

Министерство образования науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.Н.Баженов

Интервальный анализ.
Основы теории и учебные примеры.

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2020

УДК 519.9

Р е ц е н з е н т:

Доктор физико-математических наук, профессор НГУ С.П. Шарый

А в т о р :

А.Н. Баженов Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры. – СПб., 2020. – 74 с.

Учебное пособие соответствует образовательному стандарту высшего образования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», по дисциплине «Вычислительные комплексы».

Пособие посвящено введению в интервальный анализ и демонстрации его применения в различных задачах. Важной частью пособия являются примеры, от самых простых, иллюстрирующих арифметические действия, до более сложных, находящихся на переднем крае интервального анализа. Среди них: интервальная регуляризация, решение недоопределенных систем уравнений, мера варибельности решений.

Материал апробирован в учебных курсах для студентов кафедры «Прикладная математика» Института Прикладной Математики и Механики СПбПУ и аспирантов первого года обучения ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН. Приведены ссылки на исследовательские и квалификационные работы студентов.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2020

Содержание

1	Введение. Предмет интервального анализа	8
2	Интервальные арифметики	13
3	Интервальные векторы и матрицы	20
4	Интервальное оценивание областей значений функций	26
5	Интервальная глобальная оптимизация	31
6	Линейные задачи	37
7	Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений.	65
8	Заключение	75
	Список литературы	76
	Предметный указатель	78

Список примеров

1.1 Арка дома	8
1.2 Измерение отрезка линейкой	9
1.3 Регистрация сигнала матричным детектором	9
1.4 Расчетная форма плазмы в сферическом токамаке	10
1.5 Эффект «обёртывания»	11
2.6 Разность двух одинаковых величин	13
2.7 Добавление и вычитание интервала	14
2.8 Умножение и деление на интервал	14
2.9 Независимая и связанная интервальности	15
2.10 Функции независимых и связанных интервальных величин	15
2.11 Зависимость результата вычислений от вида выражений	17
2.12 Отсутствие дистрибутивности умножения относительно сложения	19
3.13 Отсутствие ассоциативности интервального матричного умножения	21
3.14 Неособенные и особенные интервальные матрицы	22
3.15 Параметрическая область неособенности матриц Ноймайера	23
3.16 Обратная интервальная матрица 2×2 в общем виде	23
3.17 Обратная интервальная матрица 2×2	24
3.18 Обратная интервальная матрица 2×2 особенная	24
4.19 Оценка квадратного трехчлена на интервале	26
4.20 Оценка кубического полинома $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$	28
5.21 Функция Растригина 10	33
5.22 Функция Розенброка 4	34
6.23 Объединенное множество решений ИСЛАУ 3×2	38
6.24 Объединенное множество решений ИСЛАУ 2×2	40
6.25 Интервальный метод Гаусса-Зейделя	41
6.26 Интервальный метод Кравчика	43
6.27 Одномерное линейное уравнение с пустым допусковым множеством	44
6.28 ИСЛАУ 2×2 с пустым допусковым множеством	44
6.29 Непригодность «средних» решений ИСЛАУ как допусковых множеств — 1D	45
6.30 Непригодность «средних» решений ИСЛАУ как допусковых множеств. Допусковое множество — точка.	45
6.31 «Среднее» решение ИСЛАУ не попадает в допусковое множество.	46
6.32 Распознающий функционал 3 уравнения — график	47
6.33 Распознающий функционал 2 уравнения — график	48
6.34 Программное вычисление распознающего функционала — 1	49
6.35 Программное вычисление распознающего функционала — 2	50
6.36 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет расширения правой части	51
6.37 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет расширения правой части при неравных ширинах компонент правой части	52

6.38 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет уменьшения радиусов компонент матрицы	53
6.39 Интервальная регуляризация ИСЛАУ 2×2	55
6.40 Оценка варибельности решения ИСЛАУ. Хорошая обусловленность	58
6.41 Оценка варибельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность	60
6.42 Решение недоопределенных ИСЛАУ.	61
7.43 Одномерный метод Ньютона — корень полинома 2-й степени	65
7.44 Многомерный метод Ньютона — пересечение прямой и окружности	68
7.45 Метод Кравчика — пересечение параболы и окружности	70
7.46 Метод Кравчика — касание параболы и окружности	72
7.47 Метод Кравчика — пересечение параболы и «толстой» окружности	73

Список иллюстраций

1	Высота арки	8
2	Измерение отрезка линейкой	9
3	Один снимок рентгеновской матрицы	9
4	Форма плазмы в токамаке. Сплошная линия — вакуумная камера, прямоугольники — граница плазмы, рассчитанная на прямоугольной сетке.	10
5	Вычисление отношения длины окружности к диаметру по Архимеду .	10
6	Вращение квадрата	11
7	Разность двух одинаковых величин	14
8	Диаграмма связанности для двух интервальных величин	16
9	Положение и ширина интервала. Интервализация точечного объекта .	17
10	График функции Растригина 10 на широкой области определения . .	33
11	График функции Растригина 10 вблизи начала координат	34
12	Глобальная оптимизация. Функция Растригина 10	34
13	Глобальная оптимизация. Функция Розенброка 4 в окрестности ее экстремума	35
14	Глобальная оптимизация. Функция Розенброка 4	35
15	Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (15). Справа — случай с более «широкой» правой частью	39
16	Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (16)	40
17	Интервальный метод Гаусса-Зейделя	42
18	Контрпример для оценки по формуле (19) в ИСЛАУ примера 6.30 . .	46
19	Контрпример для оценки по формуле (19) в ИСЛАУ примера 6.31. . .	47
20	График распознающего функционала для ИСЛАУ 2x3	48
21	График распознающего функционала для ИСЛАУ 2x2	49
22	Множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное (граница штрихом), расширенное и допусковое	51
23	Множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное (граница штрихом), расширенное и допусковое	53
24	Множества решения ИСЛАУ светлое объединенное и темное допусковое	54
25	График распознающего функционала для ИСЛАУ (35).	59
26	Информационные множества решений ИСЛАУ (35) и оценка вариативности по формуле (32). Сторона квадрата равна $2 \cdot \text{ive}$	59
27	Информационные множества решений ИСЛАУ (37) и оценка вариативности по формуле (32). Сторона квадрата равна $2 \cdot \text{ive}$	61
28	График распознающего функционала для ИСЛАУ (37).	62
29	Метод Кравчика — пересечение параболы и окружности. Штриховыми линиями показаны последовательные приближения.	71
30	Метод Кравчика — касание параболы и окружности. Тонкими линиями показаны последовательные приближения.	72

31	Метод Кравчика — пересечение параболы и «широкой» окружности. Тонкими линиями показаны последовательные приближения.	74
----	---	----

1 Введение. Предмет интервального анализа

В настоящем пособии теоретический материал опирается на монографию С.П.Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [1], из этой же книги заимствованы многие примеры.

Понятие интервала и мотивация его использования естественным образом возникают при решении практически любой практической задачи. При измерениях, моделировании, использовании сторонней информации, составлении заданий, проектной документации, обслуживании технических систем, прогнозировании, приходится оперировать с данными *и моделями*, которые определены в каких-то пределах, а другой достоверной информации нет.

При невозможности уточнения этих данных за счет многократных измерений, более точного метода или справочных данных, эту неопределенность надо каким-то образом описать, и в дальнейшем оперировать с ней. Наиболее простым способом такого описания является задание нижней и верхней границы величины. Так мы приходим к идее интервала как математического способа представления свойств объектов, не обладающих структурой, все элементы которых равнозначны.

Рассмотрим несколько примеров

Пример 1.1 (Арка дома)

Для перевозки груза машине высотой h необходимо проехать в арку здания — рисунок 1. Какова высота H арки, если высота этажа 3 м? Она выше первого этажа (оценка снизу — 3 метра) и ниже второго этажа здания (оценка сверху — 6 м). Таким образом, H содержится в интервале $[3, 6]$.

Этот факт можно выразить следующим образом: $H \in [3, 6]$.

Интуитивно ясно, что если h не попадает в H , то есть $h \notin H$, проезд возможен, если h не превышает минимального значения H . Забегая вперед, это условие можно выразить как $h < \underline{H}$. Таким образом, возникает необходимость «оконтуривания» объекта, в данном случае — арки, задания его как множества, и постановка вопроса принадлежности этому множеству другого объекта. ■

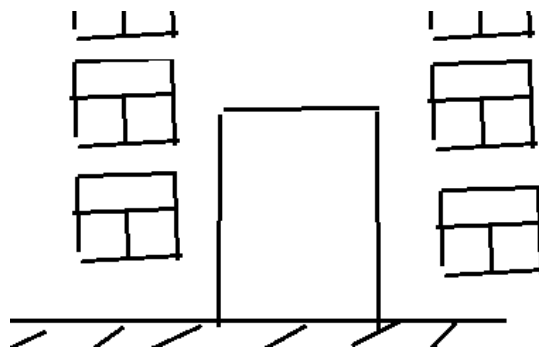


Рис. 1: Высота арки

Пример 1.2 (Измерение отрезка линейкой)

Измерим линейкой отрезок — рисунок 2.

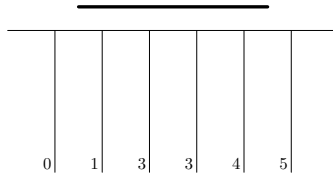


Рис. 2: Измерение отрезка линейкой

Длина отрезка заведомо больше 3 делений и меньше 5 — оценка грубая, но достоверная: $L \in [3, 5]$.

Представим себе, что для выполнения какой-то задачи необходимо выполнять различные действия с объектами, измеренными подобным образом. Например, складывать или вычитать их длины. Ясно, что для этого необходимо определить арифметические операции с такими объектами. ■

Пример 1.3 (Регистрация сигнала матричным детектором)

Рентгеновское излучение регистрируется камерой с размерами 16×16 пиксел. На рисунке 3 слева — графическое представление результата одного измерения, справа — шкала яркостей. В данном измерении в пикселях зарегистрировано от 0 до 6 квантов заряда. Накопленный в пикселе заряд оцифровывается аналогово-цифровым преобразователем — дискретность сигнала по амплитуде. Второй вид дискретизации — пространственная. Значение сигнала для пикселя с координатами (9, 7) находится в интервале $[5, 6]$, для пикселя с координатами (16, 16) — в интервале $[0, 1]$. ■

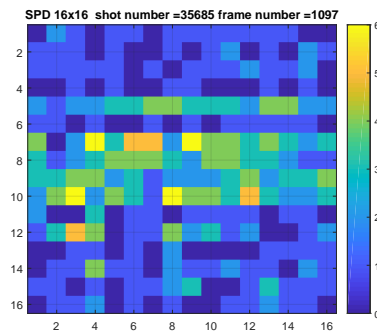


Рис. 3: Один снимок рентгеновской матрицы

Пример 1.4 (Расчетная форма плазмы в сферическом токамаке)

На рисунке 4 показаны различные сечения установки по удержанию плазмы: вакуумной камеры — сплошная линия, сепаратрисы (границы плазмы) и магнитной оси (условный центр тока плазмы) — квадраты. Размеры указаны в метрах. Точность определения геометрических размеров плазмы — примерно 1 см. Слева дан общий вид в меридиональном сечении, справа точки сепаратрисы представлены именно с той точностью, какую выдает программа EFIT (Equilibrium FITting) для ее расчета.

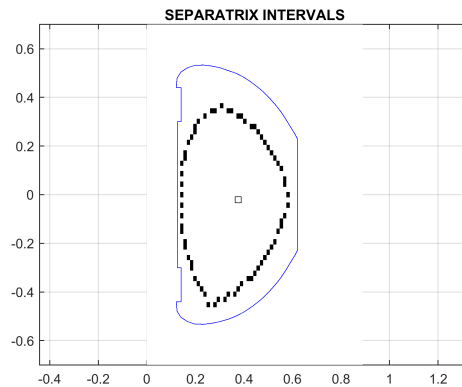


Рис. 4: Форма плазмы в токамаке. Сплошная линия — вакуумная камера, прямоугольники — граница плазмы, рассчитанная на прямоугольной сетке.



Так возникает понятие интервала [1]: «Интервал — замкнутый отрезок вещественной оси, а интервальная неопределенность — состояние неполного знания об интересующей нас величине, когда известна лишь ее принадлежность некоторому интервалу. Интервальный анализ — отрасль математического знания, исследующая задачи с интервальными неопределенностями и методы их решения».

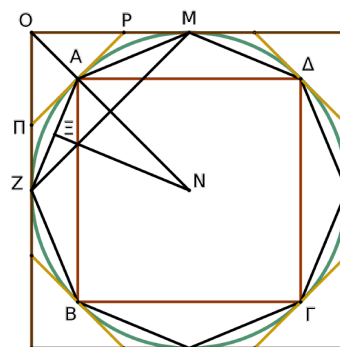


Рис. 5: Вычисление отношения длины окружности к диаметру по Архимеду

Учебное пособие не предполагает серьезных исторических экскурсов. Тем не менее, приятно упомянуть, что у истоков использования двухсторонних оценок стоит один из величайших математиков, Архимед, использовавший для оценки отношения длины окружности к диаметру периметры вписанных и описанных 96-угольников [3]. На рисунке 5 — реконструкция геометрического построения из его работы *Κύκλου μέτρησις*.

$$3\frac{10}{71} \leq \frac{\text{περίμ. κύκλου}}{\text{διάμετρο}} \leq 3\frac{1}{7}$$

В целом интервальный анализ лежит в русле большого направления *конструктивной* математики, связанного с приближенными вычислениями, родоначальником которого был П.Л. Чебышёв. Его теория равномерных приближений и приближенных механизмов задали направление, в котором решение ищется в виде гарантированного «коридора» решений.

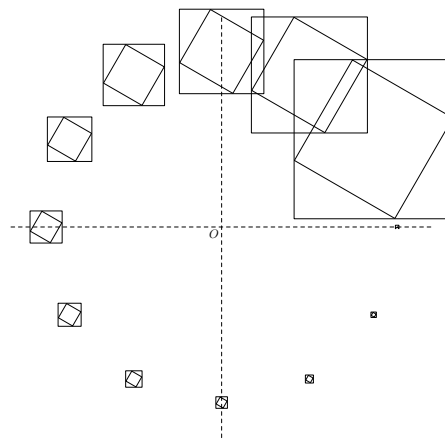


Рис. 6: Вращение квадрата

Пример 1.5 (Эффект «обёртывания»)

Приведем часто цитируемый в книгах по интервальному анализу пример нарастания неопределенности при последовательных вычислениях [1].

Представим тело квадратной формы, движущееся по кругу. Пусть это движение дискретно и тело поворачивается за шаг на 30 градусов. В результате поворота образующие объекта будут непараллельны осям координат и интервальная оценка результата поворота приводит к тому, что размер интервальной оболочки объекта возрастет. В результате итераций на объекте будет нарастать «обёртка» — рисунок 6.

Эффект обёртывания особенно сильно проявляется при итерационных вычислениях, где последовательные замены множества решений (в данном случае — квадрат, наклоненный к осям координат) на более простые множества происходят многократно. ■

Итак, введем понятие интервала. Интервалом вещественной оси $[a, b]$ называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b включая их самих, т.е.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

При этом a и b называются концами интервала.

2 Интервальные арифметики

Над интервалами нужно проводить вычисления. Они основаны на арифметике вещественных чисел и имеют свои особенности, как комплексные числа, кватернионы и другие. Поэтому основным инструментом интервального анализа являются интервальные арифметики — алгебраические системы, формализующие арифметические операции над интервалами как целостными объектами.

В отличие упомянутых примеров, интервальная арифметика не одна. Помимо классической, есть арифметика Каухера и другие алгебраические системы [1]. Мы будем рассматривать наиболее распространенную систему, которую называют классическая интервальная арифметика.

Классическая интервальная арифметика. \mathbb{IR} — алгебраическая система, образованная интервалами $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \subset \mathbb{R}$ так, что для любой арифметической операции « \star » из множества $\{+, -, \cdot, /\}$ результат операции между интервалами определяется как

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{x \star y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}. \quad (1)$$

Развёрнутые формулы для арифметических операций выглядят следующим образом:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (2a)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (2b)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}], \quad (2c)$$

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] \quad \text{для } \mathbf{y} \not\ni 0. \quad (2d)$$

Рассмотрим особенности интервальной арифметики.

Пример 2.6 (Разность двух одинаковых величин)

Пусть две машины (рисунок 7) проходят отрезок пути за одинаковый интервал времени.

Время в пути:

первой машины $T_1 = [9, 10]$ с

второй машины $T_2 = [9, 10]$ с

Разница между временами прихода к финишу $T_{12} = [-1, 1]$



Отличие интервальной арифметики от обычной. В классической интервальной арифметике используются 4 действия для описания арифметических операций. В поле

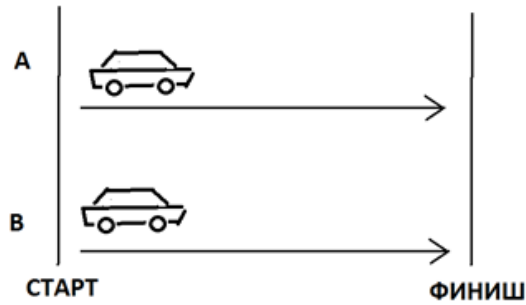


Рис. 7: Разность двух одинаковых величин

вещественных чисел \mathbb{R} операции вычитания и деления обратны сложению и умножению. Для интервалов это не имеет места. В общем случае:

$$(a + b) - b \neq a$$

$$(a \cdot b)/b \neq a$$

Пример 2.7 (Добавление и вычитание интервала)

$$a = [1, 2], \quad b = [-1, 1]$$

$$(a + b) - b = ([1, 2] + [-1, 1]) - [-1, 1] = [0, 3] - [-1, 1] = [-1, 4]$$

$$[1, 2] \neq [-1, 4]$$

■

Пример 2.8 (Умножение и деление на интервал)

$$a = b = [1, 2]$$

$$(a \cdot b)/b = ([1, 2][1, 2])/[1, 2] = [1, 4]/[1, 2] = [0.5, 4]$$

$$[1, 2] \neq [0.5, 4]$$

■

Данное обстоятельство необходимо учитывать при использовании интервальной арифметики.

Интервалы — множества, для них определяется частичное упорядочение по отношению включения друг в друга

$$a \subseteq b \iff \underline{a} \geq \underline{b} \ \& \ \bar{a} \leq \bar{b}$$

Имеет место важное свойство монотонности по включению : для любых интервалов $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{IR}$ и любых операций $\star \subseteq \{+, -, \cdot, /\}$

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \implies \mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}' \quad (3)$$

Свойство монотонности по включению отражает тот факт, что расширение областей определения объектов неизбежно расширяет и область на которую отображаются результаты арифметических операций над объектами.

Независимые и связанные интервальные величины. Говорят, что задана интервальная величина, если имеется переменная, которая может принимать значения в пределах некоторого интервала.

Определение. Интервальные величины $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$ называются независимыми (несвязанными), если упорядоченный набор переменных (a_1, \dots, a_n) принимает любые значения из декартова произведения интервалов их изменения $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, т.е. из бруса $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \subset \mathbb{R}^n$. В противном случае интервальные величины называются зависимыми (связанными).

Удобно говорить, что на рассматриваемые интервальные величины $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$ наложены связи, если имеются соотношения между в виде выражений. Конкретный вид связности можно представить графически, изобразив множество значений кортежа (a_1, \dots, a_n) , на фоне декартова произведения $(\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_n)$. Такие чертежи называют диаграммами связности.

Пример 2.9 (Независимая и связанная интервальности)

Пусть для переменных x_1 и x_2 имеют место факты:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= [0, 1] \\ \mathbf{x}_2 &= [0, 1] \\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 &= [0.9, 1.1] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

■

Первые две строчки выражают независимую интервальность \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , а третья — их связность.

Без наличия связи область определения пары $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ представляет прямоугольник $[0, 1] \times [0, 1]$. Наложение связи вырезает из прямоугольника полосу — рисунок 8.

Пример 2.10 (Функции независимых и связанных интервальных величин)

Рассмотрим [1], как изменяются области значений функций интервальных величин в зависимости от их связности. Пусть для величин $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$ имеет место связь:

$$1 \leq x_1 + 2x_2 \leq 2.$$

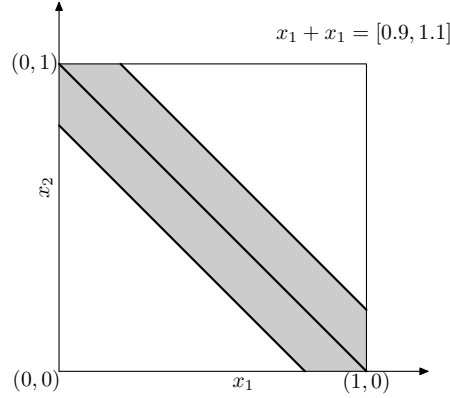


Рис. 8: Диаграмма связанности для двух интервальных величин

Рассмотрим различные функции этих переменных.

Для разности имеет место:

$$\{x_1 - x_2 \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 1], (x_1, x_2) \in S\} = [-1, 2] = [0, 2] - [0, 1],$$

здесь S — множество совместных значений пар (x_1, x_2) . Область значений результатов вычитания совпадает с разностью интервалов по формуле 2.

Рассмотрим далее сумму и разность величин:

$$\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 1], (x_1, x_2) \in S\} = [0.5, 2]$$

$$\{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 1], (x_1, x_2) \in S\} = [0, 0.5]$$

При этом по формулам 2 имеем:

$$\begin{aligned} [0, 2] + [0, 1] &= [0, 3] \supset [0.5, 2] \\ [0, 2] \cdot [0, 1] &= [0, 2] \supset [0, 0.5] \end{aligned}$$

Множество результатов сложения и умножения для связанных представителей интервалов существенно уже интервалов, полученных по формулам классической интервальной арифметики. ■

Основная теорема интервальной арифметики На основе арифметических операций строятся более сложные структуры. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется рациональной, если она задается аналитическим выражением, которое является конечной комбинацией x_1, x_2, \dots, x_n переменных и констант с четырьмя арифметическими операциями.

Теорема Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — рациональная функция вещественных аргументов x_1, x_2, \dots, x_n и для нее определен результат $F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ подстановки вместо аргументов интервалов их изменения $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \subset \mathbb{I}\mathbb{R}$ и выполнения над ними действий по правилам интервальной арифметики. Тогда

$$\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2, \dots, x_n \in \mathbf{X}_n\} \subseteq F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n),$$

т.е. $F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ содержит множество значений функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$. Если выражение для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, имеет место включения выполняется *точное* равенство.

Пример 2.11 (Зависимость результата вычислений от вида выражений)

Пример [1] зависимости результата интервальной оценки от способа вычислений. Для рациональной функции $f(x, y) = x \cdot y - x + 3$ на области определения $x \in [0, 1], y \in [1, 2]$, оценка области значений $[0, 1] \cdot [1, 2] - [0, 1] + 3 = [2, 5]$.

Если переписать выражение как $f(x, y) = x \cdot (y - 1) + 3$, то $[0, 1] \cdot [1, 2] - 1 + 3 = [3, 4]$. Таким образом, при интервальном оценивании имеет смысл рассуждать не в терминах функций, а в терминах задающих их *выражений*. ■

Характеристики интервалов и их свойства Естественным образом можно ввести следующие величины:

$$\begin{aligned} \text{Середина (центр) интервала} \quad \text{mid } \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}}), \\ \text{Радиус интервала} \quad \text{rad } \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \cdot (\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}), \\ \text{Ширина интервала} \quad \text{wid } \mathbf{a} &= \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом,

$$\mathbf{a} = \text{mid } \mathbf{a} + [-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{a},$$

что равносильно

$$\mathbf{a} = \{x \in \mathbb{R} : |x - \text{mid } \mathbf{a}| \leq \text{rad } \mathbf{a}\}.$$

Середина интервала – это его «наиболее типичный» представитель, который наименее удален от всех точек интервала, а радиус и ширина характеризуют разброс точек интервала, абсолютную меру неопределенности, выражаемой данным интервалом.

Положение и ширина интервала и создание интервала из объекта нулевой ширины:

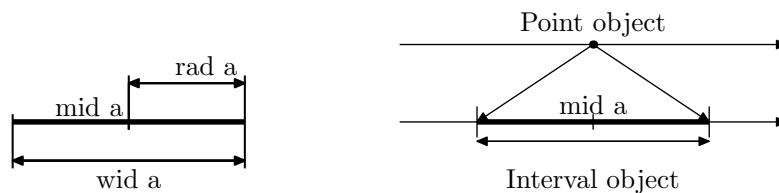


Рис. 9: Положение и ширина интервала. Интервализация точечного объекта

Свойства середины:

$$\begin{aligned}\text{mid}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) &= \text{mid } \mathbf{a} + \text{mid } \mathbf{b}, \\ \text{mid}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= a \cdot \text{mid } \mathbf{b}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Основные свойства радиуса:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} &\implies \text{rad } \mathbf{a} \leq \text{rad } \mathbf{b}, \\ \text{rad}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) &= \text{rad } \mathbf{a} + \text{rad } \mathbf{b}, \\ \text{rad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Радиус (ширина) интервалов при сложении и вычитании может только складываться и поэтому противоположного (обратного по сложению) элемента для невырожденных интервалов в \mathbb{IR} нет. При умножении невырожденного интервала на ненулевой интервал радиус произведения никогда не может сделаться нулевым. Вместо полноценной обратимости интервальных арифметических операций имеют более слабые «свойства сокращения»:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c} &\implies \mathbf{a} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, 0 \notin \mathbf{a}, 0 \notin \mathbf{b}, 0 \notin \mathbf{c} &\implies \mathbf{a} = \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Бывает полезно ввести абсолютное значение интервала (магнитуду):

$$|\mathbf{a}| = \max\{-\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}. \quad (6)$$

Эта характеристика пригодится для вычисления спектрального радиуса интервальной матрицы в главах 6 и 7.

Алгебраические свойства интервальных операций Интервальная арифметика \mathbb{IR} является алгебраической системой и частично упорядоченным множеством с отношением порядка по включению « \subseteq ». В \mathbb{IR} нейтральными элементами относительно сложения и вычитания является нуль, а относительно умножения и деления – единица:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + 0 &= \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} - 0 = \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \cdot 1 &= \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}/1 = \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Интервальные арифметические операции обладают свойствами:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) && \text{— ассоциативность сложения,} \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) && \text{— ассоциативность умножения,} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{— коммутативность сложения,} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} && \text{— коммутативность умножения.}\end{aligned}$$

Дистрибутивность умножения относительно сложения в общем случае отсутствует:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Пример 2.12 (Отсутствие дистрибутивности умножения относительно сложения)

$$\begin{aligned} [1, 2] \cdot (1 - 1) &= 0, \\ [1, 2] \cdot 1 - [1, 2] \cdot 1 &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

■

Имеет место более слабое свойство:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (7)$$

называемое субдистрибутивностью умножения относительно сложения.

Дистрибутивность выполняется в ряде частных случаев:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } b, c \geq 0 \text{ или } b, c \leq 0. \quad (9)$$

3 Интервальные векторы и матрицы

Интервальный вектор — упорядоченный кортеж из интервалов, расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка).

Интервальная матрица — прямоугольная таблица, составленная из интервалов \mathbf{a}_{ij} : $\mathbf{A} = (\mathbf{a})_{ij}$.

Интервальные векторы отождествляются с интервальными матрицами размера $1 \times n$ или $n \times 1$.

Если $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, обозначают $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_n)$ и $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n)$. Аналогично, для интервальной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{a}_{ij}$ определяют точечные матрицы $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{a}}_{ij})$ и $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\mathbf{a}}_{ij})$, образованные соответствующими точечными элементами.

Интервальная оболочка множества S — это пересечение всех интервальных векторов (матриц), содержащих S :

$$\square S = \bigcap \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \mathbf{a} \supseteq S \}$$

Сложение и умножение интервальных матриц определяются как естественные поэлементные операции.

При определении операций над интервальными матрицами имеет смысл вместо условия (1) ограничиться каким-либо более слабым требованием. Уже упомянутый «эффект обёртывания» может приводить к неожиданным следствиям в силу того, что умножение матриц включает умножения и сложения их элементов. В целом это приводит к условию:

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \square \{ \mathbf{A} \star \mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B} \}. \quad (10)$$

Как показано в [1], оно выполняется для матричных операций.

Следует иметь в виду, что интервальные векторы не образуют линейного пространства в привычном смысле. Этому мешает отсутствие дистрибутивности в интервальных арифметиках.

Как и в одномерном случае (3), имеет место монотонность по включению: для любых интервальных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'$ одинакового размера и любых операций $\star \subseteq \{ +, -, \cdot, / \}$

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}', \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}' \implies \mathbf{A} \star \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}' \star \mathbf{B}' \quad (11)$$

Свойство монотонности по включению отражает тот факт, что расширение областей определения объектов неизбежно расширяет и область на которую отображаются результаты арифметических операций над объектами.

Для любых интервальных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , одинакового размера справедливы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) && \text{— ассоциативность сложения,} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} && \text{— коммутативность сложения.} \end{aligned}$$

Для интервального матричного умножения нет еще и (кроме обычной коммутативности и интервальной дистрибутивности по сложению) ассоциативности.

Пример 3.13 (Отсутствие ассоциативности интервального матричного умножения)

$$A = (1, 1), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = ([-1, 1])$$

$$(AB)C = 0 \cdot [-1, 1] = 0$$

$$A(BC) = (1, 1) \cdot ([-1, 1]) = ([-2, 2])$$

■

Нормы интервальных матриц и векторов Норма линейного пространства – обобщение на многомерный случай понятия абсолютной величины числа и формализует такие интуитивно понятные свойства как «длина» вектора.

Нормой интервального вектора \mathbf{a} называют вещественную величину $\|\mathbf{a}\|$, удовлетворяющую аксиомам:

$$\|\mathbf{a}\| \geq 0, \text{ причем } \|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = 0 \quad \text{— неотрицательность,}$$

$$\|\alpha \cdot \mathbf{a}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\| \quad \text{— абсолютная однородность,}$$

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad \text{— «неравенство треугольника»}.$$

Наиболее популярные *векторные нормы*:

$$\|\mathbf{a}\|_1 = |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2| + \dots + |\mathbf{a}_n|,$$

$$\|\mathbf{a}\|_2 = (|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \dots + |\mathbf{a}_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{a}_i|.$$

Нормой интервальной матрицы \mathbf{A} называют вещественную величину $\|\mathbf{A}\|$, удовлетворяющую аксиомам:

$$\|\mathbf{A}\| \geq 0, \text{ причем } \|\mathbf{A}\| = 0 \iff \mathbf{A} = 0 \quad \text{— неотрицательность,}$$

$$\|\alpha \cdot \mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \text{— абсолютная однородность,}$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \text{— «неравенство треугольника»,}$$

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \text{— субмультипликативность,}$$

$$\text{prg} \mathbf{A} \subseteq \text{prg} \mathbf{B} \iff \|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{B}\| \quad \text{— монотонность по включению.}$$

Четвертая аксиома не имеет места для векторов, поскольку их умножение не определено. Если понимать ее в широком смысле, то ее можно использовать для произведения матрицы на вектор и согласования векторных и матричных норм. Пятая аксиома относится к т.н. «полной» интервальной арифметике ([1], стр. 48).

Нормы интервальных векторов и матриц согласованы друг с другом, если для любых матриц \mathbf{A} и векторов \mathbf{b} , для которых определено произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, имеет место неравенство:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

Метрика и топология в интервальных пространствах. Аналогично определению расстояния между векторами в линейных пространствах расстояние между интервальными векторами можно ввести как норму вектора их разности:

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

На пространстве интервальных матриц аналогично можно ввести:

$$\text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|.$$

Неособенные интервальные матрицы. Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной, если неособенны все точечные $n \times n$ матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

Пример 3.14 (Неособенные и особенные интервальные матрицы)

Рассмотрим две матрицы и определим, особенны ли они.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0, 1] & [2, 3] \\ [4, 5] & [6, 7] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 2] & [3, 4] \\ [5, 6] & [7, 8] \end{pmatrix}$$

Вторая матрица получена добавлением ко всем элементам первой матрицы 1. Проведем интервальную оценку определителя.

$$\det(\mathbf{A}) = [0, 1] \cdot [6, 7] - [1, 2] \cdot [4, 5] = [-15, -1] \not\supseteq 0,$$

$$\det(\mathbf{B}) = [1, 2] \cdot [7, 8] - [2, 3] \cdot [6, 7] = [-17, 1] \ni 0.$$

Первая матрица неособенная, а вторая — особенная. ■

Интервальный признак Адамара. Интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

Сильно неособенные интервальные матрицы. Интервальная матрица может быть неособенной, но при умножении на другую неособенную матрицу, произведение может быть особенным. Желательно иметь более надежный признак возможности алгебраических действий.

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ *сильно неособенная (сильно невырожденная, сильно регулярная)*, если интервальная матрица $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}$ существует и неособенная.

Пример 3.15 (Параметрическая область неособенности матриц Ноймайера)

Матрицы Ноймайера имеют вид [1]:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & [0, 2] & \dots & [0, 2] \\ [0, 2] & \theta & \dots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \dots & \theta \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что матрицы Ноймайера четного параметра порядка n неособенны при $\theta \geq n$, а матрицы нечетного параметра при $\theta \geq \sqrt{n^2 - 1}$. Но для и для значений θ , близких к границе особенности, матрицы Ноймайера уже не являются сильно неособенными. Например:

Матрица Ноймайера при $n = 3$, не являющаяся сильно неособенной:

$$A = \begin{pmatrix} 3.2 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.2 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.2 \end{pmatrix}.$$

■

Обратные интервальные матрицы. Для неособенной интервальной матрицы $A \in \mathbb{IR}$ *обратной интервальной матрицей* называют

$$A^{-1} := \square\{A^{-1} | A \in A\},$$

то есть, интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в A .

Пример 3.16 (Обратная интервальная матрица 2×2 в общем виде)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

Если $a \not\equiv 0$, то, элемент (2,2) матрицы A^{-1} равен

$$\frac{a}{ad - bc} = \frac{1}{d - bc/a}$$

Это выражение содержит по одному вхождению каждой переменной в первой степени и поэтому его область значений совпадает с естественным интервальным расширением

$$\frac{1}{d - bc/a}.$$

■

Пример 3.17 (Обратная интервальная матрица 2×2)

Пример [1] с вычислением по формулам из примера 3.16. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}.$$

Проверим её неособенность. Для матриц 2×2 элементы матрицы в определитель входят по одному разу. Поэтому:

$$\det(\mathbf{A}) = [2, 4] \cdot [2, 4] - [-1, 2] \cdot [-2, 1] = [4, 16] - [-4, 2] = [2, 20] \not\equiv 0.$$

По формулам 3.16 с одним вхождением каждого элемента в каждое выражение, имеем:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{6}, 1] & [-\frac{1}{2}, 1] \\ [-1, \frac{1}{2}] & [\frac{1}{6}, 1] \end{pmatrix}.$$

■

Пример 3.18 (Обратная интервальная матрица 2×2 особенная)

Пример интервальной матрицы, содержащей точечные элементы [1]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5, 2] & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 3 - [-5, 2] \cdot (-1) = 6 - [2, 5] = [1, 4] \not\equiv 0.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5, 2] & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [-\frac{3}{4}, 3] & [\frac{1}{4}, 1] \\ [\frac{1}{2}, 5] & [\frac{1}{2}, 1] \end{pmatrix}$$

Обратная матрица содержит особенную точечную матрицу E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{A}^{-1}.$$

■

Тема неособенных матриц очень важна для различных приложений. Выделяют специальные типы матриц, которые гарантированно неособенны, а в некоторых случаях неотрицательны, например, в задачах, связанных с экономикой.

Особенно часто можно встретить в литературе упоминание таких классов неособенных матриц, как M - и H -матрицы.

M-матрицы. Для *M*-матриц имеет место:

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \text{из} \quad Ax \leq Ax' \quad \text{следует} \quad x \leq x'.$$

У *M*-матриц много полезных свойств. Для квадратных матриц монотонность эквивалентна обратимости, при этом $A^{-1} \geq 0$ (положительная обратимость).

Например, при обработке изображений положительно обратимы матрицы подчеркивающих фильтров с диагональным преобладанием. Им обратны сглаживающие фильтры.

Интервальная матрица $A \subseteq \mathbb{R}^n$ является *M*-матрицей тогда и только тогда, когда \underline{A} и \overline{A} — *M*-матрицы. Всякая интервальная *M*-матрица неособенна и

$$A^{-1} = [\overline{A}^{-1}, \underline{A}^{-1}].$$

Интервальная *M*-матрица при обращении ведет себя подобно одномерному интервалу вещественной оси, коль скоро

$$a^{-1} = [\overline{a}^{-1}, \underline{a}^{-1}].$$

Монотонность является мощным средством исследования СЛАУ при отслеживании влияния возмущения правых частей на решение:

$$\text{Если} \quad b \leq b' \quad \text{то из} \quad Ax = b \quad \& \quad Ax' = b' \quad \text{следует} \quad x \leq x'$$

M-матрицы имеют на главной диагонали строго положительные элементы, а вне главной диагонали — неположительные. Главная диагональ доминирует в смысле спектрального радиуса. Это очень серьезное ограничение.

Если из требований к *M*-матрице удалить неположительность недиагональных элементов, оставив идею диагонального преобладания, можно построить класс *H*-матриц. Для этого вводится понятие *компаранта* матрицы: точечной матрицы, получаемой из исходной принудительным присвоением знаков элементам [1].

4 Интервальное оценивание областей значений функций

Поставим задачу оценивания области значений функции, т.е. множества

$$\mathbf{ran}(f, \mathbf{X}) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$$

где \mathbf{X} — интервал в \mathbb{R} или же интервальный вектор-брус в \mathbb{IR} .

Рассматриваемые постановки тесно связаны с теми, что рассматриваются в теории оптимизации и математическом программировании — дисциплинах, занимающихся отысканием экстремальных значений различных функций. Фактически, для непрерывной функции $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство:

$$\mathbf{ran}(f, \mathbf{X}) = \left[\min_{x \in \mathbf{X}} f(x), \max_{x \in \mathbf{X}} f(x) \right]$$

Практически важная задача косвенных измерений возникает всякий раз, когда некоторую искомую величину y нельзя измерить непосредственно, и она должна рассчитываться на основе известной зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

от одной или нескольких первичных величин x_1, x_2, \dots, x_n , которые только и могут быть измерены имеющимися в нашем распоряжении приборами. В этом случае говорят о косвенном измерении величины y . Расчёт доверительного интервала для y по доверительным интервалам $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ для x_1, x_2, \dots, x_n представляет собой задачу оценивания области значений функции f на брус $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{IR}$.

Интервальные оценивающие функции и их простейшие формы. Под интервальным оцениванием мы будем понимать замену точной области значений функции на её интервальную оценку. Качество внешнего интервального оценивания области значений функции с помощью естественного интервального расширения сильно зависит от вида выражения. Так, для лучшего вычисления естественного интервального расширения полиномов рекомендуется схема Горнера, в которой выражение представлено в виде «матрёшки» с вынесением переменной за скобки. Из свойства субдистрибутивности следует, что тогда при прочих равных условиях результат интервального оценивания будет более узким.

Пример 4.19 (Оценка квадратного трехчлена на интервале)

Для квадратного трёхчлена $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$ на интервале $[0, 2]$ область значений легко найти из того соображения, что

$$g(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x^2 - 2x + 1) + 1 = 3(x - 1)^2 + 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{ran}(g, [0, 2]) = 3([0, 2] - 1)^2 + 4 = 3[-1, 1]^2 + 4 = [1, 4].$$

В то же время, естественное интервальное расширение исходной формы трёхчлена

$$g([0, 2]) = 3[0, 2]^2 - 6[0, 2] + 4 = 3[0, 4] - 6[0, 2] + 4 = [-8, 16],$$

а при вычислении по схеме Горнера для представления $g(x) = (3x - 6)x + 4$ получаем:

$$g([0, 2]) = (3[0, 2] - 6)[0, 2] + 4 = [-12, 0] + 4 = [-8, 4].$$

Имеем, что исходное выражение \supseteq по Горнеру \supseteq компактное:

$$[-8, 16] \supseteq [-8, 4] \supseteq [1, 4].$$

Разница очень существенна. ■

Итак, внешние оценки областей значений функций могут быть найдены с помощью их интервальных расширений. Но насколько точны эти оценки? Нашей ближайшей целью является получение результатов о погрешности, в интервальной метрике **dist**, для внешнего оценивания областей значений с помощью естественного интервального расширения.

Липшицевская оценка функций. Используются различные оценки функций на множествах.

Оценка по Липшицу: если для некоторой константы L имеет место

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in D$$

то вещественная функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица. Подобным образом оцениваются вещественные функции нескольких переменных:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|, \forall x, y \in D$$

здесь L_f — вектор-строка констант.

Оценки от функций с различными аналитическими выражениями получаются по правилам, подобным таблицам производных [1].

Пусть — элементарное функциональное выражение от n переменных, которое является липшицевым по форме на некотором бруске $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}$. Тогда для ширины естественного интервального расширения \mathbf{f} на любом бруске $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{X}$ справедлива оценка

$$\text{rad}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq L \cdot \text{rad}(\mathbf{x})$$

с константой L , не зависящей от x . Принято говорить, что «естественное интервальное расширение имеет первый порядок точности».

Центрированные формы интервальных оценивающих функций. Принято говорить, что для функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$, интервальная оценивающая функция $\mathbf{f}_c(\mathbf{X})$ на $X \subseteq D$ имеет центрированную форму с центром c , если для некоторой вектор-строки $g \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, зависящей от X и c , она представима в виде

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) := f_c(c) + g \cdot (\mathbf{X} - c)$$

или, развернуто,

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) := f_c(c) + \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}, c) \cdot (\mathbf{X} - c)$$

где $g_i(\mathbf{X}, c)$ — некоторые интервалы, зависящие от X и c .

Если f — дифференцируемая функция, то можно рассматривать g_i как частные производные:

$$g_i(\mathbf{X}, c) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(\mathbf{X}).$$

В компактной записи

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) := f_c(c) + f'(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{X} - c)$$

Выражение $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$ называют дифференциальной центрированной формой интервального расширения функций или среднезначной формой, имея в виду происхождение от теоремы Лагранжа о среднем значении.

Какие центрированные формы существуют помимо дифференциальной?

Если можно на множестве D найти разложение $\forall x, y \in D$:

$$f_{sl}(x) = f(y) + f^{\angle}(x, y) \cdot (x - y)$$

называется наклонной формой интервальной оценивающей функции f на X с центром в точке c (нижний индекс sl означает slope). В одномерном случае ($n = 1$) при $x \neq y$:

$$f^{\angle}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

т. е. наклон функции совпадает с её разделённой разностью первого порядка.

Пример 4.20 (Оценка кубического полинома $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$)

Рассмотрим [1] кубический полином на интервале $[0, 2]$.

Середина интервала $\text{mid}(\mathbf{x}) = 1$.

Производная и наклон равны соответственно:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4, \\ f^{\angle}(x, y) &= x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 4. \end{aligned}$$

Ранее была найдена точная область значений производной на рассматриваемом интервале:

$$\text{ran}(f', [0, 2]) = 3([0, 2] - 1)^2 + 4 = 3[-1, 1]^2 + 4 = [1, 4].$$

Далее обозначаем $\mathbf{ran}(f', [0, 2])$ как $f'([0, 2])$. Дифференциальная центрированная (среднезначная) форма интервального расширения равна в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} \text{относительно центра } c = 0: f_{mv}([0, 2]) &= f(0) + f'([0, 2])([0, 2] - 0) = [2, 10] \\ \text{относительно центра } c = 1: f_{mv}([0, 2]) &= f(1) + f'([0, 2])([0, 2] - 1) = [0, 8] \\ \text{относительно центра } c = 2: f_{mv}([0, 2]) &= f(2) + f'([0, 2])([0, 2] - 2) = [-2, 6] \end{aligned}$$

Вычислим наклонные формы интервальных расширений функции. Поскольку

$$f^\angle(x, 0) = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то

$$f^\angle([0, 2], 0) = \mathbf{ran}(f^\angle([0, 2], 0)) = \left([0, 2] - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \left[\frac{7}{4}, 4\right].$$

Поэтому

$$f_{sl}([0, 2], 0) = f(0) + f^\angle([0, 2], 0)([0, 2] - 0) = 2 + \frac{7}{4} \cdot [0, 2] = [2, 10].$$

Аналогично

$$\begin{aligned} f_{sl}([0, 2], 1) &= f(1) + f^\angle([0, 2], 1) \cdot ([0, 2] - 1) = [2, 6], \\ f_{sl}([0, 2], 2) &= f(2) + f^\angle([0, 2], 2) \cdot ([0, 2] - 2) = [-2, 6]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} f_{mv}(\mathbf{x}, \text{mid}(\mathbf{x})) &= [0, 8], & f_{sl}(\mathbf{x}, \text{mid}(\mathbf{x})) &= [2, 6], \\ f_{mv}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) &= [2, 10], & f_{sl}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) &= [2, 10], \\ f_{mv}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= [-2, 6], & f_{sl}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= [-2, 6]. \end{aligned}$$

Точная область значений рассматриваемого многочлена, как было установлено ранее, равна $[2, 6]$. ■

Как видим, конкретное значение внешней оценки существенно зависит от центра разложения. Но при одном и том же центре наклонная центрированная форма последовательно приводит к более качественным результатам, чем дифференциальная центрированная (среднезначная) форма. Можно показать, что в действительности всегда имеет место включение

$$f^\angle(\mathbf{x}, c) \subseteq f'(\mathbf{x})$$

а ширина интервального расширения наклона равна примерно половине ширины от интервального расширения производной (градиента). Поэтому ширина внешней

оценки при помощи наклонной формы примерно в два раза уже, чем ширина внешней оценки с помощью среднезначной формы. Ещё одно полезное наблюдение, касающееся рассмотренного примера, состоит в том, что точная область значений функции, равная $[2, 6]$, может быть получена путём пересечения внешних оценок $f_{sl}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}})$ и $f_{sl}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})$, даваемых наклонными формами относительно двух разных центров.

$$f_{sl}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) \cap f_{sl}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) = [-2, 6] \cap [2, 10] = [2, 6]$$

Пересечение различных интервальных результатов для улучшения внешнего оценивания — это общий приём, который можно применять почти всегда, хотя, конечно, нельзя надеяться, что вычисляемые с его помощью интервалы всегда будут давать точную область значений функции. Вместе с теоретическим результатом об оптимальном выборе центров разложений, идея пересечения интервальных оценок служит основой так называемой бицентрированной формы интервального расширения функций (теорема Бауманна):

$$f_{bic}(\mathbf{x}) = f_{mv}(\mathbf{x}, c_\star) \cap f_{mv}(\mathbf{x}, c^\star),$$

где c_\star, c^\star — некоторые специальные точки бруса \mathbf{x} , которые несложно находятся по функции и интервалу. При монотонности функции f — это угловые точки.

5 Интервальная глобальная оптимизация

Эпитет «глобальный» означает в данном контексте, что ищется наилучшее значение целевой функции на всей рассматриваемой области. При этом предполагается, что целевая функция может иметь весьма общий вид.

Для простоты будем рассматривать задачу глобальной оптимизации вещественнозначной функции $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ на прямоугольном брусе $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ с гранями, параллельными координатным осям. От целевой функции не требуется непрерывности. В общем виде задача найти

$$\inf_{x \in \mathbf{X}} f(x). \quad (12)$$

Величину $\inf f(x)$ мы будем обозначать (в случае, если она существует в \mathbb{R}) через f^* и называть «глобальным минимумом». Требуется найти f^* численно, т. е. мы хотим построить алгоритм, способный вычислить с любой наперёд заданной точностью приближение y^* для f^* , а также его погрешность $|f^* - y^*|$.

В случае, когда нет априорной информации о характере глобального поведения целевой функции и структуре её локальных экстремумов, для решения задачи 12, по-видимому, неизбежно применение методов, в том или ином виде осуществляющих перебор и сравнение «всех» точек области определения. В частности, теорема Крейнговича-Кирфотта утверждает, что за пределами класса выпуклых функций задача нахождения глобального минимума является труднорешаемой (NP-трудной).

Простейший метод глобальной оптимизации. Можно ли ввести в этот процесс «обратную связь» и дробить брус области определения, подстраиваясь под текущие результаты оценивания? Да, надо вычислять внешние оценки лишь тогда, когда это действительно необходимо, чтобы уменьшить общие вычислительные затраты.

Вычисления могут быть остановлены в случае достижения «достаточной узости» интервала, оценивающего f^* . Для улучшения оценки области значений функции не нужно дробить все подбрусы исходного бруса \mathbf{X} , а лишь те из них, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции, а рассекаемые брусы не обязательно дробить по всем компонентам сразу (что увеличивает цену каждого отдельного шага работы алгоритма), важно лишь, чтобы размеры получающихся после дробления брусков были меньше размера исходного бруса.

Рассмотрим нахождение $\min f(x)$, алгоритм вычисления $\max f(x)$ строится аналогично.

Алгоритм для глобальной минимизации функции GlobOpt оперирует с рабочим списком \mathcal{L} , в котором будут храниться все брусы, получающиеся в результате дробления исходного бруса области определения на более мелкие подбрусы. Одновременно с самими подбрусками будем хранить в рабочем списке и нижние оценки областей значений целевой функции по этим подбрускам, так что элементами списка \mathcal{L} будут записи-пары вида (\mathbf{Y}, y) , где $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$, $y = f(\mathbf{Y})$.

Первоначально в рабочий список помещается одна запись $(\mathbf{X}, f(\mathbf{X}))$, и далее каждый шаг алгоритма состоит в извлечении из этого списка бруса, который обеспечивает рекордную (т. е. наименьшую) на данный момент оценку минимума снизу, его дроблении на более мелкие подбрусы, оценивании на них целевой функции, занесении результатов обратно в рабочий список.

На k -ом шаге алгоритма рабочий список \mathcal{L} состоит из k штук записей-пар вида $(\mathbf{Y}^{i,k}, y^{i,k})$, $i = 1, 2, \dots, k$, и для удобства обработки мы будем считать их упорядоченными по возрастанию значений второго поля, т. е.

$$\mathcal{L} = \{(\mathbf{Y}^{1,k}, y^{1,k}), \dots, (\mathbf{Y}^{i,k}, y^{i,k}), \dots, (\mathbf{Y}^{k,k}, y^{k,k})\},$$

где

$$\mathbf{Y}^{i,k} \subseteq \mathbf{X}, \quad y^{i,k} = \underline{f(\mathbf{Y}^{i,k})}, \quad y^{i,k} \leq y^{j,k} \quad \text{при } i < j.$$

Особую роль в исполнении алгоритма играет первая запись списка \mathcal{L} , которую называют ведущей записью. Соответственно, брус \mathbf{Y} будет называться ведущим брусом, а оценка y — ведущей оценкой для данного шага алгоритма. Ведущая оценка является наилучшей текущей оценкой минимума целевой функции снизу, достигнутой алгоритмом к данному шагу.

Вход
Интервальное расширение $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ целевой функции f . Заданная точность $\varepsilon \geq 0$
Выход
Оценка y^* глобального минимума f^* функции f на брусе \mathbf{X} .
Алгоритм
$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$; вычисляем $f(\mathbf{Y})$ и присваиваем $y \leftarrow \underline{f(\mathbf{Y})}$; инициализируем список $\mathcal{L} := (\mathbf{Y}, y)$; DO WHILE ($\text{wid}(f(\mathbf{Y})) \geq \varepsilon$) выбираем компоненту l , по которой брус \mathbf{Y} имеет наибольшую ширину, т.е. $\text{wid } \mathbf{Y}_l = \max_i \text{wid } \mathbf{Y}_i$ рассекаем брус \mathbf{Y} по l -й координате пополам на брусы \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' : $\mathbf{Y}' = \{\mathbf{Y}_1 \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\underline{\mathbf{Y}}_l, \text{mid } \mathbf{Y}_l], \mathbf{Y}_{l+1} \dots, \mathbf{Y}_n\}$ $\mathbf{Y}'' = \{\mathbf{Y}_1 \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\text{mid } \mathbf{Y}_l, \overline{\mathbf{Y}}_l], \mathbf{Y}_{l+1} \dots, \mathbf{Y}_n\}$ вычисляем $f(\mathbf{Y}')$ и $f(\mathbf{Y}'')$; присваиваем $v' \leftarrow \underline{f(\mathbf{Y}')}$ и $v'' \leftarrow \underline{f(\mathbf{Y}'')}$; удаляем запись (\mathbf{Y}, y) из списка \mathcal{L} ; помещаем записи (\mathbf{Y}', v') и (\mathbf{Y}'', v'') в список \mathcal{L} в порядке возрастания второго поля; обозначаем первую запись списка через (\mathbf{Y}, y) ; END DO $y^* \leftarrow y$

Дробление бруса для улучшения оценки области значений функции не нужно дробить все подбрусы исходного бруса \mathbf{X} , достаточно рассечь лишь те из них, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции;

рассекаемые брусы не обязательно дробить по всем компонентам сразу, важно лишь, чтобы размеры получающихся после дробления брусков были меньше размера исходного бруса.

Для демонстрации будем использовать функцию [9]

```
function [Z, WorkList ] = globopt0(X).
```

Она возвращает значение глобального экстремума Z и рабочий список $WorkList$. Работа алгоритма построен на последовательном сужении множества, на котором ищется оптимум.

Рассмотрим 2 примера из диссертации [10].

Пример 5.21 (Функция Растригина 10)

Функция Растригина широко используется для тестирования методов оптимизации и имеет вид

$$f_R = x^2 + y^2 - \cos(18 \cdot x) - \cos(18 \cdot y)$$

На рисунке 10 показан график функции в широкой области.

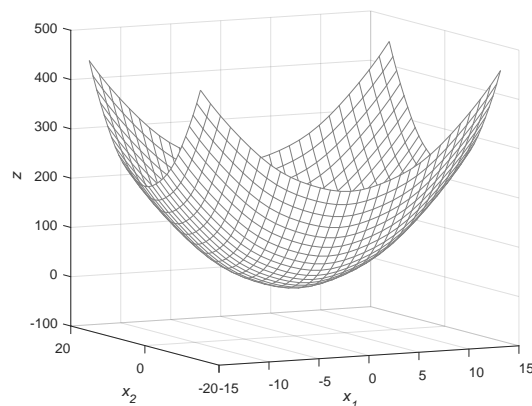


Рис. 10: График функции Растригина 10 на широкой области определения

График функции — параболоид с наложенными на него быстроменяющимися колебаниями.

На рисунке 11 показан график функции вблизи начала координат.

Минимум функции достигается при значении аргумента $x = (0, 0)$ и равен -2 .
Задаем брус, на котором ищем решение, как

$$\mathbf{X} = [-5, 5] \times [-5, 5].$$

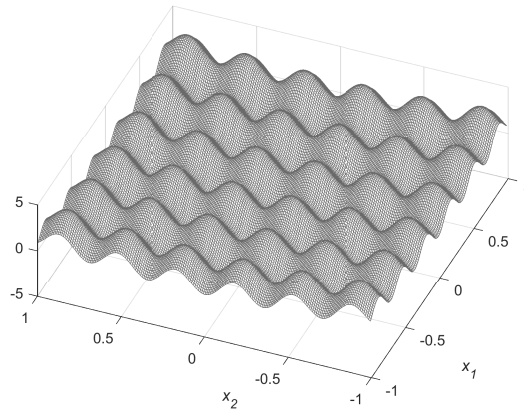


Рис. 11: График функции Растригина 10 вблизи начала координат

На рисунке 12 представлены последовательно уменьшающиеся брусы, на которых ищется интервальное расширение функции. Глобальный минимум

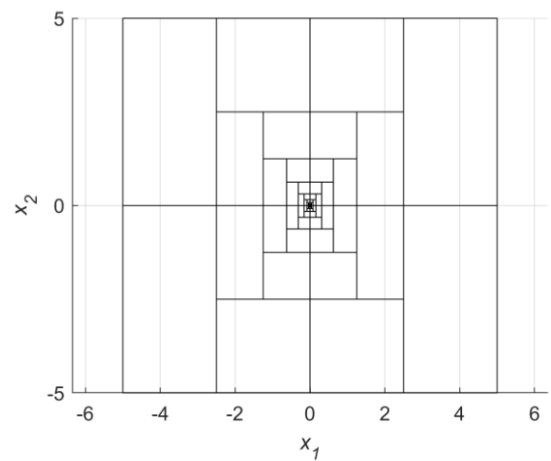


Рис. 12: Глобальная оптимизация. Функция Растригина 10

$$Z = -2$$

достигается в начале координат. ■

Пример 5.22 (Функция Розенброка 4)

Функция Розенброка 4 тоже широко используется для тестирования методов оптимизации и имеет вид

$$f_R = 100 \cdot (x_1^2 - x_2)^2 - (x_1 - 1)^2$$

На рисунке 13 показан график функции в широкой области и вблизи начала координат.

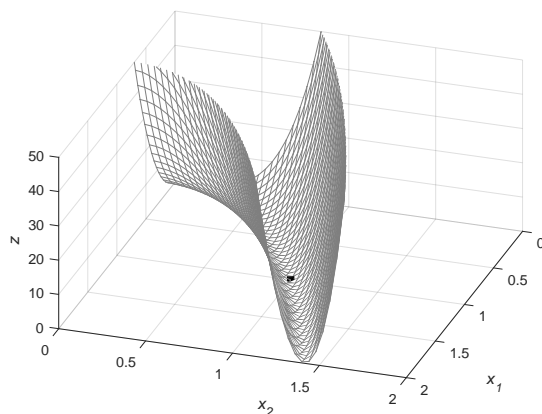


Рис. 13: Глобальная оптимизация. Функция Розенброка 4 в окрестности ее экстремума

График функции имеет тип «седло». Минимум функции достигается при значении аргумента $x = (1, 1)$ и равен 0.

Задаем брус, на котором ищем решение, как

$$\mathbf{X} = [-30, 30] \times [-30, 30].$$

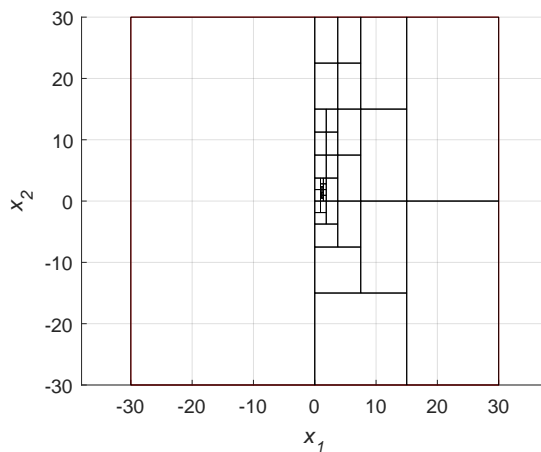


Рис. 14: Глобальная оптимизация. Функция Розенброка 4

На рисунке 14 представлены последовательно уменьшающиеся брусы, на которых ищется интервальное расширение функции. ■

Одно из самых перспективных применений интервального оценивания — механические конструкции. В этой области наиболее естественно представление возможных перемещений как геометрических областей с интервальной неопределенностью, как для механизмов, так и для биомеханики [8].

6 Линейные задачи

Множества решений интервальных уравнений. Математические свойства и отношения, представляющие задачу, могут выражаться, точечными уравнениями, неравенствами и т. п. Могут представиться следующие две принципиально различные ситуации:

- Рассматриваемое свойство имеет место для всех точек из заданного интервала.
- Свойство выполняется лишь для некоторых точек из интервала, не обязательно всех.

Принята следующая терминология:

- в первом случае говорят о \forall -типе (А-типе) неопределённости,
- во втором случае говорят о \exists -типе (Е-типе) неопределённости.

В первом случае интервал отождествляется с совокупностью всех своих точек, тогда как во втором он представляет собой лишь границы, «вместители» для некоторой неизвестной величины, которая может и не принимать некоторых значений из заданного интервала (возможно, что она принимает даже только одно значение из интервала).

Для краткости вполне уместно говорить интервальная А-неопределённость, интервальная Е-неопределённость и т.п.

Далее мы собираемся исследовать лишь множества решений, у которых в выделяющем предикате все вхождения квантора всеобщности « \forall » предшествуют вхождениям квантора существования « \exists ». Можно сказать, что соответствующий выделяющий предикат должен иметь АЕ-форму.

Пусть имеем ИСЛАУ

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (13)$$

с интервальными $m \times n$ -матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и m -вектором $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ — это формальная запись, обозначающая семейство точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Каждая система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, матрица которой взята из интервальной матрицы \mathbf{A} , а правая часть b из \mathbf{b} , может иметь решения, которые во многих практических ситуациях имеет смысл рассматривать совместно, единой совокупностью, т. е. взяв их объединение. Таким образом получается так называемое *объединённое множество решений* (*united solution set*)

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{существуют такие } A \in \mathbf{A} \text{ и } b \in \mathbf{b}, \text{ что } Ax = b\} \quad (14)$$

Это наиболее простое и естественное понимание «решения» интервальной системы уравнений.

Второму типу согласованию параметров и данных соответствует так называемое *допускное множество решений* интервальной линейной системы уравнений — множество, определяемое как

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{для любой } A \in \mathbf{A} \text{ справедлива принадлежность } Ax \in \mathbf{b} \}$$

(tolerable solution set). Это множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$, для которых произведение Ax при любых $A \in \mathbf{A}$ попадает в интервалы правых частей \mathbf{b} .

Допусковое множество решений может оказаться пустым, если интервалы правой части слишком узки в сравнении с интервалами элементов матрицы.

Всегда имеет место отношение

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

т.е., допускное множество решений всегда является подмножеством объединённого множества решений.

Обсудим примеры вариантов возможных объединенных областей решения ИС-ЛАУ, подробное изложение вопроса есть в публикации [18].

При анализе мы будем использовать пакет программ `IntLinInc2D` [13] для среды `Matlab`. Он содержит функции для решения 2-мерных интервальных задач в различных постановках и отображения множеств решений.

Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия. Рассмотрим самую простую из возможных ситуаций. Пусть для неизвестных x_1, x_2 известны их сумма и есть условия для каждой переменной по-отдельности. Если при этом еще и $x_1 \simeq x_2$, то с точностью до множителей система уравнений (13) имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \simeq 1 \\ x_1 + x_2 \simeq 2 \\ x_2 \simeq 1 \end{array} \right\}$$

«Решение» этой системы $x_1 \simeq 1, x_2 \simeq 1$. Для формальной постановки задачи зададим интервалы компонент правой части равными 0.1.

Пример 6.23 (Объединенное множество решений ИСЛАУ 3x2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [0.9, 1.1] \\ [1.9, 2.1] \\ [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (15)$$

Синтаксис вызова программы пакета `IntLinInc2D` для представления объединенного множества решений:

`[V, P1, P2, P3, P4] = EqnWeak2D(infA, supA, binf, bsup).`

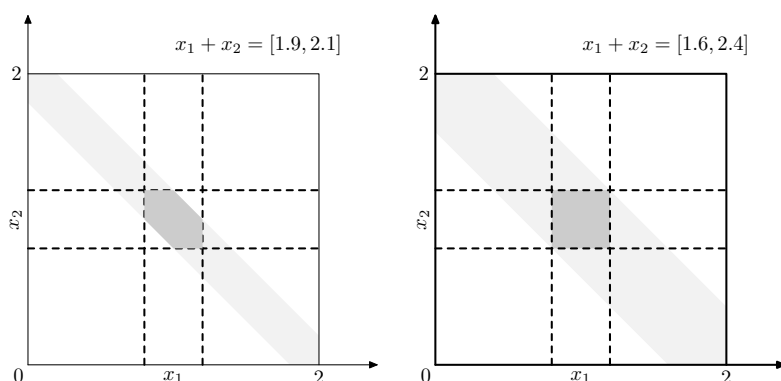


Рис. 15: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (15). Справа — случай с более «широкой» правой частью

Функция возвращает ориентационную матрицу V и 4 множества точек: P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , по одному на каждый ортант на 2D-плоскости. Ориентационная матрица содержит точки пересечения множества с ортантами, множества P_1 - P_4 — вершины множества в каждом ортанте. ■

Область объединенного множества решений обозначается полупрозрачной заливкой, граница дана штриховой линией.

Как образуется геометрическая форма объединенного множества? Разберем вопрос на примере 6.23: иллюстрация 15, рисунок слева.

Пусть из системы уравнений 15 исключено третье уравнение. Оно имеет форму параллелограмма, ограниченного диагональной полосой и вертикальной полосой, что соответствует ограничению на переменную x_1 , заданную первым уравнением и 15.

Теперь, наоборот, исключим первое уравнение. Его объединенное множество решений сформировано пересечением диагональной и горизонтальной полос. В этом случае имеет место ограничение на переменную x_2 , заданную третьим уравнением. Пересечение этих множеств образует шестиугольник. Такая форма объединенного множества решений типична для случая с «точечной» матрицей ИСЛАУ. Если элементы матрицы интервальные, формы объединенных множеств решений могут иметь гораздо более сложный вид.

На правом рисунке с иллюстрации 15 показан пример ИСЛАУ в случае, если «полоса» $x_1 + x_2 \simeq 2$ имеет низкую точность. В таком случае допусковое множество становится четырехугольником, как будто уравнение с суммой переменных x_1 и x_2 не входит в ИСЛАУ.

Для переменных известны их сумма и отношение Рассмотрим следующую характерную ситуацию. Пусть для переменных x_1, x_2 известны их сумма и отношение между

ними.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \simeq 2 \\ \frac{x_1}{x_2} \simeq \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Для формальной постановки задачи зададим интервалы компонент правой части равными 0.2. То же самое сделаем с элементами второй строки матрицы уравнения, поскольку неопределенность имеет отношение переменных.

Пример 6.24 (Объединенное множество решений ИСЛАУ 2x2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ [2.8, 3.2] & [-2.2, -1.8] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

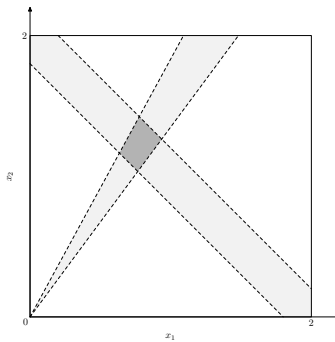


Рис. 16: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (16)

Как образуется геометрическая форма объединенного множества рисунок 16 для примера 6.24? По-прежнему, как в примере 6.23, одно из множеств — полоса, пересекающая оси координат. А вот вторая фигура теперь угол, с вершиной в начале координат. Его биссектриса имеет наклон, задаваемый вторым уравнением (16), а образующие определяются степенью неопределенности этого отношения. ■

Внешняя оценка множества решений. Внешнее оценивание объединённого множества решений.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя является итерационной процедурой для уточнения уже известной внешней оценки множества решений ИСЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, либо для нахождения внешней оценки части множества решений, ограниченной некоторым брусом. Обычно его применяют после предварительного преобуславливания системы.

<p>Вход</p> <p>Интервальная линейная система уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$</p> <p>Брус $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{IR}^n$, ограничивающий желаемую часть объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.</p> <p>Константа $\varepsilon \geq 0$</p>
<p>Выход</p> <p>Уточнённая внешняя оценка $\mathbf{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$ для части множества решений, содержащейся в \mathbf{x}, либо информация множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает исходный брус \mathbf{x}.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>$q \leftarrow +\infty$</p> <p>DO WHILE ($q \geq \varepsilon$)</p> <p> DO FOR $i = 1$ TO n</p> <p> $\tilde{\mathbf{x}}_i \leftarrow \mathbf{x}_i \cap \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{ii}$.</p> <p> IF ($\tilde{\mathbf{x}}_i = \emptyset$) THEN</p> <p> STOP, сигнализируя множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает брус \mathbf{x}</p> <p> END IF</p> <p>END DO</p> <p>$q \leftarrow$ расстояние между векторами \mathbf{x} и $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$;</p> <p>$\mathbf{x} \leftarrow \bar{\mathbf{x}}$</p> <p>END DO</p>

Пример 6.25 (Интервальный метод Гаусса-Зейделя)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ [-5, 5] \end{pmatrix}$$

■

Принципиальная проблема метода Гаусса-Зейделя — зависимость процесса от величины диагональных элементов. При их малости, а тем более при близости к нулю система будет плохо обусловлена и давать очень грубое приближение.

Стационарные итерационные методы. Метод Кравчика Итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow T(\mathbf{x}^{(k)})$$

называется стационарным, если оператор T не зависит от номера шага k . Говорят также, что он одношаговый в случае, когда каждый член итерационной последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ зависит только от одного предшествующего ему члена.

Итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow C(\mathbf{x}^{(k)}) + d, \quad k = 0, 1, \dots$$

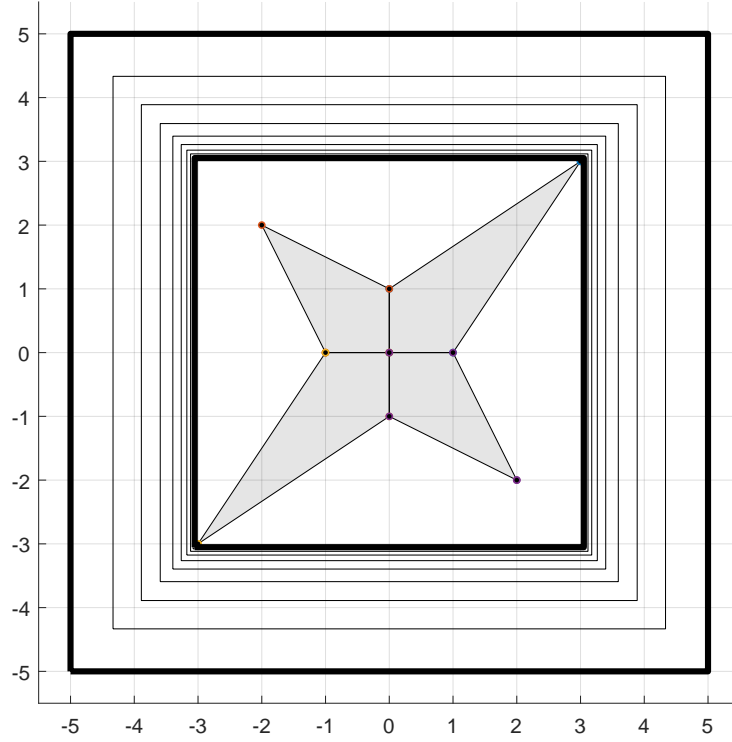


Рис. 17: Интервальный метод Гаусса-Зейделя

сходится, когда $\rho(|C|) \leq 1$, то есть спектральный радиус матрицы $|C|$, составленной из модулей элементов C , меньше единицы.

В методе Кравчика выбирают интервальный вектор начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ так, чтобы $\mathbf{x}^{(0)} \supseteq \mathcal{E}_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и затем итерируют:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \left(\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} \right) \cap \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (17)$$

с некоторой фиксированной матрицей $\Lambda \in \mathbb{R}^n$, фактически, она является предобуславливающей матрицей для исходной ИСЛАУ). В методе Кравчика обычно берут:

$$\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1},$$

а начальную внешнюю оценку множества решений находят каким-либо из способов оценки. Например, если $\eta = \|I - \Lambda \mathbf{A}\|_\infty \leq 1$ можно взять начальным приближением брус

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^\top, \quad \text{где } \theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta} \quad (18)$$

Важное достоинство метода Кравчика независимость процесса от величины диагональных элементов. Этот метод используется также и для решения нелинейных

уравнений и их систем. Из выражения для величины начального приближения (формула (18)) видно, что чем ближе $\Lambda \mathbf{A}$ к единичной матрице, тем более широким можно брать начальный брус.

Пример 6.26 (Интервальный метод Кравчика)

Рассмотрим ту же ИСЛАУ, что и в примере для метода Гаусса-Зайделя.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ [-5, 5] \end{pmatrix}$$

Для данного примера

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.6687 & 0.0372 \\ 0.0372 & 0.6687 \end{pmatrix}, \quad I - \Lambda \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-0.3561, 0.3561] & [-0.4087, 0.4087] \\ [-0.4087, 0.4087] & [-0.3561, 0.3561] \end{pmatrix},$$

$$\Lambda \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-0.7059, 0.7059] \\ [-0.7059, 0.7059] \end{pmatrix}$$

Обсудим выражение, даваемое формулой (17). Первое слагаемое $\Lambda \mathbf{b}$ — константа, и сходимость зависит от выражения $(I - \Lambda \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}$.

Найдем спектральный радиус оператора $|I - \Lambda \mathbf{A}|$. Абсолютная величина понимается в смысле формулы (6):

$$|I - \Lambda \mathbf{A}| = \left| \begin{pmatrix} [-0.3561, 0.3561] & [-0.4087, 0.4087] \\ [-0.4087, 0.4087] & [-0.3561, 0.3561] \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} 0.3561 & 0.4087 \\ 0.4087 & 0.3561 \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус $\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) = 0.76 \leq 1$, поэтому итерационный процесс сходящийся.

Первая итерация дает сужение бруса \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} [-4.5295, 4.5295] \\ [-4.5295, 4.5295] \end{pmatrix} \subset \mathbf{x}^{(0)}$$

и в дальнейшем процесс сходится, как и в методе Гаусса-Зайделя. ■

Линейная задача о допусках. Сосредоточимся теперь на нахождении допускового множества. Надо найти (по-возможности, бОльший) брус, который содержится в допусковом множестве решений данной ИСЛАУ. За этой задачей закрепилось наименование *линейной задачи о допусках*, она является задачей стабилизации выходов системы в заданном коридоре при наличии ограниченных неконтролируемых возмущений.

Специфической особенностью задачи о допусках является возможность для допускового множества решений оказаться пустым даже для «хороших» интервальных данных, как, например, это имеет место у следующего одномерного уравнения

Пример 6.27 (Одномерное линейное уравнение с пустым допусковым множеством)

Рассмотрим одномерное уравнение

$$[1, 2] \cdot x = [3, 4] \quad \text{«Решение»} = \left[2, \frac{3}{2}\right]$$

Допусковое множество пусто. ■

В подобных случаях говорят, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*.

Пример 6.28 (ИСЛАУ 2x2 с пустым допусковым множеством)

Рассмотрим двумерное уравнение. По существу, это пример 6.27 для двух независимых переменных, записанный в матричной форме

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & 0 \\ 0 & [1, 2] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [3, 4] \end{pmatrix} \quad \text{«Решение»} \begin{pmatrix} \left[2, \frac{3}{2}\right] \\ \left[2, \frac{3}{2}\right] \end{pmatrix}$$

Допусковое множество опять-таки пусто. ■

Вообще, для интервальной матрицы допусковое множество решений — это множество решений конечной системы двусторонних линейных неравенств. Отсюда следует, что $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — выпуклое многогранное множество.

Теоремы И.Шарой и Рона [1] конкретизируют в разных формах вид $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ как пересечение гиперполос — линейных объектов с «параллельными» образующими (двумерные полосы, плоскости и тп).

В таблице приведен список вариантов ограниченности и неограниченности допускового множества решений в зависимости от свойств матрицы ИСЛАУ:

интервальная матрица \mathbf{A}	Допусковое множество решений
все элементы существенно интервальные	ограниченно
каждый столбец имеет существенно интервальный элемент	ограниченно
есть нулевые столбцы	неограниченно
есть пропорциональные точечные столбцы	неограниченно
число неинтервальных столбцов больше общего числа строк	неограниченно

Грубое исследование разрешимости.

Простой эвристический способ проверки разрешимости линейной задачи о допусках:

в качестве наиболее вероятного представителя допускового множества решений берётся решение \hat{x} «средней» точечной системы:

$$\text{mid}(\mathbf{A})x = \text{mid}(\mathbf{b}), \quad (19)$$

которое затем тестируется на включение $\mathbf{A} \cdot \hat{x} \subseteq \mathbf{b}$.

Описанный тест средней системы, как показывает практика, работает лишь когда матрица \mathbf{A} «достаточно узка» в сравнении с вектором правой части \mathbf{b} и не способен исследовать тонких пограничных ситуаций.

Пример 6.29 (Непригодность «средних» решений ИСЛАУ как допусковых множеств — 1D)

Контрпример для (19) в одномерном случае [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [-1, 2], \quad \mathbf{b} = [-2, 6], \quad \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2] \\ 0.5 \cdot x &= 2 \quad \text{дает} \quad \hat{x} = 4 \notin \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Причина «промаха» — несоответствие устройства интервалов матрицы и правой части. Вектор правой части более асимметричен относительно нуля, чем элемент матрицы, поэтому его середина находится выше чем проекция произведения матрицы на переменную. ■

Пример 6.30 (Непригодность «средних» решений ИСЛАУ как допусковых множеств. Допусковое множество — точка.)

Контрпример [1] для (19) в ИСЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1, 2] \\ [1, 2] & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [5, 7] \\ [7, 9] \end{pmatrix}$$

Здесь $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ состоит из точки $(1, 2)^\top$, а решение «средней» системы $(\frac{8}{9}, \frac{20}{9})^\top$.

При этом формально матрица ИСЛАУ ничем не плоха: положительная и неособенная. ■

На рисунке 18 приведены множества решений для ИСЛАУ из примера 6.30. Объединенное множество решений дано заливкой, стрелки указывают на «среднее» и допусковые решения.

В чем причина того, что допусковое множество решений ИСЛАУ состоит из всего одной точки? Проследим, как достигается «попадание» вектора решения $(1, 2)^\top$, в допуск правой части.

$$\begin{aligned} 3 \times 1 + 1 \times 2 &= 5 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 &= 7 \end{aligned}$$

Таким образом, решение достигается только на «крайних» значениях недиагональных элементов матрицы ИСЛАУ и только на них не пусто.

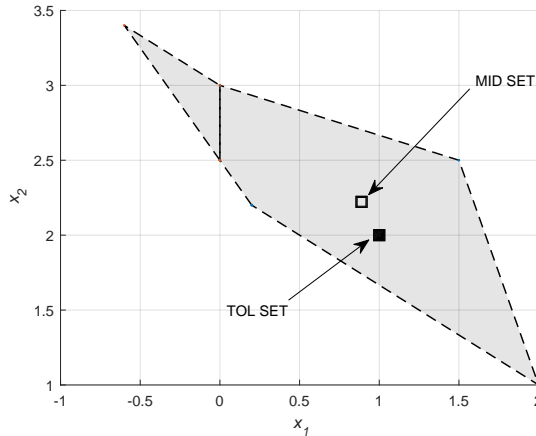


Рис. 18: Контрпример для оценки по формуле (19) в ИСЛАУ примера 6.30

Приведем пример, когда допустовое множество невырождено, но «среднее» решение в него не попадает.

Пример 6.31 («Среднее» решение ИСЛАУ не попадает в допустовое множество.)

Рассмотрим ИСЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & [-0.9, 0.1] \\ [-0.1, 0.1] & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [0.9, 2.2] \\ [0.9, 2.2] \end{pmatrix}$$

Матрица ИСЛАУ в данном примере получена из единичной добавлением несимметричных относительно нуля недиагональных членов, имитируя «кривой» поворот на плоскости. Правая часть получена несимметричным растяжением единичного вектора.

На рисунке 19 приведены множества решений. Объединенное множество решений дано заливкой, среднее решение обозначено квадратом, допустовое множество — треугольник.

Степень удаленности «среднего» решения от допустового множества зависит от неравенства интервалов недиагональных элементов. ■

Распознающий функционал — теория. Полное исследование разрешимости можно произвести, используя распознающий функционал. Его выражение имеет вид:

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (20)$$

принадлежность $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, т. е. допустовое

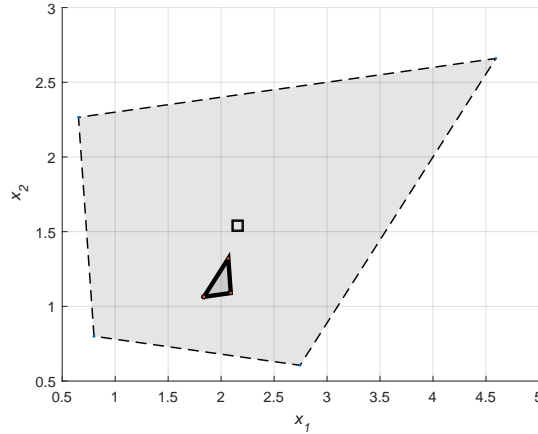


Рис. 19: Контрпример для оценки по формуле (19) в ИСЛАУ примера 6.31.

множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\} \quad (21)$$

функционала Tol.

Обсудим факт, выражаемый формулой (21).

$$x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \mathbf{A} \cdot x \subseteq \mathbf{b}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \subseteq \mathbf{b}_j = [\text{mid}(\mathbf{b}_j) - \text{rad}(\mathbf{b}_j), \text{mid}(\mathbf{b}_j) + \text{rad}(\mathbf{b}_j)]$$

$$\text{mid}(\mathbf{b}_j) - \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \subseteq [-\text{rad}(\mathbf{b}_j), \text{rad}(\mathbf{b}_j)]$$

$$\left| \text{mid}(\mathbf{b}_j) - \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \right| \leq \text{rad}(\mathbf{b}_j)$$

$$\text{rad}(\mathbf{b}_j) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_j) - \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \right| \geq 0$$

Последняя строка выражает покомпонентную «вместимость» левой части ИСЛАУ в правой части (абсолютную величины невязки). Если такое условие выполнено для всех компонент вектора \mathbf{b} , система разрешима.

Распознающий функционал имеет единственный максимум при значении аргумента, наиболее близкому к «решению» ИСЛАУ.

Пример 6.32 (Распознающий функционал 3 уравнения — график)

Рассмотрим ИСЛАУ [1]:

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 2] \\ [1, 2] & [1, 3] \\ [-1, 1] & [0, 1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 60] \\ [10, 72] \\ [-10, 36] \end{pmatrix} \quad (22)$$

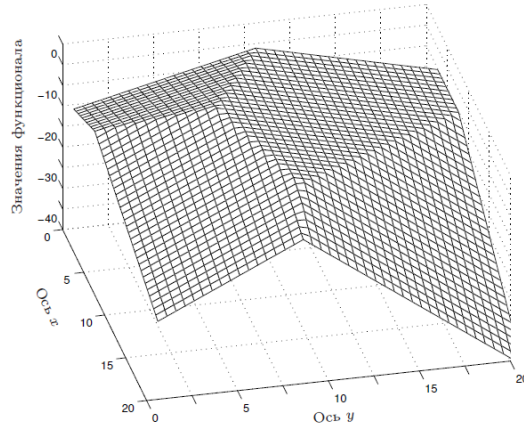


Рис. 20: График распознающего функционала для ИСЛАУ 2x3

Вычислим по формуле (20):

$$\text{Tol}(x, y) = \min \left\{ 30 - | [2, 3] \cdot x - [-1, 2] \cdot y |, \right. \\ \left. 31 - | [1, 2] \cdot x - [1, 3] \cdot y |, \right. \\ \left. 23 - | [-1, 1] \cdot x - [0, 1] \cdot y |, \right\}$$

На графике (рисунок 20) хорошо видна многогранность функционала. Наивысшая по оси Oz точка графика Tol имеет координаты $(x, y, z) = (6, 8, 4)^T$, так что максимум распознающего функционала равен 4. ■

Пример 6.33 (Распознающий функционал 2 уравнения — график)

Рассмотрим ИСЛАУ [1]

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \quad (23)$$

Вычислим по формуле 20, здесь середины правых частей $\mathbf{b}_i = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Tol}(x, y) &= \min \left\{ 1 - | [1, 2] \cdot x + [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cdot y |, 1 - | [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cdot x + [1, 2] \cdot y |, \right\} = \\ &= 1 - \max \left\{ | [1, 2] \cdot x + [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cdot y |, | [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cdot x + [1, 2] \cdot y | \right\} \end{aligned}$$

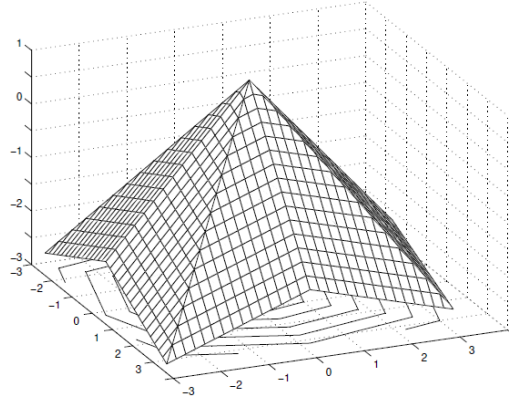


Рис. 21: График распознающего функционала для ИСЛАУ 2x2

Здесь модули выражений под знаками экстремумов всегда неотрицательны. Кроме того, они достигают своих наименьших значений, равных нулю, одновременно, когда $x = y = 0$. При всех остальных x и y выражения под знаками модулей ненулевые, так что значение распознающего функционала в этих точках будет меньшим его значения в нуле. Таким образом

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \text{Tol}(x) = 1$$

и достигается при $(x, y) = (0, 0)$. ■

Распознающий функционал — программная реализация. Разрешимость исследуем с помощью функции `tolsovlty` [11], доступной с сайта [12].

Синтаксис программы `tolsovlty` в сокращенной форме:

$$[\text{tolmax}, \text{argmax}, \text{envs}...] = \text{tolsovlty}(\text{supA}, \text{infA}, \text{supb}, \text{infb}, \dots). \quad (24)$$

Обязательные входные аргументы функции:

`infA`, `supA`, `infb`, `supb` — соответственно нижние и верхние границы матрицы и правой части ИСЛАУ:

$$\begin{aligned} \text{infA} &= \inf(\mathbf{A}), & \text{supA} &= \sup(\mathbf{A}) \\ \text{infb} &= \inf(\mathbf{b}), & \text{supb} &= \sup(\mathbf{b}). \end{aligned} \quad (25)$$

Функция `tolsovlty` (формула (24)) возвращает величину разрешающего функционала `tolmax`. Положительность этого функционала соответствует разрешимости ИСЛАУ, `argmax` — наиболее «верное» решение, даже при отсутствии разрешимости, а также `envs` — значения образующих распознающего функционала в точке его максимума.

Пример 6.34 (Программное вычисление распознающего функционала — 1)

Рассмотрим ИСЛАУ 23 из примера 6.32. Сформируем входные параметры для функции `tolsolvty(supA, infA, supb, infb)`:

$$\text{supA} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{infA} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{supb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \text{infb} = \begin{pmatrix} 60 \\ 72 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Результатом выполнения программы `[tolmax, argmax] = tolvty(supA, infA, supb, infb)` будет вычисление:

$$\text{tolmax} = 4; \quad \text{argmax} = (6, 8)$$

График распознающего функционала представлен на рисунке 20. ■

Пример 6.35 (Программное вычисление распознающего функционала — 2)

Рассмотрим ИСЛАУ (22) из примера 6.33. Сформируем входные параметры для функции `tolsolvty(supA, infA, supb, infb)`:

$$\text{supA} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{infA} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{supb} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{infb} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Результат выполнения программы `tolsolvty` (24):

$$\text{tolmax} = 1; \quad \text{argmax} = (0, 0)$$

График распознающего функционала представлен на рисунке 21. ■

Коррекция ИСЛАУ: изменение правой части. Неразрешимость линейной задачи о допусках может иметь разные причины. С одной стороны, это может быть связано со слишком высокими требованиями (ограничениями) на допуски в правой части или недостоверность самих данных. Вспомним пример 6.27: $\mathbf{Ax} \not\leq \mathbf{b}$ — правая часть «уже» левой.

Наиболее простой способ достижения разрешимости [1] — ослабление ограничения (расширение допуска) в правой части ИСЛАУ. Эта операция увеличивает значение $\text{Tol}(x)$ (смотри выражение (20)) и позволяет достичь разрешимости за счет ослабления требований к точности решения.

Обоснование этого факта следующее. Величины $\text{rad } \mathbf{b}_i$ входят слагаемыми во все выражения для вычисления окончательного значения функционала. Если обозначить вектор «расширения»

$$\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top,$$

то для системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{Ce}$ с уширенной правой частью $\text{rad } \mathbf{b}_i + C$, $i = 1, 2, \dots, m$ значение распознающего функционала равно:

$$\max_x \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + \mathbf{Ce}) = \max_x \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + C.$$

Пример 6.36 (Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет расширения правой части)

Рассмотрим ИСЛАУ [1]:

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix}.$$

Результат выполнения программы `tolstolvtv` (24):

`tolmax = -0.72727; argmax = [0.54545, 0.40909]`

Допусковое множество пусто и «дефицит разрешимости» составляет примерно -0.73.

Согласно методике достижения разрешимости, добавление к правой части $1.73 \cdot [-1, 1]$ приведет к разрешимости системы с «запасом разрешимости» примерно 1. Такое избыточное расширение дает непустое множество, которое можно представить графически.

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix} + 1.8 \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

Результатом выполнения программы `tolstolvtv` (24) на этот раз будет:

`tolmax = 1.0727; argmax = (0.54545, 0.40909)`

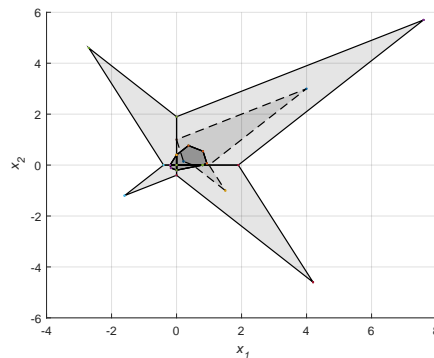


Рис. 22: Множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное (граница штрихом), расширенное и допусковое

На рисунке 22 представлены 3 множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное полупрозрачное с штриховой границей, расширенное полупрозрачное с штриховой границей и допусковое более темное. ■

В примере 6.36 непустота множества решения была достигнута за счет существенного расширения допусков:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [-0.8, 3.8] \end{pmatrix}$$

Это не всегда приемлемо по постановке задачи. Например, если решение предполагается положительным, а нижняя граница допуска стала отрицательной, это означает, что решение не имеет смысла.

Если ширины различных компонент векторы правой части различны, то более эффективно и расширять их по-разному. Технически метод реализуется следующим образом. К правой части добавляются величины, «расширенные» во все стороны, пропорциональные некоторым весам ν_i , которые различны для разных компонент:

$$\mathbf{b}_i + K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1] \quad (26)$$

\mathbf{b}_i — исходные значения компонент правых частей ИСЛАУ, ν_i — индивидуальные веса для разных компонент, K - общий множитель, $[-1, 1]$ — симметричный относительно нуля интервал.

Пример 6.37 (Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет расширения правой части при неравных ширинах компонент правой части)

Рассмотрим пример [2], сходный с 6.36, но с другим вектором правой части:

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 1.5] \end{pmatrix}.$$

Радиус второй компоненты \mathbf{b} в 2 раза меньше первой.

Результат выполнения программы `tolsovlty` (24):

`tolmax = -0.77273; argmax = (0.45454, 0.34091)`

Допусковое множество пусто и «дефицит разрешимости» составляет примерно -0.73.

Добавим к правой части вектор «расширения» $\Delta\mathbf{b}$: с радиусом второй компоненты в 2 раза меньше первой:

$$\text{rad}(\Delta\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [0.1, 2.4] \end{pmatrix}.$$

Новая ИСЛАУ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [0.1, 2.4] \end{pmatrix}$$

Результат выполнения программы `tolsovlty` (24):

`tolmax = 0.45454; argmax = (0.20909, 0.38182)`

На рисунке 23 представлены 3 множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное полупрозрачное с штриховой границей, расширенное полупрозрачное с штриховой границей и допусковое более темное. ■

Нижняя граница допуска по первой компоненте в первом уравнении по-прежнему отрицательна, а по второй стала положительна. Этот факт означает, что избирательная работа с разными уравнениями дает более качественное решение.

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы. Если ИСЛАУ несовместна, то наиболее принципиальным подходом к достижению разрешимости является коррекция правой части. Существуют различные подходы к этой проблеме. Рассмотрим пример

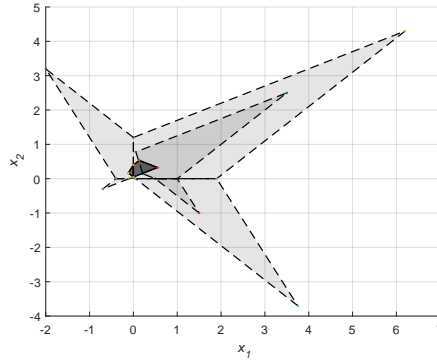


Рис. 23: Множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное (граница штрихом), расширенное и допусковое

6.27. Причиной несовместности является слишком сильное «расширяющее» действие матрицы $\mathbf{A} = [1, 2]$, в 2 раза, на вектор x . При этом ширина правой части меньше, $\mathbf{b} = (3, 4)$.

Пример 6.38 (Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет уменьшения радиусов компонент матрицы)

Обратимся к примеру 6.37 и выясним, насколько нужно уменьшить радиусы элементов матрицы, чтобы была разрешима ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 1.5] \end{pmatrix}$$

Символически уменьшение радиусов при сохранении «средней» матрицы можно выразить таким образом:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}',$$

где $\text{rad}(\mathbf{A}') \leq \text{rad}(\mathbf{A})$, а $\text{mid}(\mathbf{A}') = \text{mid}(\mathbf{A})$. Конкретно, при уменьшении радиусов элементов матрицы \mathbf{A} в 8 раз, получаем разрешимую ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2.88, 3.12] & [-0.69, -0.31] \\ [0.31, 0.69] & [2.88, 3.12] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 1.5] \end{pmatrix}$$

$\text{tolmax} = 0.08$

На рисунке 24 представлены 2 множества решения ИСЛАУ: объединенное полупрозрачное и допусковое более темное. ■

Интервальная регуляризация. Рассмотрим решение плохо обусловленных СЛАУ, с неточно известными матрицей и правой частью. Чтобы улучшить устойчивость процесса решения, «погружаем» исходную неточную линейную систему в ИСЛАУ той же структуры, а затем рассматриваем ее допусковое множество решений. В результате «интервализованная» матрица системы становится лучше обусловленной, для которых решение соответствующей системы уравнений более устойчиво.

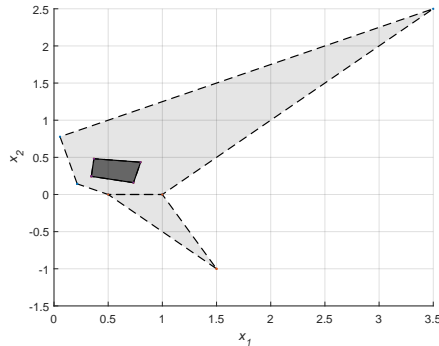


Рис. 24: Множества решения ИСЛАУ светлое объединенное и темное допустовое

В качестве псевдорешения исходной системы линейных уравнений берем точку из допустового множества решений интервализированной линейной системы или точки, которая обеспечивает наибольшую допустимую совместимость (согласованность).

Из теории матриц. Пусть A — матрица и ее число обусловленности $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, определенная через подчиненную норму $\|\cdot\|$, удовлетворяет условию $\text{cond}(A) \geq 1$. Тогда в окрестности найдутся матрицы A' имеющие лучшую обусловленность: $\text{cond}(A') \leq \text{cond}$. Это следует из факта, что число обусловленности для подчиненной нормы имеет только глобальный минимум $\text{cond}(A) = 1$ и не имеет локальных минимумов.

Возникает следующая идея: заменить решение исходной СЛАУ $A \cdot x = b$ решением СЛАУ $A' \cdot x = b$ с близкой, но лучше обусловленной матрицей A' . При благоприятных условиях, решение новой системы будет близко к желаемому решению исходной системы. Эта идея не нова и восходит к методу регуляризации Лаврентьева [14], используемому, например для решения интегральных уравнений первого рода. При малом возмущении оператора уравнения, малые собственные числа отодвигаются от нуля, и оператор удаляется от сингулярности.

Метод регуляризации Лаврентьева также применим к СЛАУ. В частном простейшем случае, когда матрица A симметрична и положительна полуопределена (неотрицательно определена), решается СЛАУ:

$$(A + \theta \cdot I) \cdot x = b \tag{27}$$

В общем случае, когда мы ничего не знаем о свойствах матрицы A , выбор параметра θ , т.е. направление сдвига и его величина не очевидны.

Реализация нашей идеи в случае, когда информация об недоступна, может состоять в том, чтобы одновременно выполнять сдвиг «по всем направлениям». Тогда между сдвигами есть определенно подходящее направление, и оно обеспечит желательную регуляризацию и улучшение матрицы. В интервальных терминах мы «раздуваем» матрицу, превращая ее в интервальную матрицу \mathbf{A} . Чтобы покрыть

все возможные направления сдвига матрицы A :

$$A = A + \theta \cdot E \quad (28)$$

здесь E — матрица того же размера что и A , составленная из интервалов $[-1, 1]$ и θ — параметр величины «раздувания».

Пример 6.39 (Интервальная регуляризация ИСЛАУ 2x2)

Рассмотрим [4] точечную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

По отношению к спектральной норме $\text{cond}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, число обусловленности равно $3.9 \cdot 10^4$, и можно показать, что это максимум для регулярных 2x2-матриц с целыми положительными числами < 100 .

«Интервализуем» матрицу добавлением к каждому элементу.

$$A = \begin{pmatrix} [98, 100] & [99, 101] \\ [97, 99] & [98, 100] \end{pmatrix}$$

Новая интервальная матрица содержит множество точечных сингулярных матриц, например:

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 99 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

Число обусловленности «угловых» матриц равно

$$\text{cond}(A) = \begin{matrix} 38000 & 197 & 201 & 13100 \\ 197 & \boxed{99} & 13100 & 195 \\ 197 & 39200 & \boxed{99} & 199 \\ 39200 & 199 & 199 & 40000 \end{matrix}$$

Мы можем видеть, что среди 16 матриц конечных точек одна матрица имеет еще большее число обусловленности, чем исходное, 40000. Две матрицы имеют примерно такое же значение, а одна матрица несколько меньше. Однако 10 матриц из 16 имеют значительно меньшие числа обусловленности. Значения чисел обусловленности для наиболее «выдающиеся» представители заключены в таблице в рамки.

Можно показать, что условие 98.76, достигнутое в матрице конечных точек действительно минимально среди всех точечных матриц из множества A .

Существуют мощные эвристические методы нахождения оценок числа обусловленности [6]. Приведем примерный код на языке Octave [7].

```
% ввод исследуемой интервальной матрицы
A = [ infsup(98,100) infsup(99,101); infsup(97,99) infsup(98,100); ...
```

```

infsup(96,98) infsup(97,99) ]
% определяем размеры данной матрицы
m = size(A,1);
n = size(A,2);
% задаём количество случайных бросаний в реализуемом алгоритме
NN = 10;
% инициализируем угловые матрицы для A
Matr1 = ones(m,n); Matr2 = ones(m,n);
% инициализируем MinCond - минимум чисел обусловленности точечных
% матриц, содержащихся в заданной интервальной матрице A
MinCond = Inf;
for i = 1:NN
% случайно порождаем целочисленную матрицу EPM из нулей и
% единиц, тех же размеров, что и A (интервал случайных
% целочисленных значений указывается первым аргументом randi)
EPM = randi([0,1],m,n);
% порождаем угловые матрицы, диагонально противоположные друг другу,
% в соответствии с эвристикой "диагональных" методов оптимизации
for i = 1:m
for j = 1:n
if EPM(i,j) == 0
Matr1(i,j) = inf(A(i,j));
Matr2(i,j) = sup(A(i,j));
else
Matr1(i,j) = sup(A(i,j));
Matr2(i,j) = inf(A(i,j));
endif
end
end
% находим числа обусловленности полученных
% угловых матриц, корректируем оценку минимума
c1 = cond(Matr1,2);
c2 = cond(Matr2,2);
if MinCond > c1
MinCond = c1;
endif
if MinCond > c2
MinCond = c2;
endif
end
% выводим найденный минимум чисел обусловленности
disp(MinCond);

```



Оценки вариабельности решения ИСЛАУ. С.П. Шарый в материале [5] предложил оценки параметров в статистике интервальных данных и предложил терминологию для описания этих параметров. Ниже рассмотрены конкретные примеры, иллюстрирующие количественную связь предложенной величины и общепринятых в интервальном анализе информационных множеств.

Рассмотрим ИСЛАУ (13)

$$Ax = b.$$

Исследование разрешимости ИСЛАУ можно произвести, используя технику распознающих функционалов (20).

Проведем оценку вариабельности решения с интервальными данными. Отправной точкой для такой оценки служит традиционная оценка изменчивости решения СЛАУ

$$A \cdot x = b \tag{29}$$

в форме, учитывающей только вариацию правой части (29):

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{30}$$

Предполагается, что нормы векторов и матриц $\|\cdot\|$ согласованы, и число обусловленности матрицы СЛАУ (29) вычисляется как

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \tag{31}$$

Для случая интервально заданных величин в настоящее время предложены следующие оценки абсолютной вариабельности оценки **ive** (**interval variability of the estimate**) и **rve** (**relative variability of the estimate**) относительной вариабельности оценки решения ИСЛАУ (13):

$$\text{ive}(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = \left(\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \right) \cdot \|\arg \max \text{Tol}\| \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|b\|}, \tag{32}$$

$$\text{rve}(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = \left(\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \right) \cdot \max \text{Tol}. \tag{33}$$

В выражениях (32) и (33) минимум числа обусловленности находится среди всех реализаций матрицы ИСЛАУ.

Связь абсолютной и относительной оценки вариабельности решения выражается как:

$$\text{ive}(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = \text{rve}(\mathbf{A}; \mathbf{b}) \cdot \frac{\|\arg \max \text{Tol}\|}{\|b\|} \tag{34}$$

Специфичными для интервального случая является оценка величин $\|\Delta b\|$ и $\|x\|$ в исходном выражении (30).

Логика оценки этих величин строится на основе представлений о множестве решений интервальных задач. В случае разрешимости в смысле непустоты допускового множества, $\|\arg \max \text{Tol}\|$ входит в допусковое множество и можно положить $\|x\| = \|\arg \max \text{Tol}\|$.

Что касается оценки $\|\Delta b\|$, то можно рассуждать следующим образом. Свойством распознающего функционала в форме (20) является его равенство нулю в случае, если решением является одна точка $x \in \mathbb{R}^n$. При этом $\|\Delta b\| = 0$. При расширении допуска $\|\Delta b\|$ на константу C , на это же значение изменяется величина $\max \text{Tol}$ (например, [1]). Таким образом: $\|\Delta b\| = \max \text{Tol}$.

Обсудим оценки, даваемые выражениями (32) и (33). Начнем с относительной оценки rve . При допусковом множестве, состоящем из одной точки, $\max \text{Tol} = 0$, $\text{rve} = 0$.

При увеличении значения $\max \text{Tol}$, растет и rve с коэффициентом пропорциональности $\text{cond } A$. С точки зрения понятий информационных множеств, это соответствует увеличению допускового множества. Чем хуже обусловлена ИСЛАУ, тем сильнее «расплывается» область решения, тем «хуже» качество решения. Величина ive дает абсолютную оценку, в которую входит и норма правой части $\|b\|$.

Пример 6.40 (Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Хорошая обусловленность)

Рассмотрим конкретный пример ИСЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05], & [0.95, 1.05] \\ [-0.05, 0.05], & [0.95, 1.05] \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ [0.8, 1.2] \end{pmatrix} \quad (35)$$

ИСЛАУ с матрицами такого типа характерны, в частности, для задач спектрального анализа. Например, система вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ [0.8, 1.2] \end{pmatrix} \quad (36)$$

соответствует ситуации, когда известна сумма двух аналитических линий (первое уравнение) и значение одной из них (второе уравнение).

ИСЛАУ (35) близка к треугольной и хорошо обусловлена: $\text{cond}(\text{mid}(A)) = 2.6$. Результатами вычисления распознающего функционала с помощью программы `tolstolvt` [11] являются величины:

$$\max \text{Tol} = 0.1, \quad \text{argmax} = [1, 1],$$

График распознающего функционала для ИСЛАУ (35) приведен на рисунке 25. График имеет хорошо выраженную «вершину».

Цветовая палитра выбрана таким образом, что значениям функционала Tol , меньшим 0, отвечает синий цвет. Точки графика Tol , соответствующие допусковому множеству ИСЛАУ (35), окрашены в теплые тона.

Вычисления оценок вариабельности по формулам (32) и (33) дают:

$$\text{ive} = 0.17, \quad \text{rve} = 0.26.$$

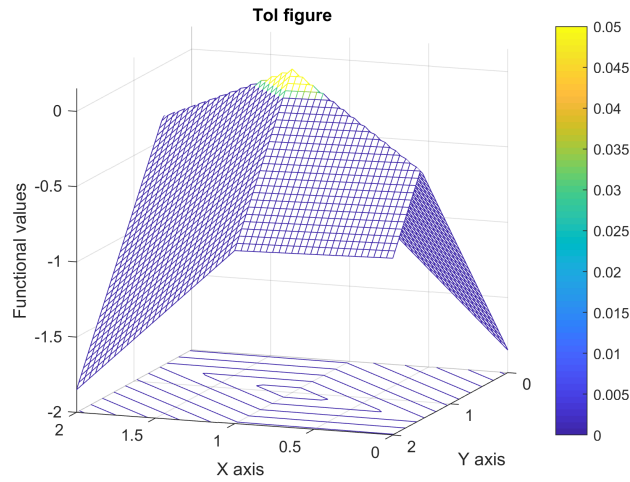


Рис. 25: График распознающего функционала для ИСЛАУ (35).

Информационные множества решений ИСЛАУ (35) показаны на рисунке 26 зеленым (объединенное) и красным (допусковое) цветами. Вычисления велись с использованием функций пакета `IntLinInc2D` [13].

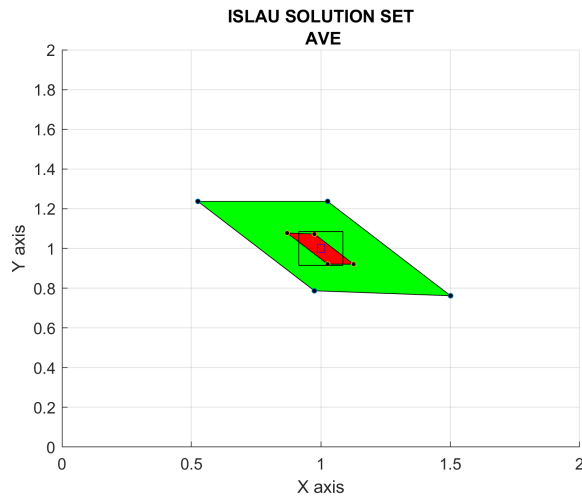


Рис. 26: Информационные множества решений ИСЛАУ (35) и оценка вариабельности по формуле (32). Сторона квадрата равна $2 \cdot \text{ive}$.

Также на рисунке 26 показано положение оценки вариабельности по формуле (32), с центром в точке `argmax` — квадрат с синей границей. Как видно из рисунка, множество, покрываемое оценкой `ive`, хорошо соответствует допусковому множеству решений. Особенно хорошее соответствие достигнуто для переменной Y . Это

объясняется наличием более строго ограничения на эту переменную в ИСЛАУ (35). ■

Пример 6.41 (Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность)

Рассмотрим ИСЛАУ, сильно отличающуюся от (35):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05], & [0.95, 1.05] \\ [1.05, 1.15], & [0.95, 1.05] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.85, 2.15] \\ [1.95, 2.25] \end{pmatrix} \quad (37)$$

ИСЛАУ с матрицами типа (37) характерны для задач оптической томографии в веерной геометрии, если углы между хордами наблюдения малы.

Средней по отношению к (37) является СЛАУ с матрицей и правой частью, даваемыми уравнениями (38):

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mid } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

ИСЛАУ (37) плохо обусловлена: $\text{cond}(\text{mid}(\mathbf{A})) = 42$. Результатами вычисления распознающего функционала с помощью программы `tolstolvtu` являются величины:

$$\text{max Tol} = 0.05, \quad \text{argmax} = [1, 1],$$

Вычисления оценок вариабельности по формулам (32) и (33) дают:

$$\text{ive} = 1.03, \quad \text{rve} = 2.1.$$

Информационные множества решений ИСЛАУ (37) показаны на рисунке 27 зеленым (объединенное) и красным (допусковое) цветами.

Также на рисунке 27 показано положение оценки вариабельности по формуле (32), с центром в точке `argmax` — квадрат с синей границей.

Обсудим вид допусковых множеств, представленных на рисунке 27. Ввиду того, что уравнения в ИСЛАУ (37) соответствуют прямым с небольшим углом между ними, график распознающего функционала не будет иметь ярко выраженной вершины.

График распознающего функционала для ИСЛАУ (37) представлен на рисунке 28. Цветовая палитра выбрана таким образом, что значениям функционала `Tol`, меньшим 0, отвечает синий цвет. Точки графика `Tol`, соответствующие допусковому множеству ИСЛАУ (37), окрашены в теплые тона.

Допусковое множество, как это видно из рисунка 28, имеет форму сильно вытянутого вдоль одной из диагоналей четырехугольника (виден на проекции графика на плоскость $z = -8$), а график `Tol` в этой области — форму «плато», со слабо выраженной вершиной в его центре. Даже при относительно невысокой вариабельности правой части ИСЛАУ (37), размеры допускового множества весьма велики.

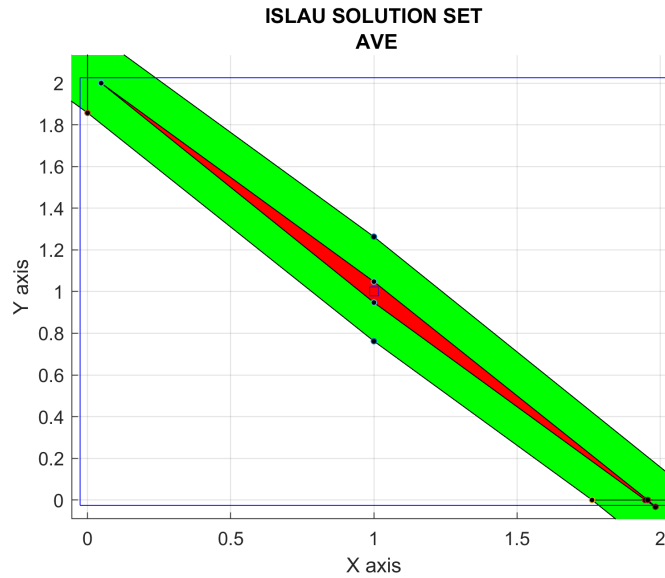


Рис. 27: Информационные множества решений ИСЛАУ (37) и оценка варибельности по формуле (32). Сторона квадрата равна $2 \cdot \text{ive}$.

■

Несмотря на явственное различие между информационными множествами и оценками варибельности для ИСЛАУ (35) и (37), оценки, даваемые формулой (32) для значений ive , вполне адекватно ограничивают допустимое множество. Этот факт дает положительную основу для использования этой величины в качестве оценки варибельности решения линейной задачи о допусках.

Пример 6.42 (Решение недоопределенных ИСЛАУ.)

Рассмотрим пример применения интервальной регуляризации для недоопределенных ИСЛАУ [5].

Пусть имеем СЛАУ с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 98 & 97 \\ 100 & 99 & 98 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Строки и столбцы матрицы (39) существенно коррелированы. Число обусловленности матрицы $\text{cond}(A) \simeq 24 \cdot 10^3$.

Предположим, что известен вектор решения:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

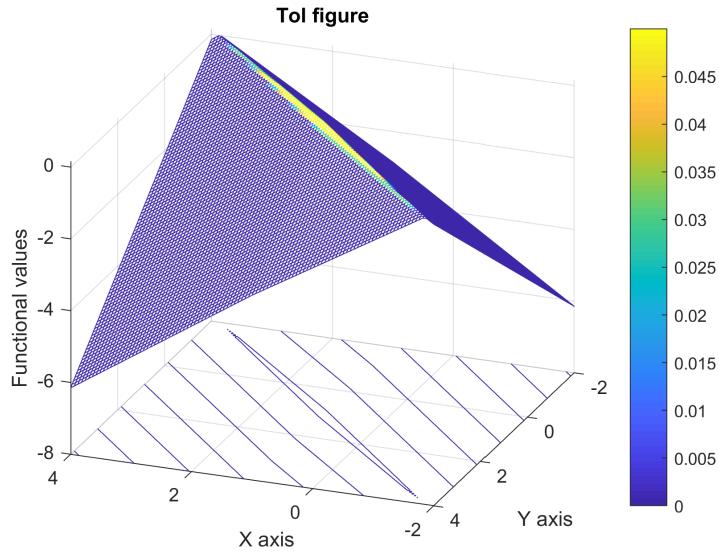


Рис. 28: График распознающего функционала для ИСЛАУ (37).

В таком случае правая часть имеет вид:

$$b = A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 586 \\ 592 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Решим СЛАУ, используя распознающий функционал

$$A \cdot x = b, \quad (42)$$

при A (39) и b (41).

Для точечной СЛАУ получаем отрицательный tolmax .

Зададим границы правой части (41)

$$b = \begin{pmatrix} [576, 596] \\ [582, 602] \end{pmatrix} \quad (43)$$

и СЛАУ (39)

$$A = \begin{pmatrix} [98, 100] & [97, 99] & [96, 98] \\ [99, 101] & [98, 100] & [97, 99] \end{pmatrix} \quad (44)$$

Применим функцию `tolstolvtu` для вычисления значения распознающего функционала. Результат вычисления:

$$[\text{tolmax}, \text{argmax}, \text{envs}, \text{cocode}] = \text{tolstolvtu}(\text{inf}(A), \text{sup}(A), \text{inf}(b), \text{sup}(b))$$

Допусковое множество решений интервальной линейной системы не пусто

tolmax = 4.0402

argmax =

5.9196

1.4072e-06

3.86e-08

Значение `argmax` существенно отличается от x_0 (40).

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \text{argmax} \simeq \begin{pmatrix} 5.9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

При этом `argmax` удовлетворяет границам правой части (43):

$$A \cdot \text{argmax} = \begin{pmatrix} [580.12, 591.96] \\ [586.04, 597.88] \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{b}.$$

Такой результат — проявление неоднозначности решения обратной задачи. Можно заметить, что решением СЛАУ (42) является любой вектор x сумма компонент которого примерно равна 6:

$$x_1 + x_2 + x_3 \simeq 6.$$

При этом для СЛАУ, которая в неинтервальной постановке имела бы бесконечное множество решений, методами интервального анализа получено конечное множество решений.

Минимальное значение числа обусловленности для оценок размера множества решений можно с помощью кода на странице 55. ■

Важную роль в наборе инструментов играют методы линейного программирования и различные постановки задач, использующие его. В частности, для условной оптимизации и получения решений в работах [23], [19], используется метод «ведущего центра» [28].

Метод ведущего центра. В этом подходе ищется решение задачи линейного программирования специального вида, ограничения в которой описывают подвижные границы сжимаемого в точку информационного множества. Этот подход, по существу, производит l_1 -регуляризацию задачи. На компоненты вектора решения можно наложить дополнительные ограничения.

Постановка задачи линейного программирования выглядит следующим образом. Для условия:

$$A \cdot x \subseteq \mathbf{b}, \quad (46)$$

A — точечная матрица правой части ИСЛАУ, \mathbf{b} — интервальный вектор правой части ИСЛАУ ставится задача линейного программирования (ЗЛП):

$$\min_{x,w} \sum_{i=1}^n w_i, \quad (47)$$

$$\text{mid } \mathbf{b}_i - w_i \cdot \text{rad } \mathbf{b}_i \leq (A \cdot x)_i \leq \text{mid } \mathbf{b}_i + w_i \cdot \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad (48)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \quad (49)$$

$$w_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (50)$$

Здесь w_i — масштабирующие множители для радиусов правой части «по уравнениям». Идея введения масштабирующих множителей состоит в выяснении того, насколько для конкретного уравнения необходимо увеличить радиус интервала правой части для удовлетворения условия (48).

Технически процедура вычисления строится следующим образом. Пусть A — матрица размером $n \times m$, что соответствует СЛАУ с n уравнениями и m неизвестными. Строится матрица C ограничений ЗЛП и расширенный вектор r правой части для уравнения (46):

$$C = \begin{pmatrix} A & -\text{diag}(\text{rad } \mathbf{b}) \\ -A & -\text{diag}(\text{rad } \mathbf{b}) \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{b} \\ -\text{mid } \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Здесь $\text{diag}(v)$ — диагональная матрица, со значениями на диагонали, равными компонентам вектора v , размер матрицы ограничений C — $(m+n) \times (m+n)$, размер вектора искомого решения — $m+n$.

Таким образом, ставится задача минимизации суммы весов w_i при неопределенностях компонент правой части $\text{rad } \mathbf{b}$. Веса w_i при начале вычислений устанавливаются равными 1, то есть ищется решение, помещающееся в интервальной правой части. При необходимости, w_i увеличиваются или уменьшаются, показывая своей величиной количественную степень совместности (при $w_i \leq 1$) или несовместности (при $w_i > 1$) конкретного уравнения. По условию (48), имеем:

$$\text{Tol} = 0, \quad (52)$$

и (согласно [1], раздел 6.5 «Полное исследование разрешимости») допустовое множество $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ решения ИСЛАУ содержит единственную точку, на которой достигается условие (52).

В случае, если требуется условная оптимизация, условие неотрицательности (49) можно заменить двухсторонним неравенством:

$$x_j^{(1)} \leq x_j \leq x_j^{(2)}, \quad x_j^{(1)} \leq x_j^{(2)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (53)$$

К системам линейных уравнений сводят на практике значительную часть задач во всех предметных областях науки и техники. Решение ИСЛАУ — важнейший инструмент прикладной математики. Поиску эффективных методов решения линейной задачи о допусках посвящены исследования [18], [25], [26].

7 Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений.

Одномерный метод Ньютона. Рассмотрим простейший случай одного уравнения с одним неизвестным.

Предположим, что $f : \mathbb{R} \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, имеющая нуль x^* на рассматриваемом интервале X и дифференцируемая на нём. Тогда для любой точки $\tilde{x} \in X$ из этого же интервала в силу теоремы Лагранжа (формулы конечных приращений):

$$\tilde{x} - f(x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(\xi)$$

где ξ — некоторая точка между \tilde{x} и x^* . Так как $f(x^*) = 0$, то при $f'(\xi) \neq 0$ имеет место:

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi)},$$

интервализуя выписанное равенство, получим включение:

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\mathbf{X})},$$

если $0 \notin f'(\mathbf{X})$.

Отображение $\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$ действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\mathbf{X})}$$

называется (одномерным) *интервальным оператором Ньютона* для f .

Так как любой нуль функции f на \mathbf{X} лежит также в $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$, то разумно взять в качестве следующего более точного интервала локализации решения пересечение

$$\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$$

Далее, положив $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$, естественно организовать итерационное уточнение:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \tag{54}$$

которое называется *интервальным методом Ньютона*.

Пример 7.43 (Одномерный метод Ньютона — корень полинома 2-й степени)

Рассмотрим [17] функцию $f(x) = x^2 - 2$ в интервале $\mathbf{X}^{(0)} = [1, 2]$. $f'(x) = 2 \cdot x$.

Выберем $x^{(k)} = \text{mid}(\mathbf{X}^{(k)})$. Строим итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \\ \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}) &= \text{mid}(\mathbf{X}^{(k)}) - \frac{(\mathbf{X}^{(k)})^2}{2 \cdot \mathbf{X}^{(k)}} \end{aligned}$$

1-й шаг процесса:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(0)} &= [1, 2] \\ \mathcal{N}(\mathbf{X})^{(0)}, \tilde{x}^{(0)} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4}/[2, 4] = \frac{3}{2} - \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right] = \left[\frac{22}{16}, \frac{23}{16}\right], \\ \mathbf{X}^{(1)} &= [1, 2] \cap \left[\frac{22}{16}, \frac{23}{16}\right] = \left[\frac{22}{16}, \frac{23}{16}\right]. \end{aligned}$$

■

Уже на первом шаге получено сильное сужение интервала решения: сходимость интервального метода Ньютона квадратична, как и в неинтервальном случае.

Многомерный метод Ньютона. Многомерные версии интервального метода Ньютона, применяемые для решения систем нелинейных уравнений, гораздо более многочисленны, чем одномерные, и отличаются очень большим разнообразием.

В многомерном случае мы можем варьировать не только выбор точки \tilde{x} , вокруг которой осуществляется разложение, форму интервального расширения производных или наклонов функции, как это было в одномерном случае, но также и способ внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы, к которой приводится оценивание бруса решения.

Предположим, что на брусе \mathbf{X} задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

которую в краткой векторной форме будем записывать в виде

$$F(x) = 0 \quad (56)$$

где $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $F_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — некоторые функции от n переменных.

Пусть L — интервальная матрица Липшица отображения F на \mathbf{X} . В частности L может быть интервальным расширением якобиана отображения F на \mathbf{X} . Тогда для любых точек $x, \tilde{x} \in \mathbf{X}$ справедливо представление

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + L(x - \tilde{x}).$$

В частности, если $x = x^*$ — решение системы уравнений, т. е. $F(x^*) = 0$, то

$$0 \in F(\tilde{x}) + L(x^* - \tilde{x}).$$

Согласно характеристике Бека для объединённого множества решений ИСЛАУ [1] получается, что точка x^* удовлетворяет включению тогда и только тогда, когда она принадлежит объединённому множеству решений интервальной линейной системы

$$L(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}).$$

Далее, пусть $Encl$ — процедура внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы $Ax = b$, так что $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi_{Uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Тогда справедливо включение

$$x^* - \tilde{x} \in Encl(L, -F(\tilde{x})),$$

из которого следует

$$x^* \in \tilde{x} - Encl(L, F(\tilde{x})).$$

Пусть $Encl$ — какой-нибудь метод решения «внешней задачи» для интервальной линейной системы $Ax = b$, $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — даваемый им интервальный вектор внешней оценки множества решений. Пусть для отображения $F : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ известна интервальная матрица Липшица $L \in \mathbb{IR}^{n \times n}$.

Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - Encl(L, F(\tilde{x})), \quad (57)$$

называется *интервальным оператором Ньютона* на \mathbb{ID} относительно точки \tilde{x} .

Рассмотрим выражение для интервального оператора Ньютона

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - Encl(L, F(\tilde{x})).$$

В обычном неинтервальном случае расчётную формулу метода Ньютона для решения системы уравнений обычно выписывают в виде

$$X^{k+1} \leftarrow X^k + (J(X^k))^{-1} F(X^k),$$

где фигурирует матрица, обратная к якобиану $J(X^k)$ отображения F в точке X^k . Но нам нужна не сама эта обратная матрица «в чистом виде», а лишь её произведение на вектор $F(X^k)$, которое при реализации выгоднее представить как решение системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $J(X^k)$. Тем самым достигается лучшая точность результата.

Как и в одномерном случае, положив $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$, организуем итерационное уточнение

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^k), \quad \tilde{x}^k \in \mathbf{X}^{(k)}. \quad (58)$$

которое называется *интервальным методом Ньютона*.

Наиболее неблагоприятной ситуацией при работе интервального метода Ньютона является появление включения

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, x) \supseteq \mathbf{X}.$$

Тогда все последующие шаги заклиниваются на бресе \mathbf{X} . Как поступать в этом случае? Одним из простых и универсальных приёмов, который позволяет сдвинуть уточнение решений с «мёртвой точки», является дробление исходного бруса на более мелкие подбрусы.

Для обеспечения хода итерационного процесса следует вместо обращения якобиана, вычислять его действие на интервальную оценку $F(\tilde{x})$:

$$Y^{(k)} = (J(x, \tilde{x}))^{-1} \cdot F(\tilde{x}).$$

Для этого надо решать ИСЛАУ (находить внешнюю оценку множества решений) для $Y^{(k)}$ методом Гаусса-Зейделя (пример 6.25) или Хансена-Сенгупты (вариант метода Гаусса-Зейделя с преобуславливанием) [1], гл.8:

$$J(X^{(k)}) \cdot Y^{(k)} = F(X^{(k)}), \quad (59)$$

и для итераций использовать значение $Y^{(k)}$.

Выгодной чертой метода Гаусса-Зейделя является отсутствие требования на неособенность якобиана. Даже если якобиан особенный, и множество решения неограниченно, его оценивание на конечном брусе оставляет результат операции конечным.

Пример 7.44 (Многомерный метод Ньютона — пересечение прямой и окружности)

Приведем иллюстративный пример [17], в котором возможно аналитическое вычисление якобиана и его обращение. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

в интервале $\mathbf{X}^{(0)} = [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Якобиан системы равен:

$$J(x) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 & 2 \cdot x_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан не особенный при $x_1 + x_2 \neq 0$ и можно его обратить аналитически:

$$(J(x))^{-1} = \frac{1}{x_1 + x_2} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \cdot x_2 \\ 1/2 & -2 \cdot x_1 \end{pmatrix}.$$

Брус $\mathbf{X}^{(0)}$ не содержит прямой

$$x_1 + x_2 = 0, \quad (60)$$

на которой якобиан сингулярен. Берем интервальное расширение обратной матрицы Якоби:

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2} \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \cdot \mathbf{X}_2 \\ 1/2 & -2 \cdot \mathbf{X}_1 \end{pmatrix}.$$

При этом $(J(\mathbf{X}))^{-1} \subseteq V(\mathbf{X})$. Выберем $x^{(k)} = \text{mid}(\mathbf{X}^{(k)})$. Строим итерационный процесс (58)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}), \\ \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}) &= \text{mid}(\mathbf{X}^{(k)} - V(\mathbf{X}) \cdot F(\mathbf{X}^{(k)}). \end{aligned}$$

1-й шаг процесса. Выберем начальный брус:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad (61)$$

Спектральный радиус «средней» обратной матрицы Якоби

$$\rho\left(J(\mathbf{X}^{(0)})^{-1}\right) = 0.7 < 1, \quad (62)$$

что обеспечивает сходимость процесса. Последовательные приближения в формате «середина, ширина» приведены в таблице:

итерация	«середина» X1, X2	«ширина» X1, X2
0	0.7500	0.2501
1	0.6667	0.0418
2	0.7063	0.0021
3	0.7071	0.0001

Процесс сходится к значению $1/\sqrt{2}$.

Сходимость процесса в данном методе обеспечивается условием (62). В свою очередь, это условие обеспечивается удаленностью начального бруса $\mathbf{X}^{(0)}$ (61) от области сингулярности матрицы $V(\mathbf{X}^{(0)})$ — прямой (60).

При приближении $\mathbf{X}^{(0)}$ к области сингулярности якобиана, спектральный радиус «средней» обратной матрицы Якоби будет неограниченно расти, а итерационный процесс — расходиться. ■

Метод Кравчика. Пусть на брус $\mathbf{X} \subset \mathbb{IR}$ задана система n нелинейных уравнений с n неизвестными (55). Компактная запись:

$$F(x) = 0$$

в которой $F(x) = (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Требуется уточнить двусторонние границы решений, либо убедиться, что решений нет. Возьмём какую-нибудь точку $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ и организуем относительно неё разложение функции F :

$$F(x) = F(\tilde{x}) + \mathbf{L} \cdot (x - \tilde{x})$$

где $\mathbf{L} \subset \mathbb{IR}^{n \times n}$ — интервальная матрица Липшица отображения F на брус \mathbf{X} . Если $x = x^*$, т. е. является точкой решения системы, то $F(x^*) = 0$ и потому выполняется включение:

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L} \cdot (x - \tilde{x})$$

В отличие от интервального метода Ньютона, домножим обе части этого включения слева на точечную $n \times n$ -матрицу $-\Lambda$:

$$0 \in -\Lambda \cdot F(\tilde{x}) - \Lambda \cdot \mathbf{L} \cdot (x - \tilde{x}).$$

Добавление к обеим частям получившегося соотношения $x^* - \tilde{x}$ приводит к

$$x^* - \tilde{x} \in -\Lambda \cdot F(\tilde{x}) - \Lambda \cdot \mathbf{L} \cdot (x^* - \tilde{x}) + (x^* - \tilde{x}),$$

что равносильно

$$x^* \in \tilde{x} - \Lambda \cdot F(\tilde{x}) - (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (x^* - \tilde{x})$$

так как для неинтервального общего множителя $x^* - \tilde{x}$ можно воспользоваться дистрибутивным соотношением (8).

Наконец, если решение x системы уравнений предполагается принадлежащим брусу \mathbf{X} , мы можем взять интервальное расширение по $x \in \mathbf{X}$ правой части полученного включения. Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \Lambda \cdot F(\tilde{x}) - (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \tilde{x}) \quad (63)$$

называется *оператором Кравчика на \mathbb{D} относительно точки \tilde{x}* . Если спектральный радиус матрицы $I - \Lambda \cdot \mathbf{L}$ меньше единицы, то по теореме Шрёдера [1] у отображения существует единственная неподвижная точка, которая является решением рассматриваемой системы уравнений. Таким образом, в брусе \mathbf{X} содержится ровно одно решение системы $F(x) = 0$.

Дальнейшее уточнение решения можно организовать совершенно так же, как и для интервального метода Ньютона, положив $X^{(0)} = \mathbf{X}$ и запуская итерации

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} \cap \mathcal{K}(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}),$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ для какой-то последовательности точек $\tilde{x}^{(k)} \in X^{(k)}$. Этот интервальный итерационный процесс называется *методом Кравчика*. Его частным случаем является итерационный метод Кравчика для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ.

Пример 7.45 (Метод Кравчика — пересечение параболы и окружности)

Рассмотрим [2] систему уравнений $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Возьмем в качестве первого приближения $X^{(0)} = [0, 1] \times [0, 1]$. Якобиан системы равен:

$$J(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbf{X}_1 & 2 \cdot \mathbf{X}_2 \\ 1 & -2 \cdot \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Возьмем Λ как:

$$\Lambda = J(X^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Строим для (63) скобку:

$$I - \Lambda \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-1, 1] \\ [-0.5, 0.5] & [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус $\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) = 1.5 > 1$, поэтому сходимость итерационного процесса не гарантирована. Решающим является первый шаг процесса, поскольку в случае успеха, в дальнейшем брус $(I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \bar{x})$ из выражения (63) будет уменьшаться в размере.

Первые шаги вычислений приведены в таблице:

k	\mathbf{X}_1	\mathbf{X}_2
0	[0, 1]	[0, 1]
1	[0, 1]	[0.13, 1]
2	[0, 1]	[0.27, 1]
3	[0.11, 1]	[0.41, 1]
4	[0.26, 0.97]	[0.53, 1]
5	[0.41, 0.82]	[0.64, 0.93]
6	[0.52, 0.69]	[0.75, 0.83]
7	[0.60, 0.60]	[0.80, 0.80]

На первом шаге достигнуто сужение области по координате x_2 . Дальнейшая локализация решения видна из рисунка 29. Штриховыми линиями показаны последова-

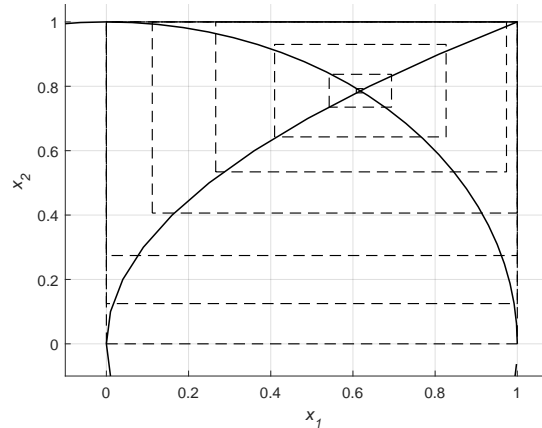


Рис. 29: Метод Кравчика — пересечение параболы и окружности. Штриховыми линиями показаны последовательные приближения.

тельные брусы приближения.

Отличительной особенностью метода Кравчика является нетребовательность к точности первого приближения. ■

В рассмотренном примере парабола и окружность пересекались под углом, близким к прямому. Проиллюстрируем, как метод Кравчика работает в более сложной ситуации.

Пример 7.46 (Метод Кравчика — касание параболы и окружности)

Рассмотрим [2] систему уравнений $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_c)^2 + (x_2 - y_c)^2 - 1 = 0, & x_c = 1.22, y_c = 0 \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{pmatrix}.$$

Якобиан системы равен:

$$J(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (\mathbf{X}_1 - x_c) & 2 \cdot (\mathbf{X}_2 - y_c) \\ 1 & -2 \cdot \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$$

Возьмем в качестве первого приближения $\mathbf{X}^{(0)} = [0.8, 1.4] \times [0.6, 1.3]$.

Выполним два последовательных приближения:

k	\mathbf{X}_1	\mathbf{X}_2
0	[0.8, 1.4]	[0.6, 1.3]
1	[0.68, 1.8]	0.64, 1.3]

На первом шаге оператор Кравчика существенно расширен по координате x_1 , при этом достигнуто сужение области по координате x_2 .

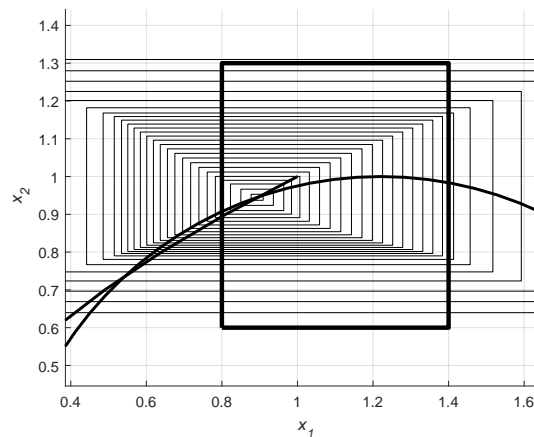


Рис. 30: Метод Кравчика — касание параболы и окружности. Тонкими линиями показаны последовательные приближения.

Дальнейшая локализация решения видна из рисунка 29. Тонкими линиями показаны последовательные брусочки приближения. Сходимость процесса существенно хуже, чем в примере 7.45. При неудачном выборе $\mathbf{X}^{(0)}$ итерационный процесс не стартует. ■

Следующий пример иллюстрирует решение задачи с интервальной неопределенностью в уравнении.

Пример 7.47 (Метод Кравчика — пересечение параболы и «толстой» окружности)

Пусть окружность в примере 7.45 имеет радиус в виде интервала:

«радиус» $\mathbf{R} = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, «толщина» $\varepsilon = 0.1$. Система уравнений (64) имеет теперь вид:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 = [-\varepsilon, \varepsilon] \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Якобиан системы (66) равен выражению (65). Возьмем в качестве первого приближения $\mathbf{X}^{(0)} = [0, 1] \times [0, 1]$.

В таблице приведены результаты вычислений:

k	\mathbf{X}_1	\mathbf{X}_2
0	[0, 1]	[0, 1]
1	[0, 1]	[0.07, 1]
4	[0.07, 1]	[0.37, 1]
7	[0.38, 0.85]	[0.63, 0.95]
8	[0.47, 0.75]	[0.70, 0.88]
9	[0.54, 0.69]	[0.76, 0.84]
10	[0.56, 0.67]	[0.75, 0.82]
11	[0.57, 0.67]	[0.75, 0.82]
12	[0.57, 0.67]	[0.76, 0.82]

Решение сходится к интервальной величине $x_{fin} = (x_1, x_2) = [0.569, 0.667] \times [0.755, 0.817]$, которое содержит в себе решение $(x_1, x_2) = [0.6, 0.6] \times [0.8, 0.8]$ из примера 7.45.

На рисунке 31 полупрозрачной заливкой показана область решения первого уравнения, жирной рамкой — первое приближение, тонкими рамками — итерации.

При итерациях, в выражении (63) для оператора Кравчика третий член $(I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (x^* - \tilde{x}) \rightarrow 0$, а второе слагаемое $\Lambda \cdot F(\tilde{x})$ — интервально и его радиус определяет размер финального множества решения. На 12-й итерации радиус $\text{rad}((I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (x^* - \tilde{x})) = [0.0039, 0.0026]$, что существенно меньше соответствующей величины $\text{rad}(\Lambda \cdot F(\tilde{x})) = [0.0447, 0.0284]$. ■

Применению метода Кравчика для решения практических задач посвящены работы [20], [22].

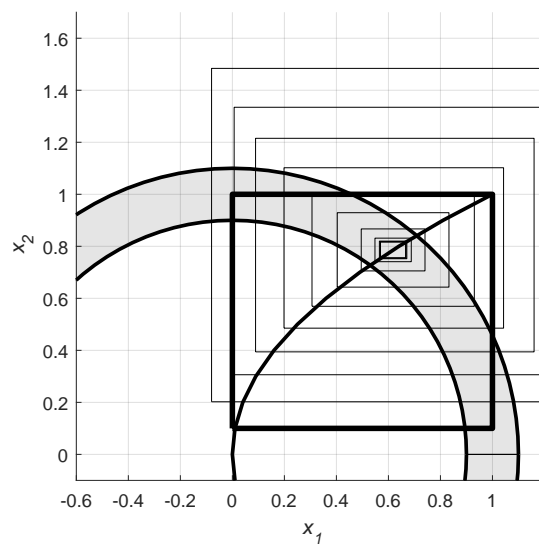


Рис. 31: Метод Кравчика — пересечение параболы и «широкой» окружности. Тонкими линиями показаны последовательные приближения.

8 Заключение

Интервальный анализ — современный раздел математики. Каждый год появляются новые теоретические и практические публикации, ширится круг приложений.

В течение 2017-2019 годов автором и студентами кафедры «Прикладная математика» ИПММ СПбПУ Петра Великого выполнен ряд квалификационных [20], [21], [22], [23] и исследовательских работ [18], [19], [25], [26], реализован код для нахождения максимума распознающего функционала на языке Python [24], доработан код распознающего функционала на языке Matlab [27].

Впереди — новые исследования!

Список литературы

- [1] С.П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск: XYZ, 2018. — Электронная книга, доступная на <http://interval.ict.nsc.ru/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [2] А.Н. Баженов. Лекции по основам интервального анализа в СПбГПУ Петра Великого и ФТИ им. А.Ф.Иоффе. www.nsc.ru/interval/?page=Education/Manuals
- [3] The Works of Archimedes (Dover Books on Mathematics). Archimedes, Sir Thomas Heath. Unabridged reprint of the classic 1897 edition, with supplement of 1912. - p.512.
- [4] <https://arxiv.org/abs/1810.01481> S. Shary. Interval regularization for imprecise linear algebraic equations (Submitted on 27 Sep 2018)
- [5] С.П. Шарый. О мере вариабельности оценки параметров в статистике интервальных данных. Вычислительные Технологии. – 2019. – Т. 24, №5. – С. 90–108
- [6] Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е., Диагональные методы глобальной оптимизации, Физматлит, М., 2008, 352 с. (ISBN 978-5-9221-1032-7)
- [7] С.П. Шарый. Программа ролуэвристического рандомизированного алгоритма для оценки минимума чисел обусловленности по интервальной матрице. // Частное сообщение. 16.05.2019.
- [8] Interval FEM https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_finite_element
- [9] <http://http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/globopt0.m>
- [10] Н.В. Панов. Разработка рандомизированных алгоритмов в интервальной глобальной оптимизации. Диссертация к.ф.-м.н. Новосибирск. 2012
- [11] <http://www.nsc.ru/interval/Programing/SciCodes/tolsolvty.sci>
- [12] <http://www.nsc.ru/interval/>
- [13] И. Шарая. IntLinInc2D, software package for visualization of solution sets to interval linear 2D systems. 2008
- [14] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. —2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. — 912 с.
- [15] A. A. Krasilin, E. K. Khrapova. Effect of hydrothermal treatment conditions on formation of nickel hydrogermanate with platy morphology. Russian Journal of Applied Chemistry. January 2017, Volume 90, Issue 1, pp 22–27

- [16] П.И. Стецюк Субградиентные методы `ralgb5` и `ralgb4` для минимизации овражных выпуклых функций // Вычисл. технологии. 2017. (22) 2. стр. 127-149.
- [17] O.Caprani, K.Madsen, H.-B. Nielsen. Introduction to interval analysis. Lectures. Technical University of Denmark, IMM, 2002
- [18] А.Н.Баженов, П.А.Затылкин. Применение интервального подхода для спектрального анализа. Исследование разрешимости задачи с использованием распознающего функционала. // Измерительная техника, 2019, №2, стр. 6-12.
- [19] А.Н.Баженов, П.А.Затылкин. Малоракурсная реконструкция светимости плазмы для сферического токамака. // Вычислительные технологии, 2020, том 25, №1, с. 5–38.
- [20] Д.Т.Шагаев. Исследование применения методов интервального анализа для задач определения координат объекта по однократным измерениям. Выпускная работа бакалавра. 2017. СПбПУ Петра Великого.
- [21] Ф.А.Билев. Исследование применения интервального подхода к задаче калибровки шкалы измерителя с нерегулярными отсчетами. Выпускная работа бакалавра. 2017. СПбПУ Петра Великого.
- [22] Д.В.Ягупова. Решение нелинейных интервальных уравнений для оптических задач. Выпускная работа бакалавра. 2019. СПбПУ Петра Великого.
- [23] П.А.Затылкин. Исследование разрешимости обратных задач с помощью распознающего функционала. Выпускная работа бакалавра. 2019. СПбПУ Петра Великого.
- [24] Е.В. Приймак, Ю.С. Сидорина. Метод распознающего функционала для ИС-ЛАУ. Курсовой проект. 2019. СПбПУ Петра Великого.
- [25] М.Л. Смольский. Обоснование применимости г-алгоритмов для задач в интервальной постановке. Отчет по практике. 2020. СПбПУ Петра Великого.
- [26] Н.В. Суханов. Определение степени детальности пространственного разбиения объема плазмы при решении обратной задачи с использованием сингулярного разложения. Отчет по практике. 2020. СПбПУ Петра Великого.
- [27] С.П. Шарый, М.Л. Смольский. <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/tolsolvty.m>
- [28] Zhilin, S.I. Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 2007. Vol. 88. No 1. P. 60-68.

Предметный указатель

- Липшицевская оценка функций, 27
- допусковое множество решений, 38
- эффект «обёртывания», 11
- эвристические методы нахождения оценок числа обусловленности, 55
- интервал, 12
- интервальная матрица, 20
- интервальная оболочка, 20
- интервальная регуляризация, 53
- интервальный (одномерный) оператор Ньютона, 65
- интервальный метод Гаусса-Зейделя, 40
- интервальный вектор, 20
- классическая интервальная арифметика, 13
- линейная задача о допусках, 43
- метод «ведущего центра», 63
- метод Кравчика для ИСЛАУ, 41
- метод Кравчика для нелинейных уравнений, 69
- метод ведущего центра, 63
- множества решений интервальных уравнений, 37
- объединённое множество решений, 37
- одномерный метод Ньютона, 65
- оператор Кравчика для нелинейных уравнений, 70
- радиус интервала, 17
- распознающий функционал, 46
- свойство монотонности по включению, 15
- ширина интервала, 17
- задача глобальной оптимизации, 31
- середина (центр) интервала, 17
- ive (interval variability of the estimate), 57