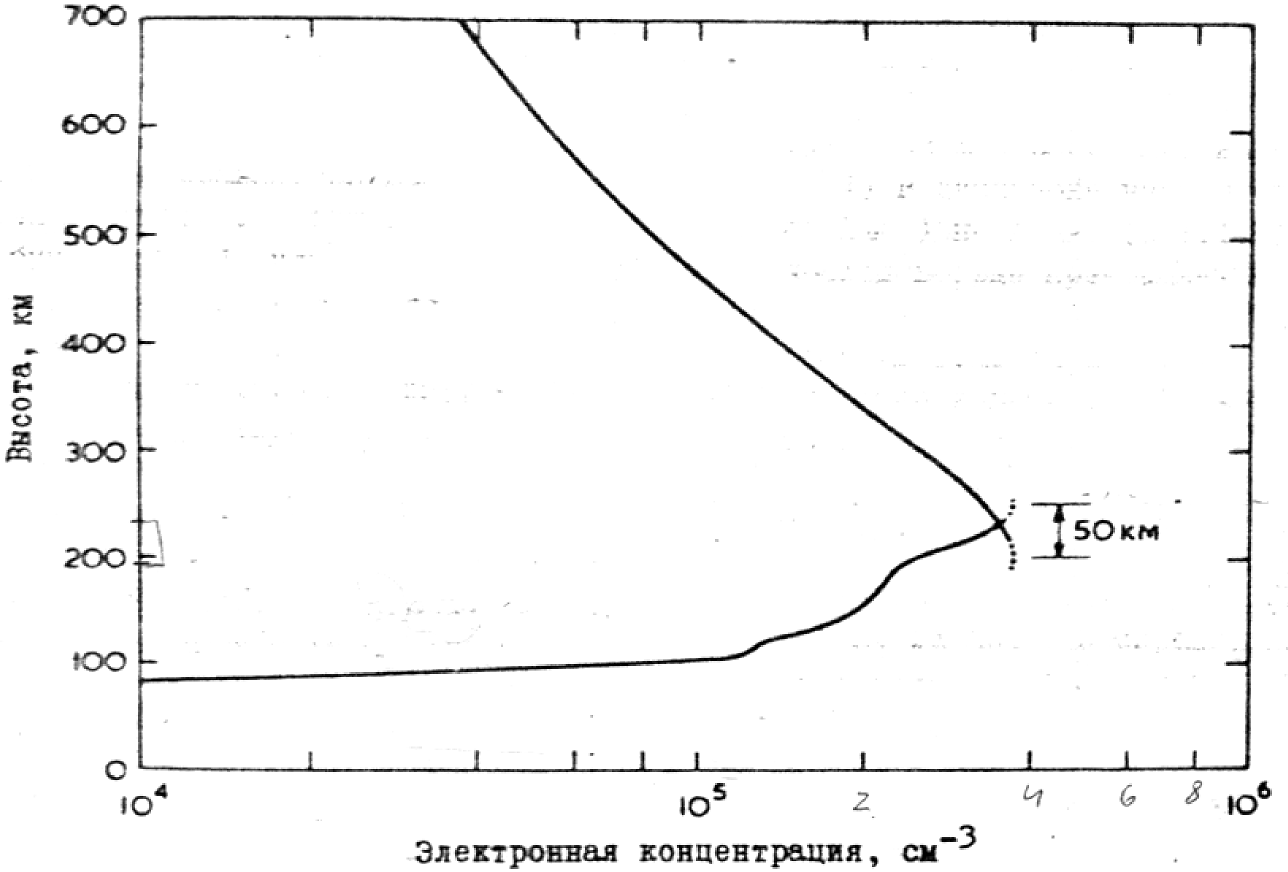


Рис. 5.5. Сравнение распределения электронной концентрации, вычисленной по ионограммам внешнего и наземного зондирования за 4 июля 1966 г. Наземная ионограмма была записана в Форт-Бельвуаре в 13.15 UT, распределение во внешней ионосфере является средним из двух ионограмм Алуэтта-II, записанных около 13.14 UT, когда спутник находился на высоте 2200 км и в стороне от Бельвуара на 0,8°N и 0,1°W (одна ионограмма) и на 0,6°S и 0,3°W (другая ионограмма).

Численное испытание

Испытанием предложенного подхода к конструкции аналога производной выбрано сравнение накопленной погрешности по области численного интегрирования предложенного и известного методов. Для численного интегрирования выбран интеграл

$$I = \int_{e^{-p}}^{1} \left(\frac{1}{x}\right) dx = p,$$

значение которого известно точно.

Накопленная погрешность интегрирования методом трапеций с постоянным, но оптимизированным (компромиссным) шагом для всей области интегрирования находится как разность вычисляемого значения интеграла I(n) с точным его значением p: $Er(I_n) = |I(n) - p|$. «Оптимизированный» и постоянный по всей области интегрирования шаг находится дихотомией,

как шаг, обеспечивающий минимум накопленной погрешности по всей области интегрирования.

Накопленная погрешность по предложенному алгоритму находится как разность $\boldsymbol{Er(I^*) = |I^* - p|}$ с шагом, адаптируемым при каждом шаге. Здесь *I - численное значение интеграла с адаптируемым шагом. Численное интегрирование с адаптацией выполнено также методом трапеций, что обеспечивает при одном и том же «базовом» методе трапеций чистое различие результатов обоих подходов.**

Результаты сравнения показывают уменьшение числа узлов по предлагаемому методу сравнительно с «оптимизированным» методом трапеций более, чем в 3 раза ($\boldsymbol{n = 300 \times 10^3}$; $\boldsymbol{n^* \approx 92 \times 10^3}$); накопленная погрешность соответственно меньше, больше чем на 2 порядка: $\underline{\boldsymbol{Er(I_n)/Er(I^*)\ \approx 148}}$; показатель степени *p* ~ *9.19*; разрядность вычислений полагалась равной 16.

Выводы

Модель вещественого числа не всегда оказывается подходящей для решения задачи физики.

Конструкцию производной интервальных величин можно считать первым шагом к разработке инструмента уменьшения погрешности как в эксперименте, так и при вычислениях.

Интервал неопределённости – это параметр физики. А также - инструмент измерения и вычисления, вносящий «наименьшее принуждение» в процессы измерения и вычисления.

Обобщение СН выявляет, в отличие от постулата непрерывности, первичность дискретности явлений <u>макро</u>масштабов.

Сделано предположение о полезности союза физики и математики в целях уменьшения погрешности измерений и вычислений.

Литература

1. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.
2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ.
3. Schröder G. Differentiation of interval functions // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1972. – Vol. 36, No. 2. – P. 485-490.
4. Терехов Л.С. Оценка производной на основе обобщённого соотношения неопределённостей//Изв. вузов. Физика.– 2008. - № 9/2. С. 84-89.
5. Сколник М. Введение в технику радиолокационных систем. М.: Мир, 1965. 520 с.
6. Терехов Л.С. О квантовании неопределенности измеряемых величин //Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям «Интервал-06», Россия, Петергоф, 1-4 июля 2006 г: Расшир. тезисы докладов /СПбГУ. – СПб, 2006. – С. 123-125.
7. Пиггот В.Р., Равер К. Руководство URSI по интерпретации и обработке ионограмм.

   - М.: Наука, 1977. - 343с.

Адреса

e-mail: lev.terekhov@gmail.com

8-960-983-77-43;

(8-381-2) 31-80-45 (Омск)