Теорема Миранды
и
её интервальные приложения

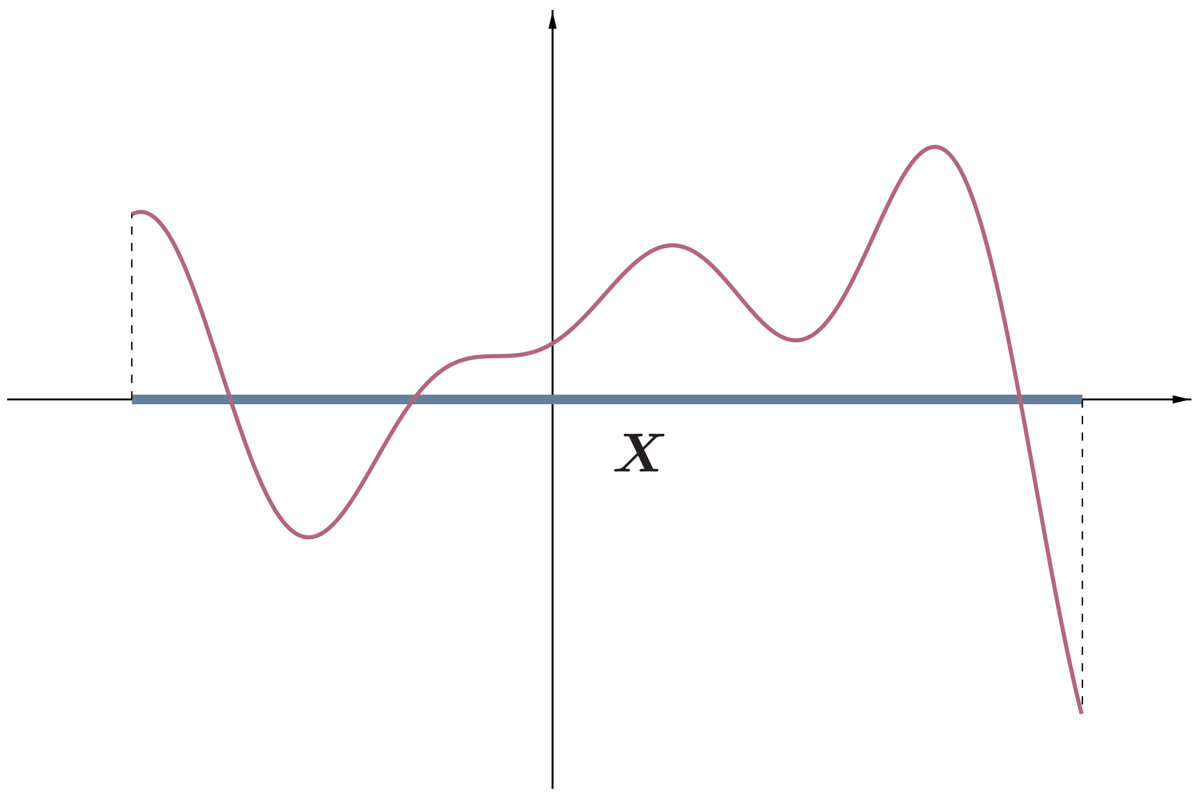
С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН
г. Новосибирск

Теорема Больцано-Коши

Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на интервале $\boldsymbol{X}$ из $\mathbb{R}$ и на его концах принимает значения разных знаков.

Тогда внутри интервала существует нуль функции F, т.е. точка $\tilde{x}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.



Теорема Миранды

C. Miranda
Un' osservatione su un teorema di Brouwer
– Bollet. Unione Mat. Ital. Serie II.
1940 год, том 3, стр. 5–7.

Карло Миранда (1912–1982) — итальянский математик

Теорема Миранды

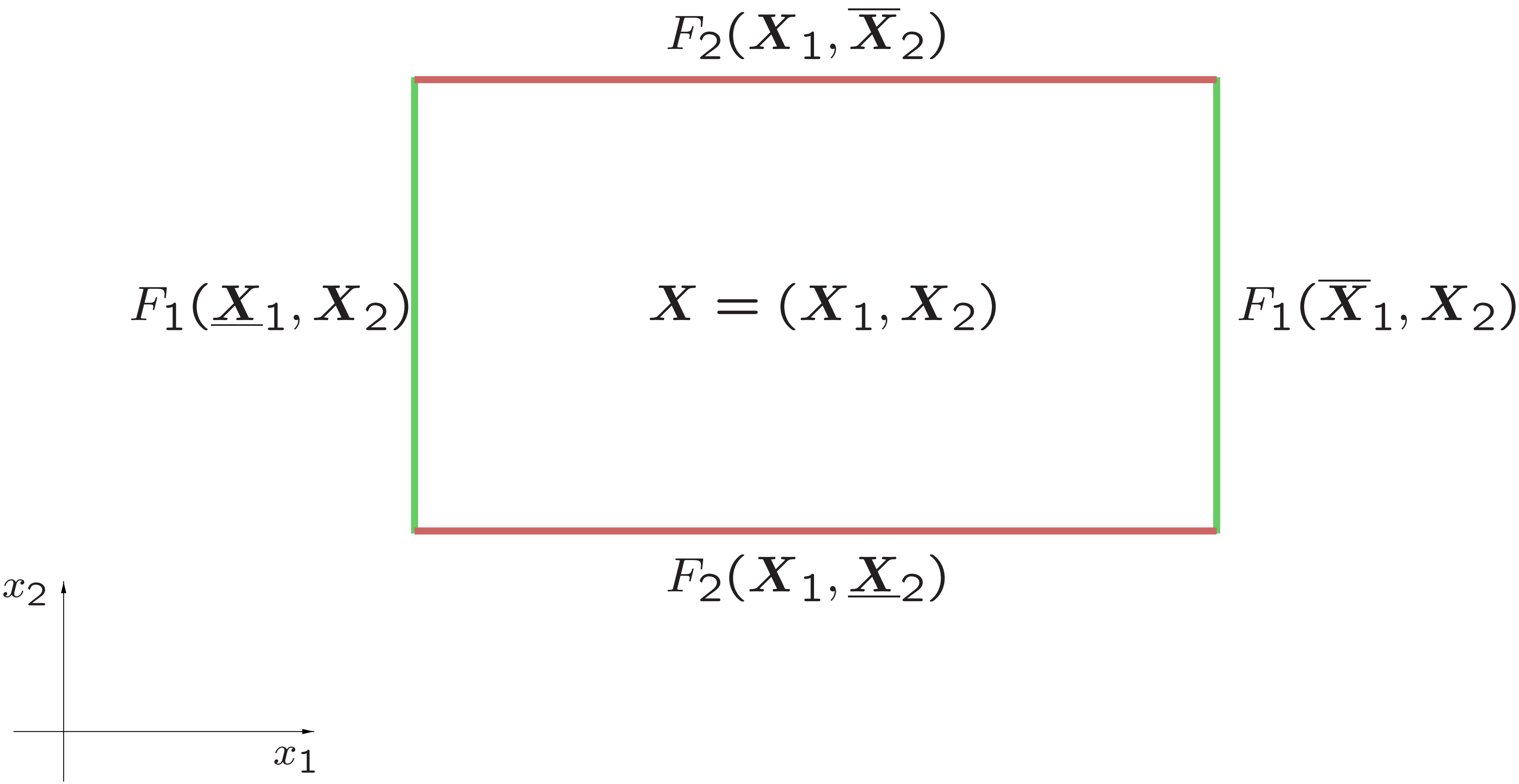
Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \Big(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x) \Big)^\top$ — функция, непрерывная на брусе $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, и для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место

$$F_i\Big(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \underline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{X}_n\Big) \times F_i\Big(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \overline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{X}_n\Big) \le 0,$$

т. е. области значений компонент $F(x)$ на противоположных гранях бруса $\boldsymbol{X}$ имеют разные знаки.

Тогда на брусе $\boldsymbol{X}$ существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.

Теорема Миранды



Теорема Миранды

Особенности применения —

- специальная форма множества, на котором исследуется существование решения (брус в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям)
- необходимость оценивать область значений функции на брусах в $\mathbb{R}^{n-1}$

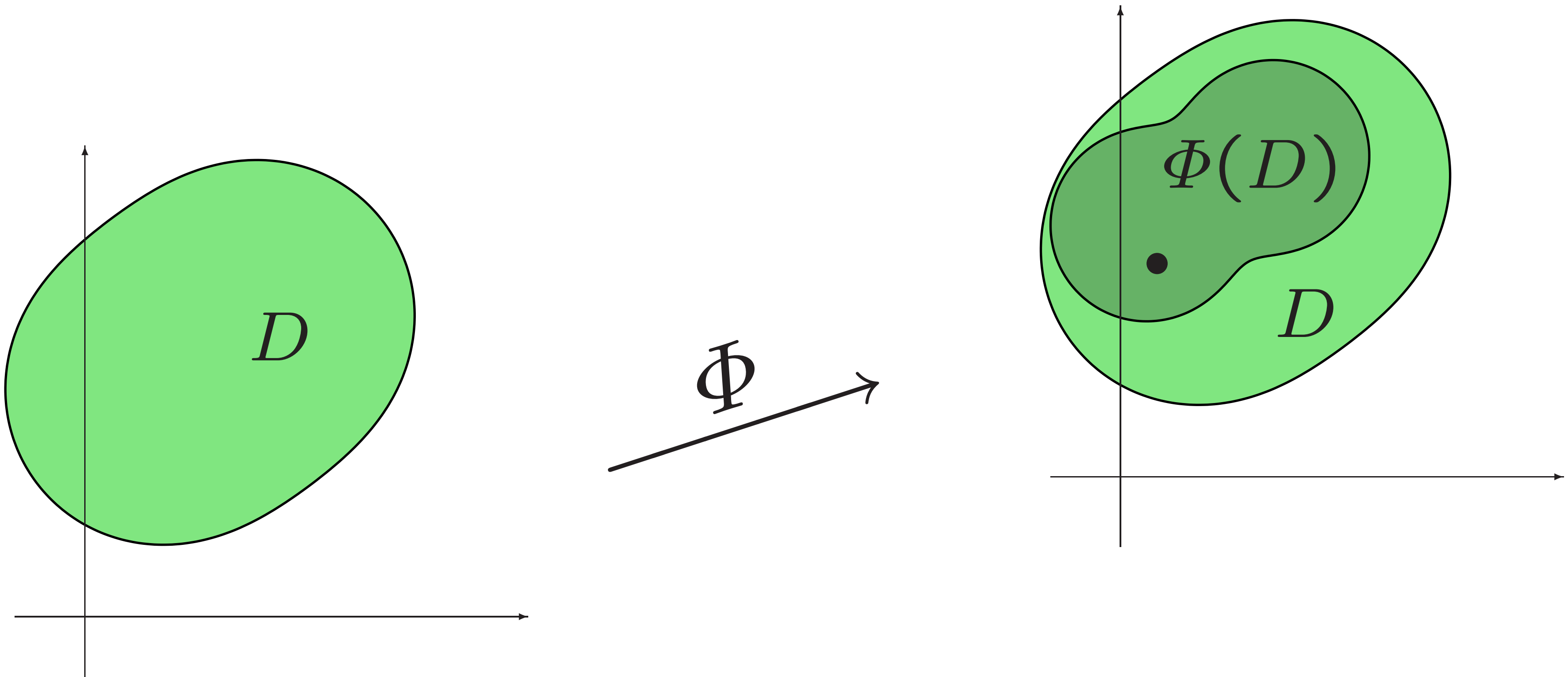
Теорема Брауэра о неподвижной точке

Пусть D — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Если непрерывное отображение $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ переводит D в себя, т.е.

$$\Phi(D) \subseteq D,$$

то оно имеет на D неподвижную точку $x^\star$, такую что

$$x^\star = \Phi(x^\star).$$



Интервальные линейные системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + & \ldots & + \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + & \ldots & + \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 + \boldsymbol{a}_{n2}x_2 + & \ldots & + \boldsymbol{a}_{nn}x_n & = & \boldsymbol{b}_n, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальными матрицей $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ и вектором $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Множество решений

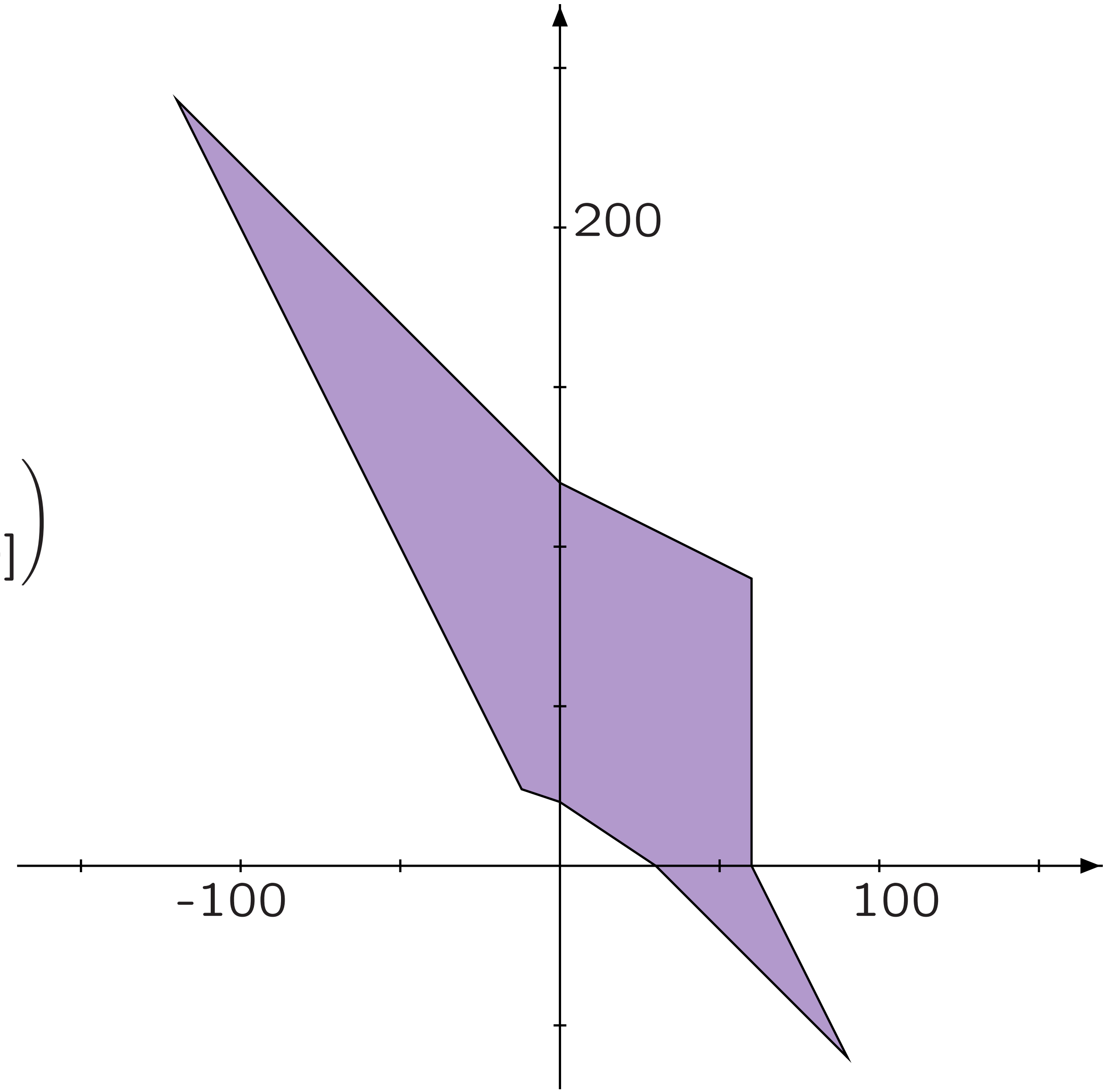
интервальной линейной системы уравнений —

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \right\}$$

Также *объединённое множество решений* . . .

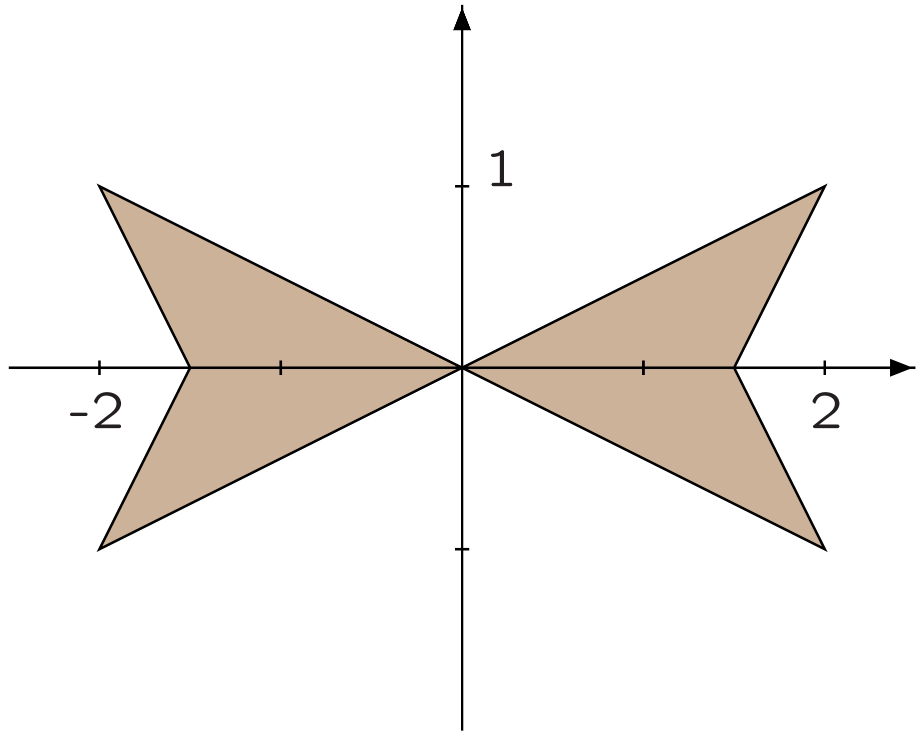
Пример — система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

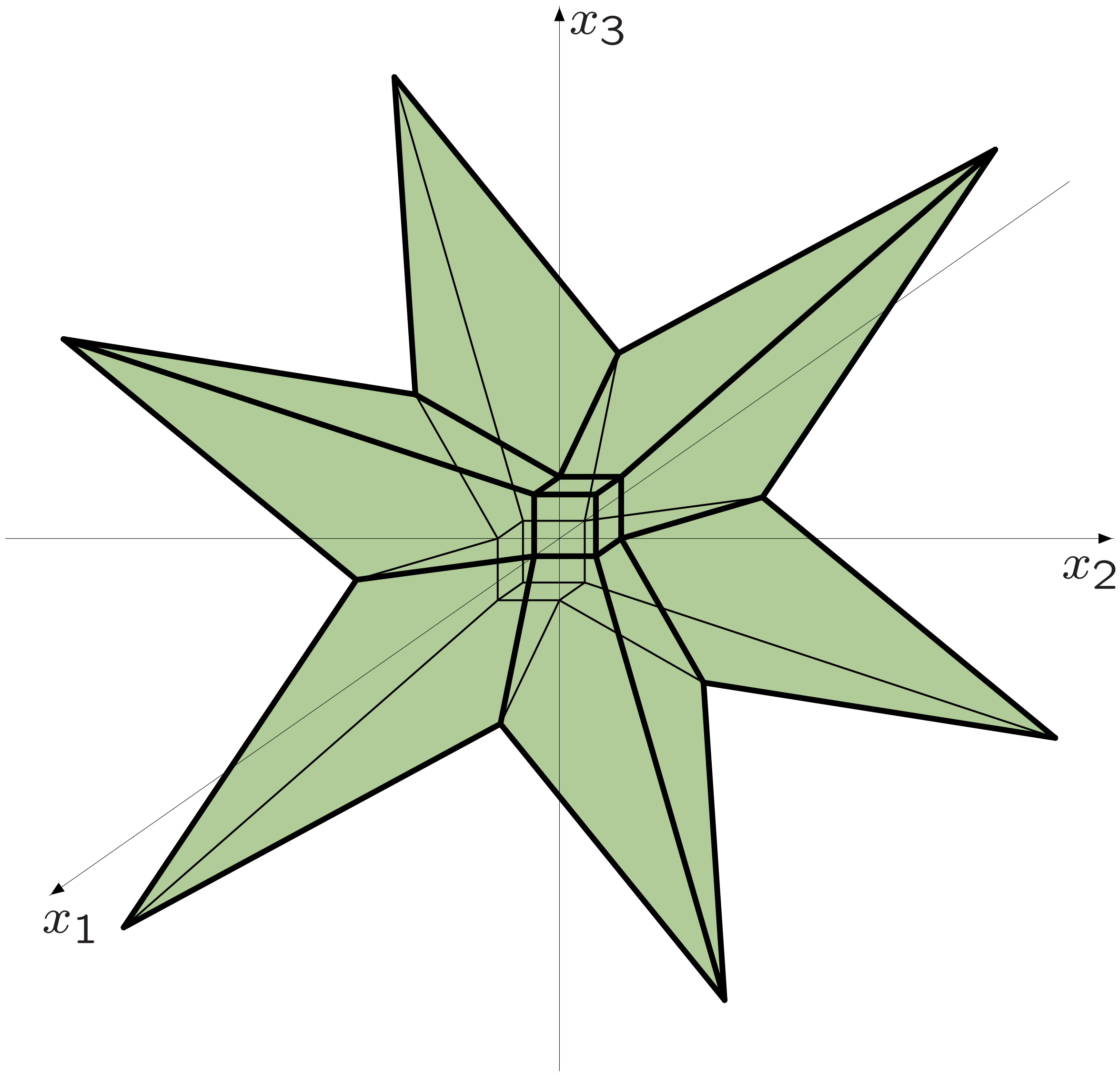


Пример — почти несвязное множество решений

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix}$$



Пример — система Ноймайера



$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

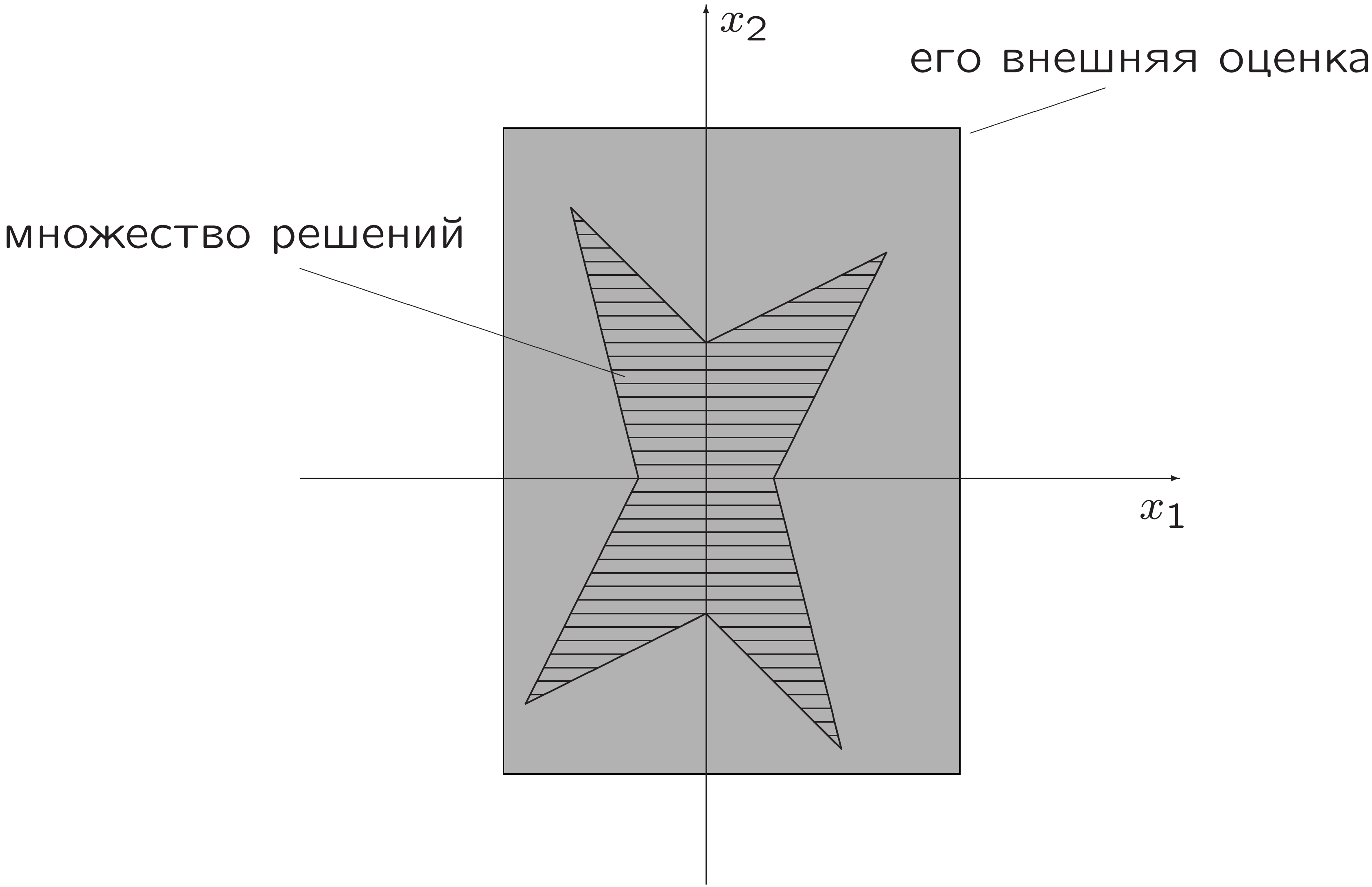
Интервальные линейные системы уравнений

Точное и полное описание множества решений

- практически невозможно в силу огромной сложности,
- в действительности не нужно.

В большинстве случаев достаточно знать *приближённое описание*, или *оценку* множества решений более простыми множествами (т.е. имеющими меньшую конструктивную сложность).

«Внешняя задача»



Постановка задачи

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ предполагается неособенной

Найти (по-возможности, меньший) брус $\boldsymbol{U}$, содержащий множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$

Практический пример

Режимы работы электроэнергетических систем моделируются системами линейных уравнений «узловых напряжений»

$$YU = J,$$

где Y — квадратная матрица узловых проводимостей,
J — вектор задающих токов,
U — вектор искомых узловых напряжений.

В результате изменения токов нагрузки и коммутационных переключений в электрической схеме сети коэффициенты системы становятся интервальными:

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{J},$$

где $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{U}$ — интервальные векторы и матрицы.

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с матрицей $A = (\, a_{ij})$ и вектором $b = (\, b_i)$.

Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$

— образована интервалами $\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \subset \mathbb{R}$ так, что

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} = \left\{ x \star y \mid x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y} \right\} \qquad \text{для} \qquad \star \in \{+, -, \cdot, /\}$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \left[\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}\right]$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \left[\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\right]$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left[\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\right]$$

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \left[1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}}\right] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0$$

Оценки решений линейных систем

Для

$$F(x) = Ax - b$$

с $n \times n$-матрицей $A = (a_{ij})$ и n-вектором $b = (b_i)$ в качестве следствия теоремы Миранды получаем:

Если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \qquad (*)$$

или

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0, \qquad (**)$$

то брус $\boldsymbol{X}$ содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$.

... неравенства $(*)$ верны при $a_{ii} \geq 0$, а $(**)$ — при $a_{ii} \leq 0$.

Полная интервальная арифметика Каухера

Элементы $\mathbb{KR}$ — пары $\boldsymbol{x} := [\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,]$, причём не обязательно $\underline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}$

$$\begin{cases} \textit{правильные интервалы } \boldsymbol{x} \text{ с } \underline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{x}} \\ \textit{неправильные интервалы } \boldsymbol{x} \text{ с } \underline{\boldsymbol{x}} > \overline{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

Дуализация —

$$\operatorname{dual}[\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,] \;:=\; [\,\overline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,]$$

Правильная проекция —

$$\operatorname{pro} \boldsymbol{x} \;:= \begin{cases} \boldsymbol{x}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ правильный} \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{x}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ неправильный} \end{cases}$$

Полная интервальная арифметика Каухера

Упорядочение «по включению»

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{x}} \geq \underline{\boldsymbol{y}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}$$

Сложение и умножение на число

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \ := \ \left[\, \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}} \,\right]$$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} \ := \ \begin{cases} [\,\lambda\, \underline{\boldsymbol{x}}, \lambda\, \overline{\boldsymbol{x}}\,], & \text{если} \ \ \lambda \geq 0 \\ [\,\lambda\, \overline{\boldsymbol{x}}, \lambda\, \underline{\boldsymbol{x}}\,], & \text{иначе} \end{cases}$$

Всякий $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$ имеет единственный противоположный $\operatorname{opp} \boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} + \operatorname{opp} \boldsymbol{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{opp} \boldsymbol{x} := [\,-\underline{\boldsymbol{x}}, -\overline{\boldsymbol{x}}\,]$$

Обозначаем

$$\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{y} \ := \ \boldsymbol{x} + \operatorname{opp} \boldsymbol{y}$$

Полная интервальная арифметика Каухера

$\mathcal{P} := \{\, x \in \mathbb{KR} \mid (\underline{x} \geq 0)\;\&\;(\overline{x} \geq 0) \,\}$ $\qquad$ $\mathcal{Z} := \{\, x \in \mathbb{KR} \mid \underline{x} \leq 0 \leq \overline{x} \,\}$

$-\mathcal{P} := \{\, -x \mid x \in \mathcal{P} \,\}$ $\qquad$ $\operatorname{dual} \mathcal{Z} := \{\, x \in \mathbb{KR} \mid \operatorname{dual} x \in \mathcal{Z} \,\}$

$\cdot$	$b \in \mathcal{P}$	$b \in \mathcal{Z}$	$b \in -\mathcal{P}$	$b \in \operatorname{dual} \mathcal{Z}$
$a \in \mathcal{P}$	$[\,\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\,]$	$[\,\overline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\,]$	$[\,\overline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}\,]$	$[\,\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}\,]$
$a \in \mathcal{Z}$	$[\,\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\,]$	$[\,\min\{\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\},$ $\max\{\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\}\,]$	$[\,\overline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\underline{b}\,]$	0
$a \in -\mathcal{P}$	$[\,\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\,]$	$[\,\underline{a}\,\overline{b}, \underline{a}\,\underline{b}\,]$	$[\,\overline{a}\,\overline{b}, \underline{a}\,\underline{b}\,]$	$[\,\overline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\,]$
$a \in \operatorname{dual} \mathcal{Z}$	$[\,\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\,]$	0	$[\,\overline{a}\,\overline{b}, \underline{a}\,\overline{b}\,]$	$[\,\max\{\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\},$ $\min\{\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\}\,]$

Полная интервальная арифметика Каухера

Обратные элементы существуют лишь для интервалов $\boldsymbol{x}$ с $\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}} > 0$.

Вычитание и деление:

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{x} \,/\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot [\, 1/\overline{\boldsymbol{y}}, 1/\underline{\boldsymbol{y}}\,] \qquad \text{для} \quad \underline{\boldsymbol{y}}\,\overline{\boldsymbol{y}} > 0$$

Все интервальные операции в $\mathbb{KR}$ *монотонны по включению*:

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}', \;\; \boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{y}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x}' \star \boldsymbol{y}' \qquad \text{для} \quad \star \in \{\, +, \, -, \, \cdot, \, / \,\}.$$

Оценки решений линейных систем

Пусть $a_{ii} \geq 0$, т.е. имеет место пара соотношений $(*)$. Тогда

$$\overline{\left(a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \leq 0 \qquad \text{и} \qquad \underline{\left(a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \geq 0,$$

или

$$\overline{\left(a_{ii}\cdot \overline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \leq 0, \qquad \underline{\left(a_{ii}\cdot \underline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \geq 0.$$

Поскольку $a_{ii} \geq 0$, то

$$a_{ii}\cdot \underline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i = \underline{a_{ii}\cdot \text{dual}\ \boldsymbol{X}_i} \qquad \text{и} \qquad a_{ii}\cdot \overline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i = \overline{a_{ii}\cdot \text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i,$$

так что получаем

$$\overline{\left(a_{ii}\cdot \text{dual}\ \boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \leq 0, \qquad \underline{\left(a_{ii}\cdot \text{dual}\ \boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j \right)} - b_i \geq 0.$$

Оценки решений линейных систем

Пусть $a_{ii} \le 0$, т.е. имеет место пара соотношений $(**)$. Тогда

$$\underline{\left(a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\ne i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \overline{\left(a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\ne i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \le 0,$$

или

$$\underline{\left(a_{ii}\cdot\overline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\ne i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \ge 0, \qquad \overline{\left(a_{ii}\cdot\underline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\ne i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \le 0.$$

Поскольку $a_{ii} \le 0$, то

$$a_{ii}\cdot\overline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i = \underline{a_{ii}\cdot\text{dual}\ \boldsymbol{X}_i} \qquad \text{и} \qquad a_{ii}\cdot\underline{\text{dual}\ \boldsymbol{X}}_i = \overline{a_{ii}\cdot\text{dual}\ \boldsymbol{X}_i},$$

так что получаем

$$\underline{\left(a_{ii}\cdot\text{dual}\ \boldsymbol{X}_i + \sum_{j\ne i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \ge 0, \qquad \overline{\left(a_{ii}\cdot\text{dual}\ \boldsymbol{X}_i + \sum_{j\ne i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \le 0.$$

Оценки решений линейных систем

Полученные для $a_{ii} \geq 0$ и $a_{ii} \leq 0$ соотношения совпадают!

Поэтому в целом, вне зависимости от знака a_{ii},
в полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$ справедливо

Предложение 1
Если брус $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)^\top$ удовлетворяет условиям

$$a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\, \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} \boldsymbol{X}_j - b_i \subseteq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то он содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$
с $n \times n$-матрицей $A = (a_{ij})$ и n-вектором правой части $b = (b_i)$.

Оценки для интервальных линейных систем

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— так как интервальная линейная система есть семейство точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, то получаем

Предложение 2

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная матрица, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ и $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальные векторы. Если для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место включение

$$\boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_i \subseteq 0,$$

то брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Определение

Формальное решение интервальной системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_1(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \ldots, x_n) & = & \boldsymbol{b}_1, \\ F_2(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \ldots, x_n) & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots \qquad \ddots & & \vdots \\ F_m(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l, x_1, \ldots, x_n) & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array} \right.$$

с интервалами $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_l$, $\boldsymbol{b}_1$, ..., $\boldsymbol{b}_m$ — это интервальный вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$, обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики.

Формальные решения

. . . — объект, соответствующий обычной математической концепции решения уравнения, но рассматриваемый в экзотической алгебраической системе, интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ или $\mathbb{KR}$.

С. Берти (1969)

К. Никель (1982)

Х. Рачек, В. Зауэр (1982) — *алгебраические решения*

Основной результат

Предложение 3

Пусть отображение $\mathcal{S} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$, зависящее от параметров $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$, задаётся покомпонентно как

$$\mathcal{S}_i(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) \;=\; \boldsymbol{a}_{ii} \cdot \mathrm{dual}\, \boldsymbol{x}_i \;+\; \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j \;-\; \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Правильное формальное решение интервальной системы уравнений

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0$$

содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Формально-алгебраический подход

нахождение внешней оценки
множества решений ИСЛАУ

$\Downarrow$

вычисление формального решения
специальной интервальной системы

Предшественники

M.A. Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba
Formal solution to systems of interval linear or non-linear equations // *Reliable Computing.* – 2002. – Vol. 8. – P. 189–211.

M.A. Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba
Interval estimations of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // *Reliable Computing.* – 2002. – Vol. 8. – P. 283–305.

Барселона и Жирона, Испания

«Испанская версия» формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений

Предложение 3

Пусть отображение $\mathcal{S} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$, зависящее от параметров $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$, задаётся покомпонентно как

$$\mathcal{S}_i(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) \; = \; \boldsymbol{a}_{ii} \cdot \mathrm{dual}\, \boldsymbol{x}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j \; - \; \boldsymbol{b}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Правильное формальное решение интервальной системы уравнений

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0$$

содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Традиционная версия формального подхода

Множество решений интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{n}$ совпадает с множеством решений системы

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d},$$

где $\boldsymbol{C} = I - \Lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{d} = \Lambda\boldsymbol{b}$, Λ — неособенная диагональная матрица.

Теорема Апостолатоса-Кулиша

Если матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что $\rho(|\boldsymbol{C}|) < 1$, то интервальная линейная система уравнений

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$$

имеет единственное правильное формальное решение, которое содержит множество решений рассматриваемой интервальной системы.

Вычисление формальных решений

1) Стационарные итерационные процессы:

- приводим исходную интервальную систему к рекуррентному виду $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$,
- выбираем начальное приближение $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и запускаем итерирование

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} \leftarrow \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{h}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

2) Сведение решения системы уравнений к нелинейной оптимизационной задаче (M.A. Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba)

Погружение в линейное пространство

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{C}x = \boldsymbol{d} \qquad\qquad x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$$

К сожалению, $\mathbb{KR}^n$ — не линейное пространство:

отсутствие дистрибутивности нарушает аксиому

$$(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} + \mu\,\boldsymbol{x}$$

Для того, чтобы иметь возможность использования понятий дифференцируемости, выпуклости и т.п. необходимо перейти в линейное пространство . . .

Погружение в линейное пространство

Всякое биективное вложение

$$\iota : \mathbb{KR}^n \to U$$

индуцирует биекцию

$$\begin{array}{c}\text{множества всех отображений на } \mathbb{KR}^n \\ \downarrow \\ \text{множество всех отображений на } U\end{array}$$

так, что отображению

$$\phi : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$$

сопоставляется единственное *индуцированное отображение*

$$\iota \circ \phi \circ \iota^{-1} : U \to U$$

Погружение в линейное пространство

линейные пространства

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\iota\circ\varphi\circ\iota^{-1}", "\text{индуцированное отображение}"'] \arrow[d, "\iota^{-1}"'] & & U \\ \mathbb{KR}^n \arrow[rr, "\varphi", "\text{исходное отображение}"'] & & \mathbb{KR}^n \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

интервальные пространства

Погружение в линейное пространство

Если $\iota(0) = 0$, то можем заменить
решение уравнения в $\mathbb{KR}^n$ на решение уравнения в U.

Компромисс:

простота вложения $\leftrightarrow$ удобный вид индуцированных отображений ?

Определение
Погружение $\mathrm{sti} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, *действующее по правилу*

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) \;\mapsto\; (-\underline{\boldsymbol{x}}_1, -\underline{\boldsymbol{x}}_2, \dots, -\underline{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2, \dots, \overline{\boldsymbol{x}}_n),$$

будем называть *стандартным погружением* $\mathbb{KR}^n$ *в* $\mathbb{R}^{2n}$.

Индуцированное уравнение

Вместо

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{KR}^n$$

мы будем решать индуцированное уравнение в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\boxed{\mathfrak{S}(y) = 0}$$

$$\mathfrak{S}_i(y) \;=\; \underline{-\Bigl(\boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_i\Bigr)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathfrak{S}_i(y) \;=\; \overline{\Bigl(\boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_i\Bigr)}, \qquad i = n + 1, \ldots, 2n.$$

Исследование индуцированного уравнения

Предложение 4

Индуцированное отображение $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ непрерывно.

Исследование индуцированного уравнения

Предложение 4

Индуцированное отображение $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ непрерывно.

А как насчёт дифференцируемости, гладкости и т.п.?

Исследование индуцированного уравнения

Предложение 4

Индуцированное отображение $\mathfrak{S}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ непрерывно.

А как насчёт дифференцируемости, гладкости и т.п.?

Их нет.

Но зато имеем ВЫПУКЛОСТЬ !!!

Дальнейший план действий

Свойство субдистрибутивности влечёт выпуклость функции $\mathfrak{S}(x)$ относительно покомпонентного порядка "$\leq$"

$$\Downarrow$$

Всегда существует непустой субдифференциал $\partial_{\leq}\mathfrak{S}(x)$, легко вычислимый, так как $\mathfrak{S}(x)$ — полиэдральная функция

$$\Downarrow$$

Знание субдифференциала позволяет построить субдифференциальный метод Ньютона

Порядковая выпуклость

Определение

Пусть на $\mathbb{R}^q$ задан частичный порядок "$\preccurlyeq$". Отображение $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ называется порядково выпуклым относительно "$\preccurlyeq$", если

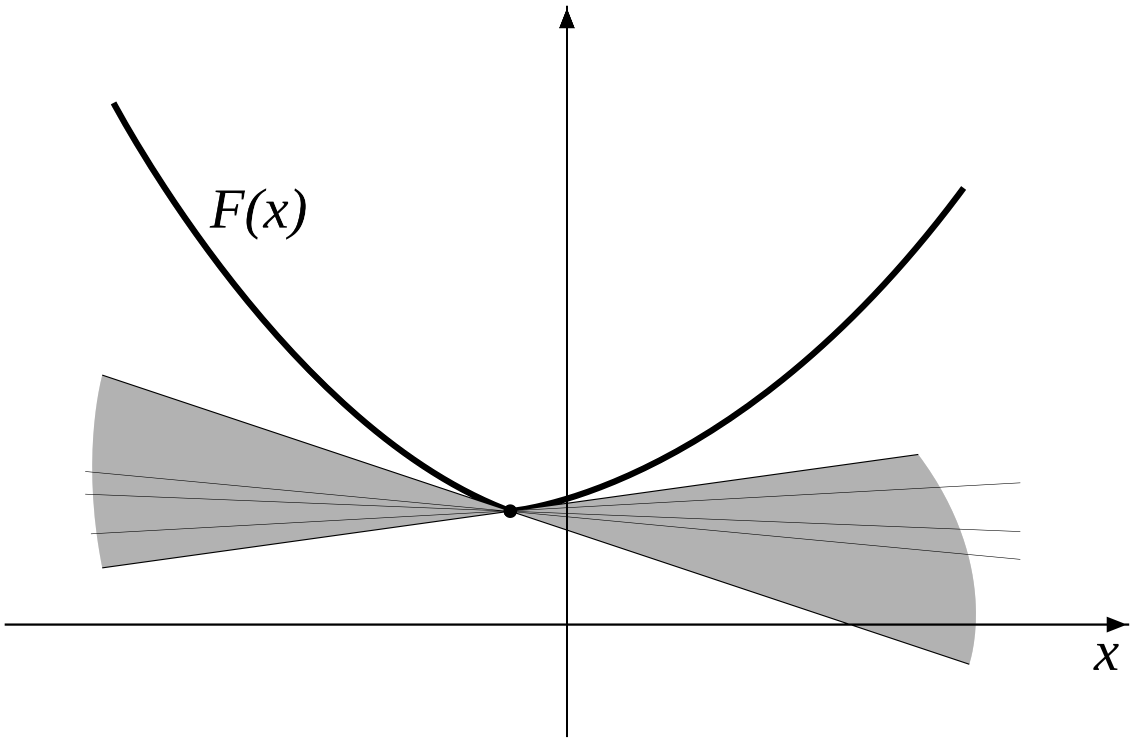
$$F(\lambda y + (1-\lambda)z) \;\preccurlyeq\; \lambda F(y) + (1-\lambda)F(z)$$

для любых y, $z \in \mathbb{R}^p$ и $\lambda \in (0,1)$.

Теорема

Индуцированное отображение $\mathfrak{S}(y)$ порядково выпукло на $\mathbb{R}^{2n}$ относительно покомпонентного частичного порядка "$\leq$".

Субградиенты и субдифференциал выпуклой функции

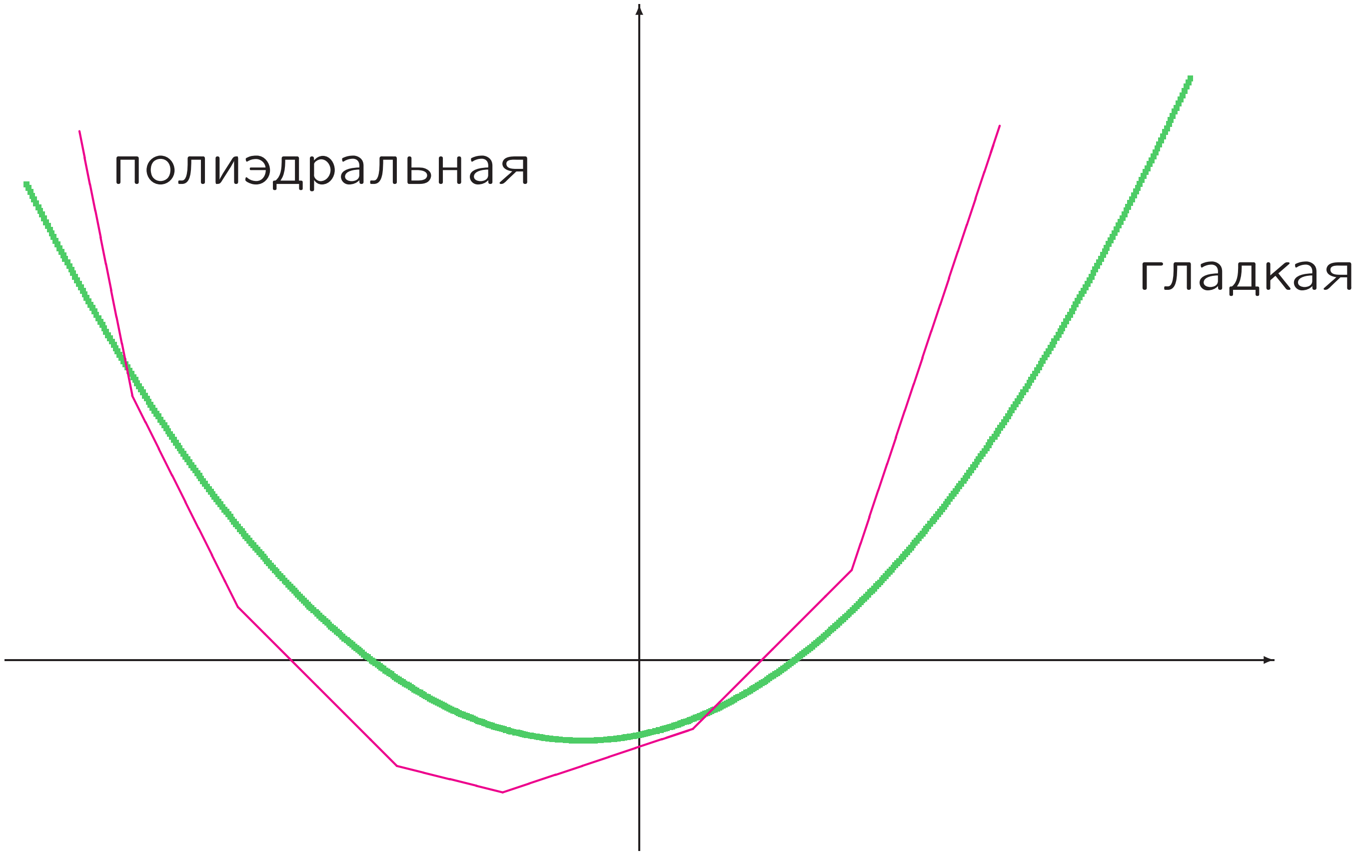


Субдифференциалом отображения F в $x \in \mathbb{R}^p$ называется множество $\partial_{\preccurlyeq} F(x)$, образованное всеми такими линейными операторами $D : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, что

$$D(v) \preccurlyeq F(x+v) - F(v)$$

для любого $v \in \mathbb{R}^p$. Его элементы — субградиенты F в точке x.

Полиэдральность



Теорема

Координатные компоненты $\mathfrak{S}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ — выпуклые полиэдральные функции $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.

Субдиференциальный метод Ньютона

— для решения системы уравнений $\mathfrak{S}(x) = 0$ в $\mathbb{R}^{2n}$

Выбираем начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Если $(k-1)$-ое приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \ldots$, уже известно, вычисляем субградиент $D^{(k-1)}$ отображения $\mathfrak{S}$ в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau \left(D^{(k-1)} \right)^{-1} \mathfrak{S}\left(x^{(k-1)} \right),$$

где $\tau \in \,]0, 1]$ — релаксационный параметр.

Субдиференциальный метод Ньютона

Теорема о сходимости

Пусть интервальная $n \times n$*-матрица* $\boldsymbol{A}$ *«достаточно узка»*
и интервальная $2n \times 2n$*-матрица*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{+} & \boldsymbol{A}^{-} \\ \boldsymbol{A}^{-} & \boldsymbol{A}^{+} \end{pmatrix}$$

неособенна. При $\tau = 1$ *субдифференциальный метод Ньютона сходится за конечное число шагов к* $\operatorname{sti}(\boldsymbol{x}^*)$*, где* $\boldsymbol{x}^*$ *— формальное решение для* $\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0$*.*

Субдифференциальный метод Ньютона

На практике рекомендуем сначала брать $\tau = 1$.

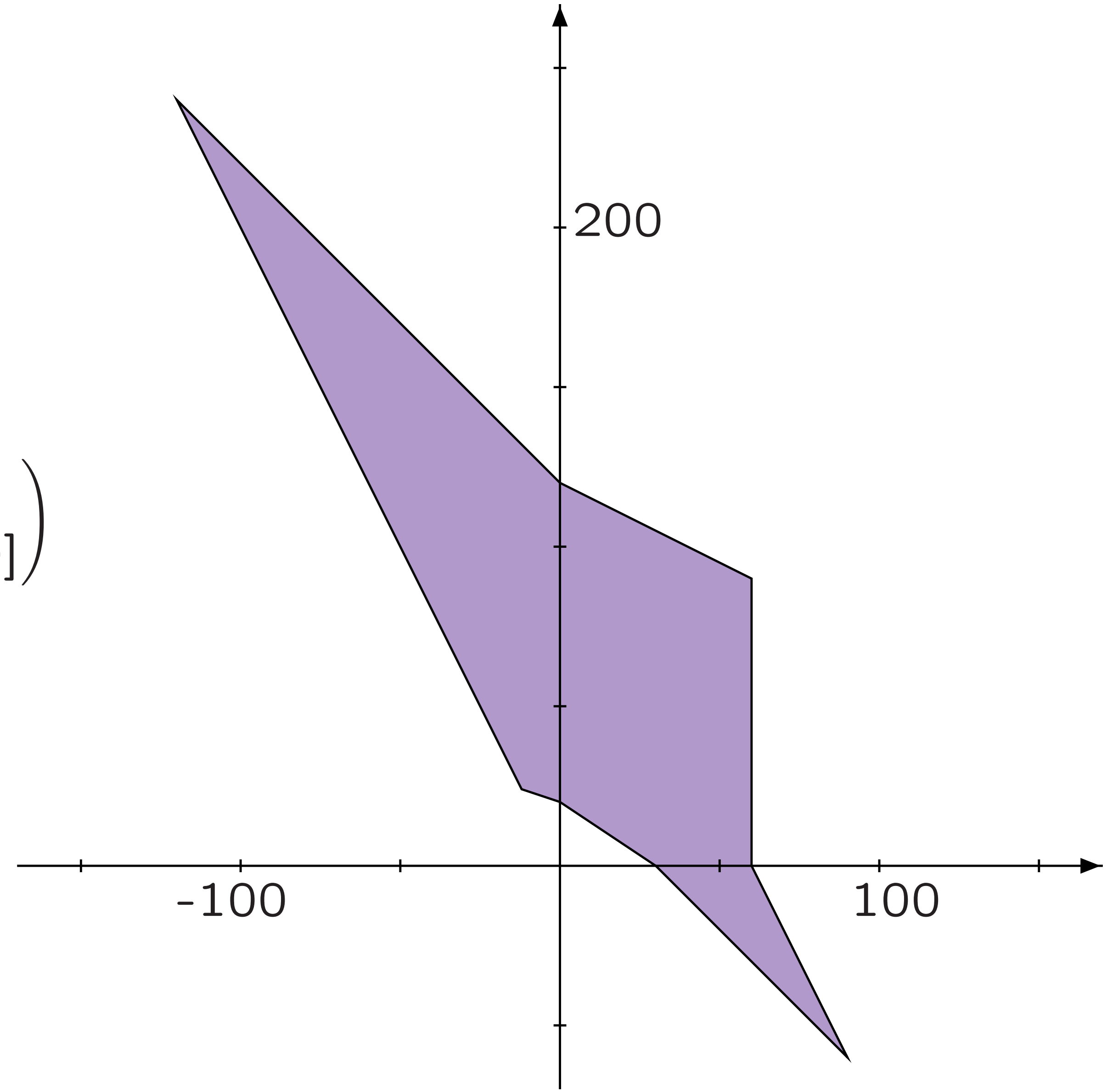
Тогда при сходимости субдифференциальный метод Ньютона даёт *точное* решение за небольшое число итераций (как правило, $\leq n$).

Причина — полиэдральность функций в уравнениях.

Если же метод не сходится, нужно попробовать уменьшить τ.

Пример — система Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$



Пример

Для интервальной линейной системы Хансена

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix},$$

формальное решение соответствующего уравнения

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0$$

есть брус

$$\begin{pmatrix} [-120,90] \\ [-60,240] \end{pmatrix},$$

— оптимальная (наилучшая) внешняя оценка множества решений

Субдифференциальный метод Ньютона

находит его всего за 3 (три) итерации

Итоги

- Теорема Миранды — естественное обобщение теоремы Больцано-Коши на многомерный случай.

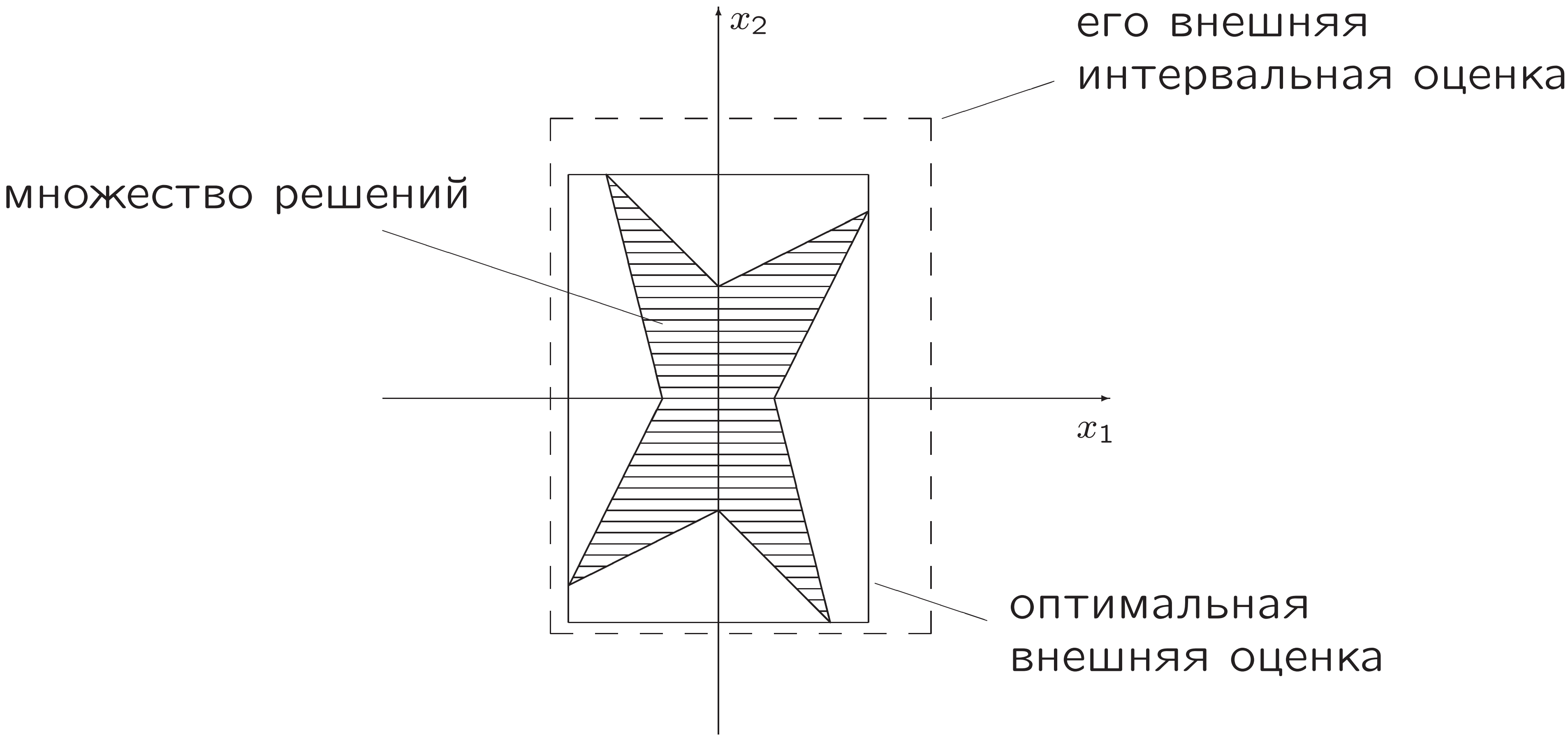
- Применение теоремы Миранды требует умения вычислять области значений функций и особенно облегчается с помощью методов интервального анализа.

- На основе теоремы Миранды можно построить ещё одну версию формального (алгебраического) подхода к внешнему оцениванию множеств решений ИСЛАУ.

«Внешняя задача»

Оптимальное решение “внешней задачи»

— наименьший по включению интервальный вектор-брус, содержащий множество решений



Вычисление оптимальных решений в общем случае NP-трудно

V. Kreinovich, A. V. Lakeyev, J. Rohn, P. Kahl
Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations, Kluwer, Dordrecht, 1997.

Классификация алгоритмов для численного решения «внешней задачи»

1) Прямые (конечные) методы

2) Итерационные методы

Классификация алгоритмов для численного решения «внешней задачи»

1) ~~Прямые (конечные) методы~~

2) ~~Итерационные методы~~

Численное решение «внешней задачи»

- *«Быстрые» методы*
  — дающие внешнюю оценку множества решений
  за приемлемое время, но без гарантий точности
- *«Точные» методы*
  — дающие внешнюю оценку множества решений,
  которая гарантированно близка к оптимальной
- *Специализированные методы*
  — например, для блочных систем,
  симметричных или тёплицевых систем, и т.п.

«Быстрые методы» для интервальных линейных систем

- Интервальные расширения точечных алгоритмов и их модификации
  - интервальный метод Гаусса
  - интервальный метод Хаусхолдера
  - итерации Кравчика
  - другие стационарные интервальные итерации
- «Полуинтервальные» алгоритмы
  - процедура Хансена-Блика-Рона
- Формально-алгебраический подход

«Быстрые методы» для интервальных линейных систем

- Интервальные расширения точечных алгоритмов и их модификации
    - интервальный метод Гаусса
    - интервальный метод Хаусхолдера
    - итерации Кравчика
    - другие стационарные интервальные итерации

- «Полуинтервальные» алгоритмы
    - процедура Хансена-Блика-Рона

- Формально-алгебраический подход

  — *чемпион по отношению качество/трудоёмкость*

Спасибо за внимание!