

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет                      Механико-математический факультет

Кафедра                        Математического моделирования

Направление подготовки      Прикладная математика и информатика

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Скорика Дмитрия Александровича

Тема работы: Разработка линейной функциональной арифметики и её приложения к  
решению интервальных линейных систем со связями

**«К защите допущен»**

Заведующий кафедрой,

д. ф.-м. н., проф.

Шарый С. П. / \_\_\_\_\_  
(Фамилия И. О.)                      (Подпись)

« ... » ..... 2020г.

**Научный руководитель**

Д. ф.-м. н.,

в. н. с. ФИЦ ИВТ

Шарый С. П. / \_\_\_\_\_  
(Фамилия И. О.)                      (Подпись)

« ... » ..... 2020г.

Дата защиты: « ... » ..... 2020 г.

Новосибирск, 2020

# Содержание

Реферат	5
<b>1 Введение</b>	<b>6</b>
1.1 Определения и обозначения . . . . .	6
1.2 Характеристики интервалов . . . . .	8
1.3 Проблема оценки множеств решений ИСЛАУ . . . . .	10
1.4 Зависимые интервальные величины . . . . .	12
1.5 Случай матрицы со связями. Постановка задачи . . . . .	27
<b>2 Численные погрешности. Использование интервального анализа</b>	<b>29</b>
2.1 Пример Мюллера . . . . .	31
<b>3 Обзор интервальных арифметик</b>	<b>35</b>
3.1 Классическая интервальная арифметика . . . . .	35
3.2 Аффинная арифметика . . . . .	39
3.2.1 Арифметические операции аффинной арифметики . .	41
3.3 Другие интервальные арифметики . . . . .	42
<b>4 Анализ аффинной арифметики</b>	<b>44</b>
4.1 Пример неэффективности аффинной арифметики . . . . .	48
<b>5 Построение новой интервальной арифметики</b>	<b>51</b>
5.1 Построение функционалов границ $L$ и $U$ . . . . .	59
5.1.1 Сложение и вычитание . . . . .	63
5.1.2 Умножение. Начало построения . . . . .	64

5.1.3	Схема приближения выпуклых или вогнутых функций с помощью чебышёвского альтернанса . . . . .	66
5.1.4	«Склейка» левой и правой интервальных оценок . . . . .	67
5.1.5	Другой взгляд на приближение функций от нескольких переменных . . . . .	72
5.1.6	Умножение. Продолжение построения . . . . .	80
5.1.7	Построение процедур $F_{\downarrow}$ и $F_{\uparrow}$ . . . . .	81
5.1.8	Деление . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Численные эксперименты</b>	<b>85</b>
6.1	Характеристики уклонения для сравнения интервальных арифметик . . . . .	85
6.1.1	Чебышёвское уклонение . . . . .	85
6.1.2	Интегральное уклонение . . . . .	86
6.2	Сравнение интервальных арифметик по интегральной характеристике уклонения . . . . .	87
6.3	Решение ИСЛАУ со связями с применением функционально-граничной арифметики . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Детали компьютерной реализации</b>	<b>105</b>
7.1	Контроллер режима округления . . . . .	106
7.2	Тестирующий модуль интервальной арифметики . . . . .	109
7.3	Классический интервал . . . . .	109
7.4	Псевдослучайный генератор чисел . . . . .	110
	<b>Заключение</b>	<b>112</b>
	Выводы . . . . .	112

Дальнейшие планы работы . . . . .	113
<b>Список литературы</b>	<b>114</b>

# Реферат

**Тема работы:** Разработка линейной функциональной арифметики и её приложения к решению интервальных линейных систем со связями.

**Объем работы** составляет ? страниц, список использованной литературы включает ? источников, в работе приводятся ? таблиц и ? рисунков.

**Ключевые слова:** интервал, аффинная арифметика, классическая интервальная арифметика, арифметика, СЛАУ, объединённое множество решений, интервальный анализ, ИСЛАУ.

Работа посвящена построению новой интервальной арифметики, которая сочетала бы в себе алгоритмическую эффективность и высокое качество оценивания областей значений выражений.

Была получена интервальная арифметика, которая идеологически похожа на аффинную арифметику. Эти арифметики строят внешние аппроксимации для совместной области значений. Но при этом сконструированная арифметика имеет особенности, повышающие качества получаемых интервальных оценок.

Были проведены сравнительные эксперименты, которые показали эффективность построенной арифметики. Она была применена для решения задачи нахождения оценок объединённого множества решений ИСЛАУ.



Согласно [11] интервал будем обозначать латинскими буквами жирного шрифта ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ). Левый (нижний) конец интервала будем обозначать нижним подчёркиванием символа интервала, а правый (верхний) — верхним подчёркиванием. Семейство всех вещественных интервалов будем обозначать  $\mathbb{IR}$ .

*Интервальной величиной* или *интервальным параметром* будем называть упорядоченную пару  $(a, \mathbf{a})$ , где  $a$  — некоторая переменная, а  $\mathbf{a}$  — интервал её изменения. Далее в работе интервальный параметр будет обозначаться как  $a \in \mathbf{a}$ .

*Интервальным вектором* размера  $n$  будем называть упорядоченный кортеж из  $n$  интервалов, расположенный вертикально. Семейство интервальных векторов будем обозначать  $\mathbb{IR}^n$ . В силу того, что геометрической интерпретацией интервального вектора является прямоугольный параллелепипед (рис. 1.1), будем также называть интервальный вектор *брусом*.

*Интервальной матрицей* будем называть прямоугольную таблицу, составленную из интервалов.

Интервалы, входящие в интервальные векторы и матрицы, будем называть *компонентами интервального вектора* и *компонентами интервальной матрицы* соответственно.

Будем говорить, что интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  является *интервальным продолжением точечной функции*  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на множестве  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , если  $\mathbf{f}(x) = f(x)$  для всех точечных аргументов  $x \in D$ .

Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  называется *интервальным расширением точечной функции*  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , если:

1. является интервальным продолжением  $f$  на  $D$

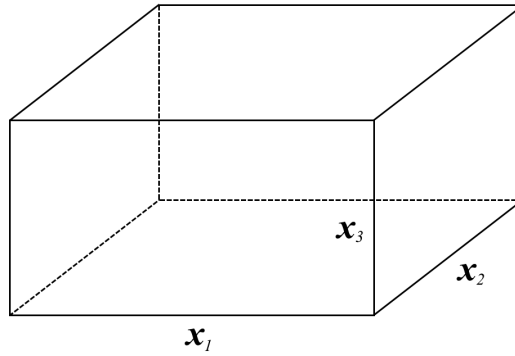


Рис. 1.1: Геометрическая интерпретация интервального вектора — брус

2. из  $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$  следует, что  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{y})$  для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{ID}$ .

*Элементарными функциональными выражениями* будем называть аналитические выражения, которые составлены из символов переменных, констант, четырёх арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления — и элементарных функций.

*Естественным интервальным расширением* будем называть интервальное расширение элементарного функционального выражения, которое получается в результате замены его аргументов на интервалы их изменения, а арифметических операций и элементарных функций — на их интервальные аналоги и расширения.

## 1.2. Характеристики интервалов

Напомним основные характеристики интервалов.

Пусть в рассмотрении имеется интервал  $\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}]$ . Тогда:

1. Ширина интервала:

$$\text{wid } \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}$$

2. Радиус интервала:

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot \text{wid } \mathbf{a}$$



3. Середина интервала:

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}})$$

4. Мигнитуда интервала:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \begin{cases} \min\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

5. Магнитуда интервала:

$$|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}$$

6. Отклонение интервала:

$$\text{dev } \mathbf{a} = \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \geq |\overline{\mathbf{a}}|, \\ \overline{\mathbf{a}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Исходя из постановок практических задач, исследованию подвергаются различные множества решений ИСЛАУ. Самыми распространёнными являются:

1. Объединённое множество решений:

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\},$$

2. Допусковое множество решений:

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\},$$

3. Управляемое множество решений:

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b}) (\exists A \in \mathbf{A}) (Ax = b)\}.$$

### 1.3. Проблема оценки множеств решений ИСЛАУ

Одна из популярных задач в интервальном анализе — нахождение внешних оценок для множества решений ИСЛАУ. Рассмотрим в контексте данной задачи объединённое множество решений.

Если необходимо найти координатные границы точного бруса, описанного около этого множества, то возникает проблема, описанная в хрестоматийной книге по трудоёмкости интервальных вычислений [7].

Дело в том, что нахождение точных границ объединённого множества решений является  $NP$ -трудной задачей. Следовательно, мы неизбежно столкнёмся с экспоненциальным ростом алгоритмической сложности.

Так, независимо друг от друга Бекком [3] и Никелем [8] был рассмотрен алгоритм нахождения точных координатных границ бруса. Трудоёмкость такой процедуры растёт как  $O(2^{n^2+n})$ , так как задача сводится к перебору и решению всех «точечных» СЛАУ, элементы которых являются границами компонентов ИСЛАУ.

Таким образом, уже при небольшом для практики размере матрицы  $n = 10$ , получаем характерное число операций для нахождения граней бруса  $S = 2^{10^2+10} = 2^{110} \approx 1.3 \cdot 10^{33}$ . Или, по-другому, если ЭВМ выполняет  $10^9$  операций в секунду, то время работы алгоритма будет составлять примерно  $4.2 \cdot 10^{16}$  лет, что превышает время жизни Вселенной на несколько порядков.

Первым шагом снижения трудоёмкости стало использование независимости интервальных величин, входящих в ИСЛАУ. В книге [4] доказывалось, что в таком случае объединённое множество решений представляет собой полиэдр, выпуклый в каждом ортанте пространства (рис. 1.2).

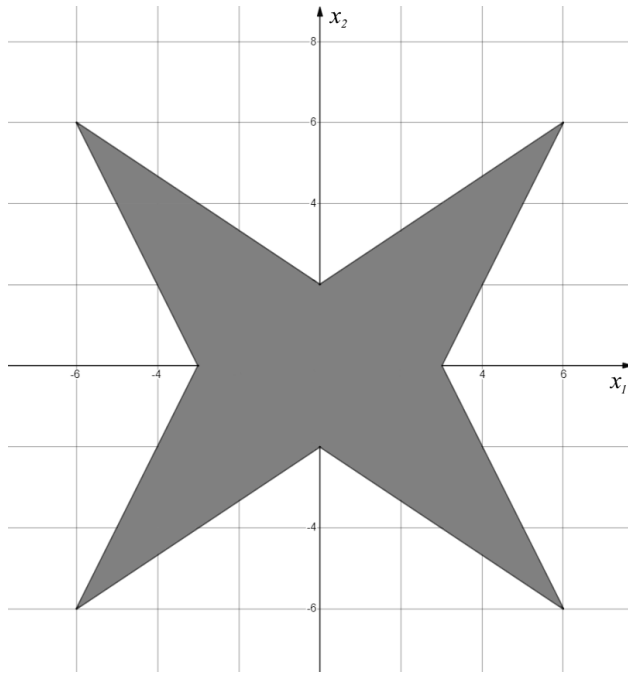


Рис. 1.2: Геометрическая интерпретация объединённого множества решений ИСЛАУ  $2 \times 2$  — полиэдр, выпуклый в каждом ортанте пространства.

Данный факт позволяет получить асимптотику решения  $P(n) \cdot O(2^n)$ , где  $P(n)$  — полином от переменной  $n$ . Это достигается за счёт того, что исходная задача разбивается на  $2^n$  (по числу ортантов) независимых задач линейного программирования.

Следующим шагом снижения трудоёмкости стало ослабление постановки задачи с нахождения точных границ объединённого множества решений на нахождение лишь его приближённой оценки. Это позволило преодолеть ограничение на экспоненциальный рост трудоёмкости и создать алгоритмы, работающие за полиномиальное время.

В интервальном анализе были разработаны различные методы получения оценок объединённого множества с такой асимптотикой:

1. Интервальный алгоритм Гаусса.
2. Интервальный алгоритм Холесского.
3. Интервальный алгоритм Гаусса-Зейделя.

4. ...

Однако при использовании данных методов возникают проблемы. В частности, ни один метод не может похвастаться своей универсальностью — для каждого из приведённых подходов существуют примеры таких ИСЛАУ, в которых он превосходит остальные в качестве оценивания, а также — которые делают его неприменимым для решения.

Также все методы, использующие для получения результата интервальную арифметику, имеют общий недостаток — при прочих равных условиях, чем больше размер рассматриваемой ИСЛАУ, тем грубее будет получаться оценка для вектора неизвестных. Данное явление связано с эффектом зависимости интервальных величин.

#### 1.4. Зависимые интервальные величины

Назовём интервальные величины  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$  *независимыми*, если упорядоченный набор  $(a_1, \dots, a_n)$  принимает все значения из декартова произведения  $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_n$ . В противном случае будем говорить, что интервальные величины *зависимые*.

*Множеством совместных значений* интервальных параметров  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$  будем называть множество всех кортежей  $(x_1, \dots, x_n)$ , где

$$x_1 = a_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n.$$

Будем говорить, что на интервальные параметры  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$  *наложены связи*, если имеются какие-либо соотношения между  $a_1, \dots, a_n$ , которые ограничивают множество их совместных значений.

Пусть в рассмотрении имеются интервальные параметры  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$ . Тогда *диаграммой зависимости* будем называть упорядоченную

пару  $(A, B)$ , где  $A$  — множество совместных значений  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$ , а  $B$  — декартово произведение  $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_n$ .

Таким образом, множество совместных значений диаграммы зависимости интервальных параметров вложено в декартово произведение интервалов изменений этих параметров. Причём равенство достигается в случае, когда эти интервальные параметры независимы.

В качестве примера зависимых интервальных величин рассмотрим кривошипно-шатунный механизм колеса паровоза. Поршень толкает шатун на величину  $\Delta x$ , при этом происходит движение кривошипа на величину  $\Delta y$ . В силу жесткой сцепки данных элементов будет естественно ожидать, что  $\Delta y = f(\Delta x)$ , где  $f$  — некоторая возрастающая или убывающая функция (в зависимости от выбора  $\Delta x$ ). Таким образом, значение одной физической величины является аргументом функции для нахождения другой.

Пусть изначально система находилась в состоянии

$$x = x_0, \quad y = f(x_0).$$

После смещения шатуна на величину  $\Delta x$  система перешла в состояние

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = f(x_0 + \Delta x).$$

Таким образом, величины

$$\mathbf{x} = [x_0, x_0 + \Delta x] \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = [f(x_0), f(x_0 + \Delta x)]$$

зависимые, поскольку в декартовом произведении  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  не достигаются точки

$$(x_0, f(x_0 + \Delta x)) \quad \text{и} \quad (x_0 + \Delta x, f(x_0)).$$

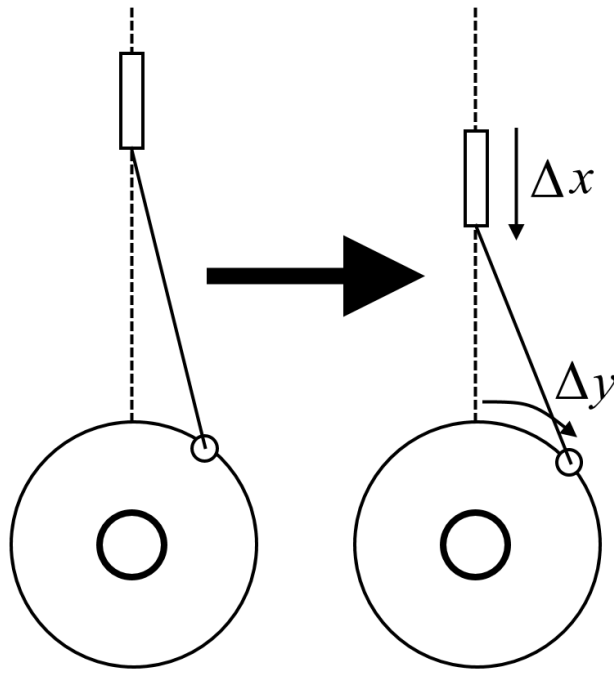


Рис. 1.3: Схема кривошипно-шатунного механизма

Приведём пример более сложной зависимости. Пусть имеется световой источник, подвешенный на высоте  $h$ . Также известна мощность светового потока  $n$  и масса  $m$  этого источника. Рассмотрим величину интенсивности светового потока от источника  $I = f_1(h, n)$ , а также величину потенциальной энергии  $U = f_2(h, m)$ , где  $f_1, f_2$  — некоторые функции.

Зафиксируем значения параметров  $m = m^*$  и  $n = n^*$ . Также заметим, что функция  $I = f_1(h)$  — убывающая, а функция  $U = f_2(h)$  — возрастающая. Тогда величины  $I$  и  $U$  — зависимые, поскольку точка, где одновременно достигается максимум этих двух величин, не входит в декартово произведение  $I(\mathbf{h}) \times U(\mathbf{h})$ .

Рассмотрим подробнее свойства зависимых интервальных величин. Итак, пусть в рассмотрении имеются интервалы  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}$ , тогда:

1.  $\text{rad}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{a} + \text{rad } \mathbf{b}$ .
2.  $\text{rad}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{a} + \text{rad } \mathbf{b}$ .

3.  $\text{rad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \leq |\mathbf{a}| \cdot \text{rad} \mathbf{b} + \text{rad} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|.$
4.  $\text{rad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \geq \max\{ |\mathbf{a}| \cdot \text{rad} \mathbf{b}, \text{rad} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}| \}.$
5.  $\text{rad}(1 / \mathbf{a}) = \frac{\text{rad} \mathbf{a}}{\langle \mathbf{a} \rangle \cdot |\mathbf{a}|},$  если  $0 \notin \mathbf{a}.$

Первые два свойства радиусов говорят о том, что при сложении или вычитании интервалов получается интервал, ширина которого равна сумме ширин операндов. Однако то, что результирующий интервал в общем случае расширяется в случаях умножения и деления, не очевидно.

Для демонстрации данного факта будем оперировать не абсолютной характеристикой интервала — его шириной, а воспользуемся величиной, характеризующую относительную ширину интервала — так называемым функционалом Рачека. Данный функционал введён в работе [10] следующим образом:

$$\chi(\mathbf{a}) := \begin{cases} \underline{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{a}}, & \text{если } |\bar{\mathbf{a}}| \geq |\underline{\mathbf{a}}|, \\ \bar{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{a}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С помощью данного функционала можно представить любой интервал  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$  в виде:

$$\mathbf{a} = \text{dev}(\mathbf{a}) \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1].$$

В работе Ирины Шарой [9] доказывается следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}$ , тогда:

$$\chi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \min\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}) \}.$$

### Доказательство

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — ненулевые интервалы.

Тогда  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  — также ненулевой интервал и верно

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \text{dev}(\mathbf{a}) \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1] \cdot \text{dev}(\mathbf{b}) \cdot [\chi(\mathbf{b}), 1] = \\
&= \text{dev}(\mathbf{a}) \cdot \text{dev}(\mathbf{b}) \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1] \cdot [\chi(\mathbf{b}), 1] = \\
&= \text{dev}(\mathbf{a}) \cdot \text{dev}(\mathbf{b}) \cdot \left[ \min\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}), 1 \}, \right. \\
&\quad \left. \max\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}), 1 \} \right] = \\
&= \text{dev}(\mathbf{a}) \cdot \text{dev}(\mathbf{b}) \cdot \left[ \min\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}) \}, 1 \right].
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\left| \min\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}) \} \right| \leq 1$$

и любой интервал  $\mathbf{z} \in \mathbb{IR}$  представляется в виде

$$\mathbf{z} = \text{dev}(\mathbf{z}) \cdot [\chi(\mathbf{z}), 1],$$

то

$$\chi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \min\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}) \}.$$

■

В работе [9] также доказано свойство

$$\text{wid}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot (1 - \chi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})).$$

■

Таким образом, в силу доказанной леммы и свойства получаем, что

$$\text{wid}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \left( 1 - \min\{ \chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b}) \} \right).$$

Используем данный результат. Зафиксируем интервал  $\mathbf{a}$ . Рассмотрим, при каких условиях после умножения на интервал  $\mathbf{b}$  ширина результирующего интервала не будет увеличиваться.

Это возможно при одновременном выполнении двух условий:



1.  $|\mathbf{b}| \leq 1$ .

То есть,  $\mathbf{b} \subseteq [-1, 1]$ .

2.  $1 - \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b})\} \leq 1$ .

Перепишем данное неравенство в виде

$$\min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a}) \cdot \chi(\mathbf{b})\} \geq 0.$$

(a) Если  $\chi(\mathbf{a}) < 0$ , то поставленное неравенство не может быть удовлетворено.

(b) Если  $\chi(\mathbf{a}) \geq 0$ , то необходимо, чтобы  $\chi(\mathbf{b}) \geq 0$ .

Теперь рассмотрим введённый ранее функционал Рачека для интервала  $\mathbf{b}$ :

(a) Если  $\chi(\mathbf{b}) = 0$ , то  $\underline{\mathbf{b}} = 0$  или  $\bar{\mathbf{b}} = 0$ .

(b) Если  $\chi(\mathbf{b}) > 0$ , то  $0 \notin \mathbf{b}$ .

То есть получаем, что  $\mathbf{b} \subseteq (-\infty, 0]$  или  $\mathbf{b} \subseteq [0, +\infty)$ .

Таким образом, чтобы

$$\text{wid}(\mathbf{a}) \geq \text{wid}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

необходимо

$$\mathbf{b} \subseteq [-1, 0] \text{ или } \mathbf{b} \subseteq [0, 1].$$

Получаем, что в общем случае, когда умножение происходит на интервалы, которые не удовлетворяют указанным условиям, ширина результирующего интервала будет увеличиваться.

Для демонстрации эффекта неперенного расширения интервалов при вычислениях проведём следующий численный эксперимент. Допустим, стоит задача, где при вычислениях используются величины, значения которых получены с некоторой погрешностью.

В условиях данного эксперимента будем считать, что неточность каждого измерения (ширина интервала, в котором гарантированно содержится измеряемая величина) — это случайная величина, которая распределена, как модуль стандартной нормальной случайной величины, а каждое измерение (середина интервала) — случайная величина, равномерно распределённая на некотором интервале.

Проделаем следующее:

1. Создадим файл, куда будем записывать результаты эксперимента.
2. Выберем длину цепочки вычислений  $S \in \mathbb{Z}_+$ .
3. Выберем количество интервальных величин, которые будут участвовать в расчетах  $n \in \mathbb{N}_+$ .
4. Случайным образом сгенерируем «измеренные в эксперименте величины» — множество интервалов

$$M = \{ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_S \}.$$

Для получения ширины интервалов будем использовать нормальное распределение с параметрами

$$\alpha = 0, \quad \sigma^2 = 0.01,$$

а для получения середины интервала — равномерное распределение на интервале

$$[-5, 5].$$

При этом будем помещать в множество  $M$  только те интервалы, которые заведомо не содержат в себе нуль. Это обусловлено тем, что мы не хотим исключать из рассмотрения операцию деления на интервал. Данное требование не противоречит практике, поскольку величины, малоотличимые от нуля в характерных для задачи единицах измерения, зачастую не имеют физического смысла.

5. Инициализируем вычисляемый интервал из множества  $M$ , выбор будем производить равновероятно случайно.
6.  $S$  раз преобразуем вычисляемый интервал следующим образом:

(a) Выберем арифметическую операцию из множества

$$\{+, -, \cdot, /\},$$

выбор будем производить случайно равновероятно.

(b) Выберем интервал из множества  $M$ , выбор будем производить случайно равновероятно.

Выбранный интервал будет выступать как операнд нашей арифметической операции, которая будет далее применяться к вычисляемому интервалу.

(c) Применим к вычисляемому интервалу арифметическую операцию, выбранную в пункте (a) с операндом, выбранным в пункте (b).

7. После получения результирующего интервала, запишем в файл (см. п. 1) его ширину.

Для выбранных чисел  $S$  и  $n$  будем запускать данный алгоритм большое число раз, чтобы получить репрезентативную выборку для анализа ширины итогового интервала.

В ходе эксперимента величины  $S$  и  $n$  варьировались в следующих интервалах:

$$S \in \{ 1, \dots, 6 \}, \quad n \in \{ 0, \dots, 20 \}.$$

Количество экспериментов для каждой упорядоченной пары  $(S, n)$  было равно  $5 \cdot 10^6$ .

Далее (таб. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6) приведены обработанные результаты проведённых экспериментов.

В первой колонке таблице приведены интервалы, в которых может находиться ширина итогового интервала, а в последующих — относительная частота попадания ширины итогового интервала в данный интервал.

Видно, что для каждого значения  $S$  выявляется одинаковая закономерность — чем большее число раз вовлекаются в вычисления интервалы, тем шире становится итоговый интервал. При рассмотрении случаев  $n > S$  можно увидеть влияние зависимых интервальных параметров на ширину итогового интервала при вычислениях с ними.

Таким образом, необходимо учитывать различные связи между интервальными параметрами в вычисляемом выражении, чтобы получать после вычислений как можно более узкий интервал.

Таблица 1.1: Количество измерений  $S = 1$

wid( $\mathbf{r}$ )	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$[0, \frac{1}{2})$	1.000	0.986	0.936	0.885	0.839	0.797	0.758
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.000	0.013	0.032	0.050	0.059	0.068	0.074
$[1, 2)$	0.000	0.001	0.014	0.026	0.035	0.044	0.050
$[2, 3)$	0.000	0.000	0.006	0.010	0.015	0.018	0.022
$[3, 4)$	0.000	0.000	0.004	0.007	0.009	0.011	0.013
$[4, 5)$	0.000	0.000	0.003	0.005	0.007	0.008	0.010
$[5, 10)$	0.000	0.000	0.005	0.009	0.015	0.020	0.025
$[10, 100)$	0.000	0.000	0.001	0.008	0.017	0.027	0.037
$[100, +\infty)$	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.006	0.011
wid( $\mathbf{r}$ )	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$[0, \frac{1}{2})$	0.722	0.689	0.659	0.631	0.606	0.583	0.561
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.079	0.083	0.086	0.089	0.090	0.092	0.093
$[1, 2)$	0.056	0.060	0.064	0.067	0.069	0.071	0.073
$[2, 3)$	0.024	0.027	0.029	0.031	0.032	0.033	0.035
$[3, 4)$	0.015	0.017	0.018	0.019	0.020	0.021	0.022
$[4, 5)$	0.011	0.012	0.013	0.014	0.015	0.015	0.015
$[5, 10)$	0.029	0.032	0.035	0.038	0.040	0.042	0.043
$[10, 100)$	0.047	0.056	0.064	0.071	0.078	0.085	0.091
$[100, +\infty)$	0.018	0.025	0.032	0.041	0.050	0.058	0.067
wid( $\mathbf{r}$ )	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
$[0, \frac{1}{2})$	0.540	0.522	0.504	0.488	0.473	0.458	0.445
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.095	0.096	0.097	0.096	0.096	0.096	0.095
$[1, 2)$	0.074	0.076	0.076	0.077	0.079	0.080	0.080
$[2, 3)$	0.036	0.036	0.037	0.038	0.039	0.039	0.039
$[3, 4)$	0.022	0.023	0.023	0.024	0.024	0.024	0.025
$[4, 5)$	0.016	0.016	0.017	0.017	0.018	0.018	0.018
$[5, 10)$	0.044	0.046	0.047	0.048	0.048	0.050	0.050
$[10, 100)$	0.096	0.100	0.105	0.108	0.112	0.115	0.117
$[100, +\infty)$	0.076	0.085	0.094	0.103	0.112	0.121	0.129

Таблица 1.2: Количество измерений  $S = 2$

$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$[0, \frac{1}{2})$	1.000	0.987	0.926	0.863	0.804	0.749	0.702
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.000	0.010	0.035	0.058	0.072	0.082	0.088
$[1, 2)$	0.000	0.001	0.018	0.032	0.045	0.055	0.063
$[2, 3)$	0.000	0.000	0.008	0.014	0.020	0.025	0.029
$[3, 4)$	0.000	0.000	0.004	0.008	0.012	0.015	0.018
$[4, 5)$	0.000	0.000	0.003	0.005	0.008	0.010	0.013
$[5, 10)$	0.000	0.000	0.004	0.010	0.017	0.024	0.031
$[10, 100)$	0.000	0.001	0.002	0.009	0.020	0.032	0.044
$[100, +\infty)$	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.007	0.013
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$[0, \frac{1}{2})$	0.660	0.623	0.590	0.560	0.533	0.509	0.487
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.092	0.094	0.095	0.096	0.096	0.095	0.094
$[1, 2)$	0.069	0.073	0.077	0.078	0.080	0.081	0.082
$[2, 3)$	0.032	0.035	0.037	0.039	0.040	0.041	0.042
$[3, 4)$	0.020	0.022	0.024	0.025	0.026	0.026	0.027
$[4, 5)$	0.014	0.016	0.017	0.018	0.019	0.019	0.020
$[5, 10)$	0.036	0.041	0.045	0.048	0.051	0.053	0.055
$[10, 100)$	0.057	0.069	0.080	0.091	0.100	0.108	0.116
$[100, +\infty)$	0.019	0.027	0.036	0.046	0.056	0.066	0.077
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
$[0, \frac{1}{2})$	0.468	0.450	0.434	0.418	0.404	0.391	0.379
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.093	0.092	0.091	0.089	0.088	0.087	0.086
$[1, 2)$	0.082	0.082	0.082	0.082	0.081	0.080	0.079
$[2, 3)$	0.042	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043
$[3, 4)$	0.027	0.028	0.028	0.028	0.029	0.029	0.029
$[4, 5)$	0.020	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021
$[5, 10)$	0.056	0.058	0.059	0.060	0.060	0.061	0.061
$[10, 100)$	0.123	0.128	0.133	0.137	0.141	0.145	0.148
$[100, +\infty)$	0.088	0.099	0.110	0.121	0.132	0.143	0.153

Таблица 1.3: Количество измерений  $S = 3$ 

$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$[0, \frac{1}{2})$	1.000	0.987	0.923	0.856	0.792	0.734	0.683
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.000	0.009	0.036	0.060	0.075	0.086	0.092
$[1, 2)$	0.000	0.001	0.019	0.034	0.048	0.058	0.067
$[2, 3)$	0.000	0.001	0.008	0.015	0.022	0.027	0.031
$[3, 4)$	0.000	0.000	0.004	0.009	0.013	0.017	0.019
$[4, 5)$	0.000	0.000	0.002	0.005	0.009	0.011	0.014
$[5, 10)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.018	0.025	0.033
$[10, 100)$	0.000	0.001	0.002	0.010	0.020	0.034	0.047
$[100, +\infty)$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.007	0.013
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$[0, \frac{1}{2})$	0.640	0.601	0.566	0.536	0.509	0.485	0.464
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.095	0.097	0.097	0.098	0.096	0.095	0.094
$[1, 2)$	0.073	0.077	0.080	0.082	0.083	0.083	0.083
$[2, 3)$	0.035	0.037	0.039	0.041	0.043	0.043	0.043
$[3, 4)$	0.022	0.024	0.025	0.026	0.028	0.028	0.029
$[4, 5)$	0.016	0.017	0.018	0.019	0.020	0.021	0.021
$[5, 10)$	0.039	0.044	0.048	0.052	0.055	0.057	0.058
$[10, 100)$	0.062	0.075	0.087	0.098	0.108	0.117	0.125
$[100, +\infty)$	0.020	0.028	0.038	0.048	0.059	0.070	0.082
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
$[0, \frac{1}{2})$	0.445	0.427	0.411	0.396	0.382	0.370	0.359
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.092	0.090	0.089	0.087	0.086	0.084	0.082
$[1, 2)$	0.083	0.082	0.082	0.080	0.080	0.079	0.078
$[2, 3)$	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.043	0.043
$[3, 4)$	0.029	0.029	0.030	0.030	0.030	0.029	0.029
$[4, 5)$	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022
$[5, 10)$	0.060	0.061	0.062	0.063	0.063	0.064	0.064
$[10, 100)$	0.133	0.139	0.143	0.148	0.152	0.156	0.158
$[100, +\infty)$	0.094	0.106	0.118	0.130	0.141	0.152	0.164

Таблица 1.4: Количество измерений  $S = 4$

$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$[0, \frac{1}{2})$	1.000	0.987	0.922	0.852	0.785	0.726	0.674
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.000	0.008	0.037	0.062	0.078	0.088	0.094
$[1, 2)$	0.000	0.002	0.020	0.035	0.049	0.060	0.068
$[2, 3)$	0.000	0.001	0.009	0.016	0.023	0.028	0.033
$[3, 4)$	0.000	0.000	0.004	0.009	0.013	0.017	0.020
$[4, 5)$	0.000	0.000	0.002	0.005	0.009	0.012	0.014
$[5, 10)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.018	0.026	0.034
$[10, 100)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.021	0.035	0.050
$[100, +\infty)$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.013
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$[0, \frac{1}{2})$	0.628	0.59	0.555	0.525	0.498	0.474	0.452
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.097	0.098	0.098	0.098	0.096	0.095	0.093
$[1, 2)$	0.075	0.078	0.081	0.083	0.083	0.083	0.083
$[2, 3)$	0.036	0.039	0.041	0.042	0.043	0.044	0.044
$[3, 4)$	0.023	0.025	0.027	0.027	0.028	0.029	0.029
$[4, 5)$	0.016	0.018	0.019	0.020	0.021	0.021	0.022
$[5, 10)$	0.040	0.046	0.050	0.053	0.057	0.059	0.061
$[10, 100)$	0.064	0.078	0.090	0.103	0.113	0.122	0.130
$[100, +\infty)$	0.021	0.029	0.039	0.050	0.061	0.073	0.085
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
$[0, \frac{1}{2})$	0.433	0.415	0.400	0.386	0.372	0.360	0.349
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.091	0.089	0.087	0.086	0.084	0.083	0.081
$[1, 2)$	0.083	0.082	0.082	0.080	0.080	0.078	0.077
$[2, 3)$	0.045	0.045	0.044	0.044	0.044	0.044	0.043
$[3, 4)$	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030
$[4, 5)$	0.022	0.022	0.023	0.022	0.022	0.022	0.022
$[5, 10)$	0.062	0.063	0.063	0.064	0.064	0.065	0.065
$[10, 100)$	0.137	0.143	0.149	0.154	0.158	0.161	0.163
$[100, +\infty)$	0.097	0.110	0.122	0.134	0.146	0.158	0.170



Таблица 1.5: Количество измерений  $S = 5$

$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$[0, \frac{1}{2})$	1.000	0.987	0.921	0.849	0.781	0.721	0.669
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.000	0.008	0.037	0.062	0.079	0.089	0.095
$[1, 2)$	0.000	0.002	0.020	0.036	0.050	0.061	0.070
$[2, 3)$	0.000	0.001	0.009	0.016	0.023	0.029	0.033
$[3, 4)$	0.000	0.000	0.004	0.009	0.014	0.018	0.021
$[4, 5)$	0.000	0.000	0.002	0.005	0.009	0.012	0.014
$[5, 10)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.018	0.027	0.034
$[10, 100)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.021	0.035	0.051
$[100, +\infty)$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.014
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$[0, \frac{1}{2})$	0.623	0.584	0.549	0.518	0.492	0.468	0.447
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.098	0.099	0.099	0.098	0.096	0.095	0.093
$[1, 2)$	0.075	0.079	0.082	0.083	0.083	0.084	0.084
$[2, 3)$	0.036	0.039	0.041	0.043	0.044	0.044	0.044
$[3, 4)$	0.023	0.025	0.027	0.028	0.029	0.029	0.030
$[4, 5)$	0.016	0.018	0.019	0.020	0.021	0.022	0.022
$[5, 10)$	0.041	0.046	0.051	0.054	0.057	0.059	0.061
$[10, 100)$	0.066	0.080	0.093	0.105	0.115	0.125	0.133
$[100, +\infty)$	0.021	0.030	0.040	0.051	0.062	0.074	0.087
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
$[0, \frac{1}{2})$	0.427	0.410	0.394	0.380	0.367	0.355	0.344
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.091	0.089	0.087	0.085	0.083	0.081	0.080
$[1, 2)$	0.083	0.082	0.082	0.080	0.079	0.078	0.077
$[2, 3)$	0.045	0.045	0.044	0.044	0.044	0.043	0.043
$[3, 4)$	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030
$[4, 5)$	0.022	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.022
$[5, 10)$	0.062	0.063	0.065	0.065	0.066	0.065	0.065
$[10, 100)$	0.140	0.146	0.151	0.155	0.159	0.163	0.166
$[100, +\infty)$	0.099	0.112	0.125	0.137	0.149	0.161	0.173

Таблица 1.6: Количество измерений  $S = 6$

$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$[0, \frac{1}{2})$	1.000	0.987	0.920	0.847	0.779	0.718	0.665
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.000	0.008	0.037	0.062	0.079	0.090	0.095
$[1, 2)$	0.000	0.002	0.020	0.037	0.051	0.062	0.070
$[2, 3)$	0.000	0.001	0.009	0.017	0.024	0.029	0.034
$[3, 4)$	0.000	0.000	0.004	0.009	0.014	0.018	0.021
$[4, 5)$	0.000	0.000	0.002	0.005	0.009	0.012	0.015
$[5, 10)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.018	0.027	0.035
$[10, 100)$	0.000	0.001	0.003	0.010	0.022	0.036	0.051
$[100, +\infty)$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.014
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$[0, \frac{1}{2})$	0.619	0.578	0.544	0.514	0.488	0.464	0.443
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.098	0.099	0.099	0.097	0.095	0.093	0.092
$[1, 2)$	0.076	0.080	0.082	0.084	0.084	0.084	0.084
$[2, 3)$	0.037	0.040	0.041	0.043	0.044	0.044	0.045
$[3, 4)$	0.024	0.026	0.027	0.028	0.029	0.030	0.030
$[4, 5)$	0.017	0.019	0.020	0.021	0.021	0.022	0.022
$[5, 10)$	0.041	0.047	0.052	0.055	0.058	0.060	0.062
$[10, 100)$	0.067	0.082	0.095	0.107	0.118	0.127	0.135
$[100, +\infty)$	0.021	0.030	0.040	0.051	0.063	0.076	0.089
$\text{wid}(\mathbf{r})$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$
$[0, \frac{1}{2})$	0.424	0.407	0.392	0.377	0.364	0.352	0.341
$[\frac{1}{2}, 1)$	0.089	0.088	0.086	0.084	0.083	0.081	0.079
$[1, 2)$	0.083	0.082	0.081	0.080	0.079	0.078	0.076
$[2, 3)$	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.043	0.043
$[3, 4)$	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030
$[4, 5)$	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022
$[5, 10)$	0.063	0.064	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065
$[10, 100)$	0.142	0.148	0.153	0.157	0.161	0.164	0.167
$[100, +\infty)$	0.102	0.114	0.127	0.140	0.153	0.165	0.177

## 1.5. Случай матрицы со связями.

### Постановка задачи

Ранее, при постановке задачи нахождения оценки объединённого множества решений ИСЛАУ, мы полагали, что элементы, входящие в неё, независимые. Однако на практике это зачастую не так.

В случае, когда элементы системы имеют связи сложного вида, не имеется даже экспоненциального алгоритма для нахождения точных оценок объединённого множества решений. Задача в такой постановке является более общей, и, тем самым, более сложной для решения.

Примером может служить интервальная линейная задача наименьших квадратов. Она была рассмотрена в работе Дэвида Гея [12]. Специфика данной задачи состоит в том, что её можно свести к решению ИСЛАУ нормального вида. При этом, согласно работе [13], можно иметь различные представления этого нормального вида:

$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{b} - \mathbf{A}x) = 0, \quad \begin{cases} y + \mathbf{A}x = \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}^\top y = 0. \end{cases}$$

Итак, стоит задача нахождения оценки границ объединённого множества решений данной ИСЛАУ. Матрица системы является симметричной, то есть её элементы меняются в заданных пределах, но при этом любая «точечная» СЛАУ является симметричной.

Оценки объединённого множества ИСЛАУ с зависимыми элементами, которые могут быть получены методами интервального анализа, в общем случае, являются ещё более грубыми, чем с независимыми.

Таким образом, поставленная задача позволяет в полной мере продемонстрировать негативное влияние эффекта зависимости на получение от-

вета. Также она позволит качественно сравнить различные интервальные арифметики для её решения.

## 2. Численные погрешности.

### Использование интервального анализа

При решении практических задач часто возникают численные неопределённости, имеющие разную природу. Одни, например, происходят из неточности измерительных приборов или человеческого фактора. Другие — из-за использования на ЭВМ арифметики с ограниченной точностью (или арифметики с плавающей точкой).

Эти неточности могут достаточно сильно отклонить итоговый ответ от идеально точного, в особенности, когда он является результатом длинной цепочки вычислений.

Более того, существуют погрешности, которые мы не можем нивелировать. Примерами могут служить атомные массы химических элементов, для значений которых известны лишь доверительные интервалы, в которых они гарантированно содержатся.

Только некоторые теоретические константы могут быть точно записаны в числовом или аналитическом виде. В качестве примера можно рассмотреть историю получения значений гравитационной постоянной  $G$ . На (рис. 2.1) приведена иллюстрация из статьи журнала «Nature», где показана история опубликованных результатов экспериментов по измерению данной константы.

Видно, что полученные в различных экспериментах доверительные интервалы для значения гравитационной постоянной не пересекаются даже в одной точке. Сложность сопоставления результатов состоит в том, что

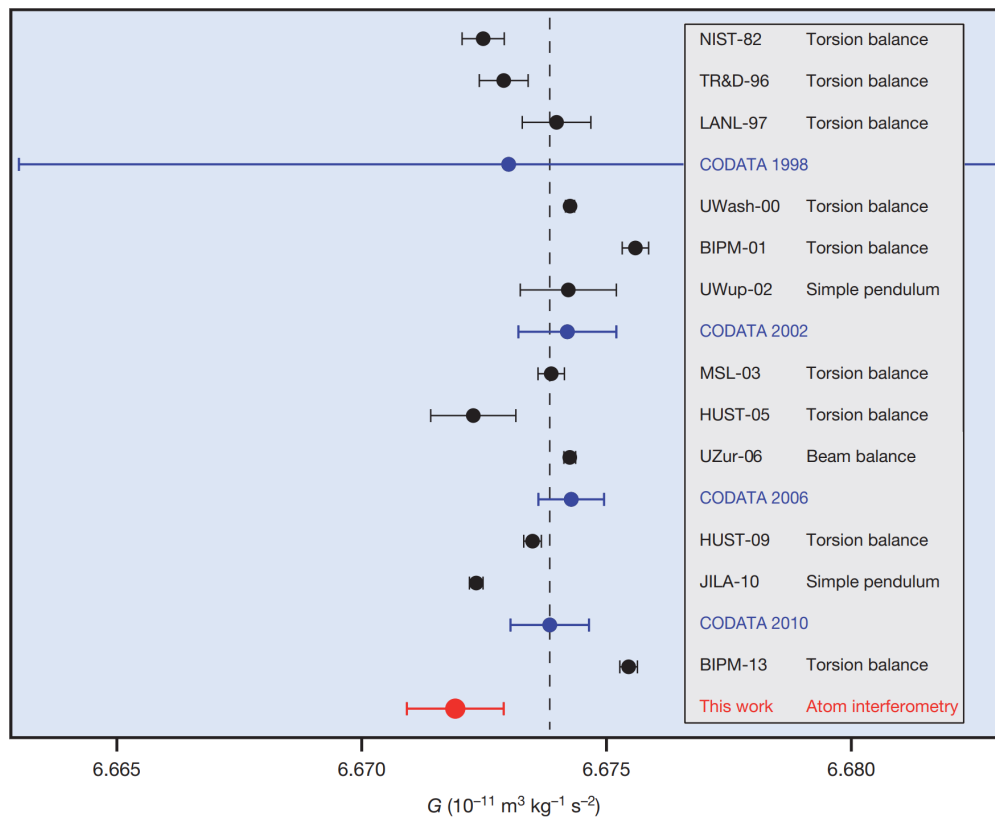


Рис. 2.1: История опубликованных результатов экспериментов по измерению константы  $G$

невозможно в той или иной мере учесть все искажающие факторы экспериментальной среды.

Таким образом, встаёт вопрос: какой из полученных доверительных интервалов считать наиболее достоверным для проведения расчетов? Ответ на данный вопрос важен, поскольку при наличии такого интервала можно использовать его среднюю точку как наиболее представительную «точечную» величину, характеризующую константу  $G$ .

Одним из решений данной проблемы является выбор представительной не «точечной», а интервальной величины. Например, можно взять интервал, полученный в результате объединения всех (или только некоторых) имеющихся интервалов и далее использовать его в дальнейших вычислениях.

Однако тогда встает другой вопрос: каким образом необходимо решать задачу с представительной интервальной величиной, чтобы полученный в результате вычислений ответ был допустим для дальнейшего использования и анализа?

Ответом на этот вопрос может быть использование интервального анализа. Его особенностью является то, что он использует в качестве базисного объекта интервал. Эта характерная черта данной математической дисциплины позволяет в полной мере учитывать неопределенности, встречающиеся в задачах.

В примере с представительной интервальной величиной для константы  $G$  можно проводить все вычисления, используя классическую интервальную арифметику. Тем самым можно гарантировать, что полученный в результате интервал будет содержать в себе идеально точное искомое решение.

## 2.1. Пример Мюллера

Пусть стоит задача найти тридцатый элемент последовательности

$$x_0 = 4,$$

$$x_1 = 4.25,$$

$$x_i = 108 - \frac{815 - 1500/x_{i-2}}{x_{i-1}}.$$

Как обычно принято на практике, для решения данной задачи будем использовать машинную арифметику двойной точности (тип «double» согласно стандарту [1]). Также решим эту задачу, учитывая ошибки округления при оперировании числами с плавающей точкой в процессе вычислений. Для этого будем использовать классическую интервальную арифметику. Полученные результаты представлены в таблице (2.1).

Таблица 2.1: Результаты вычислительных экспериментов

$i$	«Точечная» арифметика с плавающей точкой	Классическая интервальная арифметика
1	4	[ 4.000000000000, 4.000000000000 ]
2	4.25	[ 4.250000000000, 4.250000000000 ]
3	4.470588235294116	[ 4.470588235294, 4.470588235294 ]
4	4.6447368421052317	[ 4.644736842105, 4.644736842106 ]
5	4.7705382436253814	[ 4.770538243625, 4.770538243633 ]
6	4.8557007125748015	[ 4.855700712558, 4.855700712739 ]
7	4.9108474987890247	[ 4.910847498332, 4.910847502291 ]
8	4.9455373981440545	[ 4.945537386426, 4.945537471849 ]
9	4.9669624608756351	[ 4.966962172699, 4.966964002158 ]
10	4.98004326786787	[ 4.980036380732, 4.980075380346 ]
11	4.9879305877668543	[ 4.987769309963, 4.988598347566 ]
12	4.9917907586369807	[ 4.988070629252, 5.005662648814 ]
13	4.9760336813273796	[ 4.891127743800, 5.263480342516 ]
14	4.6030641192723891	[ 2.637923691460, 10.292306138550 ]
15	-3.568095025888212	[ -92.922210598236, 58.611432105461 ]
16	245.084384261717	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
17	102.95931821632739	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
18	100.14369643238381	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
19	100.00717401619831	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
20	100.00035866020249	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
21	100.00001793249953	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
22	100.00000089661144	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
23	100.00000004483017	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
24	100.00000000224151	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
25	100.00000000011208	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
26	100.00000000000561	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
27	100.00000000000028	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
28	100.00000000000001	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
29	100	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]
30	100	[ $-\infty$ , $+\infty$ ]



Проведём анализ полученных результатов. Рассмотрим последовательность, полученную вычислением арифметикой с плавающей точкой. Видно, что последовательность сошлась к 100.

Теперь обратимся к результатам, полученным использованием интервальной классической арифметики. Начиная с 14-ой итерации, ширина интервала начинает расти. Заметим, что это происходит в тот момент, когда в «точечной» последовательности начались отклонения от числа 5.

Далее ширина интервала, содержащего значение  $x_i$ , продолжает расти и уже для  $i = 15$  мы получаем интервал, ширина которого превышает 100. Так же он содержит в себе 0, что ставит под сомнение возможность деления на  $x_{15}$  при вычислении  $x_{16}$ .

Принимая во внимание данные наблюдения, мы должны поставить вопрос: может ли идти речь о численной сходимости к какому-либо числу в принципе.

Рассмотренное рекуррентное соотношение называется *примером Мюллера*. Аналитически данная последовательность сходится к числу 5, однако при вычислениях с помощью арифметики с плавающей точкой, даже более точной, чем «double» (например «длинная» арифметика в языке программирования Python), последовательность, начиная с некоторого номера, по-прежнему начинает сходиться к числу 100.

Данный эффект объясняется тем, что дискретный процесс, который задается приведённым рекуррентным соотношением, имеет неустойчивую точку  $x = 5$  и устойчивую точку  $x = 100$ . В процессе вычислений с помощью «точечной» арифметики неизбежно появляются ошибки округлений. Они и провоцируют переход из окрестности неустойчивой точки в окрестность устойчивой.

Пример Мюллера наглядно демонстрирует пользу интервальной арифметики для проведения практических расчетов. Она позволяет учесть все вычислительные эффекты, которые могут исказить результат, а также даёт наглядное представление «точности» результата в виде ширины интервала.

Это свойство очень полезно на практике. Представим, что перед нами стоит задача по вычислению последовательности Мюллера, при этом мы не имеем никаких априорных представлений о её свойствах.

Тогда в процессе вычислений, после 14-ой итерации, мы могли бы сделать вывод о том, что проводимые расчёты не имеют смысла, поскольку последовательность ведет себя неустойчиво и, соответственно, результат не пригоден для дальнейшего анализа.

### 3. Обзор интервальных арифметик

Указанные ранее проблемы, связанные с погрешностями представления чисел, а также с округлением при вычислениях, мотивировали создание математического аппарата, который был бы построен на следующем принципе:

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — интервалы, тогда

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{ a * b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \}, \quad (3.1)$$

где « $*$ » — арифметическая операция между интервалами.

Иными словами, мы требуем, чтобы результирующий интервал содержал в себе все возможные результаты применения арифметического оператора для любой упорядоченной пары  $(a, b)$ , где  $a \in \mathbf{a}$ ,  $b \in \mathbf{b}$ .

В интервальном анализе было сконструировано несколько видов интервальных арифметик, основанных на этом принципе.

#### 3.1. Классическая интервальная арифметика

Классическая интервальная арифметика определена на множестве  $\mathbb{IR}$ . Операции, которые мы определим далее, являются прямой реализацией базового принципа интервального анализа (3.1):

1. Сложение:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] + [\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}] = \\ &= \{ a + b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \} = \\ &= \{ x \mid \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \leq x \leq \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} \} = \\ &= [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}]. \end{aligned}$$

2. Вычитание:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} - \mathbf{b} &= [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] - [\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}] = \\
 &= \{a - b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\} = \\
 &= \{x \mid \underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}} \leq x \leq \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}\} = \\
 &= [\underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}].
 \end{aligned}$$

3. Умножение:

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

Найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Единственная стационарная точка данной функции —  $(0, 0)$ . Она является седловой, поэтому при рассмотрении  $x \in \mathbf{x}$ ,  $y \in \mathbf{y}$  получаем, что экстремумы достигаются на границах интервалов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .

Используя это, получаем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] \cdot [\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}] = \\
 &= \{a \cdot b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\} = \\
 &= \left\{ x \mid \min\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}\} \leq x \cap \right. \\
 &\quad \left. \cap x \leq \max\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}\} \right\} = \\
 &= \left[ \min\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}\}, \right. \\
 &\quad \left. \max\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}\} \right].
 \end{aligned}$$

#### 4. Деление:

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = x / y.$$

Найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} 1 / y = 0, \\ -x / y^2 = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \in \emptyset, \\ x = 0. \end{cases}$$

Данная функция не имеет стационарных точек, поэтому при рассмотрении  $x \in \mathbf{x}$ ,  $y \in \mathbf{y}$  получаем, что экстремумы достигаются на границах интервалов.

Используя это, получаем, что если  $0 \notin \mathbf{b}$ , то:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} / \mathbf{b} &= [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] / [\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}] = \\ &= \{ a / b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \} = \\ &= \left\{ x \mid \min \{ \underline{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}} \} \leq x \cap \right. \\ &\quad \left. \cap x \leq \max \{ \underline{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}} \} \right\} = \\ &= \left[ \min \{ \underline{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}} \}, \right. \\ &\quad \left. \max \{ \underline{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} / \bar{\mathbf{b}} \} \right]. \end{aligned}$$

Главным достоинством классической интервальной арифметики можно назвать простоту её реализации для использования на ЭВМ — результирующие интервалы получаются из концов интервалов-операндов, что облег-

чает написание и тестирование программ. К недостаткам этой арифметики можно отнести:

1. *Примитивность вида интервальных границ.*

В классической интервальной арифметике множество совместных значений диаграммы зависимости описывается по координатно. Поэтому зачастую это происходит неэффективно. Подтверждением данного утверждения является то, что на практике при использовании данной арифметики часто обнаруживает себя «эффект обёртывания».

2. *Эффект зависимости.*

Классическая интервальная арифметика не позволяет учитывать какие-либо связи между интервальными параметрами в вычисляемом выражении. Для демонстрации этого факта достаточно взять произвольный интервал ширины, отличной от нуля

$$\mathbf{x} \in \mathbb{IR} \setminus \{\mathbf{y} \mid \text{wid } \mathbf{y} \neq 0\}$$

и рассмотреть функцию

$$f(x) = x - x, \text{ где } x \in \mathbf{x}.$$

Тогда при нахождении её естественного интервального расширения получим, что

$$\begin{aligned} f(x) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \mathbf{x} = \\ &= [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] - [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] = [\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}] \neq [0, 0]. \end{aligned}$$

Отдельно отметим, что

$$\text{wid}(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = 2 \cdot \text{wid}(\mathbf{x}).$$

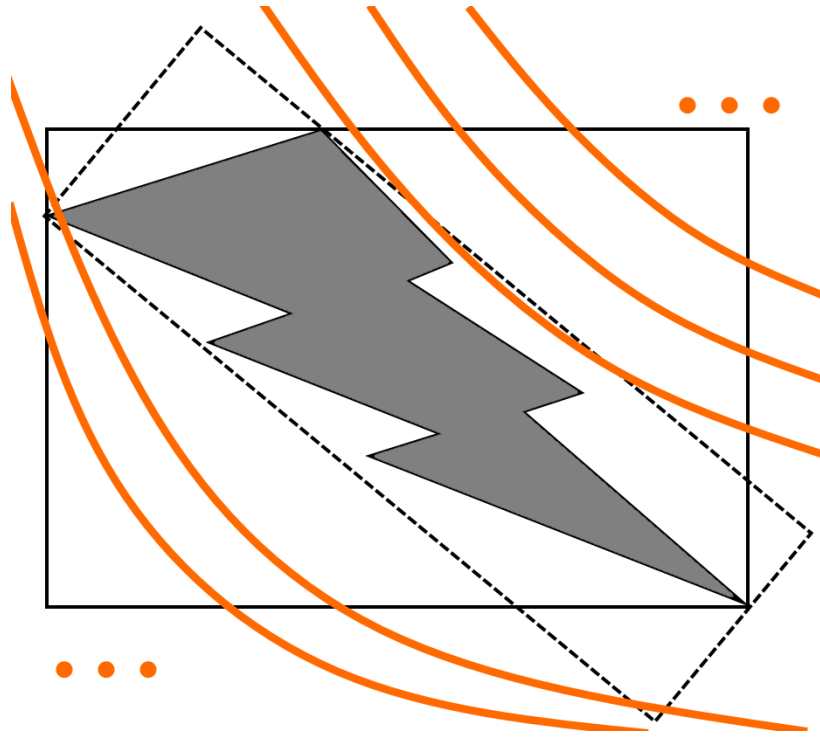


Рис. 3.1: Пример, когда множество совместных значений диаграммы зависимости можно описать эффективнее (то есть «ближе» к линиям уровня оцениваемых функций), чем по координатным границам (оранжевыми линиями обозначены линии уровня для операции умножения).

## 3.2. Аффинная арифметика

На практике при вычислениях часто встречаются зависимые интервальные величины. Таким образом, нередка ситуация, когда множество совместных значений можно описать лучше, чем по координатным границам (рис. 3.1). Эта идея легла в основу построения аффинной арифметики.

В данной арифметике рассматриваются аффинные формы

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + x_n \cdot \varepsilon_n,$$

$$\text{где } \varepsilon_i \in [-1, 1], x_i \in \mathbb{R}.$$

$n$  будем называть *размером аффинной формы*  $\mathbf{x}$ ,  $\varepsilon_i$  — *символами шума*, а  $x_i$  — *коэффициентами при соответствующих символах шума*. Семейство всех аффинных форм обозначим  $\mathbb{AR}$ .

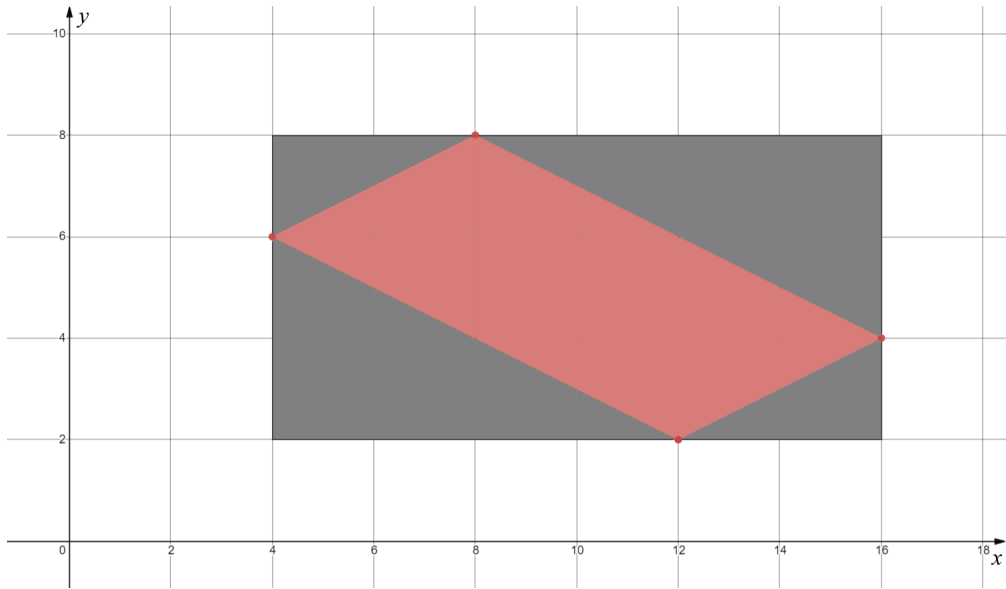


Рис. 3.2: Диаграмма зависимости упорядоченной пары  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , где  $\mathbf{x} = 10 - 4 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2$ ,  $\mathbf{y} = 5 + 2 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$ . Розовым цветом показано множество совместных значений этой пары — зонотоп.

Рассмотрим две аффинных формы размера  $n$

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n,$$

$$\mathbf{y} = y_0 + y_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + y_n \cdot \varepsilon_n.$$

Рассмотрим область, образуемую множеством всех точек  $(x, y)$  таких, что:

$$x = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n,$$

$$y = y_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + y_n \cdot \varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

В результате получим центрально-симметричный параллелепипед, называемый *зонотопом* (рис. 3.2), имеющий  $2n$  сторон.

Отметим, что аффинная форма является обобщением классического интервала (то есть  $\mathbb{I}\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}\mathbb{R}$ ), поскольку любому классическому интервалу

$$\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}$$



можно сопоставить аффинную форму

$$\mathbf{x} = \text{mid}(\mathbf{x}) + \text{rad}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_1 \in \mathbb{AR}.$$

### 3.2.1. Арифметические операции аффинной арифметики

Предположим, что

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n \in \mathbb{AR},$$

$$\mathbf{y} = y_0 + y_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + y_n \cdot \varepsilon_n \in \mathbb{AR},$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Тогда арифметические операции в аффинной арифметике вводятся следующим образом:

1. Линейные операции:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma &= (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + (\alpha x_1 + \beta y_1) \cdot \varepsilon_1 + \\ &+ \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n) \cdot \varepsilon_n. \end{aligned}$$

2. Умножение аффинных форм:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{x} \cdot \beta \mathbf{y} &= (\alpha x_0 \cdot \beta y_0) + (\alpha x_0 \cdot \beta y_1 + \alpha x_1 \cdot \beta y_0) \cdot \varepsilon_1 + \cdots + \\ &+ (\alpha x_n \cdot \beta y_0 + \alpha x_0 \cdot \beta y_n) \cdot \varepsilon_n + \\ &+ \boxed{(x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n) \cdot (y_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + y_n \cdot \varepsilon_n)} = \\ &= (\alpha x_0 \cdot \beta y_0) + (\alpha x_0 \cdot \beta y_1 + \alpha x_1 \cdot \beta y_0) \cdot \varepsilon_1 + \cdots + \\ &+ (\alpha x_n \cdot \beta y_0 + \alpha x_0 \cdot \beta y_n) \cdot \varepsilon_n + \boxed{\mathbf{Q}} = \\ &= (\alpha x_0 \cdot \beta y_0 + \text{mid}(\mathbf{Q})) + (\alpha x_0 \cdot \beta y_1 + \alpha x_1 \cdot \beta y_0) \cdot \varepsilon_1 + \\ &+ \cdots + (\alpha x_n \cdot \beta y_0 + \alpha x_0 \cdot \beta y_n) \cdot \varepsilon_n + \text{rad}(\mathbf{Q}) \cdot \varepsilon_{extra}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — интервальная оценка квадратичных членов в классической интервальной арифметике (в преобразованиях обведены прямоугольником),  $\varepsilon_{extra}$  — специальный фиктивный символ шума, не ассоциированный ни с каким интервальным параметром. Данный символ

характеризует ширину интервала погрешности  $Q$ , которую нельзя представить, используя символы шума.

Мы рассматривали арифметические операции в предположении, что  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — аффинные формы размера  $n$ . Если же формы имеют разный размер, то необходимо проделать следующую процедуру уравнивания длин.

Пусть  $X$  — множество символов шума аффинной формы  $\mathbf{x}$ ,  $Y$  — формы  $\mathbf{y}$  соответственно, а  $Z = X \cap Y$ . Тогда можно представить  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в новом расширенном виде

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\leftarrow \sum_{x_i \in X} x_i \cdot \varepsilon_i + \sum_{x_i \in Y \setminus Z} 0 \cdot \varepsilon_i, \\ \mathbf{y} &\leftarrow \sum_{x_i \in X \setminus Z} 0 \cdot \varepsilon_i + \sum_{x_i \in Y} x_i \cdot \varepsilon_i.\end{aligned}$$

То есть в данном виде все коэффициенты при символах шума, которые не встречались в рассматриваемой форме, равны нулю.

### 3.3. Другие интервальные арифметики

Существуют и другие виды интервальных арифметик. Они не вошли в обзор, поскольку имеют особенности, которые по некоторым причинам не позволяют применять их для решения поставленных в работе задач:

1. Арифметика Каухера — интервальная арифметика, которая была разработана, как расширение классической интервальной арифметики для пополнения алгебраических свойств.
2. Комплексные арифметики — используются для оперирования интервальными объектами, которые содержат в себе комплексные числа.
3. Твинная арифметика — интервальная арифметика, которая оперирует интервалами с интервальными концами.

4. Арифметика Кахана — интервальная арифметика, которая доопределяет классическую интервальную арифметику операцией деления на нуль-содержащий интервал, а также определяет операции между интервалами, концы которых могут быть « $-\infty$ » или « $+\infty$ ».
5. Мультиинтервальная арифметика — интервальная арифметика, идея которой состоит в представлении оперируемого объекта в виде объединения классических интервалов.

## 4. Анализ аффинной арифметики

Использование аффинных форм позволяет группировать члены при символах шума во время вычислений. Это свойство позволяет учитывать линейные связи между ними.

Так, например, рассмотрим функцию

$$f(x) = x - x, \text{ где } x \in [-1, 1].$$

В аффинной арифметике любой классический интервал  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$  будет представляться в виде

$$\mathbf{x} = \text{mid}(\mathbf{x}) + \text{rad}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_1 \in \mathbb{AR}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) \subseteq f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \mathbf{x} = \\ &= (\text{mid}(\mathbf{x}) - \text{mid}(\mathbf{x})) + (\text{rad}(\mathbf{x}) - \text{rad}(\mathbf{x})) \cdot \varepsilon_1 = \\ &= 0 + 0 \cdot \varepsilon_1 = [0, 0]. \end{aligned}$$

Таким образом, использование аффинной арифметики позволяет учесть группировку по суммированию и вычитанию при символах шума, тем самым исправляя недостаток классической интервальной арифметики, в которой

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \setminus \{\mathbf{y} \mid \text{wid } \mathbf{y} = 0\} : \mathbf{x} - \mathbf{x} \neq [0, 0].$$

Однако данная арифметика имеет и недостатки:

1. *Реализация аффинной арифметики более трудоёмка по сравнению с классической интервальной арифметикой.*

Вместо операций с парой вещественных чисел — концами интервалов, необходимо реализовывать арифметические действия между массивами коэффициентов при соответствующих символах шума.

2. *Особенность, позволяющая учитывать группировку членов при символах шума в вычислениях влечёт за собой увеличение алгоритмической сложности и потребления памяти.*

Исходя из определения операций, сложение, вычитание и умножение аффинных форм размера  $n$  требуют объёма памяти  $O(n)$ , и выполнения  $O(n)$  операций.

3. *При обработке квадратичных членов, мы преобразуем их в классические интервалы, а учитываем только линейные члены при символах шума.*

То есть, в аффинной арифметике верно

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR} : \mathbf{x} - \mathbf{x} = [0, 0],$$

но при этом

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \setminus \{ \mathbf{y} \mid \text{wid } \mathbf{y} = 0 \} : \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^2 \neq [0, 0].$$

4. *Существуют примеры, когда использование аффинной арифметики даёт результирующий интервал шире, чем при использовании классической интервальной арифметики.*

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \text{ где } x \in [-1, 1]. \quad (4.1)$$

Аффинная форма для интервального расширения этой функции будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 f(x) \subseteq f(\mathbf{x}) &= \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right) = \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot \varepsilon_1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot \varepsilon_1\right) = \\
 &= \frac{1}{4} - 1 \cdot \varepsilon_1 + (1 \cdot \varepsilon_1) \cdot (1 \cdot \varepsilon_1) = \\
 &= \frac{1}{4} - 1 \cdot \varepsilon_1 + [0, 1] = \\
 &= \frac{1}{4} - 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{extra} = \\
 &= \frac{3}{4} - 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{extra}.
 \end{aligned}$$

Преобразуем аффинную форму в классический интервал, получим

$$\frac{3}{4} - 1 \cdot [-1, 1] + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right].$$

Теперь используем классическую интервальную арифметику для нахождения естественного интервального расширения  $f(\mathbf{x})$ , тогда получим

$$\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 = \left[0, \frac{9}{4}\right].$$

Данный пример демонстрирует случай, когда при использовании классической интервальной арифметики результирующий классический интервал получается уже, чем при использовании аффинной арифметики (рис. 4.1).

Это получается из-за того, что результирующий интервал, который используется на практике, представляет собой классический интервал, а его конвертация в какой-либо иной формат и наоборот может сопровождаться погрешностью, которая будет больше, чем выигрыш

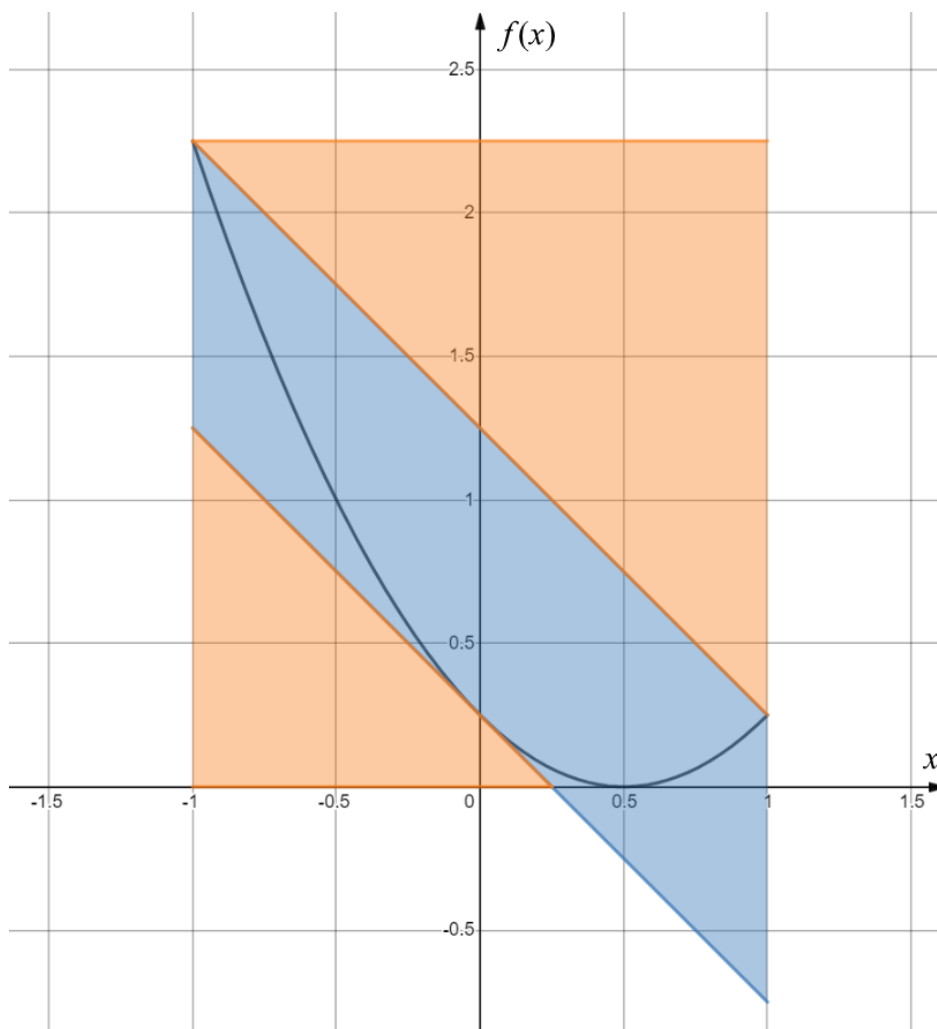


Рис. 4.1: Пример, когда классическая интервальная арифметика даёт в результате вычислений классический интервал более узкий, чем при использовании аффинной арифметики. Чёрной линией показано множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x)$  задана в (4.1). Оранжевой областью показано его приближение в классической интервальной арифметике (интервал значений  $[0, \frac{9}{4}]$ ), голубой областью — в аффинной арифметике (интервал значений  $[-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}]$ ).

от учёта группирования коэффициентов аффинной формы при соответствующих символах шума.

Идея исправления данного недостатка была предложена Ахмеровым в работе [5]. Она состоит в использовании информации от вычислений в классической интервальной арифметике при каждом шаге обработки аффинных форм. Полученная модификация аффинной арифметики была названа *аффинно-интервальной*.

5. *Аффинная арифметика позволяет относительно просто вводить только некоторые операции, а именно: сложение, вычитание, произведение, умножение на константу.*

Для введения иных неаффинных операций между аффинными формами требуется создание специальных процедур, которые будут каким-либо оптимальным образом описывать результирующее множество зонотопом.

В Работе Ахмерова [5] была упомянута процедура построения зонотопа, которая приблизительно наилучшим образом аппроксимирует диаграмму зависимости для результатов деления за время  $O(n)$ . Однако построение наилучшего приближения этого множества зонотопами остаётся открытым вопросом.

## 4.1. Пример неэффективности аффинной арифметики

Чтобы продемонстрировать важность учета и вовлечения в вычисления квадратичных членов, рассмотрим функцию



$$f = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c),$$

$$x \in [-1, 1], a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], b \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], c \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Найдём естественное интервальное расширение

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \subseteq (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \\ &= \left( [-1, 1] - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( [-1, 1] - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( [-1, 1] - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \right) = \\ &= \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] = \left[ -\frac{9}{4}, \frac{9}{4} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] = \\ &= \left[ -\frac{27}{8}, \frac{27}{8} \right] \end{aligned}$$

В аффинной арифметике

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = 0 + 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_2,$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 + 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_3,$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = 0 + 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_4.$$

Итого имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \subseteq (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \\ &= \left( 0 + 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_2 \right) \cdot \left( 0 + 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_3 \right) \cdot \left( 0 + 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_4 \right) = \\ &= \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] = \left[ -\frac{9}{4}, \frac{9}{4} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] = \\ &= \left[ -\frac{27}{8}, \frac{27}{8} \right]. \end{aligned}$$

Получаем одинаковый результат в классической интервальной и аффинной арифметиках.

Теперь рассмотрим следующее выражение в аффинной арифметике, которое получается из предыдущего уточнением интервальных параметров

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right), x \in [-1, 1]$$

Найдём аффинную форму данного выражения:

$$\begin{aligned}
f(x) &\subseteq f(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot \varepsilon_1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot \varepsilon_1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot \varepsilon_1\right) = \\
&= \left(\frac{3}{4} - 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{extra}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot \varepsilon_1\right) = \\
&= \left(\frac{3}{4} - 1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{extra}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \varepsilon_1 + \\
&\quad + \left(-1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{extra}\right) \cdot (1 \cdot \varepsilon_1) = \\
&= \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon_1\right) + \frac{1}{4} \cdot \varepsilon_{extra} + \left(-1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{extra}\right) \cdot (1 \cdot \varepsilon_1) = \\
&= \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon_1\right) + \frac{1}{4} \cdot [-1, 1] + \left([-1, 1] + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \cdot [-1, 1] = \\
&= \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon_1\right) + \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] + \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \\
&= \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon_1\right) + \frac{7}{4} \cdot \varepsilon_{extra}
\end{aligned}$$

Проанализируем полученный результат. Посчитаем площадь  $S_{effective}$ , заметаемую линейными членами интервальных параметров, которые мы удерживаем в выражении. Также посчитаем и площадь  $S_{extra}$  от неассоциированного с интервальными параметрами символа шума.

$$\begin{aligned}
S_{effective} &= \int_{-1}^{+1} \frac{5}{4} d\varepsilon_1 = \frac{5}{2}, \\
S_{extra} &= \int_{-1}^{+1} \frac{7}{4} d\varepsilon_2 = \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Приведённый пример показывает важность учета квадратичных членов при вычислении выражений. Был приведён пример, когда всего за 3 операции умножения площадь от фиктивного символа шума погрешности  $\varepsilon_{extra}$  начинает превалировать над «полезной площадью»  $S_{effective}$ .

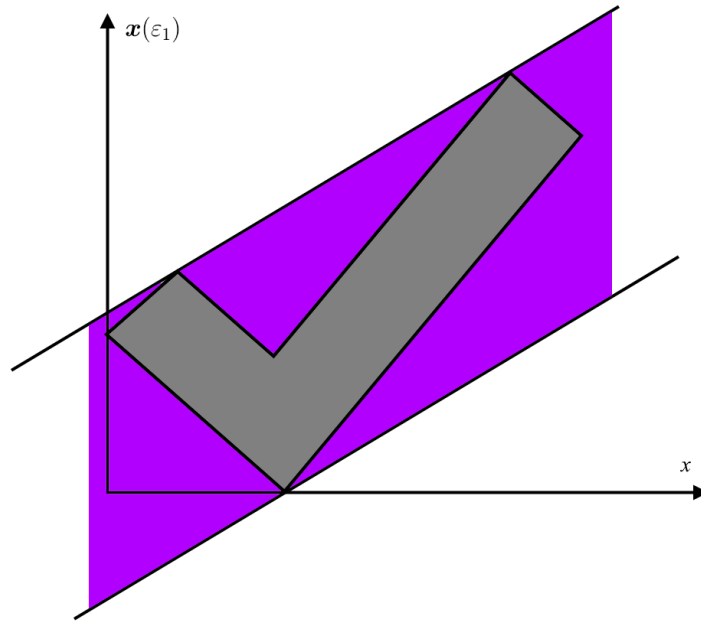


Рис. 5.1: Множество совместных значений для упорядоченной пары  $(x, \mathbf{x}(\varepsilon_1))$ , где  $\mathbf{x}(\varepsilon_1) = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + x_{extra} \cdot \varepsilon_{extra}$ .

## 5. Построение новой интервальной арифметики

Пусть в рассмотрении имеется аффинная форма

$$\mathbf{x}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n + x_{extra} \cdot \varepsilon_{extra}.$$

Идеей построения новой интервальной арифметики стало наблюдение, что аффинная арифметика позволяет описывать множество совместных значений упорядоченной пары

$$((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \mathbf{x}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$$

исключительно линейными членами при соответствующих символах шума.

Тогда множества, представляющие собой, например, вогнутые фигуры, будут описываться с большой погрешностью (рис. 5.1)

Также аффинная арифметика не предусматривает учёта квадратичных членов и в случае оперирования ими сводится к использованию классиче-

ской интервальной арифметики. Значит, она мало пригодна к использованию на практике при большом числе умножений в процессе вычислений.

Автором данной работы была выдвинута идея, которая позволяет частично устранить недостатки, указанные выше. Она состоит в создании новой интервальной арифметики, в которой концы интервалов описываются при помощи функционалов границ.

Будем мыслить интервал, как параметрическое семейство классических интервалов. То есть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_i \in \mathbf{x}_i$  интервальный параметр.

Функционал  $L(l_1, \dots, l_{n_l})$  назовём *функционалом нижней границы*, если  $l_i \in \mathbf{l}_i$  ( $i = 1, \dots, n_l$ ) — интервальные параметры и

$$\begin{aligned} L(l_1, \dots, l_{n_l}) &\leq \underline{\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)}, \\ l_i &\in \mathbf{l}_i, \quad i = 1, \dots, n_l, \\ x_k &\in \mathbf{x}_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Функционал  $U(u_1, \dots, u_{n_u})$  назовём *функционалом верхней границы*, если  $u_i \in \mathbf{u}_i$  ( $i = 1, \dots, n_u$ ) — интервальные параметры и

$$\begin{aligned} U(u_1, \dots, u_{n_u}) &\geq \overline{\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)}, \\ u_i &\in \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, n_u, \\ x_k &\in \mathbf{x}_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Интервал  $\mathbf{x}$ , границы которого представляются функционалами нижней и верхней границы соответственно, будем называть *функционально-граничным*, а арифметику, которая оперирует интервалами такого типа, будем называть *функционально-граничной*. Семейство функционально-граничных интервалов будем обозначать  $\mathbb{FR}$ .

Для записи функционально-граничных интервалов предлагается следующая нотация: вместо числовых границ интервалов будем писать на месте

левого конца интервала функционал  $L(l_1, \dots, l_{n_l})$ , а вместо правого конца — функционал  $U(u_1, \dots, u_{n_u})$ . Данные обозначения были использованы в описании рисунков (рис. 5.2, 5.3).

*Интервальной оценкой* функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  будем называть функционально-граничный интервал  $\left[ L(l_1, \dots, l_{n_l}), U(u_1, \dots, u_{n_u}) \right]$ , если

$$\begin{aligned} L(l_1, \dots, l_{n_l}) &\leq f(x_1, \dots, x_n), \\ U(u_1, \dots, u_{n_u}) &\geq f(x_1, \dots, x_n), \\ l_i &\in \mathbf{l}_i, \quad i = 1, \dots, n_l, \\ u_j &\in \mathbf{u}_j, \quad j = 1, \dots, n_u, \\ x_k &\in \mathbf{x}_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Обозначать интервальную оценку функции будем жирным символом этой функции. Чтобы понимать, к какой интервальной оценке относится тот или иной функционал  $L(l_1, \dots, l_{n_l})$  и  $U(u_1, \dots, u_{n_u})$ , будем писать обозначение этой интервальной оценки нижним индексом возле соответствующего функционала. В данных обозначениях,  $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$  — интервальная оценка для функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , причём

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \left[ L_{\mathbf{f}}(l_1, \dots, l_{n_l}), U_{\mathbf{f}}(u_1, \dots, u_{n_u}) \right].$$

Далее в работе будем полагать, что при нахождении интервальной оценки некоторой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  функционалы границ зависят только от интервальных параметров этой функции, то есть

$$L_{\mathbf{f}} = L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \text{ и } U_{\mathbf{f}} = U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n).$$

Также будем полагать, что

$$x_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

В случае, если параметр функции изменяется в интервале  $x^* \in \mathbf{x}^* \neq [-1, 1]$ , то можно применить линейное преобразование:

$$x^* \leftarrow \text{mid}(\mathbf{x}^*) + x \cdot \text{rad}(\mathbf{x}^*),$$

которое позволяет свести интервал изменения переменной  $x^*$  к интервалу  $[-1, 1]$ .

Заметим, что в рамках данных соглашений,  $\mathbb{IR} \subseteq \mathbb{FR}$ , так как любой классический интервал

$$\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] \in \mathbb{IR}$$

представляет собой функционально-граничный интервал

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) &= \left[ L_{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}), U_{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \right] \in \mathbb{FR}, \\ L_{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) &= \underline{\mathbf{x}}, \quad U_{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Также  $\mathbb{AR} \subseteq \mathbb{FR}$ , так как любую аффинную форму

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + x_n \cdot \varepsilon_n + x_{extra} \cdot \varepsilon_{extra} \in \mathbb{AR}$$

можно представить как функционально-граничный интервал

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= \left[ L_{\mathbf{x}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), U_{\mathbf{x}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \right] \in \mathbb{FR}, \\ L_{\mathbf{x}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + x_n \cdot \varepsilon_n - |x_{extra}|, \\ U_{\mathbf{x}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= x_0 + x_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + x_n \cdot \varepsilon_n + |x_{extra}|. \end{aligned}$$

Новизной функционально-граничной интервальной арифметики является то, что в зависимости от выбранного функционального базиса, в котором будут описываться функционалы  $L(x_1, \dots, x_n)$  и  $U(x_1, \dots, x_n)$ , она начинает обладать специфичными свойствами.

В данной работе будет выбран такой функциональный базис, который позволит описывать множества совместных значений упорядоченной пары

$((x_1, \dots, x_n), \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n))$  лучше, чем в уже рассмотренных арифметиках.

Примеры некоторых таких множеств показаны на рисунках (5.2, 5.3).

Введём арифметические операции между интервалами в функционально-граничной арифметике. Пусть имеются

$$\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{FR},$$

$$\mathbf{b}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{FR},$$

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

Положим, что  $F_{\downarrow}\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$  — некоторая процедура, строящая функционал  $L_{new}(x_1, \dots, x_n)$  с тем свойством, что:

$$L_{new}(x_1, \dots, x_n) \leq f_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$x_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n,$$

а  $F_{\uparrow}\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$  — функционал  $U_{new}(x_1, \dots, x_n)$  со свойством:

$$U_{new}(x_1, \dots, x_n) \geq f_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$x_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда операции между  $\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n)$  и  $\mathbf{b}(x_1, \dots, x_n)$  можно ввести следующим образом:

1. Сложение:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x_1, \dots, x_n) + \mathbf{b}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \left[ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \right] + \\ &\quad + \left[ L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right] = \\ &= \left[ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) + L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \right. \\ &\quad \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) + U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right]. \end{aligned}$$

2. Вычитание:

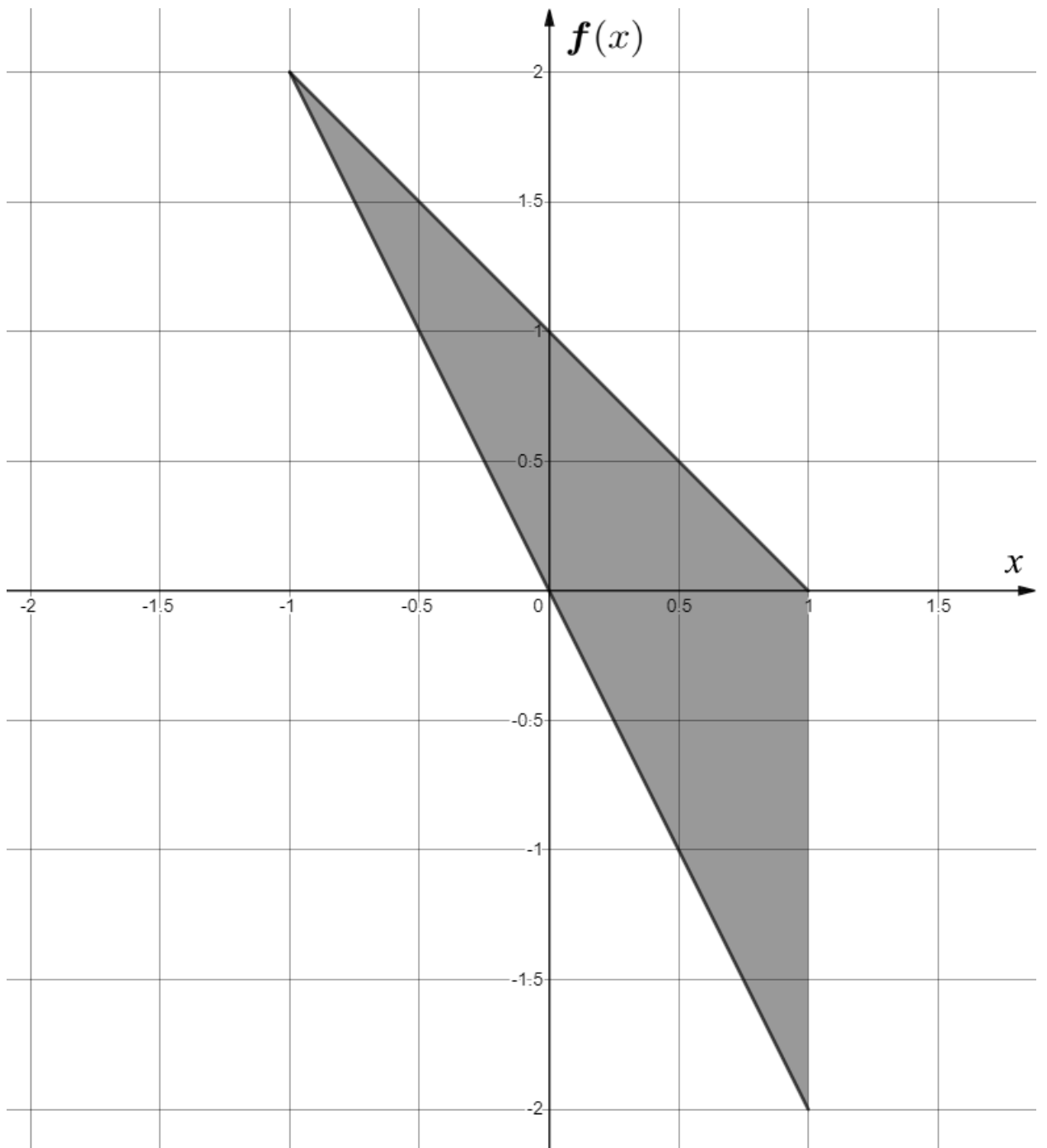


Рис. 5.2: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [-2x, -x + 1] \in \mathbb{FR}$ ,  $x \in [-1, 1]$ .



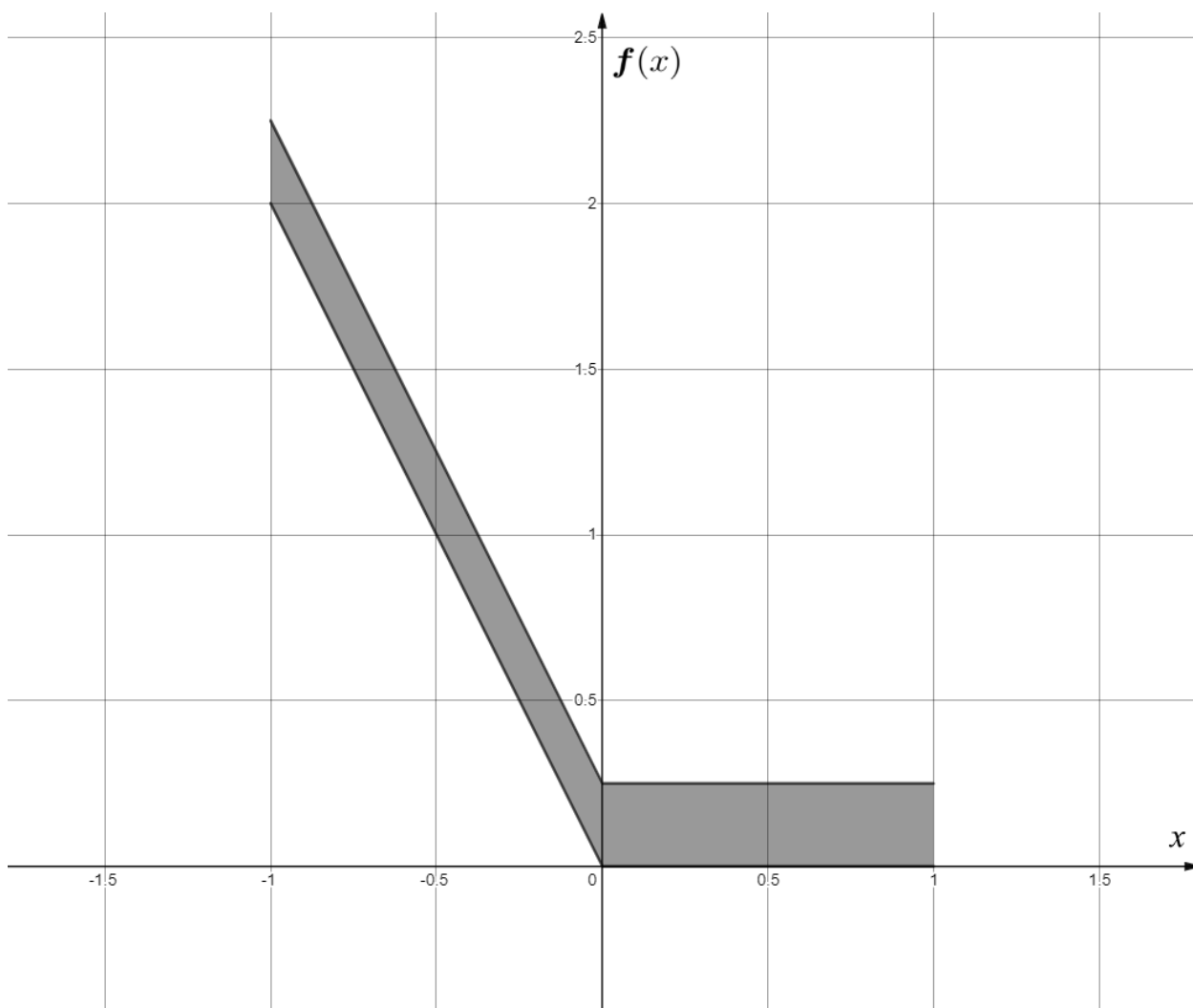


Рис. 5.3: Множество совметных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [ |x| - x, |x| - x + \frac{1}{4} ] \in \mathbb{FR}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n) - \mathbf{b}(x_1, \dots, x_n) &= \\
&= \left[ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \right] - \\
&\quad - \left[ L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right] = \\
&= \left[ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) - U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \right. \\
&\quad \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) - L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right].
\end{aligned}$$

3. Умножение:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{b}(x_1, \dots, x_n) &= \\
&= \left[ F_{\downarrow} \left\{ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \right. \right. \\
&\quad L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
&\quad U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
&\quad \left. \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right\}, \right. \\
&= F_{\uparrow} \left\{ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \right. \\
&\quad L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
&\quad U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
&\quad \left. \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right\} \right].
\end{aligned}$$

4. Частный случай предыдущего пункта — умножение на константу:

$$\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n) \cdot \alpha = \begin{cases} \left[ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \alpha, \right. \\ \quad \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \alpha \right], & \text{если } \alpha \geq 0, \\ \left[ U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \alpha, \right. \\ \quad \left. L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \alpha \right], & \text{иначе.} \end{cases}$$

5. Деление.

Если  $0 \notin \left[ L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right]$ , то:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a}(x_1, \dots, x_n) / \mathbf{b}(x_1, \dots, x_n) = \\
& \left[ F_{\downarrow} \left\{ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \right. \right. \\
& \quad L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
& \quad U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
& \quad \left. \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right\}, \right. \\
& F_{\uparrow} \left\{ L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \right. \\
& \quad L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
& \quad U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
& \quad \left. \left. U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) / U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n) \right\} \right].
\end{aligned}$$

Обоснованием того, что данные арифметические операции между интервалами функционально-граничной арифметики сохраняют базовое свойство интервальных арифметик (3.1), является то, что упорядоченная пара функционалов границ  $(L(x_1, \dots, x_n), U(x_1, \dots, x_n))$  описывает параметрическое семейство классических интервалов, для которых эти операции уже определены в классической интервальной арифметике.

## 5.1. Построение функционалов границ $L$ и $U$

Ключевой проблемой функционально-граничной интервальной арифметики является введение правил построения функционалов границ  $L$  и  $U$ , которыми будут описываться множества совместных значений диаграмм зависимости.

В предположении того, что  $L = L(x_1, \dots, x_n)$  и  $U = U(x_1, \dots, x_n)$ , естественно будет использовать какой-либо функциональный базис, связанный с интервальными параметрами  $x_1 \in \mathbf{x}_1, \dots, x_n \in \mathbf{x}_n$ .

Каким требованиям должен удовлетворять выбираемый функциональный базис? Ранее в работе были озвучены некоторые проблемы, присущие классической интервальной и аффинной арифметикам. На основе этого были сформулированы следующие требования к базису функционально-граничной арифметики:

1. При вычислении должны учитываться квадратичные члены интервальных параметров.
2. Можно несложным образом ввести процедуры  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$ .
3. Процедуры  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$  должны иметь алгоритмическую сложность не более  $O(n)$ .

Пусть в рассмотрении имеется функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Для нахождения её интервальной оценки можно использовать различные базисы. При написании работы рассматривались следующие:

1.  $\{ 1, x_1, x_1^2, \dots, x_n, x_n^2 \}$ .

Данный базис оказался неподходящим, поскольку этим базисом сложно описывать множества совместных значений диаграмм связности, границы которых представляют собой, например, криволинейные ломаные.

В качестве примера можно рассмотреть нахождение интервальной оценки для функции (рис. 5.4):

$$f(x) = (x - a) \cdot (x - b), \tag{5.1}$$

$$x \in \left[ -1, 1 \right], a \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], b \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

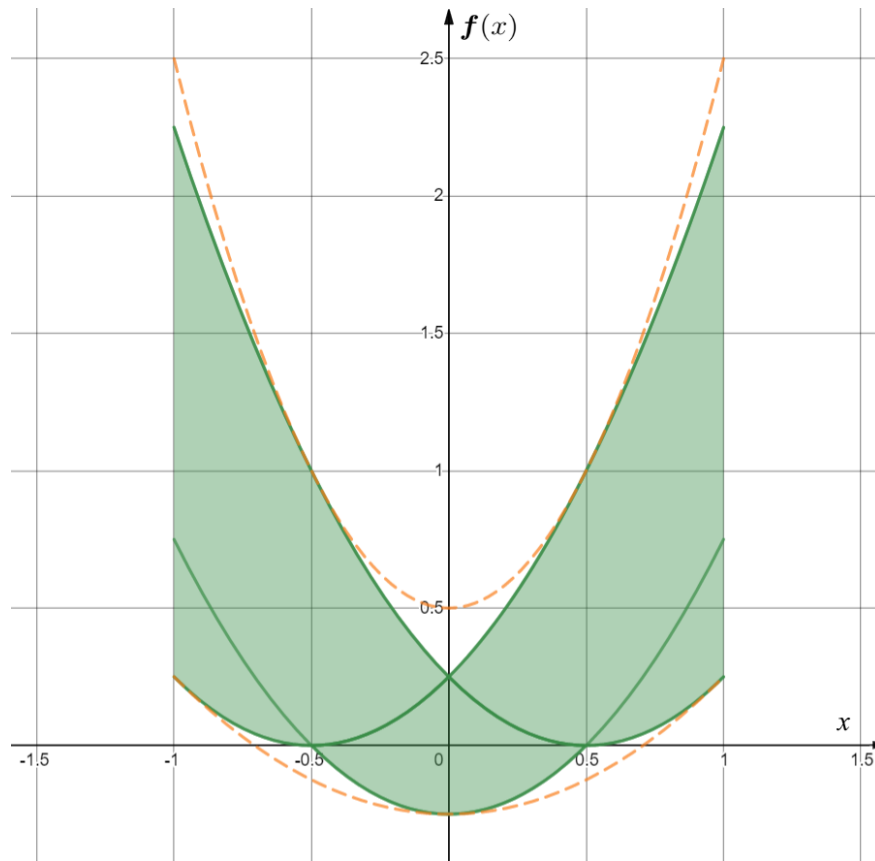


Рис. 5.4: Зелёная область — геометрическая интерпретация множества совместных значений  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x)$  задаётся в (5.1). Оранжевая пунктирная линия — пример приближения множества совместных значений в базисе  $\{1, x, x^2\}$  сверху и снизу.

Эффективному приближению множества совместных значений данной диаграммы зависимости непрерывными функциями мешает излом верхней границы семейства в точке  $(0, \frac{1}{4})$ . На момент написания работы остаётся открытым вопрос о существовании и целесообразности построения процедур  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$  в гладком базисе.

$$2. \quad \left\{ 1, x_1, \dots, x_n, x_1 \cdot x_1, x_1 \cdot x_2, \dots, x_1 \cdot x_n, \right. \\ \left. x_2 \cdot x_2, \dots, x_2 \cdot x_n, \dots, x_{n-1} \cdot x_n \right\}.$$

Данный базис рассматривался, поскольку он позволяет точно описывать перекрёстные члены  $x_i \cdot x_j$  при умножении. Но данный базис не подходит к рассмотрению в работе, поскольку:

(a) Размер базиса растёт как  $n^2$ , следовательно, асимптотика операции умножения составляет  $O(n^4)$ , где  $n$  — число интервальных параметров.

(b) Остаётся открытым вопрос построения процедур  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$ .

$$3. \left\{ 1, x_1, \dots, x_n, |x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, \dots, |x_1 - x_n|, \right. \\ \left. |x_2 - x_3|, \dots, |x_2 - x_n|, \dots, |x_{n-1} - x_n| \right\}.$$

Данный базис также позволяет оптимально описывать перекрёстные члены  $x_i \cdot x_j$  при умножении. Но при этом он имеет также имеет недостатки, подобно базису прошлого пункта. В теории он позволяет лучшим образом описывать криволинейные ломаные, но при этом остальные недостатки он не исправляет.

$$4. \left\{ 1, x_1, |x_1|, \dots, x_n, |x_n| \right\}.$$

Данный базис предназначен для эффективной работы с функциями одной переменной, он позволяет учитывать квадратичности в вычислениях.

Также в данном базисе идёт оперирование линейными функциями, что позволяет достаточно просто ввести процедуры  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$ , причём, алгоритмическая сложность этих процедур не будет превышать  $O(n)$ .

Размер базиса растёт как  $O(n)$ , что позволяет не допускать экспоненциального роста при увеличении размерности задачи. Трудоёмкость операции сложения и вычитаний —  $O(n)$ , умножения и деления —  $O(n^2)$ .

В текущей работе именно этот базис был выбран для использования в вычислениях, поскольку удовлетворил всем выдвигаемым требованиям.

Итак, был выбран базис для описания интервалов  $\mathbb{FR}$ :

$$\{ 1, x_1, |x_1|, \dots, x_n, |x_n| \}.$$

Далее будем называть его *центрально-ломаным*.

Теперь любой функционально-граничный интервал  $\mathbf{x} \in \mathbb{FR}$  будет представляться в виде:

$$\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \underline{a}_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_i \cdot |x_i| + \underline{c}, \\ &\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \cdot |x_i| + \bar{c} \end{aligned} \right].$$

Получим явные выражения для арифметических операций между интервалами в этом базисе.

### 5.1.1. Сложение и вычитание

Итак, пусть  $\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n), \mathbf{b}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{FR}$ . Аналогично классической интервальной арифметике введём операции сложения и вычитания (далее опустим аргументы при  $\mathbf{a}(x_1, \dots, x_n)$  и  $\mathbf{b}(x_1, \dots, x_n)$ ).

Сложение:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \underline{a}_{a,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{a,i} \cdot |x_i| + \underline{c}_a, \\ &\sum_{i=1}^n \bar{a}_{a,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \bar{b}_{a,i} \cdot |x_i| + \bar{c}_a \end{aligned} \right] + \\ &+ \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \underline{a}_{b,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{b,i} \cdot |x_i| + \underline{c}_b, \\ &\sum_{i=1}^n \bar{a}_{b,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \bar{b}_{b,i} \cdot |x_i| + \bar{c}_b \end{aligned} \right] = \\ &= \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (\underline{a}_{a,i} + \underline{a}_{b,i}) \cdot x_i + \sum_{i=1}^n (\underline{b}_{a,i} + \underline{b}_{b,i}) \cdot |x_i| + (\underline{c}_a + \underline{c}_b), \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{a}_{a,i} + \bar{a}_{b,i}) \cdot x_i + \sum_{i=1}^n (\bar{b}_{a,i} + \bar{b}_{b,i}) \cdot |x_i| + (\bar{c}_a + \bar{c}_b) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Вычитание:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} - \mathbf{b} &= \left[ \sum_{i=1}^n \underline{a}_{a,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{a,i} \cdot |x_i| + \underline{c}_a, \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \bar{a}_{a,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \bar{b}_{a,i} \cdot |x_i| + \bar{c}_a \right] - \\
&- \left[ \sum_{i=1}^n \underline{a}_{b,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{b,i} \cdot |x_i| + \underline{c}_b, \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \bar{a}_{b,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \bar{b}_{b,i} \cdot |x_i| + \bar{c}_b \right] = \\
&= \left[ \sum_{i=1}^n (\underline{a}_{a,i} - \underline{a}_{b,i}) \cdot x_i + \sum_{i=1}^n (\underline{b}_{a,i} - \underline{b}_{b,i}) \cdot |x_i| + (\underline{c}_a - \underline{c}_b), \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n (\bar{a}_{a,i} - \bar{a}_{b,i}) \cdot x_i + \sum_{i=1}^n (\bar{b}_{a,i} - \bar{b}_{b,i}) \cdot |x_i| + (\bar{c}_a - \bar{c}_b) \right].
\end{aligned}$$

### 5.1.2. Умножение. Начало построения

Введём операцию умножения между интервалами. По определению, данному ранее (далее опустим аргументы функционалов границ и интервалов):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left[ F_{\downarrow} \{ L_{\mathbf{a}} \cdot L_{\mathbf{b}}, L_{\mathbf{a}} \cdot U_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} \cdot L_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} \cdot U_{\mathbf{b}} \}, \right. \\
\left. F_{\uparrow} \{ L_{\mathbf{a}} \cdot L_{\mathbf{b}}, L_{\mathbf{a}} \cdot U_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} \cdot L_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} \cdot U_{\mathbf{b}} \} \right].$$

Перепишем результат умножения в центрально-ломаном базисе (далее опустим аргументы функционалов границ):

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{a}} \cdot L_{\mathbf{b}} &= \left( \sum_{i=1}^n \underline{a}_{a,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{a,i} \cdot |x_i| + \underline{c}_a \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \sum_{i=1}^n \underline{a}_{b,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{b,i} \cdot |x_i| + \underline{c}_b \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot x_i + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{b}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot |x_i| + \\
&\quad + (\underline{c}_a \cdot \underline{c}_b) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot x_i \cdot x_j + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j}) \cdot |x_i| \cdot |x_j| + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j} + \underline{b}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot |x_i| \cdot x_j = \\
&= \sum_{i=1}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot x_i + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{b}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot |x_i| +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot x_i \cdot x_j + \\
& + \sum_{i=1}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,i}) \cdot x_i^2 + (\underline{c}_a \cdot \underline{c}_b) + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j}) \cdot |x_i| \cdot |x_j| + \\
& + \sum_{i=1}^n (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,i}) \cdot |x_i|^2 + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j} + \underline{b}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot |x_i| \cdot x_j + \\
& + \sum_{i=1}^n (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,i} + \underline{b}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,i}) \cdot |x_i| \cdot x_i = \\
= & \sum_{i=1}^n \left( (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot x_i + \right. \\
& + (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{b}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot |x_i| + \\
& \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,i} + \underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,i}) \cdot x_i^2 \right) + \\
+ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j}) \cdot |x_i| \cdot |x_j| + \right. \\
& + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot x_i \cdot x_j + \\
& \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j} + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{b}_{a,j}) \cdot |x_i| \cdot x_j \right).
\end{aligned}$$

Проблемой является создание процедур  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$ . Так как выбранный базис содержит модули интервальных параметров, будем рассматривать для каждого интервального параметра случай  $x_i \leq 0$  и  $x_i \geq 0$ .

Далее будем использовать чебышёвское приближение для каждого интервального параметра  $x_i$  на интервалах  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ , а затем «склеивать» результаты приближения до представимого в центрально-ломаном базисе.

### 5.1.3. Схема приближения выпуклых или вогнутых функций с помощью чебышёвского альтернанса

Пусть в рассмотрении имеется некоторая выпуклая (вогнутая) функция  $f(x)$  на интервале  $[x_0, x_2]$ . Тогда согласно книге [6], пользуясь аппаратом чебышёвского альтернанса, можно найти линейную функцию

$$g(x) = g_1 \cdot x + g_0,$$

$$g_0, g_1 \in \mathbb{R},$$

которая приближает функцию  $f(x)$  наилучшим образом в чебышёвской метрике

$$\|f(x) - g(x)\|_\infty = \max_{x \in [x_0, x_2]} \{ |f(x) - g(x)| \} \rightarrow \min.$$

Функцию  $g(x)$  можно найти из решения системы

$$\begin{aligned} (1) & \left| \begin{array}{l} f(x_0) - g_1 \cdot x_0 - g_0 = q, \\ f(x_1) - g_1 \cdot x_1 - g_0 = -q, \\ f(x_2) - g_1 \cdot x_2 - g_0 = q, \end{array} \right. \\ & x_1 \in [x_0, x_2]. \end{aligned}$$

Разрешим данную систему.

1. Вычтем из уравнения (3) уравнение (1). Тем самым найдём  $g_1$ :

$$g_1 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

2. Продифференцируем (2) уравнение системы по  $x$  в точке  $x_1$ , тогда сможем найти  $x_1$ :

$$\begin{aligned} f'_x(x_1) - g_1 &= 0 \\ x_1 &= (f'_x)^{-1}(g_1) \end{aligned}$$

3. Для нахождения  $g_0$  можно сложить уравнения (1) и (2):

$$\boxed{g_0 = \frac{1}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1) - g_1 \cdot (x_0 + x_1))}$$

Или сложить уравнения (2) и (3):

$$\boxed{g_0 = \frac{1}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2) - g_1 \cdot (x_1 + x_2))}$$

4. Значение  $q$  можно найти тремя способами, подставив найденные величины в одно из исходных уравнений системы:

$$(1) : \boxed{q = f(x_0) - g_1 \cdot x_0 - g_0}$$

$$(2) : \boxed{q = -f(x_1) + g_1 \cdot x_1 + g_0}$$

$$(3) : \boxed{q = f(x_2) - g_1 \cdot x_2 - g_0}$$

Итого, были найдены  $g_0, g_1, q \in \mathbb{R}$  такие, что:

$$f(x) \subseteq \mathbf{f}(x) = [g_1 \cdot x + g_0 - |q|, g_1 \cdot x + g_0 + |q|].$$

Таким образом, теперь известно, как можно найти интервальные оценки для любой выпуклой или вогнутой функции  $f(x)$  на интервалах  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ . Для представления объединения этих оценок в центрально-ломаном базисе обсудим вопрос их «склейки».

#### 5.1.4. «Склейка» левой и правой интервальных оценок

Пусть на интервале  $[-1, 0]$  получена интервальная оценка в линейном базисе:

$$\mathbf{f}_{left}(x) = [\underline{k}_{left} \cdot x + \underline{b}_{left}, \bar{k}_{left} \cdot x + \bar{b}_{left}],$$

а на интервале  $[0, 1]$ :

$$\mathbf{f}_{right}(x) = [\underline{k}_{right} \cdot x + \underline{b}_{right}, \bar{k}_{right} \cdot x + \bar{b}_{right}].$$

Необходимо получить интервальную оценку в центрально-ломаном базисе:

$$\mathbf{f}(x) = [\underline{a} \cdot x + \underline{b} \cdot |x| + \underline{c}, \bar{a} \cdot x + \bar{b} \cdot |x| + \bar{c}].$$

Рассмотрим построение функционала границы  $U_{\mathbf{f}}(x)$  для

$$U_{\mathbf{f}_{left}}(x) = \bar{k}_{left} \cdot x + \bar{b}_{left}, \quad U_{\mathbf{f}_{right}}(x) = \bar{k}_{right} \cdot x + \bar{b}_{right}.$$

В точке  $x = -1$

$$U_{\mathbf{f}}(-1) = U_{\mathbf{f}_{left}}(-1) = -\bar{k}_{left} + \bar{b}_{left},$$

в точке  $x = 1$

$$U_{\mathbf{f}}(1) = U_{\mathbf{f}_{right}}(1) = \bar{k}_{right} + \bar{b}_{right}.$$

Рассмотрим точку  $x = 0$ . Так как мы строим функционал верхней границы, то необходимо

$$U_{\mathbf{f}}(x) \geq U_{\mathbf{f}_{left}}(x), \quad x \in [-1, 0],$$

$$U_{\mathbf{f}}(x) \geq U_{\mathbf{f}_{right}}(x), \quad x \in [0, 1].$$

Тогда для центральной точки необходимо взять максимум (рис. 5.5):

$$U_{\mathbf{f}}(0) = \max \left\{ U_{\mathbf{f}_{left}}(0), U_{\mathbf{f}_{right}}(0) \right\} = \max \{ \bar{b}_{left}, \bar{b}_{right} \}.$$

Итак, получаем точки

$$(-1, -\bar{k}_{left} + \bar{b}_{left}), \quad (0, \max \{ \bar{b}_{left}, \bar{b}_{right} \}), \quad (1, \bar{k}_{right} + \bar{b}_{right}).$$

Через эти точки можно построить ломаную, представимую в центрально-ломаном базисе. Сначала заметим, что

$$\bar{c} = \max \{ \bar{b}_{left}, \bar{b}_{right} \}.$$

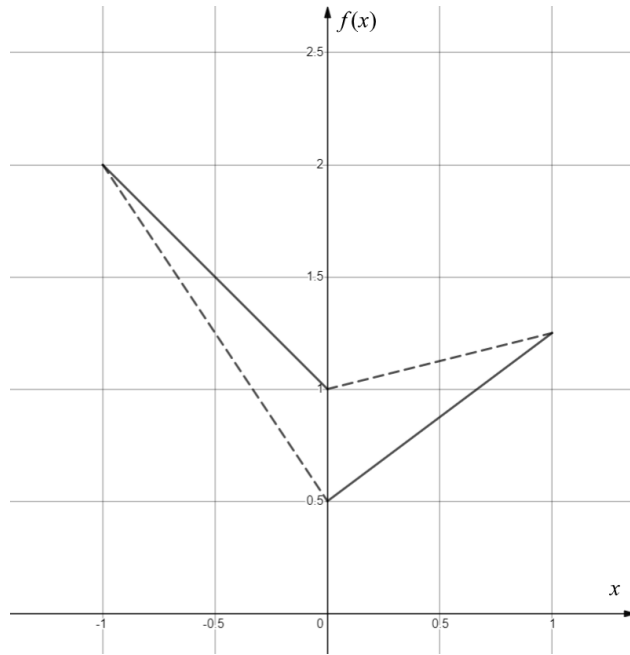


Рис. 5.5: Сплошными линиями показаны исходные отрезки ломаной на левом и правом интервале. Верхняя пунктирная линия показывает построение для  $U_f(x)$  в центрально-ломаном базисе, нижняя — для  $L_f(x)$ .

Введём дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{k}_{left} &= \frac{1}{0-(-1)} \cdot \left( \max\{\bar{b}_{left}, \bar{b}_{right}\} - (-\bar{k}_{left} + \bar{b}_{left}) \right) = \\ &= \max\{\bar{b}_{left}, \bar{b}_{right}\} - (-\bar{k}_{left} + \bar{b}_{left}), \\ \bar{k}_{right} &= \frac{1}{1-0} \cdot \left( (\bar{k}_{right} + \bar{b}) - \max\{\bar{b}_{left}, \bar{b}_{right}\} \right) = \\ &= (\bar{k}_{right} + \bar{b}) - \max\{\bar{b}_{left}, \bar{b}_{right}\}.\end{aligned}$$

$\bar{k}_{left}$  — наклон отрезка, соединяющего точки  $(-1, U_f(-1))$  и  $(0, U_f(0))$ , а

$\bar{k}_{right}$  — наклон отрезка, соединяющего точки  $(0, U_f(0))$  и  $(1, U_f(1))$ .

С учётом введённых обозначений получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = -1 : & -\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = -\bar{k}_{left} + \bar{b}_{left}, \\ x = 1 : & \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{k}_{right} + \bar{b}_{right}. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{k}_{right} + \bar{k}_{left} + \bar{b}_{right} - \bar{b}_{left})}$$

$$\boxed{\bar{b} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{k}_{right} - \bar{k}_{left} + \bar{b}_{right} + \bar{b}_{left} - 2 \cdot \bar{c})}$$

Аналогично рассмотрим построение  $L_f(x)$  для:

$$L_{f_{left}}(x) = \underline{k}_{left} \cdot x + \underline{b}_{left}, \quad L_{f_{right}}(x) = \underline{k}_{right} \cdot x + \underline{b}_{right}.$$

Для этого случая:

$$\begin{aligned} L_f(-1) &= L_{f_{left}}(-1) = -\underline{k}_{left} + \underline{b}_{left}, \\ L_f(1) &= L_{f_{right}}(1) = \underline{k}_{right} + \underline{b}_{right}, \\ L_f(0) &= \min \left\{ L_{f_{left}}(0), L_{f_{right}}(0) \right\} = \min \left\{ \underline{b}_{left}, \underline{b}_{right} \right\}. \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{k}_{left} &= \frac{1}{0-(-1)} \cdot \left( \min \left\{ \bar{b}_{left}, \underline{b}_{right} \right\} - \left( -\underline{k}_{left} + \underline{b}_{left} \right) \right) = \\ &= \min \left\{ \underline{b}_{left}, \underline{b}_{right} \right\} - \left( -\underline{k}_{left} + \underline{b}_{left} \right), \\ \underline{k}_{right} &= \frac{1}{1-0} \cdot \left( \left( \underline{k}_{right} + \underline{b} \right) - \min \left\{ \underline{b}_{left}, \underline{b}_{right} \right\} \right) = \\ &= \left( \underline{k}_{right} + \underline{b} \right) - \min \left\{ \underline{b}_{left}, \underline{b}_{right} \right\}. \end{aligned}$$

Система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x = -1 : & -\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = -\underline{k}_{left} + \underline{b}_{left}, \\ x = 1 : & \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{k}_{right} + \underline{b}_{right}. \end{cases}$$

Решением системы является:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{k}_{right} + \underline{k}_{left} + \underline{b}_{right} - \underline{b}_{left}) \\ \underline{b} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{k}_{right} - \underline{k}_{left} + \underline{b}_{right} + \underline{b}_{left} - 2 \cdot \underline{c}) \end{aligned}$$

Итак, если каким-либо образом были получены интервальные оценки на интервалах  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{left}(x) &= \left[ \underline{k}_{left} \cdot x + \underline{b}_{left}, \bar{k}_{left} \cdot x + \bar{b}_{left} \right], \\ \mathbf{f}_{right}(x) &= \left[ \underline{k}_{right} \cdot x + \underline{b}_{right}, \bar{k}_{right} \cdot x + \bar{b} \right], \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{left} \cup \mathbf{f}_{right} \subseteq & \left[ \frac{1}{2} \cdot (\underline{k}_{right} + \underline{k}_{left} + \underline{b}_{right} - \underline{b}_{left}) \cdot x + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot (\underline{k}_{right} - \underline{k}_{left} + \underline{b}_{right} + \underline{b}_{left} - \\
& \quad \left. - 2 \cdot \min\{\underline{b}_{left}, \underline{b}_{right}\} \right) \cdot |x| + \\
& \quad + \min\{\underline{b}_{left}, \underline{b}_{right}\}, \\
& \frac{1}{2} \cdot (\bar{k}_{right} + \bar{k}_{left} + \bar{b}_{right} - \bar{b}_{left}) \cdot x + \\
& + \frac{1}{2} \cdot (\bar{k}_{right} - \bar{k}_{left} + \bar{b}_{right} + \bar{b}_{left} - \\
& \quad \left. - 2 \cdot \max\{\bar{b}_{left}, \bar{b}_{right}\} \right) \cdot |x| + \\
& \quad \left. + \max\{\bar{b}_{left}, \bar{b}_{right}\} \right].
\end{aligned}$$

Воспользуемся введёнными инструментами для функций

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2, \\
f_2(x) &= x \cdot |x|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $f_1(x)$ . На интервале  $[-1, 0]$  получим интервальную оценку

$$\mathbf{f}_{left}(x) = \left[ -x - \frac{1}{4}, -x \right],$$

на интервале  $[0, 1]$

$$\mathbf{f}_{right}(x) = \left[ x, x + \frac{1}{4} \right].$$

После «склейки» результатов получим

$$\mathbf{f}(x) = \left[ |x| - \frac{1}{4}, |x| \right].$$

Рассмотрим теперь функцию  $f_2(x)$ . Она является нечётной, значит, согласно [6], будем приближать её функцией  $g(x)$ , где  $g_0 = 0$ .

На интервале  $[-1, 0]$  получим интервальную оценку

$$\mathbf{f}_{left}(x) = \left[ 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x - (3 - 2 \cdot \sqrt{2}), 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x + (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \right],$$

на интервале  $[0, 1]$

$$f_{right}(x) = \left[ 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x - (3 - 2 \cdot \sqrt{2}), 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x + (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \right].$$

После «склейки» результатов получим

$$f(x) = \left[ 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x - (3 - 2 \cdot \sqrt{2}), 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x + (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \right].$$

### 5.1.5. Другой взгляд на приближение функций от нескольких переменных

Ранее было показано, как с помощью инструмента чебышёвского альтернанса и «склейки», мы можем построить граничные функционалы  $L(x_1, \dots, x_n)$  и  $U(x_1, \dots, x_n)$ , которые будут огибать совместное множество значений диаграммы зависимости снизу и сверху соответственно.

Рассмотрим построение функционалов границ  $L(x_1, \dots, x_n)$  и  $U(x_1, \dots, x_n)$  для интервальных оценок функций нескольких переменных.

Автором работы было выявлено два основных подхода:

#### 1. Аналитический подход.

Данный подход подразумевает использование аналитических выкладок для получения явного вида  $L(x_1, \dots, x_n)$  и  $U(x_1, \dots, x_n)$ , которые представимы в выбранном функциональном базисе.

#### 2. Подход редукции размерности.

Данный подход подразумевает сведение задачи нахождения интервальной оценки функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  к задаче нахождения интервальной оценки функции одной переменной  $x_i$ .



Этого можно достигнуть несколькими способами. Например, можно использовать классическую интервальную арифметику, то есть представить  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде

$$\begin{aligned}
 f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot f(x_1, \dots, x_n) \subseteq \\
 &\subseteq \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \\
 &\subseteq \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \\
 &\subseteq \sum_{i=1}^n \left[ L_{f_i}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \right. \\
 &\quad \left. U_{f_i}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \right] \subseteq \\
 &\subseteq \left[ \sum_{i=1}^n L_{f_i}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=1}^n U_{f_i}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \right],
 \end{aligned}$$

где  $f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \cdot f(x_1, \dots, x_n)$ .

Также возможен другой случай. Пусть  $A$  — множество аргументов функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_k \in A_i), \text{ где}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$\bigcup A_i = A, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда интервальную оценку  $f(x_1, \dots, x_n)$  можно найти как

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n f_i \left( \{ x_k \in A_i \mid k = 1, \dots, \overline{\overline{A_i}} \} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\overline{\overline{A_i}}} f_i \left( \{ x_k \in A_i \mid k = 1, \dots, \overline{\overline{A_i}} \} \right) / \overline{\overline{A_i}} \subseteq \\
&\subseteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\overline{\overline{A_i}}} \mathbf{f}_i \left( x_j \in A_i, \right. \\
&\quad \left. \{ \mathbf{x}_k \mid x_k \in A_i, k = 1, \dots, \overline{\overline{A_i}}, k \neq j \} \right) / \overline{\overline{A_i}} = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\overline{\overline{A_i}}} \mathbf{f}_{i,j} (x_j \in A_i) \subseteq \\
&\subseteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\overline{\overline{A_i}}} \left[ L_{\mathbf{f}_{i,j}} (x_j \in A_i), U_{\mathbf{f}_{i,j}} (x_j \in A_i) \right] \subseteq \\
&\subseteq \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\overline{\overline{A_i}}} L_{\mathbf{f}_{i,j}} (x_j \in A_i), \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\overline{\overline{A_i}}} U_{\mathbf{f}_{i,j}} (x_j \in A_i) \right],
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{f}_{i,j} (x_j \in A_i) = \mathbf{f}_i \left( x_j \in A_i, \right.$   
 $\left. \{ \mathbf{x}_k \mid x_k \in A_i, k = 1, \dots, \overline{\overline{A_i}}, k \neq j \} \right) / \overline{\overline{A_i}}.$

Продemonстрируем данные подходы для получения интервальных оценок следующих членов, которые встречаются в итоговом выражении для операции умножения между функционалами границ

$$x_i \cdot x_j, \quad |x_i| \cdot x_j, \quad i \neq j.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x_i, x_j) = x_i \cdot x_j.$$

Из неравенств

$$(x_i - x_j)^2 \geq 0, \quad (x_i + x_j)^2 \geq 0,$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \cdot (x_i^2 + x_j^2) &\leq x_i \cdot x_j, \\
\frac{1}{2} \cdot (x_i^2 + x_j^2) &\geq x_i \cdot x_j.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_i, x_j) &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot x_i^2 - \frac{1}{2} \cdot x_j^2, \frac{1}{2} \cdot x_i^2 + \frac{1}{2} \cdot x_j^2 \right] \subseteq \\ &\subseteq \left[ -\frac{1}{2} \cdot |x_i| - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right]. \end{aligned}$$

Теперь применим подход *редукции размерности*. Перепишем функцию  $f(x_i, \dots, x_j)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_i, x_j) &= \frac{1}{2} \cdot x_i \cdot x_j + \frac{1}{2} \cdot x_i \cdot x_j = \\ &= \frac{1}{2} \cdot f_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot f_j(x_i, x_j), \end{aligned}$$

где  $f_i(x_i, x_j) = x_i \cdot x_j$ ,  $f_j(x_i, x_j) = x_i \cdot x_j$ .

Найдём интервальное расширение функции  $f_i(x_i, x_j)$  считая, что данная функция является зависимой только от  $x_i$ :

$$\mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) = x_i \cdot [-1, 1].$$

Аналогичные действия проделаем для функции  $f_j(x_i, x_j)$ . Найдём её интервальное расширение относительно переменной  $x_j$ :

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j) = [-1, 1] \cdot x_j.$$

Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x_i, \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j))$  (рис. 5.6) можно точно описать в центрально-ломаном базисе

$$\mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) = [-|x_i|, |x_i|].$$

Точно также при рассмотрении геометрической интерпретации интервального расширения  $f_j(\mathbf{x}_i, x_j)$  получаем

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j) = [-|x_j|, |x_j|].$$

Возвращаясь к первоначальному представлению функции, имеем:

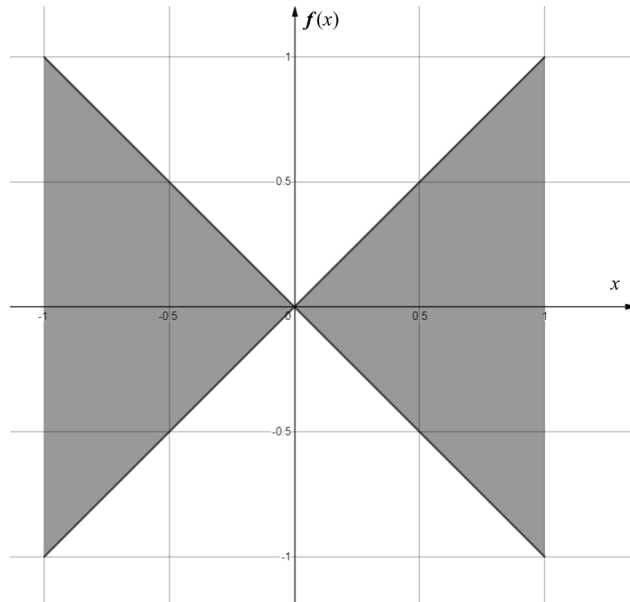


Рис. 5.6: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [-1, 1] \cdot x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

$$\begin{aligned}
 f(x_i, x_j) &= \frac{1}{2} \cdot f_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot f_j(x_i, x_j) \subseteq \\
 &\subseteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{f}_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{f}_j(x_i, x_j) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [-|x_i|, |x_i|] + \frac{1}{2} \cdot [-|x_j|, |x_j|] = \\
 &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot |x_i| - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right].
 \end{aligned}$$

Теперь перейдём к рассмотрению функции

$$f(x_i, x_j) = |x_i| \cdot x_j.$$

Применим *аналитический подход*. Используя неравенства

$$(|x_i| - x_j)^2 \geq 0, \quad (|x_i| + x_j)^2 \geq 0,$$

получим, что

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \cdot (|x_i|^2 + x_j^2) &= -\frac{1}{2} \cdot (x_i^2 + x_j^2) \leq |x_i| \cdot x_j, \\
 \frac{1}{2} \cdot (|x_i|^2 + x_j^2) &= \frac{1}{2} \cdot (x_i^2 + x_j^2) \geq |x_i| \cdot x_j.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(x_i, x_j) &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot x_i^2 - \frac{1}{2} \cdot x_j^2, \frac{1}{2} \cdot x_i^2 + \frac{1}{2} \cdot x_j^2 \right] \subseteq \\
 &\subseteq \left[ -\frac{1}{2} \cdot |x_i| - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right].
 \end{aligned}$$

Теперь применим *подход редукации размерности*. Перепишем функцию  $f(x_i, x_j)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x_i, x_j) &= |x_i| \cdot x_j = \frac{1}{2} \cdot |x_i| \cdot x_j + \frac{1}{2} \cdot |x_i| \cdot x_j = \\ &= \frac{1}{2} \cdot f_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot f_j(x_i, x_j), \\ \text{где } f_i(x_i, x_j) &= |x_i| \cdot x_j, \quad f_j(x_i, x_j) = |x_i| \cdot x_j. \end{aligned}$$

Найдём интервальное расширение функции  $f_i(x_i, x_j)$ , считая, что она зависит только от  $x_i$ :

$$\mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) = |x_i| \cdot [-1, 1]$$

Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x_i, \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j))$  (рис. 5.6) можно точно описать в центрально-ломаном базисе как

$$\mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) = [-|x_i|, |x_i|].$$

Теперь найдём интервальное расширение  $f_j(x_i, x_j)$  относительно  $x_j$ :

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j) = [0, 1] \cdot x_j.$$

Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x_j, \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j))$  (рис. 5.7) можно точно описать в центрально-ломаном базисе как

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j) = \left[ \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot |x|, \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot |x| \right].$$

Возвращаясь к первоначальному представлению функции, получим:

$$\begin{aligned} f(x_i, x_j) &= \frac{1}{2} \cdot f_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot f_j(x_i, x_j) \subseteq \\ &\subseteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{f}_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{f}_j(x_i, x_j) \subseteq \\ &\subseteq \frac{1}{2} \cdot \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j) \subseteq \\ &\subseteq \frac{1}{2} \cdot [-|x_i|, |x_i|] + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot x_j - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot x_j + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right] = \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot x_i + \frac{1}{4} \cdot x_j - \frac{1}{4} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot x_i + \frac{1}{4} \cdot x_j + \frac{1}{4} \cdot |x_j| \right] \end{aligned}$$

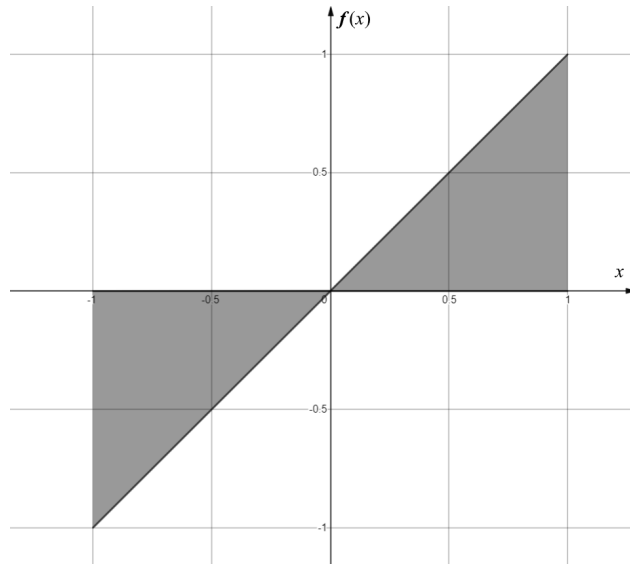


Рис. 5.7: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [0, 1] \cdot x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Сравнивая результаты этих двух подходов для данной функции получаем, что подход редукции размерности оказался лучше, поскольку напрямую задействует вид базиса для описания множества совместных значений диаграммы зависимости.

Наконец, рассмотрим функцию  $f(x_i, x_j) = |x_i| \cdot |x_j|$ . Сначала применим *аналитический подход*. Используя неравенства

$$(|x_i| - |x_j|)^2 \geq 0, \quad (|x_i| + |x_j|)^2 \geq 0,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot (|x_i|^2 + |x_j|^2) &= -\frac{1}{2} \cdot (x_i^2 + x_j^2) \leq |x_i| \cdot |x_j|, \\ \frac{1}{2} \cdot (|x_i|^2 + |x_j|^2) &= \frac{1}{2} \cdot (x_i^2 + x_j^2) \geq |x_i| \cdot |x_j|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_i, x_j) &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot x_i^2 - \frac{1}{2} \cdot x_j^2, \frac{1}{2} \cdot x_i^2 + \frac{1}{2} \cdot x_j^2 \right] \subseteq \\ &\subseteq \left[ -\frac{1}{2} \cdot |x_i| - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right]. \end{aligned}$$

Теперь будем использовать *подход редукции размерности*. Представим функцию  $f(x_i, x_j)$  в виде

$$\begin{aligned}
f(x_i, x_j) &= \frac{1}{2} \cdot |x_i| \cdot |x_j| + \frac{1}{2} \cdot |x_i| \cdot |x_j| = \\
&= \frac{1}{2} \cdot f_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot f_j(x_i, x_j), \\
\text{где } f_i(x_i, x_j) &= |x_i| \cdot |x_j|, \quad f_j(x_i, x_j) = |x_i| \cdot |x_j|.
\end{aligned}$$

Найдём интервальное расширение функции  $f_i(x_i, x_j)$ , считая что она зависит только от  $x_i$ :

$$\mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) = [0, 1] \cdot x_i.$$

Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x_i, \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j))$  (рис. 5.8) можно точно описать в центрально-ломаном базисе, как

$$\mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{x}_j) = [0, |x_i|].$$

Аналогично найдём интервальное расширение функции  $f_j(x_i, x_j)$  относительно  $x_j$ :

$$f_j(\mathbf{x}_i, x_j) = [0, 1] \cdot x_j.$$

Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x_j, \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j))$  (рис. 5.8) можно точно описать в центрально-ломаном базисе как

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i, x_j) = [0, |x_j|].$$

Возвращаясь к первоначальному представлению функции, получим

$$\begin{aligned}
f(x_i, x_j) &= \frac{1}{2} \cdot f_i(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \cdot f_j(x_i, x_j) \subseteq \\
&\subseteq \frac{1}{2} \cdot [0, |x_i|] + \frac{1}{2} \cdot [0, |x_j|] = [0, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j|].
\end{aligned}$$

Сравнивая результаты двух подходов, снова видим преимущество подхода редукции размерности перед аналитическим.

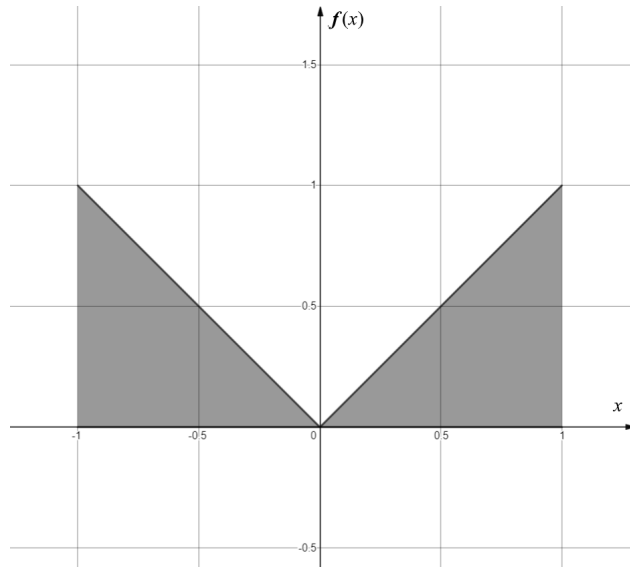


Рис. 5.8: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [0, 1] \cdot |x|, [-1, 1]$ .

### 5.1.6. Умножение. Продолжение построения

В предыдущих пунктах были найдены следующие интервальные оценки:

$$\begin{aligned}
 x_i^2 &\subseteq \left[ |x_i| - \frac{1}{4}, |x_i| \right], \\
 x_i \cdot |x_i| &\subseteq \left[ 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x_i - (3 - 2 \cdot \sqrt{2}), \right. \\
 &\quad \left. 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x_i + (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \right], \\
 x_i \cdot x_j &\subseteq \left[ -\frac{1}{2} \cdot |x_i| - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right], \\
 |x_i| \cdot |x_j| &\subseteq \left[ 0, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| \right], \\
 x_i \cdot |x_j| &\subseteq \left[ -\frac{1}{2} \cdot x_i + \frac{1}{4} \cdot x_j + \frac{1}{4} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot x_i + \frac{1}{4} \cdot x_j + \frac{1}{4} \cdot |x_j| \right], \\
 &\quad i \neq j.
 \end{aligned}$$

Вернёмся к выражению операции умножения в центрально-ломаном базисе и используем полученные оценки (далее опустим аргументы функционалов границ):



$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{a}} \cdot L_{\mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^n \left( (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot x_i + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{b}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot |x_i| + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,i} + \underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,i}) \cdot x_i^2 \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j}) \cdot |x_i| \cdot |x_j| + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot x_i \cdot x_j + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j} + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{b}_{a,j}) \cdot |x_i| \cdot x_j \right) \subseteq \\
&\subseteq \sum_{i=1}^n \left( (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{c}_b + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot [x_i, x_i] + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{b}_{a,i} \underline{c}_b + \underline{b}_{b,i} \cdot \underline{c}_a) \cdot [|x_i|, |x_i|] + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,i} + \underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,i}) \cdot [ |x_i| - \frac{1}{4}, |x_i| ] \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( (\underline{b}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j}) \cdot [0, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j|] + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{a}_{b,j}) \cdot [ -\frac{1}{2} \cdot |x_i| - \frac{1}{2} \cdot |x_j|, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j| ] + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{a}_{a,i} \cdot \underline{b}_{b,j} + \underline{a}_{b,i} \cdot \underline{b}_{a,j}) \cdot [0, \frac{1}{2} \cdot |x_i| + \frac{1}{2} \cdot |x_j|] \right).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом вводятся интервальные оценки для

$$\begin{aligned}
&L_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
&U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot L_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n), \\
&U_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \cdot U_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Таким образом, была построена интервальная оценка для операции умножения в центрально-ломаном базисе.

### 5.1.7. Построение процедур $F_{\downarrow}$ и $F_{\uparrow}$

Отметим, что в силу свойств функционалов границ  $L(x_1, \dots, x_n)$  и  $U(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\begin{aligned}
&L(x_1, \dots, x_n) \leq U(x_1, \dots, x_n) \\
&x_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

верхняя граница будет получаться объединением верхних границ аргументов процедуры  $F_{\uparrow}$ , а нижняя граница — нижних границ аргументов процедуры  $F_{\downarrow}$ .

Рассмотрим две какие-нибудь границы интервалов  $\mathbb{F}\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n a_{1,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n b_{1,i} \cdot |x_i| + c_1, \\ B_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n a_{2,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n b_{2,i} \cdot |x_i| + c_2. \end{aligned}$$

Для этих границ введём процедуру  $F_{\uparrow}\{B_1, B_2\}$  (далее опустим аргументы при  $B_1(x_1, \dots, x_n)$  и  $B_2(x_1, \dots, x_n)$ ):

$$\begin{aligned} F_{\uparrow}\{B_1, B_2\} &= F_{\uparrow}\left\{ \sum_{i=1}^n a_{1,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n b_{1,i} \cdot |x_i| + c_1, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n a_{2,i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n b_{2,i} \cdot |x_i| + c_2 \right\} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n F_{\uparrow}\left\{ a_{1,i} \cdot x_i + b_{1,i} \cdot |x_i|, a_{2,i} \cdot x_i + b_{2,i} \cdot |x_i| \right\} + \\ &\quad + F_{\uparrow}\{c_1, c_2\} = \\ &= \sum_{i=1}^n F_{\uparrow}\left\{ a_{1,i} \cdot x_i + b_{1,i} \cdot |x_i|, a_{2,i} \cdot x_i + b_{2,i} \cdot |x_i| \right\} + \\ &\quad + \max\{c_1, c_2\}. \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно получить для процедуры  $F_{\downarrow}\{B_1, B_2\}$ :

$$\begin{aligned} F_{\downarrow}\{B_1, B_2\} &= \sum_{i=1}^n F_{\downarrow}\left\{ a_{1,i} \cdot x_i + b_{1,i} \cdot |x_i|, a_{2,i} \cdot x_i + b_{2,i} \cdot |x_i| \right\} + \\ &\quad + \min\{c_1, c_2\} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим результат выражения:

$$F_{\uparrow}\{a_1 \cdot |x| + b_1 \cdot x, a_2 \cdot |x| + b_2 \cdot |x|\}.$$

Поскольку выбранный базис содержит вхождения линейной функции и функции модуля, то для построения достаточно рассмотреть три точки ломаной

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

По этим трём точкам можно построить верхнюю границу интервала  $\mathbb{FR}$ .  
Аналогично можно построить

$$F_{\downarrow}\{ a_1 \cdot |x| + b_1 \cdot x, a_2 \cdot |x| + b_2 \cdot |x| \}.$$

### 5.1.8. Деление

По определению, данному ранее (далее опустим аргументы при функционалах границ и интервалах):

$$\mathbf{a} / \mathbf{b} = \left[ F_{\downarrow}\{ L_{\mathbf{a}} / L_{\mathbf{b}}, L_{\mathbf{a}} / U_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}}, L_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} / U_{\mathbf{b}} \}, \right. \\ \left. F_{\uparrow}\{ L_{\mathbf{a}} / L_{\mathbf{b}}, L_{\mathbf{a}} / U_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} / L_{\mathbf{b}}, U_{\mathbf{a}} / U_{\mathbf{b}} \} \right].$$

Введём процедуры  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$  для операции деления. Пусть в рассмотрении имеется функционал  $H(x_1, \dots, x_n)$ , который является отношением двух функционалов

$$H(x_1, \dots, x_n) = H_n(x_1, \dots, x_n) / H_d(x_1, \dots, x_n), \\ 0 \notin \mathbf{H}_d(x_1, \dots, x_n).$$

Применим подход *редукции размерности*. Перепишем функционал  $H(x_1, \dots, x_n)$  в следующем виде:

$$H(x_1, \dots, x_n) = H_n(x_1, \dots, x_n) / H_d(x_1, \dots, x_n) = \\ = \sum_{i=1}^n H_i(x_i) / H_d(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \\ \subseteq \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(x_i) / \mathbf{H}_d(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, x_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \\ \subseteq \left[ \sum_{i=1}^n F_{\downarrow}\{ L_{\mathbf{H}_i}(x_i) / L_{\mathbf{H}_d}(x_i), L_{\mathbf{H}_i}(x_i) / U_{\mathbf{H}_d}(x_i), \right. \\ \left. U_{\mathbf{H}_i}(x_i) / L_{\mathbf{H}_d}(x_i), U_{\mathbf{H}_i}(x_i) / U_{\mathbf{H}_d}(x_i) \}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n F_{\uparrow}\{ L_{\mathbf{H}_i}(x_i) / L_{\mathbf{H}_d}(x_i), L_{\mathbf{H}_i}(x_i) / U_{\mathbf{H}_d}(x_i), \right. \\ \left. U_{\mathbf{H}_i}(x_i) / L_{\mathbf{H}_d}(x_i), U_{\mathbf{H}_i}(x_i) / U_{\mathbf{H}_d}(x_i) \} \right],$$

где  $H_i(x_i) = a_i \cdot x_i + b_i \cdot |x_i| + \frac{\varepsilon}{n}$ .

Теперь для каждого  $H_i$  найдём интервальную оценку на интервалах  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  с помощью аппарата чебышёвского альтернанса. Это возможно, так как на каждом из этих интервалов функция представляет собой выпуклую или вогнутую функцию, поскольку:

$$\left(\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}\right)''_{xx} = \frac{2 \cdot c \cdot (b \cdot c - a \cdot d)}{(c \cdot x + d)^3}, \text{ и если } 0 \notin c \cdot x + d, \text{ то}$$

$$\left(\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}\right)''_{xx} \geq 0 \text{ или } \left(\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}\right)''_{xx} \leq 0.$$

По условию:

$$0 \notin \mathbf{H}_d(x_1, \dots, x_n),$$

это значит, каждый аргумент процедур  $F_\downarrow$  и  $F_\uparrow$  будет вогнутой или выпуклой функцией на указанных интервалах.

После нахождения интервальных оценок на интервалах  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  сделаем процедуру «склейки», чтобы получить обрамляющий интервал, представимый в центрально-ломаном базисе. Так можно найти интервальную оценку для результата операции деления между интервалами  $\mathbb{FR}$ .

## 6. Численные эксперименты

### 6.1. Характеристики уклонения

#### для сравнения интервальных арифметик

Можно рассматривать разные числовые характеристики, которые позволят сравнивать интервальные оценки, получаемые в различных интервальных арифметиках. В данной работе с этой целью будут рассматриваться две основные величины:

1. Чебышёвское уклонение.
2. Интегральное уклонение.

#### 6.1.1. Чебышёвское уклонение

Пусть имеется функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , у которой найдена интервальная оценка

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = [L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n)].$$

Тогда *чебышёвским уклонением* данной интервальной оценки будем называть величину

$$T(\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)) = \max_{x_1, \dots, x_n} \{ U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n), \\ f(x_1, \dots, x_n) - L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \}.$$

Данная величина является оценкой сверху для погрешности описания функции базисом арифметики в чебышёвской норме

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_{\infty} = \max_{x_1, \dots, x_n} |f(x_1, \dots, x_n)|.$$

Чебышёвское уклонение не используется далее в работе, поскольку его точное вычисление затруднено знанием явного вида оцениваемой функции, но при этом доступна следующая оценка для этой величины:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)) &\leq \max_{x_1, \dots, x_n} \{U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) - L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n)\} = \\ &= \|U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) - L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

это верно в силу  $U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_n).$$

### 6.1.2. Интегральное уклонение

Пусть имеется функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Пусть также имеется интервальная оценка этой функции

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \left[ L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n), U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \right].$$

Тогда *интегральным уклонением* данной интервальной оценки будем называть величину

$$\begin{aligned} I(\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)) &= \int_{-1}^{+1} \dots \int_{-1}^{+1} \left( U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) - \right. \\ &\quad \left. - f(x_1, \dots, x_n) \right) dx_1 \dots dx_n + \\ &+ \int_{-1}^{+1} \dots \int_{-1}^{+1} \left( f(x_1, \dots, x_n) - \right. \\ &\quad \left. - L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \right) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{-1}^{+1} \dots \int_{-1}^{+1} \left( U_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) - \right. \\ &\quad \left. - L_{\mathbf{f}}(x_1, \dots, x_n) \right) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Данная характеристика является оценкой сверху для погрешности описания функции базисом арифметики в норме  $L_1$

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \int_{x_1} \dots \int_{x_n} |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n.$$

Иными словами, интегральное уклонение показывает, какую по площади «лишнюю» область мы добавляем при описании функции выбранным в арифметике базисом.

Достоинством данной характеристики является то, что её вычисление возможно без знания функции, у которой ищется интервальное расширение.

## **6.2. Сравнение интервальных арифметик по интегральной характеристике уклонения**

Сравним классическую, функционально-базисную интервальные и аффинную арифметики по интегральному уклонению.

Далее приведены таблицы с результатами численных экспериментов (таб. 6.1, 6.2): в первом столбце представлены вычисляемые интервальные расширения выражений, во втором столбце — значения интегрального уклонения для соответствующей арифметики.

После таблиц приведены пояснительные иллюстрации к некоторым примерам.

Таблица 6.1: Сравнение интегрального уклонения  $I$  для разных видов арифметик

$f(x_1, \dots, x_n)$	Классическая интервальная арифметика	Аффинная арифметика	Функционально-граничная интервальная арифметика
1	0	0	0
$x$	4	0	0
$x^2$	4	4	0.5
$x^3$	4	4	0.81129150101524
$x^4$	2	4	0.712626265847085
$x^5$	4	4	0.96166573212244
$x^6$	4	4	0.87830923447167
$x^7$	4	4	1.037794268789845
$x^8$	4	4	0.97285398143004
$x^9$	4	4	1.08576770451591
$x^{10}$	4	4	1.03154556274759
$x \cdot [-1, 0]$	4	2	1
$x \cdot [0, 1]$	4	2	1
$x \cdot [-1, -0.5]$	4	1	0.5
$x \cdot [-0.5, 0]$	2	1	0.5
$x \cdot [0, 0.5]$	2	1	0.5
$x \cdot [0.5, 1]$	4	1	0.5
$x \cdot [-1, 1]$	4	4	2
$x \cdot y$	8	8	2
$y \cdot x$	8	8	2
$x^2 \cdot y$	8	8	1.75
$x \cdot y \cdot x$	8	8	2.51471862576143
$y \cdot x^2$	8	8	2.51471862576143
$x^3 \cdot y$	8	8	2
$x^2 \cdot y \cdot x$	8	8	2.51471862576143
$x \cdot y \cdot x^2$	8	8	2.68376618407357
$y \cdot x^3$	8	8	2.68376618407357
$x^4 \cdot y$	8	8	1.68658008588991
$x^3 \cdot y \cdot x$	8	8	2.42640687119286
$x^2 \cdot y \cdot x^2$	8	8	2.68376618407357
$x \cdot y \cdot x^3$	8	8	2.78344186487968
$y \cdot x^4$	8	8	2.78344186487968
$x^5 \cdot y$	8	8	2
$x^4 \cdot y \cdot x$	8	8	2.50367965644036
$x^3 \cdot y \cdot x^2$	8	8	2.65476220843933
$x^2 \cdot y \cdot x^3$	8	8	2.78344186487968
$x \cdot y \cdot x^5$	8	8	2.83068004995108
$y \cdot x^5$	8	8	2.83068004995108



Таблица 6.2: Сравнение интегральной характеристики  $I$  для разных видов интервальных арифметик. Операция деления.

$f(x_1, \dots, x_n)$	Классическая интервальная арифметика	Функционально-граничная интервальная арифметика
$(x + 2) / (x + 2)$	5.333333333333333	0.000000000000002
$1 / (x + 2)$	1.333333333333333	0.154335453948487
$1 / (x + 3)$	0.5	0.0309600827457410
$1 / (x + 4)$	0.266666666666667	0.0111669633764997
$1 / (x + 5)$	0.166666666666667	0.0052557816242133
$1 / (x + [2, 3])$	1.5	0.473886926876691
$1 / (x + [3, 4])$	0.6	0.20859862653166603
$1 / (x + [4, 5])$	0.333333333333333	0.118389836375957
$1 / (x + [5, 10])$	0.318181818181818	0.21638703599257883
$x / [1, 2]$	4	0.25
$x / [2, 3]$	2	0.083333333333334
$x / [3, 4]$	1.333333333333333	0.0416666666666671
$x / [4, 5]$	1	0.0250000000000002
$x / [5, 10]$	0.8	0.050000000000001
$x / (y + 2)$	8	0.666666666666671
$y / (x + 2)$	8	0.666666666666671
$x^2 / (y + 2)$	8	1.354166666666667
$x / (y + 2) \cdot x$	8	1.67647908384096
$1 / (y + 2) \cdot x^2$	8	1.74235739103973
$x^3 / (y + 2)$	8	1.63645985547802
$x^2 / (y + 2) \cdot x$	8	1.97449798090104
$x / (y + 2) \cdot x^2$	8	1.93790283299493
$1 / (y + 2) \cdot x^3$	8	2.03222087986149
$x^4 / (y + 2)$	8	1.44449780742915
$x^3 / (y + 2) \cdot x$	8	1.7585136523794
$x^2 / (y + 2) \cdot x^2$	8	1.78234721543857
$x / (y + 2) \cdot x^3$	8	1.81505575983538
$1 / (y + 2) \cdot x^4$	8	1.98006435610048
$x^5 / (y + 2)$	8	1.72751020178193
$x^4 / (y + 2) \cdot x$	8	2.04570366923249
$x^3 / (y + 2) \cdot x^2$	8	2.06395221667211
$x^2 / (y + 2) \cdot x^3$	8	2.08978012172187
$x / (y + 2) \cdot x^5$	8	2.09916240309717
$1 / (y + 2) \cdot x^5$	8	2.20737939401541

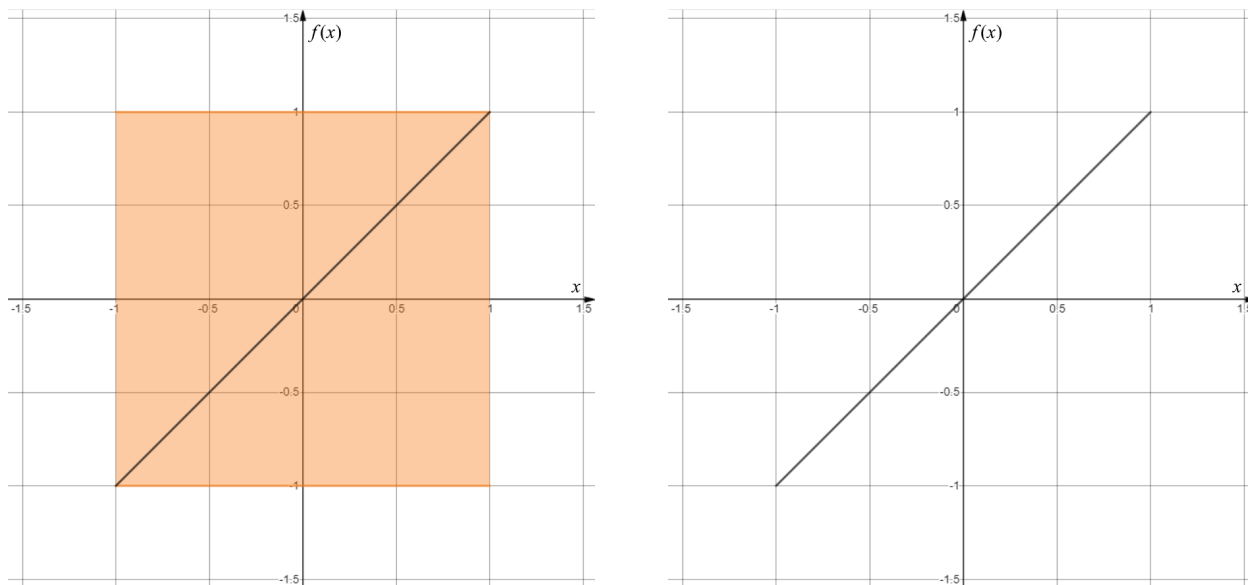


Рис. 6.1: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (совпадает с множеством совместных значений). На правом — в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

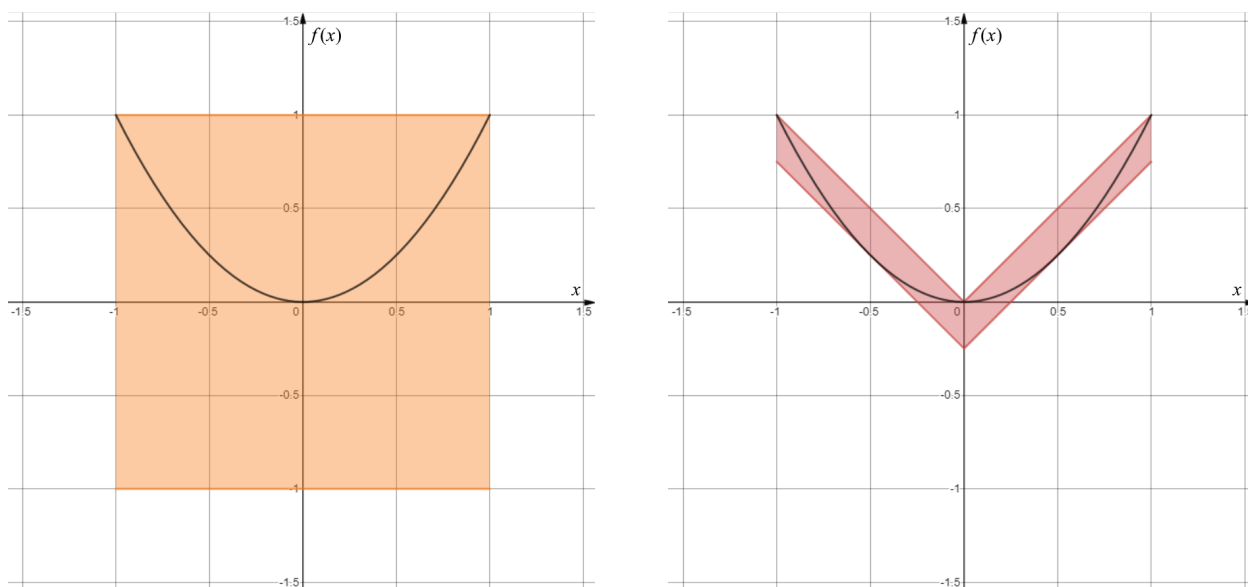


Рис. 6.2: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^2$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

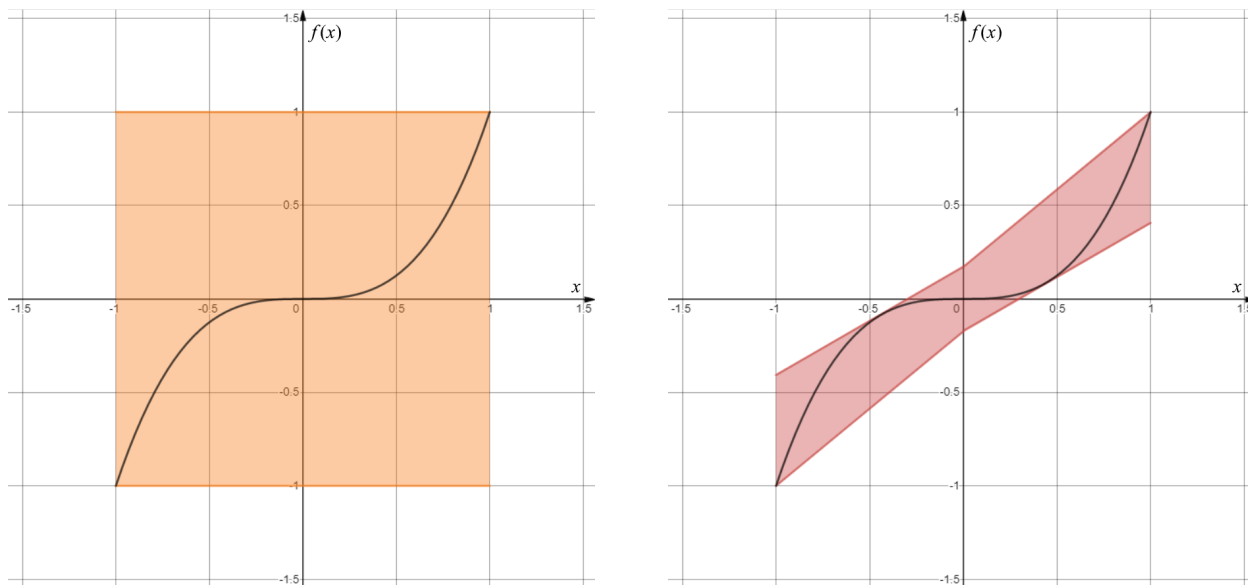


Рис. 6.3: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^3$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметике (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

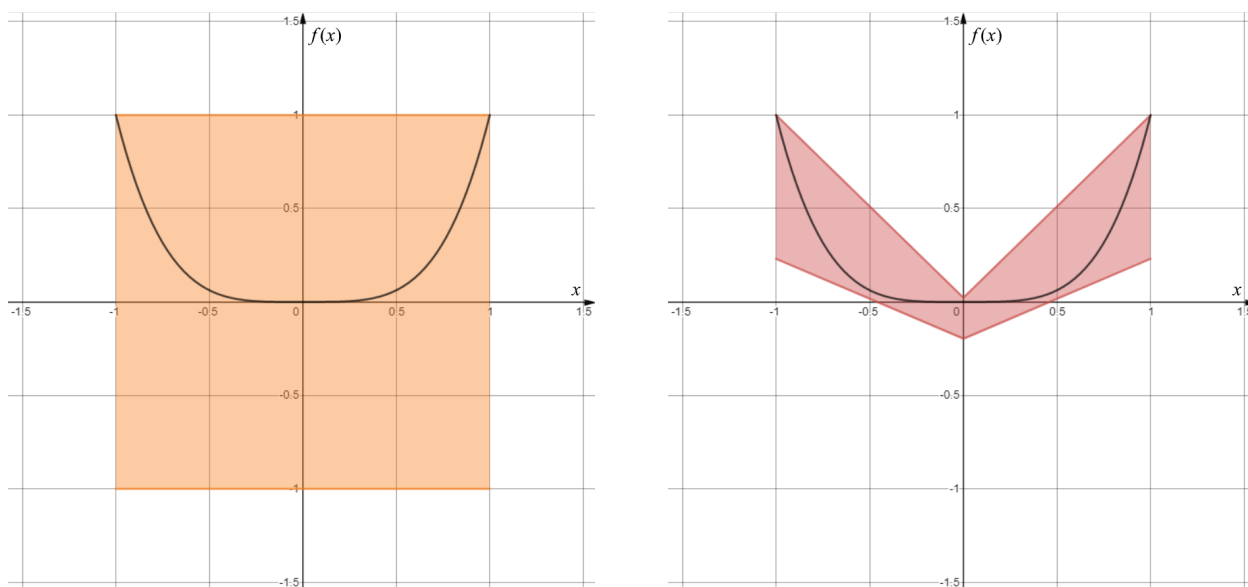


Рис. 6.4: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^4$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметике (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

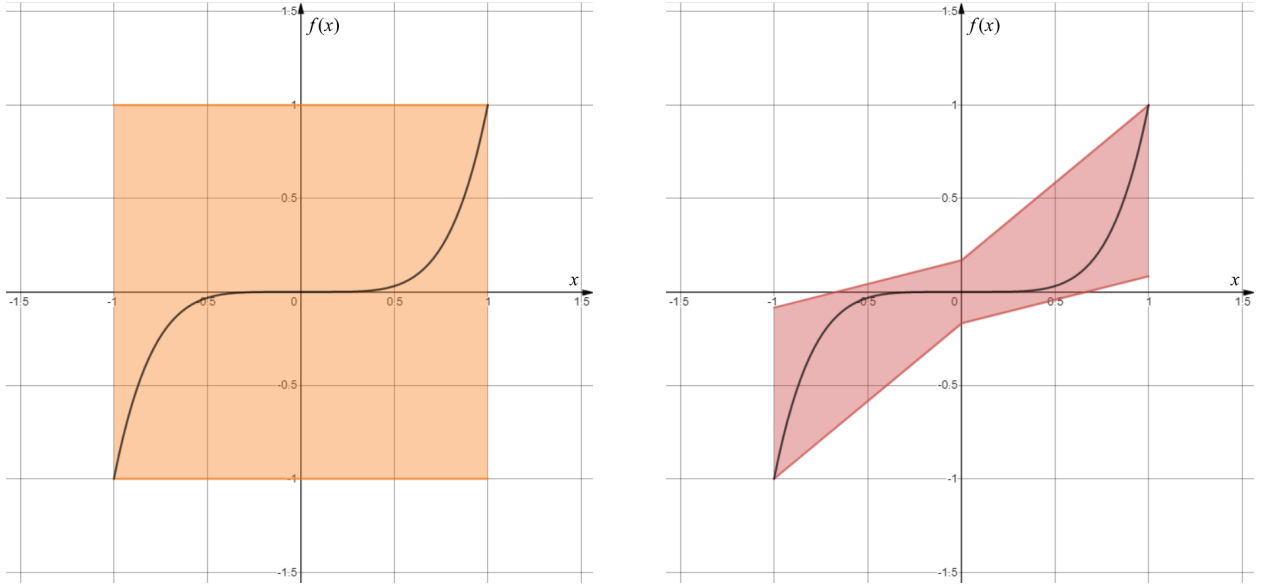


Рис. 6.5: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^5$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

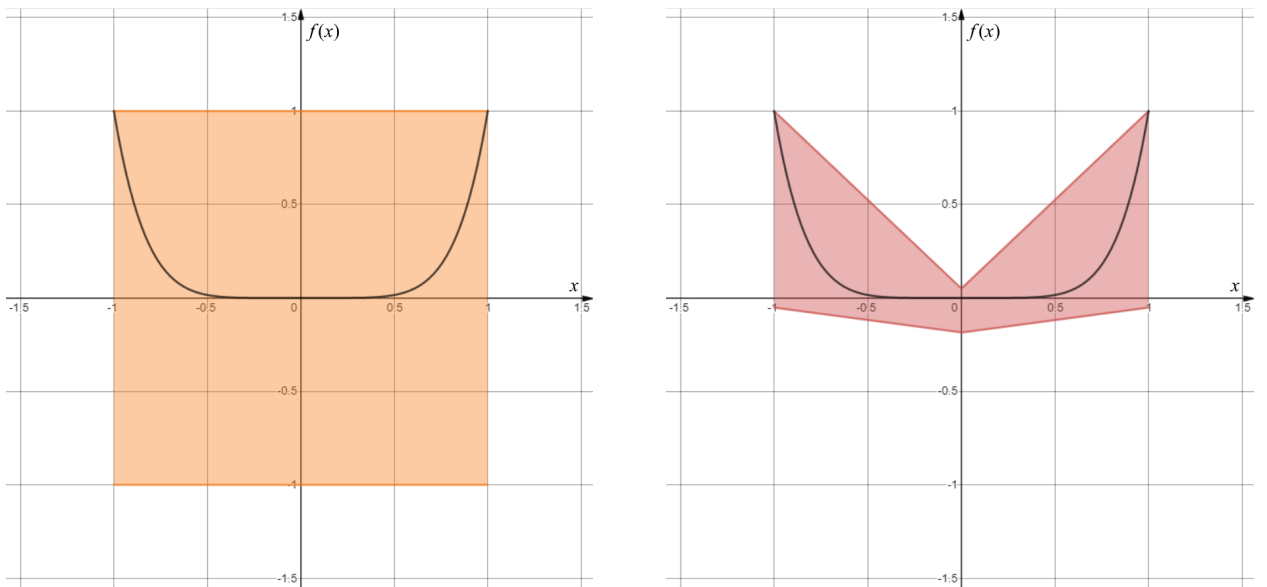


Рис. 6.6: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^6$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

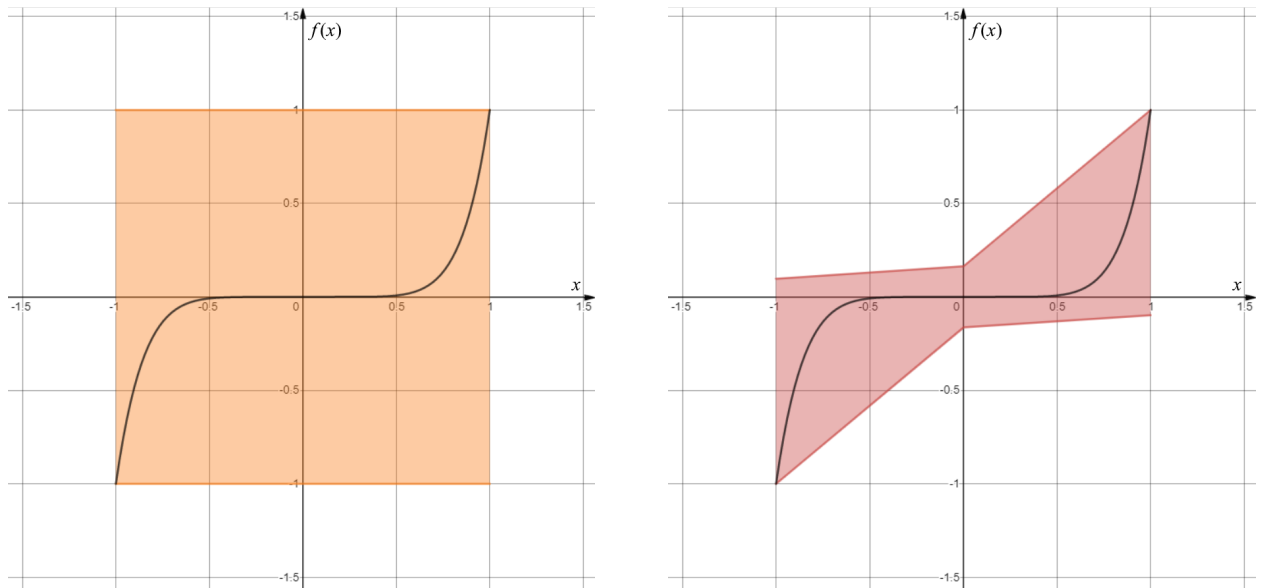


Рис. 6.7: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^7$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

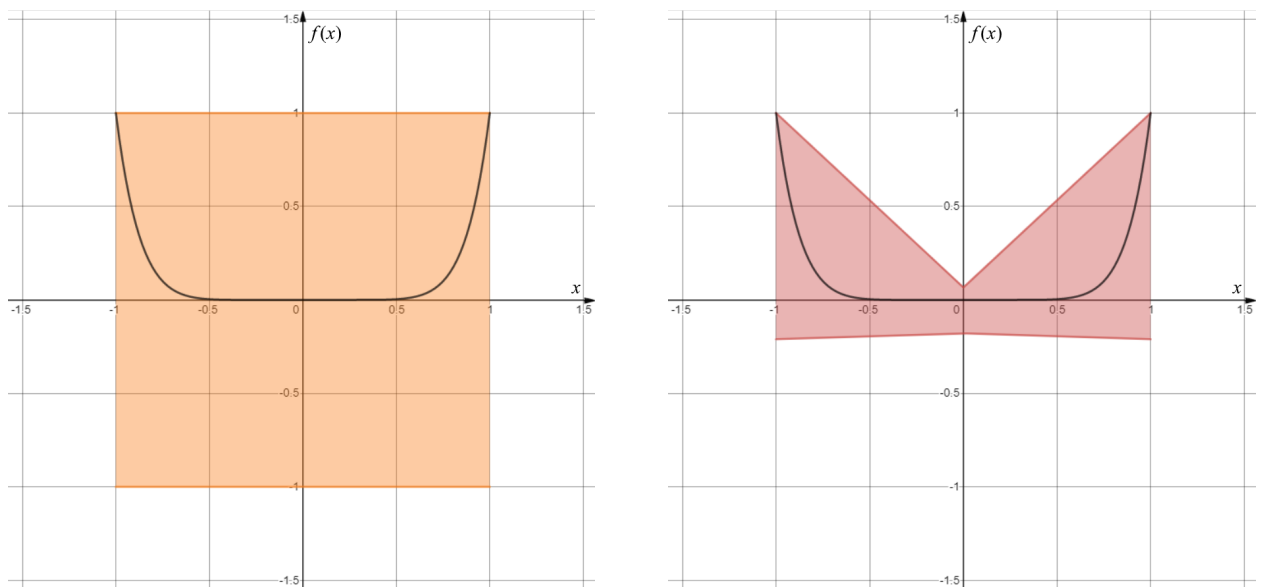


Рис. 6.8: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^8$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

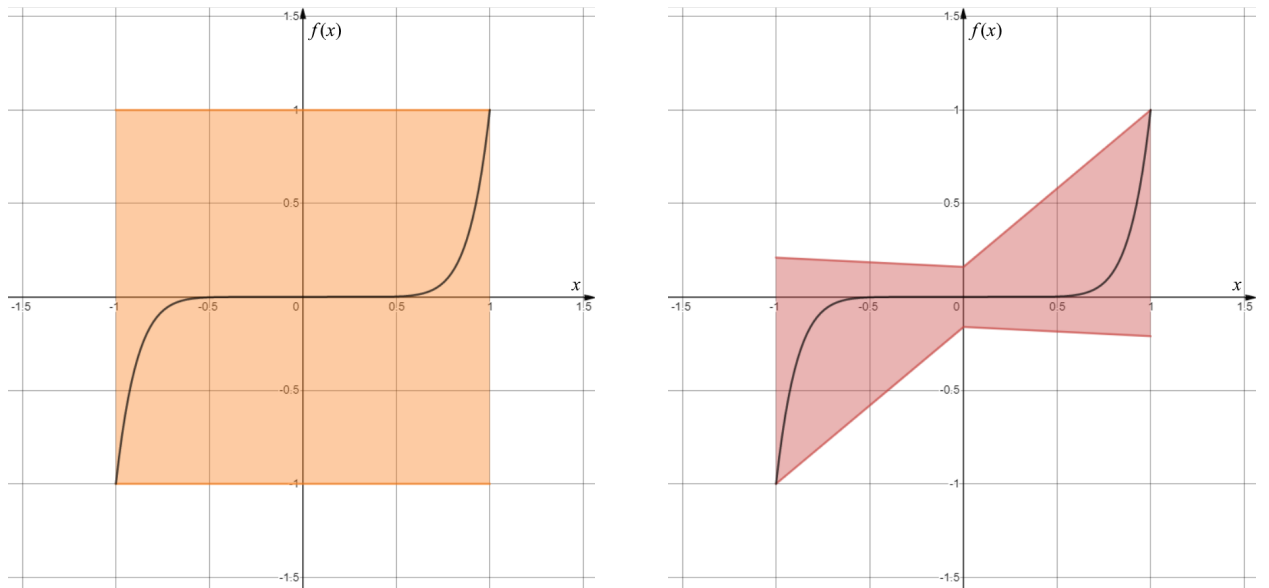


Рис. 6.9: Совместное множество значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^9$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

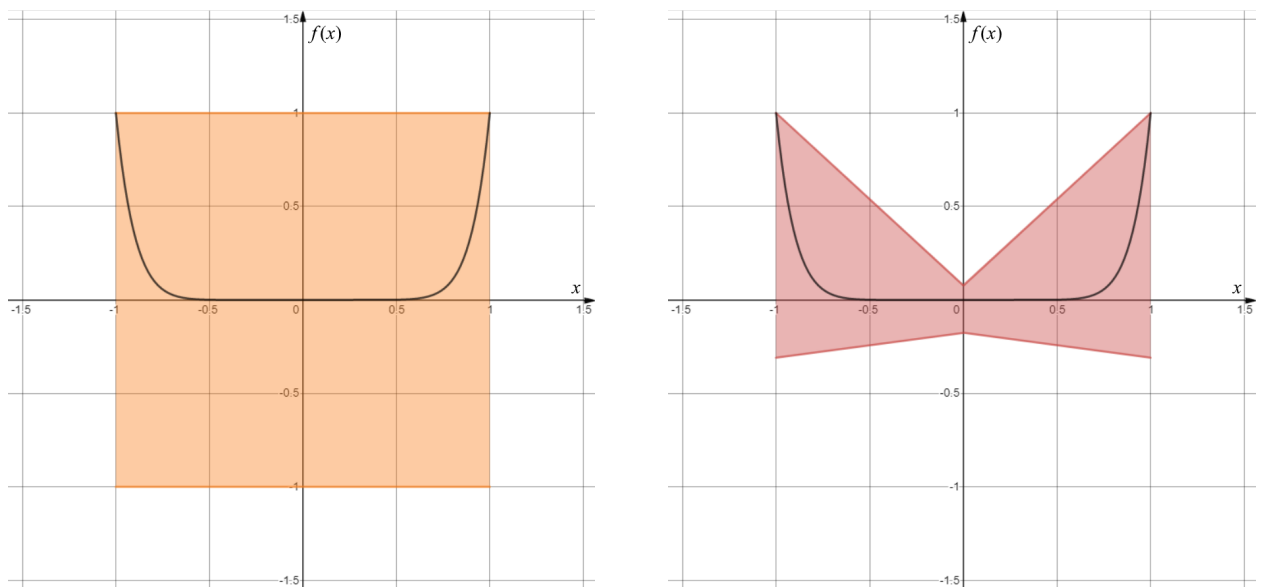


Рис. 6.10: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = x^{10}$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметиках (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

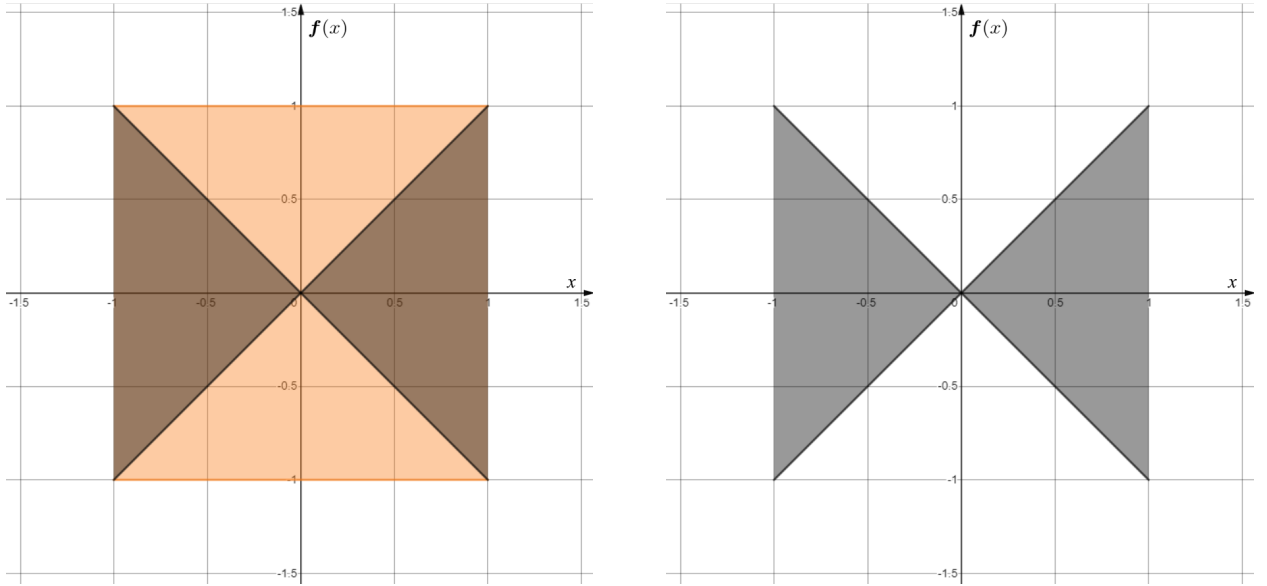


Рис. 6.11: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [-1, 1] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной и аффинной арифметике (оранжевая область), на правом — в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

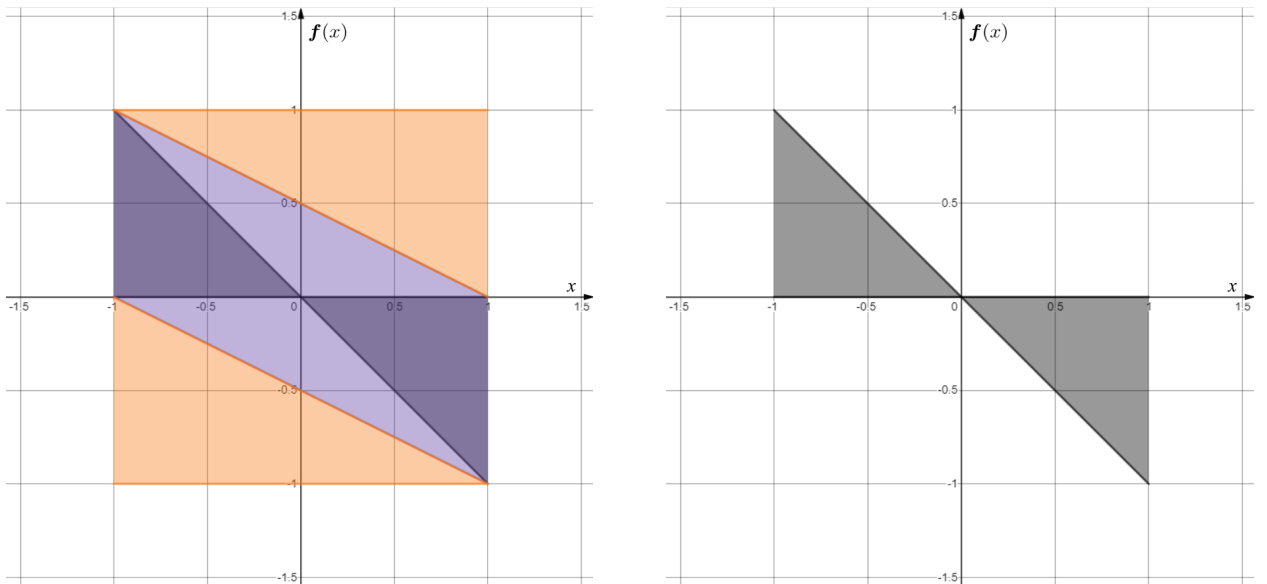


Рис. 6.12: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [-1, 0] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке она показана в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (фиолетовая область). На правом рисунке показана диаграмма зависимости в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

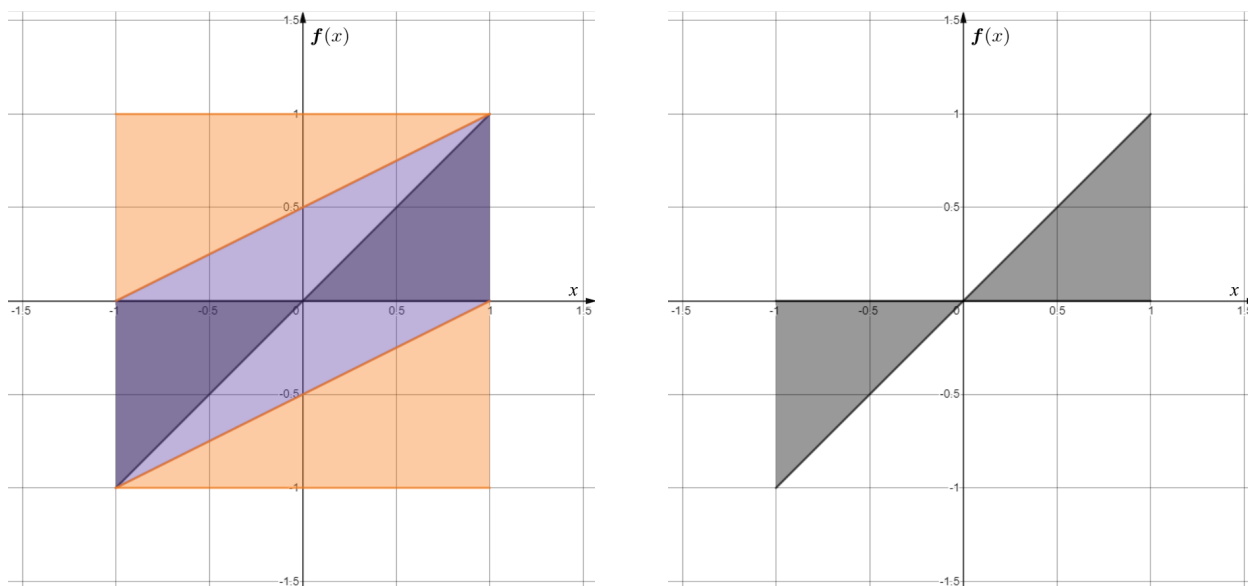


Рис. 6.13: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [0, 1] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (фиолетовая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

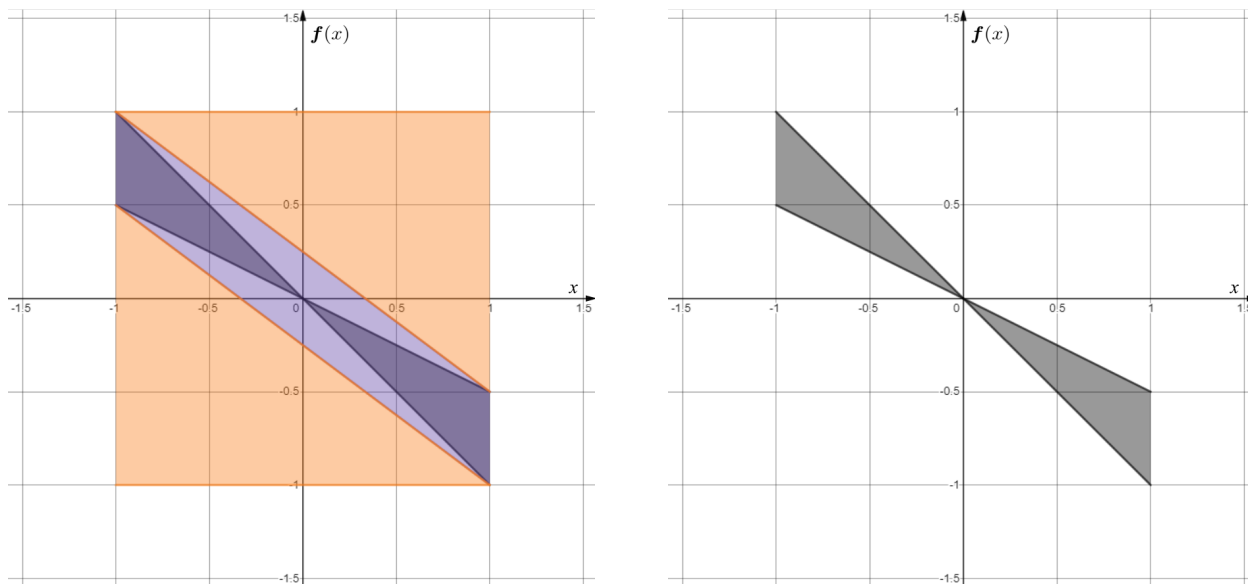


Рис. 6.14: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [-1, -\frac{1}{2}] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (фиолетовая область). На правом рисунке показана диаграмма зависимости в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).



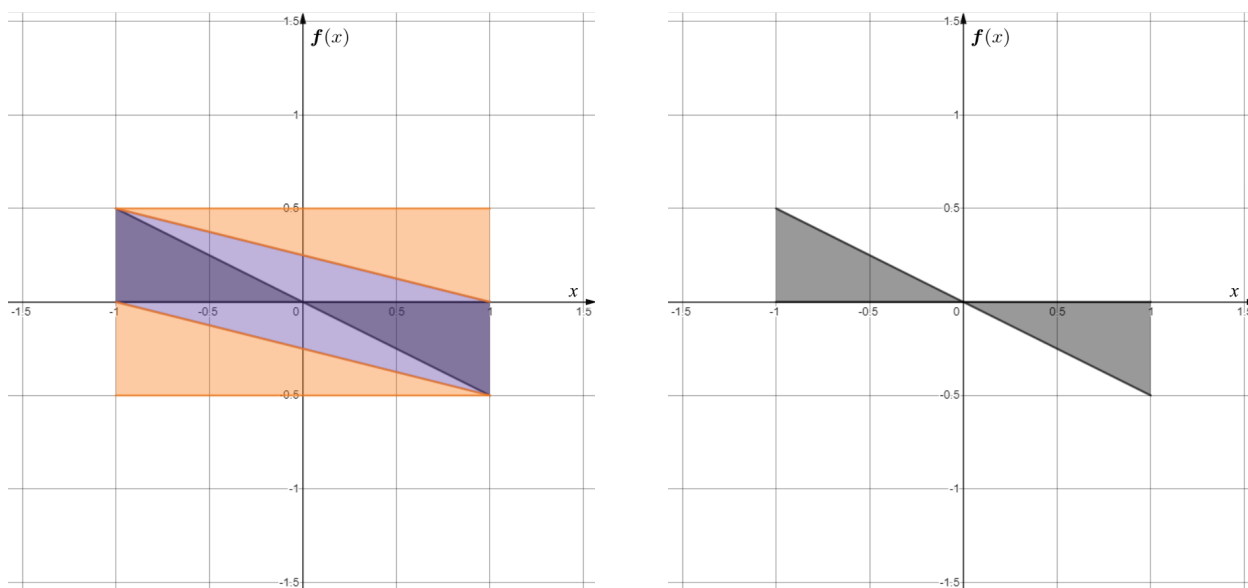


Рис. 6.15: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (фиолетовая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

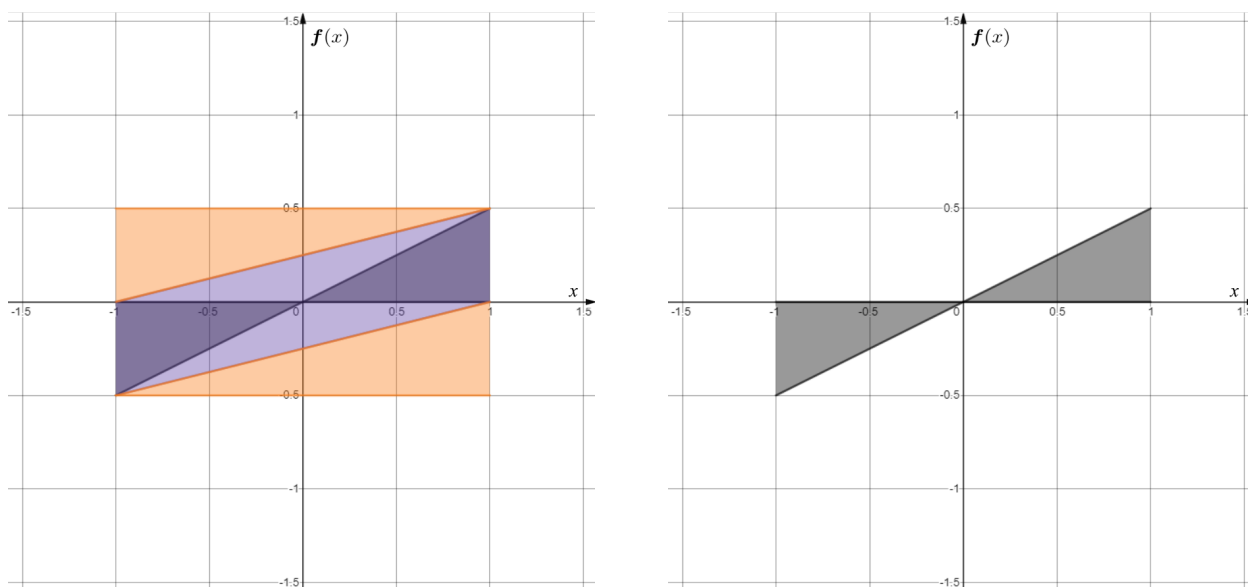


Рис. 6.16: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (фиолетовая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

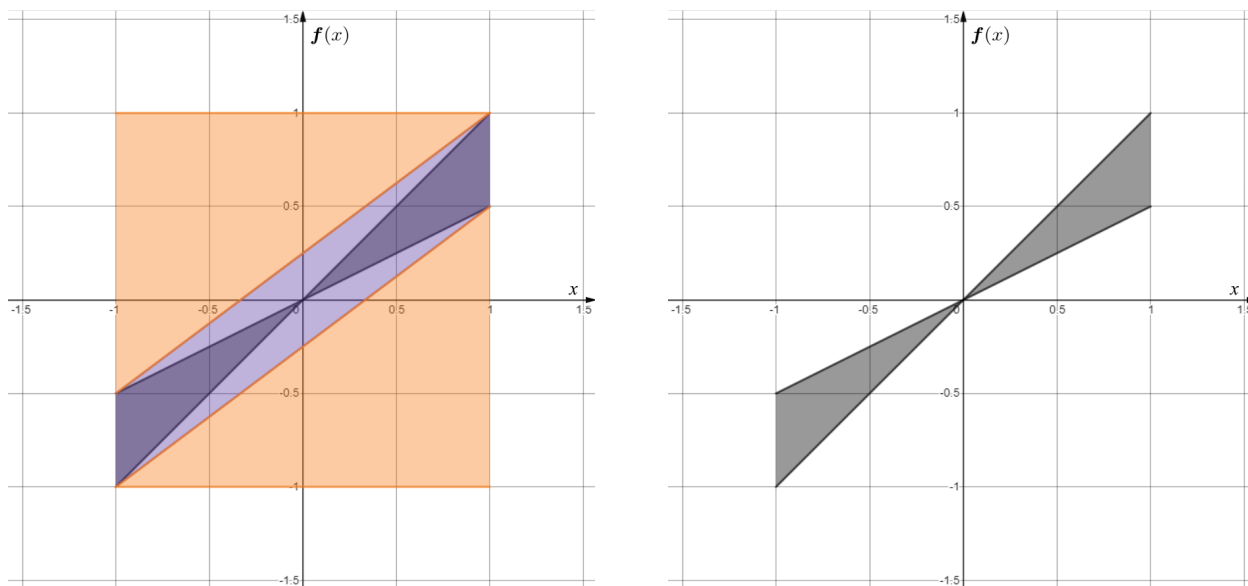


Рис. 6.17: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = [\frac{1}{2}, 1] \cdot x$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область), а также в аффинной арифметике (фиолетовая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (совпадает с множеством совместных значений).

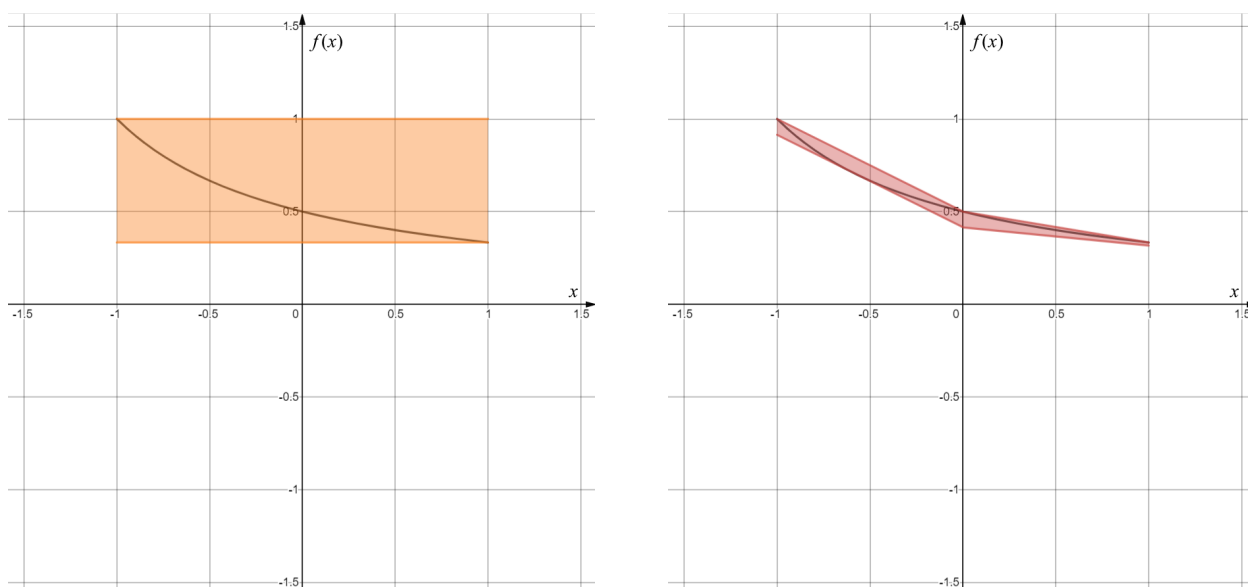


Рис. 6.18: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , задаваемой выражением  $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x+2}$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

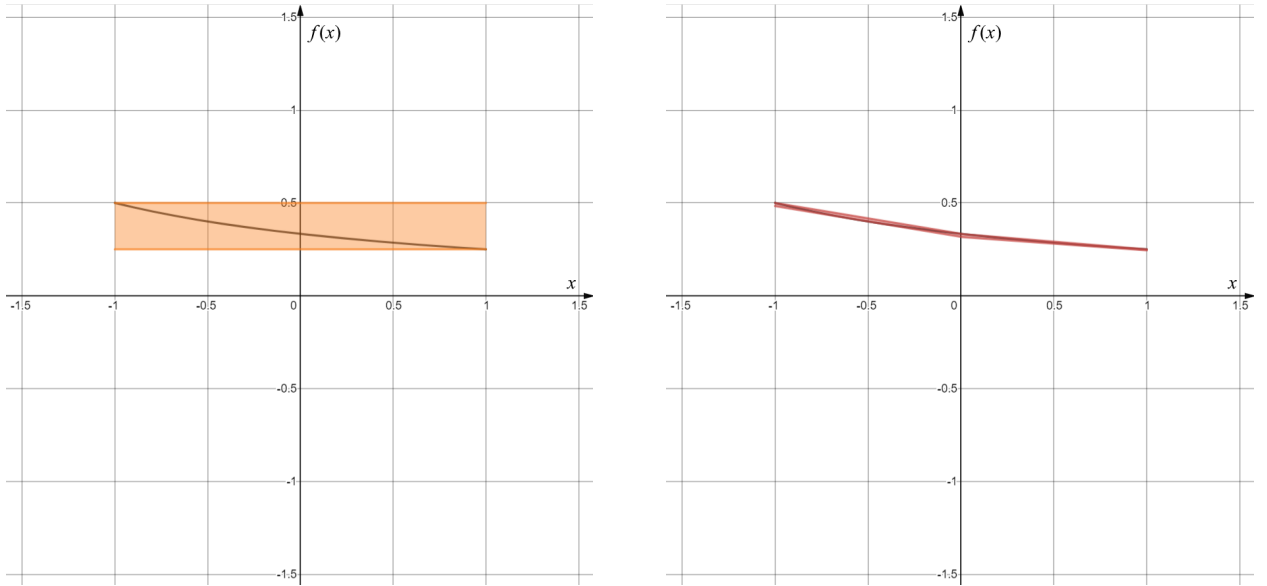


Рис. 6.19: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = \frac{1}{x+3}$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

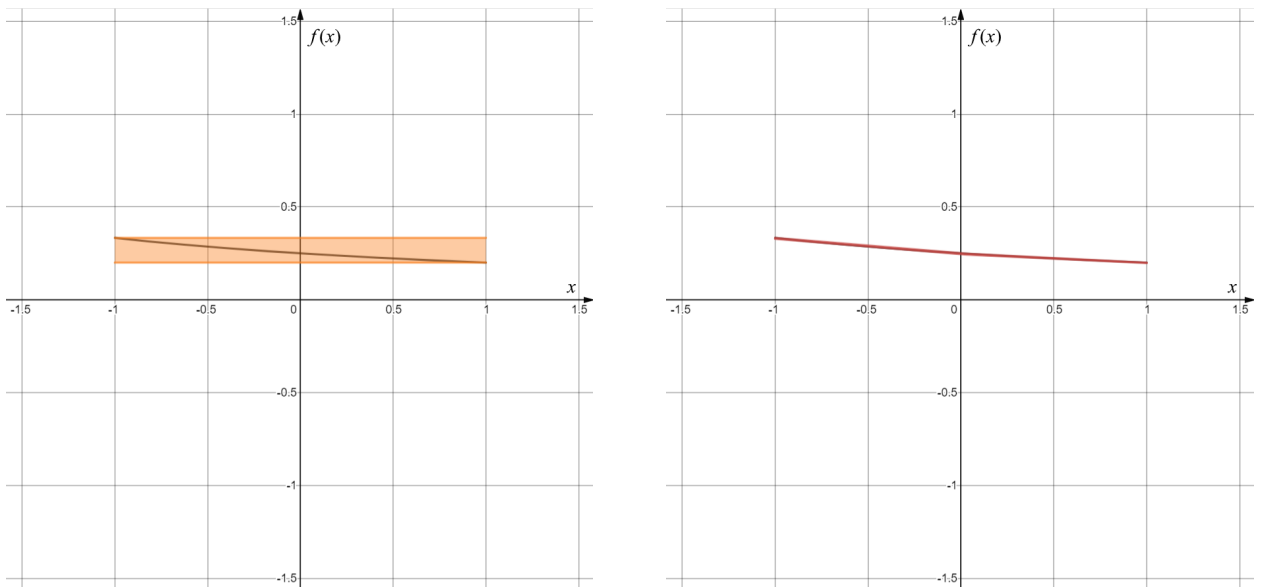


Рис. 6.20: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = \frac{1}{x+4}$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

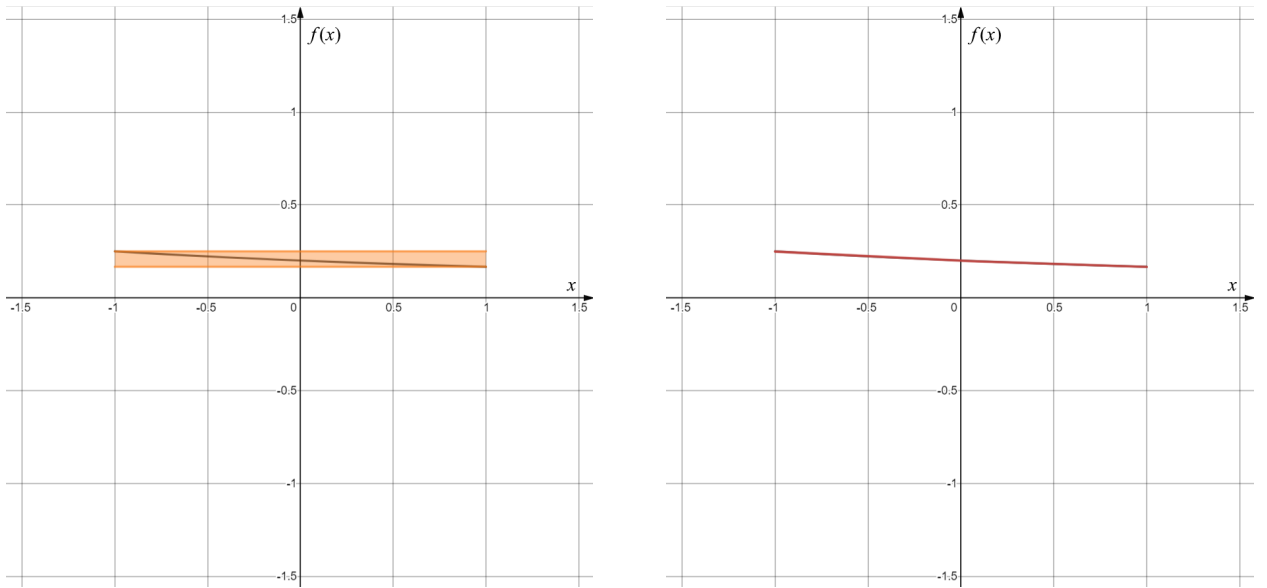


Рис. 6.21: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, f(x))$ , где  $f(x) = \frac{1}{x+5}$  (чёрная линия). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

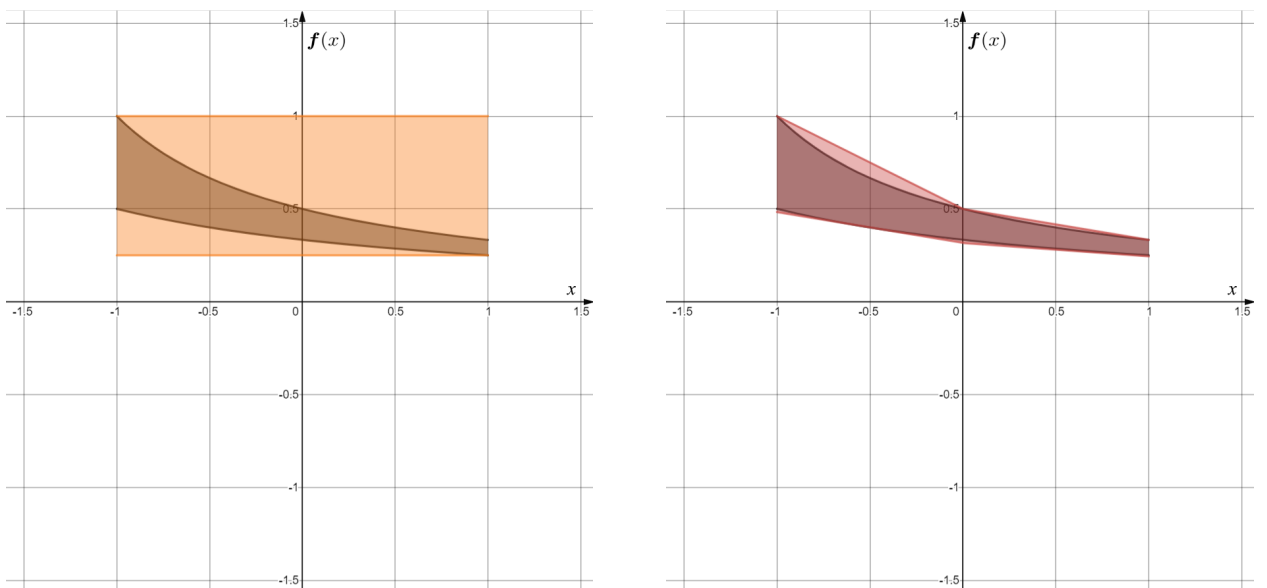


Рис. 6.22: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x+[2,3]}$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

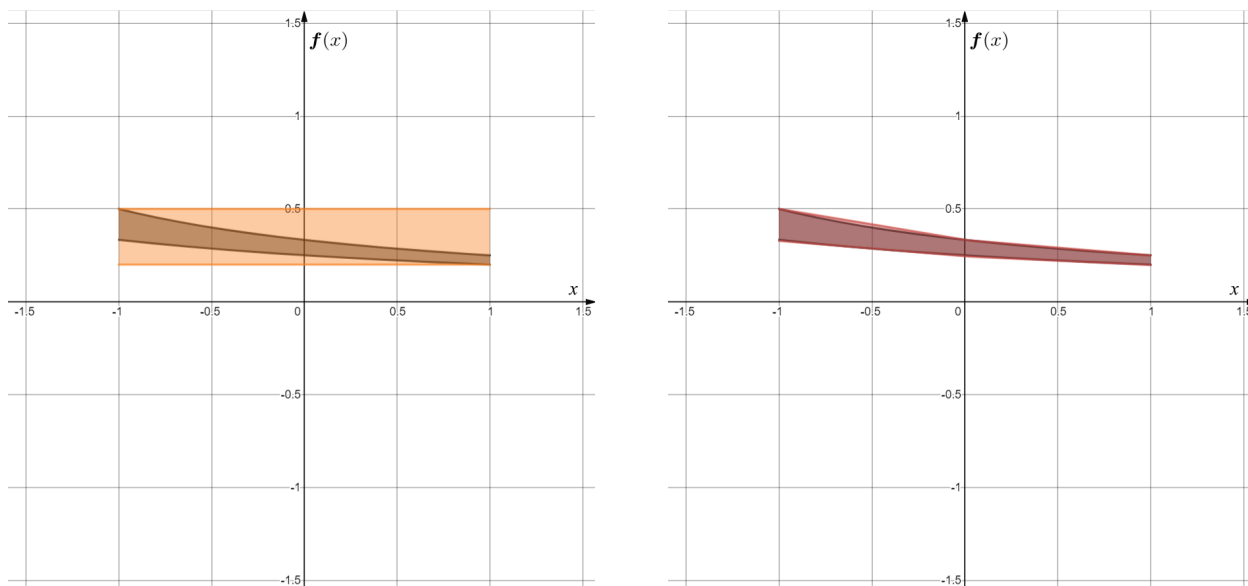


Рис. 6.23: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x + [3, 4]}$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

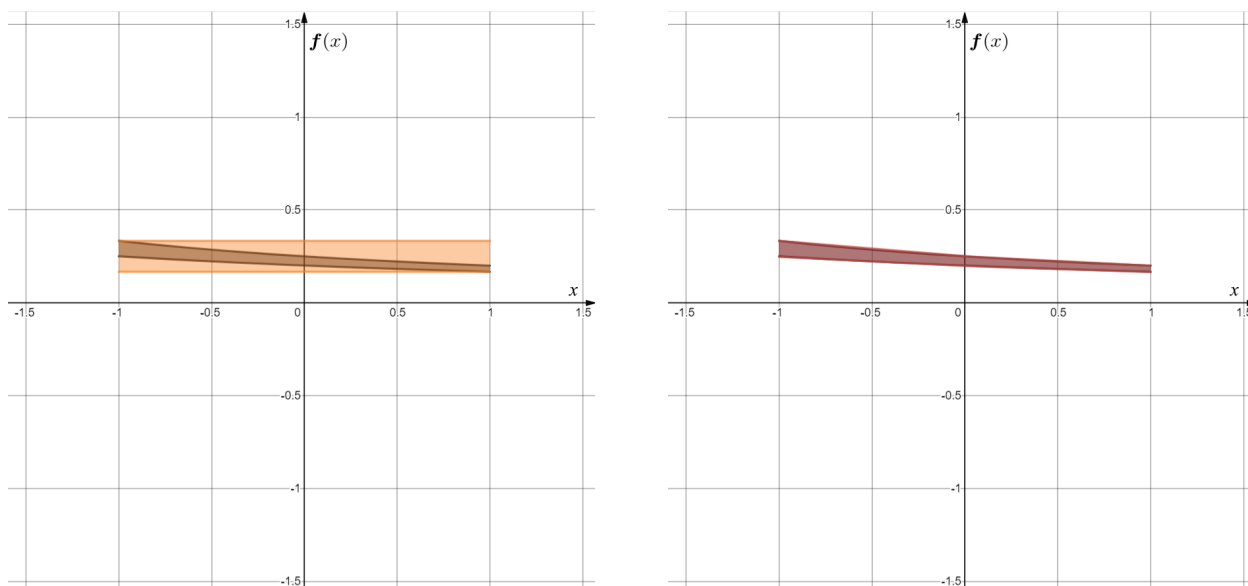


Рис. 6.24: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x + [4, 5]}$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

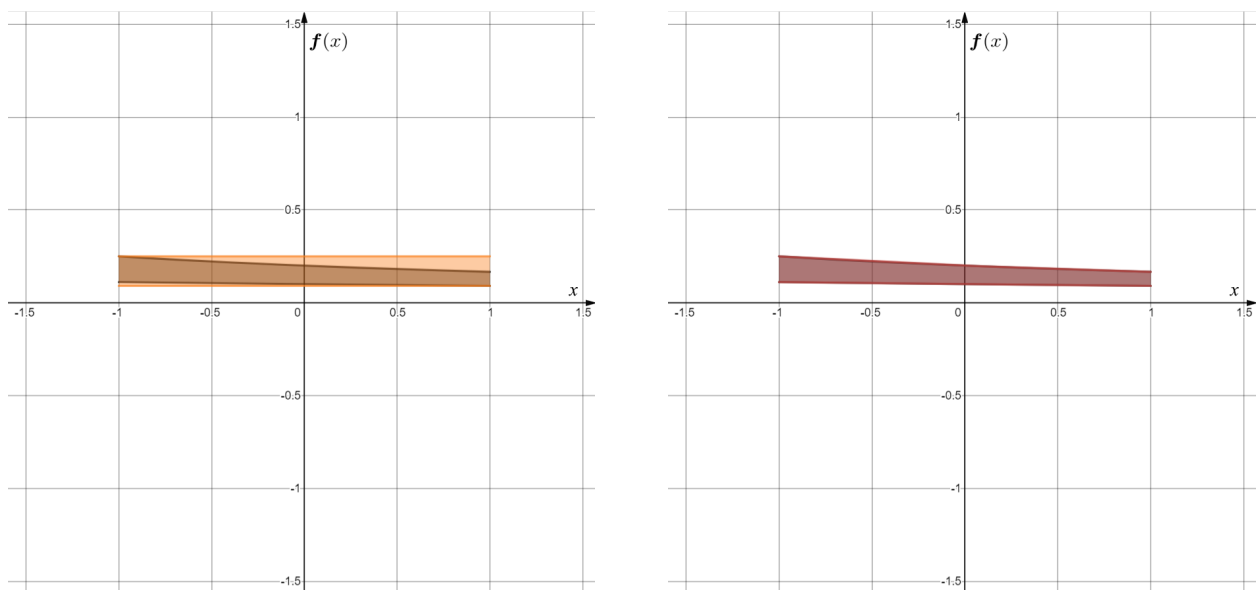


Рис. 6.25: Множество совместных значений упорядоченной пары  $(x, \mathbf{f}(x))$ , где  $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x + [5, 10]}$  (серая область). На левом рисунке показано его приближение в классической интервальной арифметике (оранжевая область). На правом рисунке — в функционально-границной интервальной арифметике (красная область).

### 6.3. Решение ИСЛАУ со связями с применением функционально-границной арифметики

Рассмотрим ИСЛАУ, которая рассматривалась в работе Ахмерова [5]. Она решалась методом Гаусса при помощи интервально-аффинной арифметики. Асимптотика трудоёмкости данного метода равняется  $O(n^5)$ , где  $n$  — размер матрицы системы.

$$\begin{pmatrix} [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-14, -7] \\ [9, 12] \\ [-3, 3] \end{pmatrix}$$

Далее приведены таблицы результатов решений в разных арифметиках. Отметим, что трудоёмкость метода Гаусса для решения ИСЛАУ в функционально-границной интервальной арифметике равна  $O(n^7)$ . Рассмотрим случай симметричной матрицы (таб. 6.3), когда:

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ji},$$

а также случай кососимметричной матрицы (таб. 6.4), когда:

$$\mathbf{a}_{ij} = -\mathbf{a}_{ji}.$$

Проанализируем полученные результаты. Классическая интервальная арифметика даёт самые грубые оценки среди приведённых, поскольку не способна учитывать связи между элементами ИСЛАУ. Использование аффинной арифметики и функционально-границной интервальной арифметики за счёт наличия такой специфики позволяет получить для оценок более узкие интервалы.

А так как функционально-граничная интервальная арифметика позволяет эффективнее обрабатывать квадратичные члены и описывает границы интервалов независимо, то она показывает лучшую оценку бруса неизвестных среди приведённых за счёт увеличения трудоёмкости алгоритма.

Таблица 6.3: Оценки объединённого множества решений ИСЛАУ для случая симметричной матрицы.

$\mathbf{x}_i$	Классическая интервальная арифметика	Интервально- аффинная арифметика	Функционально-граничная интервальная арифметика
$\mathbf{x}_1$	$[-101.00, 71.00]$	$[-101.00, 64.80]$	$[-101.00, 54.21]$
$\mathbf{x}_2$	$[-62.25, 99.00]$	$[-56.06, 99.00]$	$[-41.38, 99.00]$
$\mathbf{x}_3$	$[-90.00, 90.00]$	$[-90.00, 90.00]$	$[-90.00, 90.00]$

Таблица 6.4: Оценки объединённого множества решений ИСЛАУ для случая кососимметричной матрицы.

$\mathbf{x}_i$	Классическая интервальная арифметика	Интервально- аффинная арифметика	Функционально-граничная интервальная арифметика
$\mathbf{x}_1$	$[-101.00, 71.00]$	$[-46.58, 21.44]$	$[-35.71, 17.50]$
$\mathbf{x}_2$	$[-62.25, 99.00]$	$[-14.98, 42.03]$	$[-16.07, 29.37]$
$\mathbf{x}_3$	$[-90.00, 90.00]$	$[-31.33, 31.33]$	$[-23.13, 23.13]$



## 7. Детали компьютерной реализации

Важным вопросом являются детали реализации интервальных арифметик на ЭВМ. Особенностью вычислений с помощью чисел с плавающей точкой является то, что промежуточные и итоговые результаты округляются из-за невозможности точного представления любого вещественного числа непрерывной числовой оси в дискретной памяти машины.

Первая специфика состоит в том, что нам необходима возможность читать и изменять регистр процессора для округления чисел с плавающей точкой. Эта деталь создаёт много трудностей при создании вычислительных пакетов.

Например, в последнее время наиболее популярными языками становятся кроссплатформенные и машиннезависимые. Это влечёт за собой то, что программист не имеет встроенных в язык средств низкоуровневого контроля своих программ.

Автор работы решил данную проблему следующим образом: была написана динамическая низкоуровневая «.dll» библиотека, содержащая все необходимые инструменты для использования на языке высокого уровня.

В данной библиотеке были реализованы следующие сущности:

1. Контроллер режима округления
2. Тестирующий модуль классической интервальной арифметики
3. Классический интервал
4. Псевдослучайный генератор чисел

## 7.1. Контроллер режима округления

При разработке «низкоуровневой» библиотеки для работы с направленным округлением, следует иметь в виду, что это весьма сужает список доступных языков программирования для её разработки. Данное обстоятельство связано с тем, что в угоду кросс-платформенности и машинно-независимости разработчики отказываются от предоставления доступа к низкоуровневым системным операциям. Поэтому часто доступ к таким операциям, как смена направления округления вещественных чисел закрыт.

Даже при использовании низкоуровневого языка необходимо специально настраивать компилятор для генерации кода, способного правильно работать с направленным округлением. Это требование необходимо, поскольку используя различные оптимизации и ускорения при генерации кода и вычислении выражений с плавающей точкой, компилятор способен искажать итоговый результат.

Разработка пакета, представленного в работе, велась в интегрированной среде разработки (IDE) Microsoft Visual Studio 2017 на языке C++ стандарта 2011 года.

Для настройки компилятора необходимо включить специальную опцию — `/fp:strict`. Она предназначена для установки специального режима работы компилятора с вещественными числами. Далее идёт перевод некоторых положений относительно этой опции из официальной документации Microsoft [2].

По умолчанию компилятор использует режим `/fp:precise`. В режиме `/fp:precise` компилятор сохраняет порядок вычислений и режим округления вычисляемых выражений с плавающей точкой, когда он оптимизирует

и создает объектный код. Компилятор производит округление вычислений в 4 случаях:

1. Присваивания
2. Приведение типов
3. Передача аргумента с плавающей точкой в функцию
4. Возврат результата с плавающей точкой из функции

Промежуточные вычисления могут вычисляться с машинной точностью. Приведение типов может быть использовано для явного округления вычислений. В данном режиме компилятор не выполняет никаких математических преобразований над вычисляемыми выражениями, кроме как в тех случаях, когда гарантируется побитовая идентичность результатов. Выражения, содержащие специальные значения ( $+\infty$ ,  $-\infty$ , NaN,  $-0.0$ ) вычисляются в соответствии со спецификацией IEEE-754.

Компилятор генерирует код по умолчанию, предполагая, что среда с плавающей точкой не изменится во время выполнения. То есть предполагается, что код не перехватывает исключения с плавающей запятой, считывает или записывает регистры состояния с плавающей запятой и не изменяет режимы округления.

Включенный режим `/fp:fast` позволяет компилятору переупорядочивать, комбинировать, или каким-либо образом упрощать вычисляемые выражения с плавающей точкой для повышения быстродействия или уменьшения размера кода. Компилятор может пропустить округление в тех 4 случаях, перечисленных выше для режима `/fp:precise`. Из-за данного поведения результаты, полученные при этом режиме и других (`/fp:precise`,

`/fp:strict`) могут заметно отличаться. Определенное поведение при работе со специальными значениями ( $+\infty$ ,  $-\infty$ , NaN,  $-0.0$ ) не указывается.

В данном режиме компилятор также предполагает инвариантность среды во время исполнения программы.

Компилятор в режиме `/fp:strict` ведёт себя похожим образом, как и в режиме `/fp:precise`. То есть он сохраняет порядок вычислений выражений, также округляет результаты вычислений в указанных 4 случаях, а также обрабатывает специальные значения вещественных переменных согласно стандарту IEEE-754. Основное отличие состоит в том, что в данном режиме программа может безопасно получить доступ к среде вычислений чисел с плавающей точкой, а также изменять ее. В данном режиме не делаются усечения вещественных чисел во время вычислений.

Но режим `/fp:strict` более трудоёмок, чем режим `/fp:precise`, так как компилятор вставляет дополнительный код для перехвата исключений при операциях с вещественными числами, а также код, получающий информацию о среде вычислений, или код, изменяющий эту среду. Если код не использует данные возможности, то стоит использовать режим `/fp:precise`.

В данном пакете, благодаря тому, что программно отделяется высокоуровневый и низкоуровневый контроль, задача контроллера режима округления состоит в том, чтобы до момента создания первого интервала для оперирования режим округления был изменён на направленное округление вверх.

## 7.2. Тестирующий модуль интервальной арифметики

При работе с направленным округлением сложно даже в режиме отладки следить за тем, чтобы округление чисел с плавающей точкой происходило верно. Поэтому было решено написать тестирующий модуль, который можно запускать для непосредственной проверки правильности округления.

Данный модуль производит действия с интервалами по базовому принципу (3.1). При этом, при поиске минимума, режим округления переключается на округление вниз, а при поиске максимума — в режим округления вверх.

## 7.3. Классический интервал

Интервал классической интервальной арифметики является центральным объектом разрабатываемой низкоуровневой библиотеки.

Создать интервальный объект можно одним из следующих способов:

1. Из вещественного числа
2. Из другого интервала
3. Из двух вещественных чисел — концов интервала

Для обработки были разработаны следующие процедуры:

1. Сложение интервалов
2. Вычитание интервалов
3. Умножение интервалов

4. Деление интервалов
5. Возведение интервала в квадрат
6. Извлечение квадратного корня из интервала
7. Алгебраический минус из интервала
8. Взятие модуля интервала
9. Нахождение ширины интервала
10. Нахождение радиуса интервала
11. Нахождение середины интервала
12. Нахождение объединения интервалов
13. Нахождение, пересекаются ли интервалы
14. Нахождение пересечения интервалов
15. Взятие левого конца интервала
16. Взятие правого конца интервала
17. Нахождение, является ли интервал нуль-содержащим

#### **7.4. Псевдослучайный генератор чисел**

Для различных целей в пакете реализован псевдослучайный генератор чисел. Он имеет следующие функции:

1. Генерация вещественного числа, равномерно распределенного в отрезке.

2. Генерация целого числа, равномерно распределенного в отрезке.
3. Генерация вещественного числа, имеющего нормальное распределение с заданными параметрами  $\alpha$ ,  $\mu$ .

Был использован язык C#, на котором был написан «класс-обертка». Он импортирует все функции из низкоуровневой библиотеки и отвечает за исполнение «неуправляемого» (`unmanaged`) кода. Данный инструментарий обеспечивает возможности для быстрого и безопасного исполнения пакета. Он позволяет решить следующие проблемы:

1. Автоматическое слежение среды исполнения управляемого кода за выделенной в куче памятью с помощью «сборщика мусора» (`Garbage Collector`).
2. Слежение за режимом округления из неуправляемого кода, что позволяет разделить логику работы с вещественными числами
3. Использование LINQ-запросов, которые могут использовать удобный встроенный инструментарий, например встроенные функции сортировки и т. д.
4. Использование Windows-специфичных инструментов для создания графических файлов
5. Встроенная потоковая параллелизация
6. Программное разделение уровней абстракций низкого и высокого уровня

# Заключение

## Выводы

В ходе написания работы

1. Была выдвинута концепция для создания новой функционально-граничной арифметики, которая улучшает свойства классической интервальной и аффинной арифметик.
2. Были введены арифметические операции между интервалами  $\mathbb{FR}$ .
3. Была введена интегральная характеристика для оценки качества приближения диаграмм зависимости.
4. Была написана библиотека для работы с направленным округлением.
5. Была написана программа оперирования классическими и функционально-граничными интервалами.
6. Проведено сравнение классической, функционально-граничной интервальных и аффинной арифметик по интегральной характеристике в выражения с одной двумя переменными. По итогам сравнения показано превосходство функционально-граничной интервальной арифметики.
7. Функционально-граничная арифметика была применена для нахождения оценок объединённых множеств решений различных ИСЛАУ со связями. В результате было показано превосходство функционально-граничной интервальной арифметики над классической и аффинной.



## Дальнейшие планы работы

Написанная работа открыла перспективы для дальнейшего изучения и развития функционально-граничной арфиметики:

1. Получение априорных теоретических оценок для интегральной характеристики.
2. Повышение эффективности для операции деления.
3. Оптимизация процедуры  $F_{\downarrow}$  и  $F_{\uparrow}$  для более эффективного приближения объединения интервалов  $\mathbb{FR}$ .
4. Улучшение архитектуры программы и повышение быстродействия.
5. Введение других операций, таких как: взятие модуля, возведение в квадрат, взятие квадратного корня, ...

## Список литературы

1. IEEE Standard for Floating-Point arithmetic. Microprocessor Standards Committee of the IEEE Computer Society: 29 August 2008. — 58 p.
2. <https://docs.microsoft.com/ru-ru/cpp/overview/languages-cpp>.
3. **Beeck H.**, Über Struktur und Abschätzungen der Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten. — München: Computing 10, 1972. — 231-244 p.
4. **Шарый С. П.** Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск: Издательство «XYZ», 2020. — 637 с.
5. **Ахмеров Р. Р.** Интервально-аффинный метод Гаусса для систем со связями // Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск, 2005. — Т. 4 — С. 9-27.
6. **Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков.** Численные методы. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.
7. **Computational** complexity and feasibility of data processing and interval computations / V. Kreinovich, A. Lakeyev, J. Rohn, P. Kahl — Springer-Science+Business Media, B.V., 1998. — 459 p.
8. **Nickel K.** Die Überschätzung des Wertebereichs einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme. — München: Computing 18, 1997. — 15-46 p.

9. **И. А. Шарая** О дистрибутивности в классической интервальной арифметике. // Вычислительные технологии. — Новосибирск, 1997. — Том 2(1) — 13 с.
10. **Ratschek H.** Die Subdistributivität der Intervallarithmetik. — ZAMM 51, 1971. — 189–192 p.
11. **Standardized** notation in interval analysis / R. B. Kearfott, M. T. Nakao, A. Neumaier, S. M. Rump, S. P. Shary, P. van Hentenryck. — Вычислительные технологии. — Новосибирск, 2010. — Том 15(1) — 7.
12. **David M. Gay** Interval Least Squares — a Diagnostic Tool. // Reliability in computing: the role of interval methods in scientific computing Pages — AT&T Bell Laboratories, 1988. — 183–205 p.
13. **Sergey P. Shary, Behnam Moradi** Solving interval linear least squares problems by PPS-methods // URL: <https://arxiv.org/abs/2001.07146>.