Уточнение границ решений систем интервальных уравнений методом интервального анализа чувствительности

Е.Л. Рощина

Хакасский технический институт, г. Абакан — филиал Сибирского Федерального Университета

Аннотация

Рассмотрен метод интервального анализа чувствительности (МИАЧ) для уточнения границ решений систем интервальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров.

1 Постановка задачи

Интервальной системой линейных уравнений, зависящих от параметров, называется система вида

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) \cdot x = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ — матрица размера $n \times n$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})$ — n-вектор правой части, причём элементы матрицы и правой части зависят от m интервальных параметров, $k \in \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_m)$, то есть, $k_i = [\underline{\boldsymbol{k}}_i, \overline{\boldsymbol{k}}_i]$.

Множеством решений системы (1) называется множество

$$\Xi = \bigl\{ x \in \mathbb{R}^n \mid A(k) \cdot x = b(k) \text{ для некоторых } k_i = [\underline{\boldsymbol{k}}_i, \overline{\boldsymbol{k}}_i], i = 1, \ldots, m \bigr\}, \tag{2}$$

образрванное всевозможными решениями точечных линейных систем уравнений с матрицей и правой частью, которые которые пробегают матрица $A(k)$ и вектор $b(k)$. Наша задача состоит в том, чтобы найти его внешнюю оценку (по-возможности, наиболее точную).

Интервальные методы решения систем можно разделить на прямые и итерационные. Здесь это деление более условное, поскольку каждое приближение итерационного алгоритма обычно дает двустороннее решение и, таким образом, ответ получается каждый раз за конечное число действий. Более того, с учетом операции пересечения и влияния ошибок округления реальная работа итерационного алгоритма обычно заканчивается за конечное число итераций тождественным повторением. Для построения итерационных процессов используется принцип сжимающих отображений или более общий подход, основанный на теореме Шаудера о неподвижной точке. При решении интервальных задач часто используется анализ чувствительности, то есть исследуется характер зависимости отдельных интервальных параметров на область решения. Рассмотрим общий случай интервальной задачи.

2 Общий случай

Пусть дано некоторое операторное уравнение

$$\boldsymbol{L}(u,k)=0 \tag{3}$$

где u — неизвестное решение, $k \in \boldsymbol{k}=(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_m)$ — вектор параметров. Предположим, что существует оператор решения

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

Для построения решения необходимо найти интервальное расширение оператора $\boldsymbol{T}$, которое не всегда является оптимальным для системы (3). Для определённости будем искать верхнюю границу множества решений — $\overline{\boldsymbol{u}}$. Отметим, что существует набор параметров $\boldsymbol{k}^* \in k$, такой что $\overline{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{T}(k^*)$. Предлагаемый нами алгоритм уточнения границ интервального решения состоит в следующем: ищем вектор такой, что $\boldsymbol{k}^* \in k$, ширина вектора $\boldsymbol{k}^*$ должна быть минимальной.

Алгоритм уточнения $\boldsymbol{k}^*$

Начальный шаг:

Задаем $\boldsymbol{k^*} := \widetilde{\boldsymbol{k}}$. Здесь

$$\widetilde{\boldsymbol{k_j}} := \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \ge 0 \\ \underline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \le 0 \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если} \quad 0 \in \boldsymbol{u}'_j, \end{cases}$$

где

$$\boldsymbol{u}'_j = \frac{\partial u}{\partial k_j} = \frac{\partial T}{\partial k_j}(\boldsymbol{k}), \qquad j=1,\ldots,m$$

Последующие шаги:

`DO WHILE` $(\ \exists j : \operatorname{wid} \widetilde{\boldsymbol{k}}_j \ne 0 \text{ and } 0 \notin \boldsymbol{u}_j\ )$

1. $\boldsymbol{u}'_j := \frac{\partial T}{\partial k^*}(\boldsymbol{k})$, $j=1,\ldots,m$

2. $$\widetilde{\boldsymbol{k_j}} := \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \ge 0 \\ \underline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \le 0 \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если} \quad 0 \in \boldsymbol{u}'_j, \end{cases}$$

3. $\boldsymbol{k^*} := \widetilde{\boldsymbol{k}}$

`END DO`

Если ширина вектора $\boldsymbol{k}^*$ нулевая, то найдена верхняя граница решения $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}(k^*)$. Аналогично можно построить нижнюю границу решения.

3 Системы интервальных линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров

Пусть $\boldsymbol{A} \cdot x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ — данная нам вещественная интервальная матрица, коэффициенты которой зависят от параметра $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \dots, \boldsymbol{k}_m)$ и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ — данный интервальный вектор. Для решения задачи поступаем следующим образом. Построим сначала интервальные матрицы $\boldsymbol{A}_r^1$ и $\boldsymbol{A}_r^2$ и интервальные векторы $\boldsymbol{b}_r^1$ и $\boldsymbol{b}_r^2$ согласно правилам:

$$\boldsymbol{A}_r^1 = \begin{cases} a_{ij}(\underline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \geq 0 \\ a_{ij}(\overline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \leq 0 \\ \boldsymbol{a_{ij}}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}_r^2 = \begin{cases} a_{ij}(\overline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \geq 0 \\ a_{ij}(\underline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \leq 0 \\ \boldsymbol{a_{ij}}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{b}_r^1 = \begin{cases} b_i(\underline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \geq 0 \\ b_i(\overline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \leq 0 \\ \boldsymbol{b_i}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{b}_r^2 = \begin{cases} b_i(\overline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \geq 0 \\ b_i(\underline{k_r}), & \text{если} \quad \frac{\partial x}{\partial k_r} \leq 0 \\ \boldsymbol{b_i}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{8}$$

Теперь нужно решить две системы:

$$\boldsymbol{A}_r^1 y_r = \boldsymbol{b}_r^1 \tag{9}$$

и

$$\boldsymbol{A}_r^2 z_r = \boldsymbol{b}_r^2, \tag{10}$$

где r-ая компонента $\boldsymbol{y}_r$ содержит нижнюю границу r-ой компоненты $\boldsymbol{x}_r$ из $\boldsymbol{x}$, а $\boldsymbol{z}_r$ содержит верхнюю границу $\boldsymbol{x}$. Используя методы интервального анализа, решим уравнения (9) и (10) для $r = 1, \dots, n$, найдя верхнюю и нижнюю границы каждой компоненты множества решений $\underline{x}_r$ и $\overline{x}_r$.

4 Приложения

Рассмотрим краевую дифференциальную задачу для стационарного уравнения диффузии:

$$\begin{aligned} &Lu = (-pu')' + qu = f, \qquad 0 < x < 1, \\ &u(0) = 0, \\ &u(1) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $p \in [\underline{p}, \overline{p}]$, $q \in [\underline{q}, \overline{q}]$, $p > 0$, $q > 0$ — интервальные константы а $f(x)$ — непрерывная функция, относительно которой также будем считать, что её значения не известны точно.

Аппроксимируя вторую производную трехточечным разностным оператором на равномерном шаблоне, получим разностную краевую задачу на сетке $\omega = \{x = ih\}$, $i = \overline{0, n}$:

$$\frac{-p(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{h^2} + qy_i = f_i. \tag{12}$$

Рассматриваемая задача свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей размера $(n-1) \times (n-1)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{2p}{h^2} + q & -\frac{p}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{p}{h^2} & \frac{2p}{h^2} + q & -\frac{p}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{h^2} & \frac{2p}{h^2} + q & -\frac{p}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{p}{h^2} & \frac{2p}{h^2} + q & -\frac{p}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{p}{h^2} & \frac{2p}{h^2} + q & -\frac{p}{h^2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{p}{h^2} & \frac{2p}{h^2} + q \end{pmatrix}.$$

Вместо (12) можно записать

$$\boldsymbol{A}y = \boldsymbol{f}, \tag{13}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$. Такие интервальные системы линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональными матрицами удобно решать интервальным методом прогонки [4].

Для иллюстрации наших построений рассмотрим конкретный численный пример с задачей

$$\begin{aligned} &Lu = (-pu')' + qu = f, \qquad 0 < x < 1 \\ &u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \\ &p \in [2, 4],\ q \in [1, 2],\ f \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Вычислим внешние оценки множества решений методом интервальной прогонки и с помощью предложенного алгоритма уточнения (МИАЧ). Для этого в системе программирования Delphi 7 нами была создана программа, которая дала следующие результаты:

Интервальная прогонка — $\boldsymbol{x} = ([0.49, 2.00], [0.52, 2.01], [0.52, 2.01], [0.52, 1.94])^\top$

МИАЧ — $\boldsymbol{x} = ([0.98, 0.98], [0.99, 1.02], [0.52, 1.96], [0.97, 1.00])^\top$.

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* — Москва: Мир, 1987. – 356 с.

[2] Добронец Б.С. *Интервальная математика.* – Красноярск: Красноярский гос. ун-т, 2004. – 216 с.

[3] Добронец Б.С., Рощина Е.Л. Приложение интервального анализа чувствительности // *Вычислительные Технологии.* – 2002. – Т. 7, №1. – С. 75–82.

[4] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.