# *Критерий реализуемости интервальных динамических систем в терминах матричных норм*

*Лазарева А.Г., Пушков С.Г.*

# Задача реализации для интервальных динамических систем

$$\{A_1, A_2, \ldots\}. \qquad (1)$$

Задача реализации:

для заданной последовательности интервальных матриц размера $p \times m$

$$\{A_1, A_2, \ldots\}, \; A_i \in IR^{p \times m}, \quad i = 1,2,\ldots$$

определить математическую модель этой системы в пространстве состояний, т.е. размерность $n$ и тройку интервальных матриц $(F, G, H)$ таких, что выполняются интервальные уравнения

$$A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

где $F \in IR^{n \times n}$, $G \in IR^{n \times m}$, $H \in IR^{p \times n}$, а матричные произведения выполняются справа налево, т.е. сначала вычисляется произведение $F\,G$, затем $F(F\,G)$ и т.д.

# *Метод граничных реализаций*

Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю. О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Вычислительные технологии. – 2004, Т.9, №1. – С.75-85.

*Определение.* Для последовательности интервальных матриц

$$\{A_1, A_2, \ldots\} = \{[\underline{A}_1, \overline{A}_1], [\underline{A}_2, \overline{A}_2], \ldots\} \quad (3)$$

реализации последовательности

$$\{\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots\} \quad (4)$$

называют нижними граничными реализациями последовательности (3), а реализации последовательности

$$\{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots\} \quad (5)$$

называют верхними граничными реализациями последовательности (3).

# Теорема о положительных граничных реализациях

**Теорема.** Если для нижней и верхней граничных реализаций одинаковой размерности $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ и $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ некоторой последовательности интервальных матриц, выполняются условия:

1) $\underline{F}, \underline{G}, \underline{H}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$ — неотрицательные;

2) $\underline{F} \le \overline{F}, \underline{G} \le \overline{G}, \ \underline{H} \le \overline{H}$,

то интервальная система $\left([\underline{F}, \overline{F}], [\underline{G}, \overline{G}], [\underline{H}, \overline{H}]\right)$ является интервальной точной (алгебраической) реализацией этой последовательности.

**Следствие.** Если для граничных реализаций одинаковой размерности $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ и $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ некоторой последовательности интервальных матриц найдутся такие матрицы $T_1$ и $T_2$, что выполняются неравенства

$$\hat{\underline{F}} \le \hat{\overline{F}},\ \hat{\underline{G}} \le \hat{\overline{G}},\ \ \hat{\underline{H}} \le \hat{\overline{H}},$$

где

$$\hat{\underline{F}} = T_1 \underline{F} T_1^{-1}, \hat{\underline{G}} = T_1 \underline{G},\ \ \hat{\underline{H}} = \underline{H} T_1^{-1}, \tag{6}$$

$$\hat{\overline{F}} = T_2 \overline{F} T_2^{-1},\ \hat{\overline{G}} = T_2 \overline{G},\ \ \hat{\overline{H}} = \overline{H} T_2^{-1}, \tag{7}$$

$\hat{\underline{F}}, \hat{\underline{G}}, \hat{\underline{H}}, \hat{\overline{F}}, \hat{\overline{G}}, \hat{\overline{H}}$ — неотрицательные, то интервальная система $\left([\hat{\underline{F}}, \hat{\overline{F}}], [\hat{\underline{G}}, \hat{\overline{G}}], [\hat{\underline{H}}, \hat{\overline{H}}]\right)$ является интервальной алгебраической реализацией этой последовательности.

# Достаточное условие реализуемости интервальных динамических систем

*Определение.* Последовательность интервальных матриц (1) рекуррентна, если существует такое целое $r > 0$ и коэффициенты $b_1, b_2, ..., b_r \in \mathrm{IR}$ такие, что

$$A_{r+j+1} = \sum_{i=1}^{r} b_i A_{i+j}, \quad j = 0, 1, 2...$$

*Утверждение.* Если последовательность интервальных матриц рекуррентна, то для нее существует алгебраическая интервальная реализация.

# Необходимое условие существования граничных реализаций

Лазарева А.Г. «Необходимое условие существования неотрицательных граничных реализаций для импульсной последовательности интервальных матриц» // Фундаментальные науки и образование: Материалы II Всероссийской научно-практической конференции.- Бийск: БПГУ, 2008.-С.78-81

***Утверждение.*** Если для неотрицательных граничных реализаций $(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H})$ и $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ последовательности (1) существуют изоморфные им реализации, удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы, то

$$\lambda_{\max}(\underline{F}) \le \lambda_{\max}(\overline{F}),$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число указанной в скобках матрицы.

# Необходимый критерий существования интервальных алгебраических реализаций

**Предложение.** Если для заданной импульсной последовательности интервальных матриц существует алгебраическая реализация, то для граничных реализаций $(\underline{F},\underline{G},\underline{H})$ и $(\overline{F},\overline{G},\overline{H})$ найдется, по крайней мере, одна матричная норма $\|\cdot\|$, для которой имеет место оценка:

$$\|\underline{F}\| \le \|\overline{F}\|.$$

## Хорн Р., Джонсон Ч.
## Матричный анализ. - М.: Мир, 1989.

**Теорема.** Если $\|\cdot\|$ — матричная норма на $M_n$ и если матрица $S \in M_n$ невырождена, то формула

$$\| A \|_S \equiv \| SAS^{-1} \|, \quad A \in M_n,$$

задает матричную норму.

# Пример 1

$$A_1 = [0.5, 2],\ A_2 = [0.8, 3],\ A_3 = [1.4, 4.9],\ A_4 = [2.45, 8.5].$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1 \\ 0.24 & 0.15 \end{pmatrix},\quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.2 & 1.375 \end{pmatrix},\quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$$\left\|\underline{F}\right\| = 1.84;\quad \left\|\overline{F}\right\| = 2.375. \tag{10}$$

Очевидно, что вычисленные матрицы не удовлетворяют условиям теоремы 1. Применим преобразования подобия для (6) $T = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 1.6 & 1 \end{pmatrix}$, для (7) $T = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ получим

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0.98 \\ 0 & 1.75 \end{pmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0.49 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0.98 \\ 0.01275 & 1.875 \end{pmatrix}, \quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [0 \quad 1] & [0.98 \quad 0.98] \\ [0 \quad 0.01275] & [1.75 \quad 1.875] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} [0.49 \quad 1.98] \\ [0.8 \quad 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} [1.02 \quad 1.02] & [0 \quad 0] \end{pmatrix}. \quad (11)$$

# Пример 2

$$A_1 = [0, 0.1],\ A_2 = [0.9, 1.1],\ A_3 = [0.81, 1.32],\ A_4 = [1.539, 2.662].$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0.9 & 0 \end{pmatrix},\quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9 \end{pmatrix},\quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 1.1 & 1 \\ -107.8 & -9.9 \end{pmatrix},\quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$\left\|\underline{F}\right\| = 1.8;\quad \left\|\overline{F}\right\| = 128.8. \tag{14}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} [0 \quad 0] & [1 \quad 1] \\ [0.9 \quad 1.1] & [0.9 \quad 1.1] \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} [0 \quad 0.1] \\ [0.9 \quad 1.1] \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} [1 \quad 1] & [0 \quad 0] \end{pmatrix}. \tag{15}$$

***Благодарю***

***за внимание!***