

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет                      Механико-математический факультет

Кафедра                        Математического моделирования

Направление подготовки      Прикладная математика и информатика

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Нелюбин Алексей Алексеевич

Тема работы: Развитие аналога дисперсии оценок параметров в интервальных  
регрессионных моделях

**«К защите допущен»**

Заведующий кафедрой,  
д. ф.-м. н., проф.

Шарый С.П. / \_\_\_\_\_  
(Фамилия И.О.)                      (Подпись)

« .. » ..... 20 .. г.

**Научный руководитель**

д. ф.-м. н., проф.  
в. н. с., ИВТ СО РАН

Шарый С.П. / \_\_\_\_\_  
(Фамилия И.О.)                      (Подпись)

« .. » ..... 20 .. г.

Дата защиты: « .. » ..... 20 .. г.

Новосибирск, 2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>ПОИСК МАКСИМУМА РАСПОЗНАЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>МЕРА ВАРИАБЕЛЬНОСТИ</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>АЛГОРИТМЫ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРОГРАММЫ</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ</b>	<b>22</b>
6.1	Плохообусловленная матрица . . . . .	22
6.2	Важность использования минимума числа обусловленности	24
6.3	Недоопределенная система . . . . .	27
6.4	Влияние ширины матрицы на оценку для недоопределенных систем . . . . .	29
6.5	Проблема поиска минимального числа обусловленности . .	31
6.6	Связь характеристик матрицы и величины оценки . . . . .	34
<b>7</b>	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>40</b>
<b>8</b>	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b>	<b>44</b>
8.1	Оптимальное внешнее оценивание допускового множества решений . . . . .	44
8.2	Поиск минимального числа обусловленности . . . . .	45

# 1 ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задач перед исследователем ставится цель проанализировать данные, полученные эмпирическим путем. Другой задачей является предоставление наиболее точного предсказания того, как будет в дальнейшем протекать исследуемое химическое, физическое или экономическое явление по результатам некоторого исследования. Проблемы такого рода решаются многочисленными методами анализа данных.

Анализ данных — это область научных знаний, занимающаяся извлечением полезной информации из экспериментальных результатов, а также развитием и усовершенствованием существующих вычислительных алгоритмов и математических моделей, связанных с анализом данных. Анализом данных в той или иной мере занимаются следующие математические науки: Машинное обучение, Математическая статистика, а также методы обработки данных, основанные на Интервальном анализе. Каждая из этих наук использует уникальные, по большей части различные, подходы, которые имеют свои преимущества и недостатки.

Наиболее традиционным методом предсказания поведения какого-либо процесса является построение распределения случайной величины. В этом методе экспериментальные данные рассматриваются, как выборочные значения некоторой, вообще говоря, заранее неизвестной случайной величины. Согласно теореме Гливенко-Кантелли, эмпирическая функция распределения с ростом выборки стремится к функции распределения необходимой случайной величины. Опираясь на этот факт, методами математической статистики можно получить требуемое распределение случайной величины.

Казалось бы, такой подход решает практически все проблемы анализа, однако, тот факт, что мы используем понятие случайной величины, накладывает серьезные ограничения на исследуемое явление. Как известно, основой теории вероятностей является понятие статистической устойчивости. Если для каждого события  $\xi$ , связанного со случайным экспериментом  $\Omega$ , можно указать такое число  $\epsilon$ , что в длинном ряду

повторений эксперимента  $\Omega$  частота события  $\xi$  окажется приблизительно равной  $\mu$ , то имеет место *статистическая устойчивость* [1]. Можно заметить, что существуют эксперименты, которые не подходят под это определение. Примером нарушения статистической устойчивости может служить колебание температуры воды в океане. По экспериментальным данным был рассчитан параметр статистической устойчивости. По вычисленным параметрам было обнаружено, что колебания температуры воды носят выраженный статистически неустойчивый характер. Другие примеры нарушения статистической устойчивости можно найти в работе [2]. В подобной рода ситуациях, когда данные являются быстроменяющимися или в них отсутствует устойчивость, наиболее разумно использовать методы обработки данных, основанные на Интервальном анализе. Интервальный анализ — это математическая дисциплина, предметом которой является решение задач с интервальными (или, более общо, ограниченными) неопределённостями и неоднозначностями в данных, возникающими в постановке задачи или на промежуточных стадиях процесса решения.

При решении задач обработки экспериментальных данных, зачастую, мы получаем несколько оценок, поэтому нам необходимо выбрать наиболее качественную из них, которая обладает наименьшей чувствительностью ко входным данным. Вследствие чего встает задача ввести меру вариабельности для наших оценок. В теории вероятностей эту роль играет дисперсия, характеризующая рассеивание значений случайной величины.

Целью данной работы является анализ одной из возможных конструкций аналога дисперсии в интервальных методах обработки данных.

Приведем возможную меру вариабельности в задаче восстановления линейной зависимости, когда по эмпирическим данным необходимо построить линейную зависимость, которая наилучшим образом соответствует этим данным. Строго говоря, данная задача заключается в поиске параметров  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  линейной функции вида

$$y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \quad (1)$$

по данным измерениям независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и соответствующим значениям  $y$ .

Исходными данными задачи восстановления зависимости (1) являются набор значений независимых переменных  $x_i$  и зависимой переменной  $y$ , полученных в результате проведения  $m$  экспериментов:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x}_{11}, & \mathbf{x}_{12}, & \dots, & \mathbf{x}_{1n}, & \mathbf{y}_1 & \\ \mathbf{x}_{21}, & \mathbf{x}_{22}, & \dots, & \mathbf{x}_{2n}, & \mathbf{y}_2 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{x}_{m1}, & \mathbf{x}_{m2}, & \dots, & \mathbf{x}_{mn}, & \mathbf{y}_m. & \end{array} \quad (2)$$

Будем считать, что эти данные имеют интервальную неопределенность. В дальнейшем жирным шрифтом мы будем обозначать интервалы. При подстановке экспериментальных данных в зависимость (1) получим интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\mathbf{X}\beta = \mathbf{y} \quad (3)$$

с матрицей размера  $m \times n$   $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{ij})$  и  $m$ -мерным вектором  $\mathbf{y}$ .

Параметры функциональной зависимости могут быть по-разному согласованы с экспериментальными данными. В данной работе основное внимание будет уделено сильному согласованию параметров [3]:

*Будем говорить, что набор параметров  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  линейной зависимости (1) сильно согласуется с интервальными экспериментальными данными  $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in}, \mathbf{y}_i, i = 1, 2, \dots, m$ , если для каждого  $i$ -го наблюдения для любых значений  $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, x_{i2} \in \mathbf{x}_{i2}, \dots, x_{in} \in \mathbf{x}_{in}$  в пределах измеренных интервалов  $y_i$  на выходе найдётся такое  $y_i \in \mathbf{y}_i$ , что выполняется равенство*

$$y_i = x_{i1}\beta_1 + \dots + x_{in}\beta_n.$$

Сильному согласованию параметров соответствует, так называемое,

допусковое множество решений ИСЛАУ

$$\Xi_{tol}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \{\beta \in \mathbb{R}^n | X\beta \in \mathbf{y} \text{ для любых матриц } X \in \mathbf{X}\}. \quad (4)$$

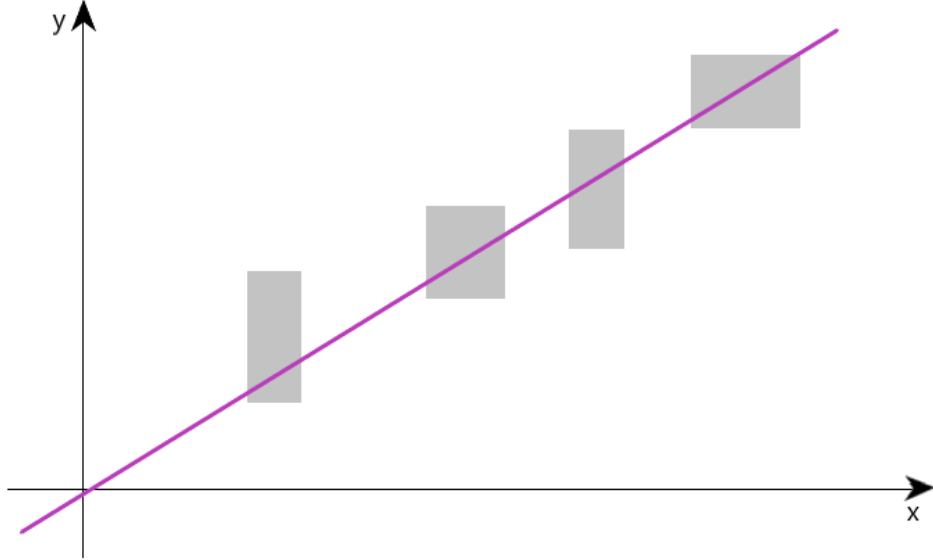


Рис. 1: Иллюстрация сильного варианта согласованности

Решение данной задачи будет находится методом максимального согласования [4], т.е в качестве оценки параметров согласования берется точка в которой достигается максимум распознающего функционала  $\text{Tol}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y})$ . Для допускового множества решений он имеет вид

$$\text{Tol}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{ij} \beta_j \right| \right\} \quad (5)$$

Таким образом, задача (1) сводится к следующей

$$\text{Tol}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) \rightarrow \max_{\beta} \quad (6)$$

Если  $\max \text{Tol} > 0$ , то допусковое множество решений непусто и в качестве оценки параметров задачи будет взято  $\hat{\beta} = \arg \max \text{Tol}$ , если же  $\max \text{Tol} < 0$ , то допусковое множество решений пусто. В случае равенства распознающего функционала нулю допусковое множество решений состоит из одной точки равной  $\arg \max \text{Tol}$ .

В качестве величины, которая бы характеризовала вариабельность оценки параметров  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ , полученных методом максимума согласования, была предложена величина

$$\text{IVE}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \left( \min_{X \in \mathbf{X}} \text{cond} X \right) \cdot \left\| \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol} \right\| \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\text{mid } \mathbf{y}\|}.$$

В этой формуле используется чебышёвская норма, однако, она применима только для случая, когда матрица системы квадратная, так как в противоположном ситуации число обусловленности неопределенно. В случае прямоугольных систем стоит перейти к евклидовой норме и соответствующей ей спектральной матричной норме. Тогда эта величина, с учетом согласования норм

$$\|y\|_{\infty} \leq \|y\|_2 \leq \sqrt{n} \|y\|_{\infty},$$

примет следующий вид

$$\text{IVE}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \sqrt{n} \left( \min_{X \in \mathbf{X}} \text{cond} X \right) \cdot \left\| \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol} \right\| \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\text{mid } \mathbf{y}\|}.$$

Кроме предыдущей меры, также стоит отметить существование меры относительной вариабельности

$$\left( \min_{X \in \mathbf{X}} \text{cond} X \right) \cdot \max \text{Tol}.$$

Под  $\text{cond}$  мы понимаем число обусловленности, которое в общем случае вычисляется (для квадратных матриц) по формуле

$$\text{cond} X = \|X\| \cdot \|X^{-1}\|,$$

в спектральной норме эта величина может быть вычислена также для прямоугольных матриц по следующей формуле

$$\text{cond} X = \frac{\sigma_{\max}(X)}{\sigma_{\min}(X)},$$

где  $\sigma(X)$  — сингулярное число матрицы  $X$ .

Вывод формулы для значения нашей меры основан на следующем соотношении из теории вычислительных методов

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\text{cond}X) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

## 2 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ

В этой главе будет приведено небольшое обоснование того, почему для исследования было выбрано именно допусковое множество и сильная согласованность.

Помимо рассмотренной ранее сильной согласованности существует, так называемая, слабая согласованность [5], иногда слово слабая опускают. Приведем ее определение:

*Будем говорить, что набор параметров  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  линейной зависимости (1) (слабо) согласуется с интервальными экспериментальными данными  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, y_i, i = 1, 2, \dots, m$ , если для каждого  $i$ -го наблюдения в пределах измеренных интервалов найдутся  $x_{i1} \in \mathbf{x}_{i1}, x_{i2} \in \mathbf{x}_{i2}, \dots, x_{in} \in \mathbf{x}_{in}$  в пределах измеренных интервалов  $y_i$  на выходе найдётся такое  $y_i \in \mathbf{y}_i$ , что выполняется равенство*

$$y_i = x_{i1}\beta_1 + \dots + x_{in}\beta_n.$$

Такому роду согласованности удовлетворяет, так называемое, объединенное множество решений

$$\Xi_{uni}(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \{\beta \in \mathbb{R}^n \mid \text{существует } X \in \mathbf{X}, X\beta \in \mathbf{y}\}.$$

Аналогично допусковому множеству, для объединенного множества также существует распознающий функционал, более того, он не один.



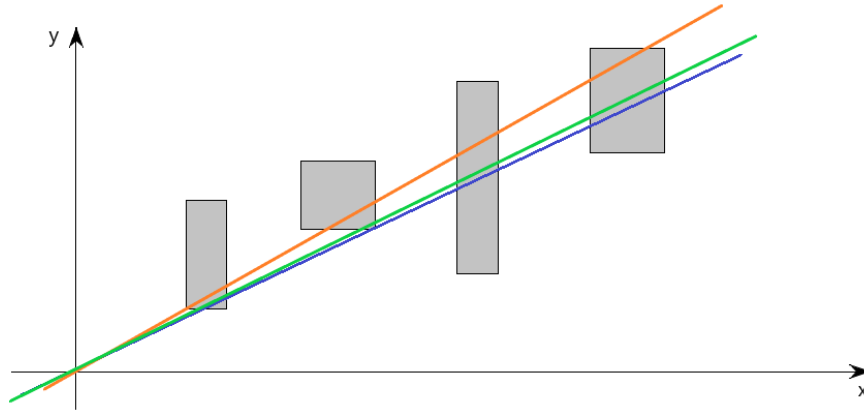


Рис. 2: Иллюстрация слабого варианта согласованности

Приведем 2 различных распознающих функционалов

$$\text{Uni}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{ij} \beta_j \right\rangle \right\},$$

$$\text{Uni}(\beta, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{y}_i + \sum_{j=1}^n (\text{rad } \mathbf{x}_{ij}) |\beta_j| - \left| \text{mid } \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^n (\text{mid } \mathbf{x}_{ij}) \beta_j \right| \right\}.$$

Из теории известно, что объединённое множество решений не всегда может быть ограниченным, зачастую, это множество как раз таки является неограниченным множеством. Примером такого случая служит следующая система

$$\begin{pmatrix} [-1.0, 1.0] & [0.0, 0.0] & [0.0, 0.0] \\ [0.0, 0.0] & [-1.0, 1.0] & [0.0, 0.0] \\ [0.0, 0.0] & [0.0, 0.0] & [-1.0, 1.0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.0, 1.0] \\ [1.0, 1.0] \\ [1.0, 1.0] \end{pmatrix} \quad (7)$$

рисунок этого множества представлен на рис.3 (на этом рисунке множество автоматически обрезано, обрезаем соответствуют наиболее темные области рисунка).

Тот факт, что допустимое множество почти всегда ограничено (исключением является случай, когда в матрице  $\mathbf{A}$  есть линейно зависимые

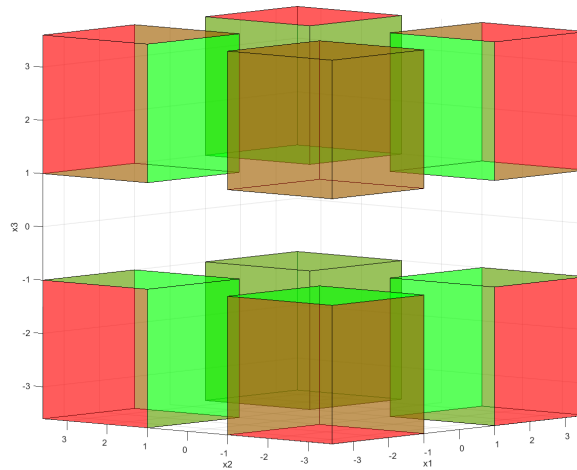


Рис. 3: Рисунок объединенного множества решений системы (7)

вещественные столбцы)[6] и является полиэдральным множеством, делает его более пригодным для исследования нежели объединенное, ограниченность которого не всегда гарантирована. Ограниченность допустимого множества гарантирует, что оценка будет иметь конечную вариабельность. Еще одним преимуществом сильной согласованности над слабой является то, что поиск максимума распознающего функционала выполняется за полиномиальное время, в то время как для слабой эта задача является NP-трудной. Напомним, что задача принадлежит множеству NP-трудных задач, если любая другая задач из класса NP может быть полиномиальная сведена к ней. Из теории NP-трудных задач известно, что для всех NP-трудных задач, известных на данный момент, не существует полиномиальных алгоритмов их разрешения. Также стоит отметить, что в силу определений допустимого и объединенного множеств решений, допустимое множество всегда содержится в объединенном, то есть в условиях сильной согласованности слабая будет всегда иметь место.

### 3 ПОИСК МАКСИМУМА РАСПОЗНАЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА

Задача поиска максимума будет решена с помощью метода отделяющих плоскостей с отсечениями[7]. Данный алгоритм находит минимум выпук-

лой недифференцируемой функции  $f$ , а также координаты в которых достигается этот минимум.

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (8)$$

Алгоритм основан на том, что решение задачи (8) эквивалентно поиску корня выражения  $0 \in \partial f(x)$  ( $\partial f(x)$ —обобщенный градиент), при этом

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\sup_x \{0 \cdot x - f(x)\} = -f^*(0), \quad (9)$$

где  $f^*(g)$  — функция, сопряженная по Лежандру-Фенхелю к  $f(x)$ . Задача (8) может быть сведена к поиску точки пересечения надграфика сопряженной функции  $f^*(g)$  с вертикальной осью  $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ .

В этом алгоритме строятся внешние и внутренние аппроксимации надграфика выпуклыми полиэдральными множествами. Эти аппроксимации с каждым новым вычислением точек сопряженного пространства будут уточняться. При выполнении процедуры уточнения одна из таких границ должна будет сойтись к  $f^*(0)$ .

Полное описание метода отделяющих плоскостей можно найти в работе [7]. Здесь же приведем лишь основные шаги этого алгоритма.

1. Инициализация всех необходимых переменных: счетчик итераций, начальное приближение, погрешность.
2. Поиск рекорда  $-\omega_k$  функции  $f$ , где  $\omega_k = \inf_{0 \in U_k(\omega)} \omega$ ,  $U_k$  — внешняя оценка надграфика сопряженной функции  $f^*$ . Данная задача решается рекуррентно  $\omega_k = \max\{\omega_{k-1}, f(x_{k-1})\}$ , причем можно считать, что  $\omega_0 = -\infty$ .
3. Поиск  $\zeta^{(k)} = (z^{(k)}, \xi_k)$ , которая является проекцией точки  $(0, \omega_k)$  на полиэдр  $D_k$  внутренней аппроксимации надграфика сопряженной функции. Проектирование проходит с помощью метода подходящих аффинных подпространств [8].

4. Вычисляется следующее приближение к решению задачи(8)

$$x_k = -z^{(k)}/\xi_k.$$

5. Находится  $\bar{u}$  — уровень отсечения верхней части надграфика ері  $f^*$ , для чего необходимо решить задачу линейного программирования

$$\bar{u} = -\min_x \max_k \{f(x) + (x - x^k)g_k\}, \text{ где } g_k \text{ является субградиентом.}$$

Если решения данной задачи не существует, необходимо перейти к 8-му шагу.

6. Решается задача одномерной недифференцируемой оптимизации

$$\sup_{(g,\epsilon) \in \text{epi} f^*, \epsilon \leq \bar{u}} \{gx - \epsilon\} = -\bar{u} + \inf_{\lambda \geq 1} \{\lambda(\bar{u} + f(\lambda^{-1}x))\}.$$

7. Модифицируется приближение

$$x_k = \lambda_k^{-1}x_k.$$

8. Вычисляется  $g_k \in \partial f(x_k)$ ,  $f^*(g_k) = g_k x_k - f(x_k)$ , добавить пару  $(g_k, f^*(g_k))$  к полиэдру  $D_k: D_{k+1} = \text{conv} \{D_k, (g_k, f^*(g_k))\}$ , где  $\text{conv}$  обозначает выпуклую оболочку множества.

9. Проверяются условия остановки, если хотя бы 1 из них выполнено, то процесс прекращается, в противном случае, счетчик итераций увеличивается на 1, и процесс продолжается с шага 1.

Распознающий функционал является вогнутой функцией, доказательство этого факта приведено в [4]. Поэтому наша задача равносильна задаче минимизации вогнутой функции. Решение этой задачи будет найдено методом отделяющих плоскостей

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(\gamma, \mathbf{X}, \mathbf{y}) = \min_{\gamma \in \mathbb{R}^n} (-\text{Tol}(\gamma, \mathbf{X}, \mathbf{y})).$$

Приведём несколько примеров интервальных систем линейных уравнений и соответствующих им значений распознающего функционала.

В качестве первого примера рассмотрим следующую ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [3.0, 7.0] & [-3.0, 2.0] \\ [-3.0, 2.0] & [-3.0, 1.0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-5.0, 5.0] \\ [-4.0, 4.0] \end{pmatrix} \quad (10)$$

Максимум распознающего функционала данной системы, вычисленный с помощью метода отделяющих плоскостей, равняется 4 и достигается в точке  $x^* = (0.0, 0.0)^T$  (рис. 4).

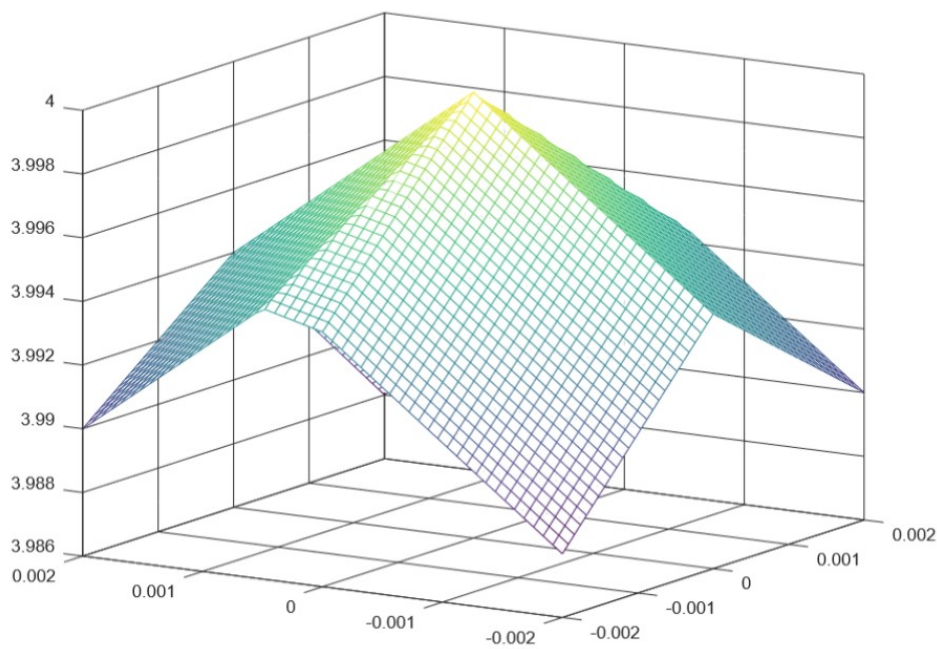


Рис. 4: График распознающего функционала системы (10)

Тот факт, что максимум распознающего функционала строго больше нуля свидетельствует о том, что допустовое множество непусто и состоит более чем из одного элемента (рис.5).

Иная ситуация происходит со следующим примером:

$$\begin{pmatrix} [2.0, 4.0] & [-2.0, 1.0] \\ [-1.0, 2.0] & [2.0, 4.0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2.0, 2.0] \\ [0.0, 0.0] \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Максимум распознающего функционала системы (11) равен нулю, что свидетельствует о том, что допустовое множество состоит из одной

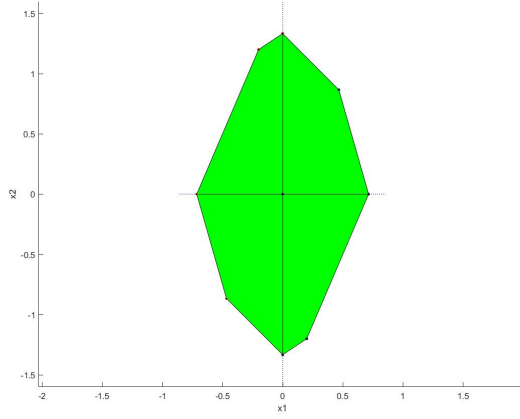


Рис. 5: Рисунок допускового множества системы (10)

единственной точки, в данном случае  $(0, 0)$ . Если же максимум распознающего функционала принимает отрицательные значения, то допусковое множество решений вовсе пусто. Примером такого случая является следующая система:

$$\begin{pmatrix} [2.0, 4.0] & [-2.0, 1.0] \\ [-1.0, 2.0] & [2.0, 4.0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.0, 2.0] \\ [1.0, 2.0] \end{pmatrix}. \quad (12)$$

## 4 МЕРА ВАРИАБЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим интервальную систему уравнений

$$Ax = \mathbf{b} \quad (13)$$

с точечной матрицей  $A$  размера  $m \times n$  и интервальным вектором  $\mathbf{b}$  размера  $m$ . Предположим, что допусковое множество решений этой системы непусто

$$\Xi_{tol}(A, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \in \mathbf{b}\} \neq \emptyset. \quad (14)$$

Наша цель — несложно и быстро оценить размеры этого множества решений. Для достижения этой цели будем искать оценку  $\max \|x' - x''\|_2$  для всех  $x', x''$  из  $\Xi_{tol}(A, \mathbf{b})$ , т.е. оценку диаметра этого множества. Она будет получена как удвоенная величина  $\max \|x' - \hat{x}\|_2$ , где  $x'$  — произ-

вольная точка и допускового множества решений, а в качестве  $\hat{x}$  будет взято

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, A, \mathbf{b}).$$

Пусть точка  $x'$  — некоторая точка из допускового множества решений,  $\hat{x}$  определена выше. Эти точки являются решениями систем линейных алгебраических уравнений с матрицей  $A$  и правыми частями  $b'$  и  $\hat{b}$ . Если  $\hat{x} \neq 0$  и  $\hat{b} \neq 0$ , то можно применять следующее неравенство

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \text{cond}_2 A \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2},$$

где  $\Delta x = x' - \hat{x}$  и  $\Delta b = b' - \hat{b}$  (доказательство этого неравенства можно найти в [9]). Тогда имеем

$$\frac{\|x' - \hat{x}\|_2}{\|\hat{x}\|_2} \leq \text{cond}_2 A \frac{\|b' - \hat{b}\|_2}{\|\hat{b}\|_2}, \quad (15)$$

что влечет за собой следующую оценку

$$\|x' - \hat{x}\|_2 \leq \|\hat{x}\|_2 \cdot \text{cond}_2 A \frac{\|\Delta b\|_2}{\|\hat{b}\|_2}. \quad (16)$$

В этом выражение значение числа обусловленности может быть найдено по формуле

$$\text{cond}_2 A = \frac{\lambda_{\max}(A^\top A)}{\lambda_{\min}(A^\top A)},$$

где  $\lambda$  — собственное число. Таким способом число обусловленности ищется в системе Octave. Точка  $\hat{x}$  находится, как аргумент максимума распознающего функционала допусковго множества решений. Поэтому для практического применения формулы (16) необходимо знать значения  $\|b' - \hat{b}\|_2$  и  $\|\hat{b}\|_2$ .

В качестве  $\|\hat{\mathbf{b}}\|_2$  будет принято

$$\|\hat{\mathbf{b}}\|_2 \approx \|\text{mid } \mathbf{b}\|_2,$$

где  $\text{mid } \mathbf{b}$  — середина интервала  $\mathbf{b}$ . Однако, в некоторых случаях эта точка может быть нулевой, в такой ситуации можно взять близкую к середине точку.

Для определения приращения правой части  $\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}' - \hat{\mathbf{b}}$  дополнительно рассмотрим систему

$$Ax = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{17}$$

правая часть которой получена сужением  $\mathbf{b}$  на величину

$$C = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, A, \mathbf{b}),$$

то есть

$$\tilde{\mathbf{b}} = [\underline{\mathbf{b}} - C, \bar{\mathbf{b}} + C].$$

Из свойств максимума распознающего функционала следует, что если одновременно увеличить или уменьшить  $\text{rad } \mathbf{b}$  на некоторую величину, то значение максимума также изменится на это же число. Строго говоря, если взять некоторую константу  $D$  и  $m$ -мерный вектор

$$\mathbf{e} = ([-1, 1], [-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top,$$

то для системы  $Ax = \mathbf{b} + D\mathbf{e}$

$$\text{Tol}(x, A, \mathbf{b} + D\mathbf{e}) = \text{Tol}(x, A, \mathbf{b}) + D,$$

что влечет

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, A, \mathbf{b} + D\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, A, \mathbf{b}) + D.$$



Вообще говоря, предыдущее соотношение верно не только для точечных, но и для интервальных матриц системы, что следует из вида распознающего функционала допускового множества решений.

Исходя из предыдущих рассуждений, для системы (17) справедливо

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, A, \tilde{\mathbf{b}}) = 0.$$

Так как максимум распознающего функционала равен нулю, допусковое множество имеет пустую внутренность, то есть имеет нулевую ширину. Вообще говоря, нулевая ширина является допущением, так как при равенстве нулю распознающего функционала допусковое множество не всегда является одноточечным. Также стоит отметить, что  $\hat{x}$ , фигурировавшее до этого, является также аргументом максимума распознающего функционала и для системы (17), т.е. точка, удовлетворяющая системе  $A\hat{x} = \hat{\mathbf{b}}$ , лежит в  $\tilde{\mathbf{b}}$ .

Из всего вышеизложенного следует, что решение интервальной системы линейных уравнений  $Ax = \mathbf{b}$  может быть получено из решения системы  $Ax = \tilde{\mathbf{b}}$  увеличением каждой компоненты в правой части на  $[-C, C]$ , где

$$C = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}.$$

Таким образом, чтобы сделать оценку (16) достижимой, полагаем

$$[-\Delta b, \Delta b] = ([-C, C], [-C, C], \dots, [-C, C])^\top.$$

Следовательно, в неравенстве (16) полагаем

$$\|\Delta b\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol},$$

если используется чебышёвская норма  $\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$ , или же величину, получающуюся из нее умножением на коэффициент, возникаю-

щий из условий эквивалентности норм

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \sqrt{n} \|y\|_\infty.$$

Тогда конечное выражение для оценки размеров допускового множества решений для систем с точечной матрицей  $A$  примет вид

$$\|x' - \hat{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \left\| \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol} \right\|_2 \cdot \text{cond}_2 A \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\text{mid } \mathbf{b}\|_2}. \quad (18)$$

Теперь перейдем к рассмотрению системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с интервальной матрицей  $\mathbf{A}$ . Также, как и ранее, полагаем

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}$$

— аргумент максимума распознающего функционала ждя системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ ,  $x'$  — произвольная точка допускового множества решений. Из свойств допускового множества следует, что для системы с интервальной матрицей  $\mathbf{A}$  его можно представить в виде пересечения допусковых множеств систем с точечными матрицами  $A$  из  $\mathbf{A}$

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \in \mathbf{b}\} = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{b}). \quad (19)$$

Тогда, используя неравенство (18), получим оценку размеров допускового множества решений системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$

$$\|x' - \hat{x}\|_2 \leq \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \sqrt{n} \cdot \left\| \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol} \right\|_2 \cdot \text{cond}_2 A \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\text{mid } \mathbf{b}\|_2} \right\}$$

После занесения минимума под скобки получим неравенство, в правой части которого, стоит величина, которая будет использована нами, как мера, характеризующая размеры допускового множества решений

$$\|x' - \hat{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \left\| \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol} \right\|_2 \cdot \left( \min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond}_2 A \right) \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\text{mid } \mathbf{b}\|_2} \quad (20)$$

После всех проведенных выкладок имеем величину, с помощью кото-

рой можно быстро оценивать размеры допускового множества

$$\text{IVE} = \sqrt{n} \cdot \left\| \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol} \right\|_2 \cdot (\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond}_2 A) \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\text{mid } \mathbf{b}\|_2}. \quad (21)$$

Для анализа нашей оценки рассмотрим несколько численных примеров. Приведем краткое описание используемых для этого алгоритмов и программ.

## 5 АЛГОРИТМЫ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРОГРАММЫ

Для проверки адекватности этой меры будут применены следующие методы: с помощью библиотек IntLinIncR3 [10] и IntLinIncR2 [11] проделана визуализация допусковых множеств решений, а также, с использованием стандартных методов среды Octave, были получены графики распознающих функционалов. Также построена оптимальная внешняя оценка допускового множества решений методами линейного программирования с использованием теоремы Рона [12].

### Теорема 1 (Рона о допусковом множестве решений)

*Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $x = x' - x''$ , где  $n$ -векторы  $x'$  и  $x''$  удовлетворяют системе линейных неравенств*

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \overline{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \overline{\mathbf{A}}x'' \leq -\underline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Используя эту теорему, можно получить задачу линейного программирования, которая решается простым симплекс-методом. То есть задача поиска внешней оценки допускового множества решений сводится к поиску максимума и минимума  $n$  линейных функций вида

$$f_i(x', x'') = x'_i - x''_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

с системой ограничений вида (22). Код программы, написанной в системе математический вычислений Octave, приведен в Приложении 1. Задача линейного программирования в этой реализации будет решена с помощью встроенного пакета glpk.

Стоит отметить, что такая система ограничений не является единственной. Помимо теоремы Рона существует теорема И.А. Шарой [13], в которой описана иная система ограничений.

**Теорема 2 (И.А. Шарой о допусковом множестве решений)**

*Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда она является решением системы двусторонних линейных неравенств*

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i \leq ax \leq \overline{\mathbf{b}}_i, \\ a \in \text{vert}\mathbf{A}_i, \\ i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (24)$$

*где вектор-строки  $a$  пробегают всевозможные вершины интервальных строк матрицы  $\mathbf{A}$ . Количество неравенств в этой системе не превосходит суммы числа вершин во всех интервальных векторах  $\text{vert}\mathbf{A}_i$ :  $i = 1, \dots, m$ , и, тем более, не превосходит  $m \cdot 2^n$ .*

В этой теореме под  $\text{vert}\mathbf{A}_i$  понимаем

$$\text{vert}\mathbf{A}_i = \left\{ A_i \in \mathbb{R}^n \mid A_{ij} \in \left\{ \underline{\mathbf{A}}_{ij}, \overline{\mathbf{A}}_{ij} \right\}, \quad j = 1, \dots, n. \right\}$$

Поиск внешней оценки допускового множества решений с использованием этой теоремы не был реализован ввиду сложности решения задачи линейного программирования с такой системой ограничений. Данная теорема приводится лишь в целях ознакомления.

Кроме способа использующего теорему Рона был реализован другой алгоритм, который также сводится к задаче линейного программирования. В этом методе пространство разбивается на ортанты и в каждом из этих ортантов происходит поиск минимального по включению интервального вектора, содержащего допусковое множество решений. После

того, как будут найдены все такие вектора, будет взята их интервальная оболочка, которая как раз таки и станет оценкой допускового множества решений по всему пространству. Строго эта задача формулируется в виде задачи линейного программирования

$$f(y) = c^\top y, \quad c = (0, \dots, s_\nu, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (25)$$

— целевая функция. где  $y = |x|$ ,  $x \in \Xi_{tol} \cap \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}$  — некоторый ортант,  $s_\nu = \{-1, 1\}$  в зависимости от ортанта.

Система ограничений выглядит так

$$\begin{cases} (\text{mid } \mathbf{A} \cdot S + \text{rad } \mathbf{A})y \leq \text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b}, \\ (-\text{mid } \mathbf{A} \cdot S + \text{rad } \mathbf{A})y \leq -\text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b}, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad (26)$$

где  $S = \text{diag} \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $s_i = \text{sgn } x_i$ .

Эта система следует из характеристики Рона:

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq -\text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}. \quad (27)$$

Полный вывод этой системы ограничений можно найти в статье [14].

Также кроме описанных выше методов, находящих внешнюю оценку допускового множества методами линейного программирования, был реализован интервальный метод Гаусса-Зейделя. Этот метод реализуем для решения нашей задачи только в арифметике Каухера, поэтому его реализация была осуществлена на языке JAVA, так как для этого языка был написан пакет JInterval(Описание этого пакета приведено в [15]), в котором описана арифметика Каухера. Так как программа, реализующая метод Гаусса-Зейделя, имеет большой размер (ввиду многословности языка и необходимости написания множества классов), здесь она не будет описана.

## 6 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

### 6.1 Плохообусловленная матрица

Рассмотрим линейную зависимость вида

$$y(a_1, a_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2. \quad (28)$$

Будем считать, что было произведено 3 эксперимента, результаты которых можно представить в виде системы

$$\begin{pmatrix} [50.995, 51] & [51.995, 52] \\ [51.995, 52] & [52.995, 53] \\ [52.995, 53] & [53.995, 54] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [51.975, 52] \\ [52.975, 53] \\ [53.975, 54] \end{pmatrix}. \quad (29)$$

С помощью прямого перебора всех угловых матриц системы можно найти минимальное число обусловленности, равное  $\min \text{cond}_2 \mathbf{A} = 5303$ , что говорит о том, что эта матрица является плохообусловленной. Так как матрица  $\mathbf{A}$  довольно узкая, можно было бы считать, что  $\min \text{cond}_2 \mathbf{A} \approx \text{cond}_2(\text{mid } \mathbf{A})$ . Однако такое упрощение уместно только для узких систем, если система широкая, то  $\text{cond}_2(\text{mid } \mathbf{A})$  может быть в разы больше минимального числа обусловленности.

С использованием метода отделяющих плоскостей был найден максимум распознающего функционала и аргумент, на котором этот максимум достигается,  $\max \text{Tol} \approx 0.01$ ,  $\arg \max \text{Tol} = (0.01, 0.99)^\top$ .

Так как максимум распознающего функционала больше нуля допусковое множество решений непусто и состоит более чем из одной точки

Можно заметить, что допусковое множество практически совпадает с пиком распознающего функционала.

Оптимальная оценка допускового множества, найденная с использо-

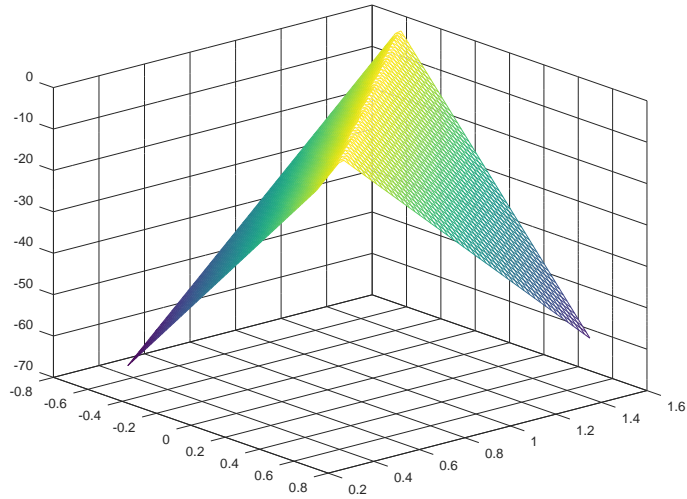


Рис. 6: График распознающего функционала системы (29).

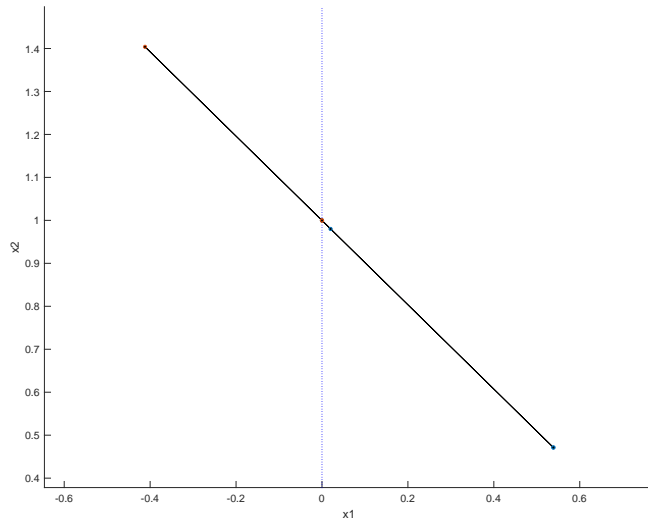


Рис. 7: Рисунок допускового множества системы (29).

ванием теоремы Рона, имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} [-0.41189, 0.53865] \\ [0.47132, 1.40392] \end{pmatrix}$$

Значение меры вариабельности для этой системы равно

$$\text{IVE} = \sqrt{2} \cdot 5303 \cdot \sqrt{0.01^2 + 0.99^2} \cdot \frac{0.01}{\sqrt{52^2 + 53^2 + 54^2}} = 0.80873,$$

тогда брус с центром в точке  $\arg \max \text{Tol} = (0.01, 0.99)^\top$  и шириной равной  $2\text{IVE}$  принимает вид

$$\begin{pmatrix} [-0.79873, 0.81873] \\ [0.18126, 1.79873] \end{pmatrix}$$

Видно, что эта оценка весьма близка к оптимальной оценке, несмотря на то, что число обусловленности для матрицы системы очень велико. Это говорит о том, что такая мера может применяться для оценивания размеров допускового множества, и вариабельности оценки полученной методом максимального согласования, даже для плохообусловленных матриц.

Покажем, что использование минимума числа обусловленности играет большую роль в адекватности данной меры.

## 6.2 Важность использования минимума числа обусловленности

Пусть рассматривается линейная зависимость того же вида, что и в предыдущем примере, но матрица левой части интервальной системы линейных алгебраических уравнений будет более широкой. Также немного расширим вектор правой части. Тогда получим систему

$$\begin{pmatrix} [50, 51] & [51, 52] \\ [51, 52] & [52, 53] \\ [52, 53] & [53, 54] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [50, 54] \\ [51, 55] \\ [52, 56] \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Для такой матрицы стоит искать число обусловленности осторожно, так как эта матрица неполного ранга. Действительно, в интервальной матрице  $\mathbf{A}$  существует точечная матрица  $\tilde{\mathbf{A}}$ , столбцы которой линейно



зависимы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 51 & 51 \\ 52 & 52 \\ 53 & 53 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, случайно взяв для оценки число обусловленности матрицы  $\tilde{A}$ , можно было бы получить бесконечность.

Также в этом примере в качестве минимального числа обусловленности нельзя брать число обусловленности средней матрицы системы, так как  $\text{cond}(\text{mid } \mathbf{A}) = 6626$ , что превосходит минимальное число обусловленности, равное 108, более чем в 60 раз. Минимальное же число обусловленности достигается на матрице

$$\begin{pmatrix} 50 & 52 \\ 51 & 53 \\ 53 & 53 \end{pmatrix},$$

которая была найдена прямым перебором. Для поиска этого числа обусловленности пришлось найти  $2^6$  чисел обусловленности различных угловых матриц. Программа, осуществляющая поиск минимального числа обусловленности представлена в Приложении 2.

Максимум распознающего функционала для этой системы  $\max \text{Tol } \mathbf{A} = 1.49$  и достигается в точке  $(0, 1)$ .

Тогда значение меры вариабельности

$$\text{IVE} = \sqrt{2} \cdot 108 \cdot 1 \cdot \frac{1.49}{\sqrt{54^2 + 55^2 + 56^2}} = 2.39002.$$

Оптимальная оценка допускового множества, найденная с применением теоремы Рона

$$\begin{pmatrix} [-1.5, 2.47] \\ [-1.42, 2.47] \end{pmatrix},$$

что, как и в предыдущем случае, отличается от оценки полученной с

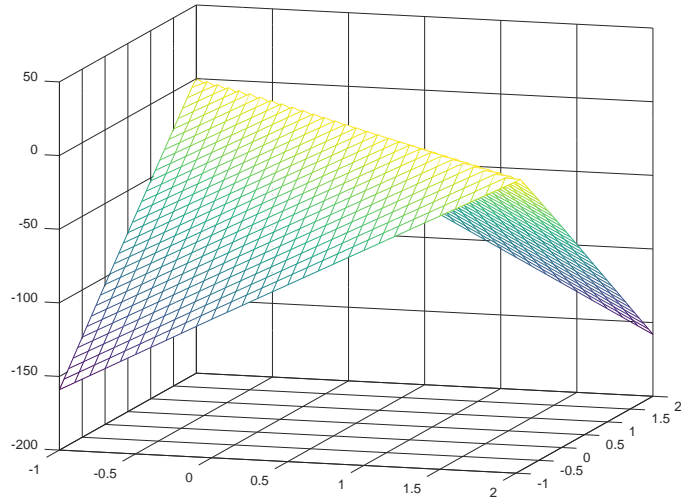


Рис. 8: График распознающего функционала системы (30).

использованием величины IVE

$$\begin{pmatrix} [-2.39002, 2.39002] \\ [-1.39002, 3.39002] \end{pmatrix},$$

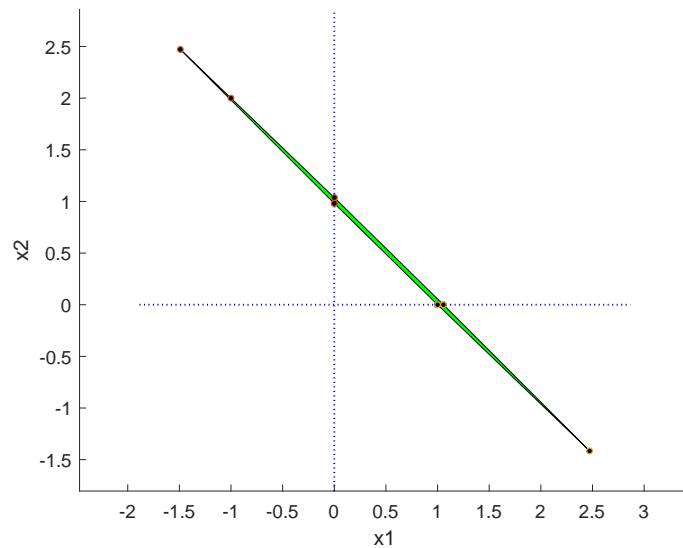


Рис. 9: Рисунок допускового множества системы (30).

Возможно, тот факт, что наша оценка, получаемая с применением меры варибельности IVE, отличается от оптимальной, связано с тем, что допусковое множество имеет довольно узкую ширину. Малая ширина допускового множества решений приводит к тому, что вообще говоря,

любая внешняя оценка будет не совсем оптимальна, так как она будет захватывать много точек не из допускового множества. Как видно, обе рассмотренные к данному моменту системы имеют малую ширину допускового множества, под шириной мы здесь понимаем толщину наклонной темной области. Допусковое множество решений системы (29) вовсе выглядит, как прямая.

### 6.3 Недоопределенная система

Одним из главных преимуществ сильного подхода в задаче восстановления функциональной зависимости является то, что для получения оценки параметров необязательно иметь большую выборку данных. Для решения задачи восстановления зависимости, применяя методы интервального анализа, можно получить оценку параметров используя малую выборку, когда число проведенных экспериментов даже меньше числа неизвестных. Приведем пример такого случая, и исследуем на нем предложенную меру вариабельности.

Рассмотри функциональную зависимость следующего вида

$$y(a_1, a_2, a_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3. \quad (31)$$

Предположим, что для решения задачи восстановления этой функциональной зависимости было проведено лишь два эксперимента. Данные этих экспериментов при подстановке в зависимость образуют интервальную систему алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} [1.0, 2.0] & [0, 0.5] & [0, 0.5] \\ [0, 0.5] & [1.0, 2.0] & [0, 0.5] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.5, 2.5] \\ [0.5, 2.5] \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Как можно заметить, данная система недоопределенная, однако, методами интервального анализа всё равно можно получить оценку параметров зависимости. Для данной системы максимум распознающего функционала допускового множества решений равен  $\max \text{Tol} = 0.35714$  и достига-

ется в точке  $\arg \max \text{Tol} = (0.85714, 0.85714, 0)^\top$ . Эта точка может быть успешно взята в качестве оценки параметров. Подходы, отличные от интервального, скорее всего не дали бы вообще никакого ответа. Минимальное число обусловленности для матрицы системы равно  $\min \text{cond} \mathbf{A} = 1$ . Тогда значение величины IVE равно

$$\text{IVE} = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot 1.2122 \cdot \frac{0.35714}{\sqrt{1.5^2 + 1.5^2}} = 0.35348.$$

Оптимальная внешняя оценка для допускового множества этой системы равна

$$\begin{pmatrix} [0.5, 1.125] \\ [0.5, 1.125] \\ [-1, 2.5] \end{pmatrix},$$

рисунок этого множества приведен ниже

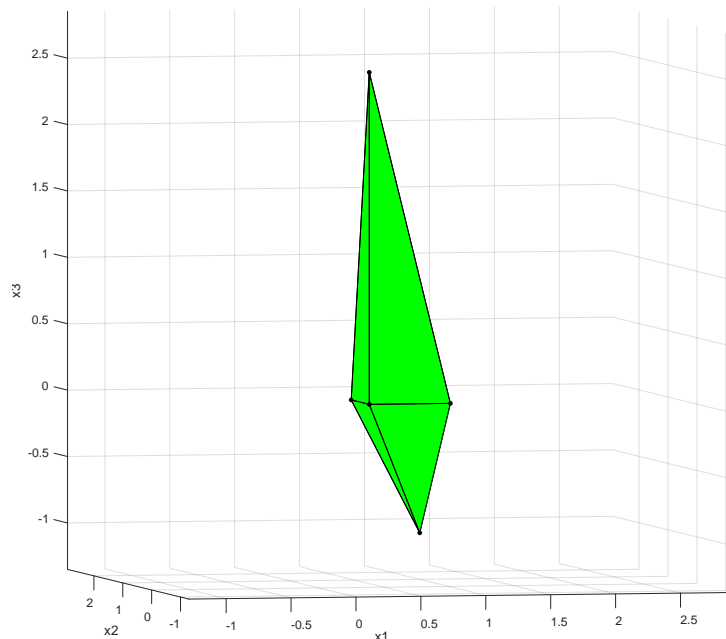


Рис. 10: Рисунок допускового множества системы (32).

Оценка, полученная с использованием величины IVE —

$$\begin{pmatrix} [0.50366, 1.21062] \\ [0.50366, 1.21062] \\ [-0.35714, 0.35714] \end{pmatrix}.$$

Как можно заметить, внешняя оценка, полученная с использованием величины IVE по первым двум компонентам очень хорошо согласуется с оптимальной оценкой. Подобное различие в третьей компоненте было ожидаемо, так как по виду системы можно заметить, что вклад третьей компоненты в каждое их уравнений мал по сравнению с другими переменными. По этому примеру можно сказать, что применение нашей меры дает неплохую оценку даже для недоопределенных систем.

## 6.4 Влияние ширины матрицы на оценку для недоопределенных систем

Предыдущий пример показал, что применение интервального подхода в задачах обработки данных пригодно в условиях малой выборки. Вообще говоря, такой результат можно считать большой удачей. Если внимательно рассмотреть вывод меры вариабельности, можно заметить, что при исследовании системы с точечной матрицей оценка, полученная с использованием этой величины, вообще говоря, не согласуется с реальными размерами допускового множества решений. Для недоопределенной интервальной системы с точечной матрицей, согласно теореме Шарой, допусковое множество не является ограниченным. Это следует из того, что у недоопределенной системы ранг матрицы меньше числа неизвестных. Поэтому, строго говоря, такая оценка не может быть применена для недоопределенных систем. То, что в примере, рассмотренном в предыдущей главе, получилась хорошая оценка, связано с существенной интервальностью матрицы системы. Для более узких систем, близких к точечным, оценка может быть существенно хуже оптимальной. Для демонстрации таких проблем проделаем следующее. Возьмем предыдущую систему и постепенно будем сужать ее матрицу пропорциональ-

но ширине интервалов на величину  $\theta$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij} + \theta \cdot \frac{\text{wid } \mathbf{a}_{ij}}{0.5}]$ . Приведем таблицу с данными измерений, где в третьем столбце приведено отклонение оптимальной оценки от оценки, полученной с помощью величины IVE. В этом примере под отклонением будем понимать величину  $\min(\|\inf \tilde{\mathbf{x}} - \inf \hat{\mathbf{x}}\|, \|\sup \tilde{\mathbf{x}} - \sup \hat{\mathbf{x}}\|)$ , где  $\hat{\mathbf{x}}$ —оптимальная оценка,  $\tilde{\mathbf{x}}$  — оценка, полученная с использованием IVE.

$\theta$	IVE	diff
0	0.35348	0.64654
0.05	0.37283	1.3679
0.1	0.39616	2.5823
0.15	0.42466	4.9183
0.2	0.46005	12.012
0.21	0.46816	15.572
0.22	0.47667	21.512
0.23	0.48560	33.403
0.24	0.49499	69.098

Таблица 1: Расчеты оценок для недоопределенных матриц разной ширины

По результатам, приведенным в таблице, можно увидеть, что, по мере сужения матрицы системы, ошибка, допускаемая нашей оценкой по отношению к оптимальной увеличивается. Это связано с тем, что получаемые матрицы стремятся к точечной

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1.5 & 0.25 \end{pmatrix},$$

для которой допустимое множество, вообще говоря, неограниченное.

Таким образом, при применении такой оценки к недоопределенным системам следует быть осторожным и применять ее только для существенно интервальных систем.

## 6.5 Проблема поиска минимального числа обусловленности

Рассмотрим один пример большей размерности. Рассмотрим функциональную зависимость, в которой необходимо найти оценку 5 параметров по набору измерений

$$y(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5. \quad (33)$$

Экспериментальные данные, имеющие интервальную неопределенность и подставленные в эту зависимость, образуют интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} [1.5, 2.5] & [1, 1.5] & [1, 1.25] & [1, 1.5] & [1, 1.25] \\ [1, 1.5] & [1.5, 2.5] & [1, 1.25] & [1, 1.5] & [1, 1.5] \\ [1, 1.25] & [1, 1.25] & [1.5, 2.5] & [1, 1.25] & [1, 1.5] \\ [1, 1.5] & [1, 1.5] & [1, 1.25] & [1.5, 2.5] & [1, 1.25] \\ [1, 1.25] & [1, 1.5] & [1, 1.5] & [1, 1.25] & [1.5, 2.5] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [1, 3] \\ [1, 3] \\ [1, 3] \\ [1, 3] \end{pmatrix}.$$

При вычислении величины IVE для этой системы можно столкнуться с серьёзной проблемой. При поиске минимального числа обусловленности матриц из предыдущих систем осуществлялся полный перебор всех угловых матриц. Таким образом, для поиска минимального числа обусловленности приходилось вычислять  $2^{m \cdot n}$  чисел обусловленности. В предыдущих примерах данный перебор мог быть осуществлен довольно быстро. Однако, для этой системы пришлось бы перебрать  $2^{25}$  матриц, что приблизительно равно тридцати двум миллионам. Это число достаточно велико. Если учитывать то, что для каждой матрицы придётся находить число обусловленности, то эта задача становится очень трудной с вычислительной точки зрения. Тогда прямой перебор всех матриц становится невыполнимым, и приходится брать число обусловленности приближенно. Во время поиска минимального числа обусловленности предлагается перебирать не все матрицы, а некоторую их часть, например, считать числа обусловленности для каждой  $k$ -й матрицы. В Приложении

2 представлен алгоритм перебирающий все значения, если  $iter$  увеличивать не на 1, а на некоторое  $k$ , то алгоритм будет работать быстрее, что конечно же скажется на точности данного алгоритма. Поэтому число  $k$  следует брать не сильно большим.

В данный момент приходится ограничиваться подобным приближением. Сейчас принимаются попытки создания более эффективного алгоритма поиска минимального числа обусловленности.

Вернемся к рассмотрению нашей системы.

Эта система является симметричной, вклад каждой переменной в каждое уравнение примерно одинаков и вектор правой части состоит из одинаковых элементов, что дает основание предполагать, что допустимое множество решений для этой системы будет иметь примерно одинаковую ширину по каждой переменной. Такой случай является самым благоприятным для нашей оценки, так как тогда наша оценка будет покрывать допустимое множество решений равномерно по всем переменным, при условии, что точка от которой мы будем откладывать эту величину будет находиться в центре допустимого множества решений (под центром в данном случае понимаем точку, которая равна  $\text{mid } \mathbf{x}^*$ , где  $\mathbf{x}^*$  — оптимальная внешняя оценка).

Оптимальная оценка допустимого множества решений этой системы равна

$$\begin{pmatrix} [-0.43016, 1.26386] \\ [-0.44898, 1.26531] \\ [-0.41283, 1.26253] \\ [-0.43016, 1.26386] \\ [-0.43352, 1.26412] \end{pmatrix}, \quad (34)$$

и центром допустимого множества является точка  $\text{center} = (0.41685, 0.40817, 0.42485, 0.41685, 0.41530)^\top$ . Таким образом, если бы  $\text{center}$  совпадал с  $\arg \max \text{Tol}$  и значение  $\text{IVE}$  было бы приблизительно равно 0.8497 (максимум по всем радиусам оптимальной оценки), то наша оценка была бы наиболее близка к оптимальной.

Однако, к сожалению, в нашем случае это не так. Максимум распо-



знающего функционала

$$\max \text{Tol} = 0.6124$$

и достигается в точке

$$(0.31008, 0.24806, 0.37209, 0.31008, 0.24806)^\top,$$

что значительно отличается от center. Если бы мы могли находить заранее центр допускового множества, то наша оценка была бы более эффективной, чем сейчас. Однако, сейчас не существует алгоритма, который бы быстро находил центр без поиска оптимальной внешней оценки допускового множества решений. Алгоритмом, описанном ранее, было найдено приближенное минимальное число обусловленности  $\min \text{cond} = 9.6184$ . Тогда

$$\text{IVE} = \sqrt{5} \cdot 9.6184 \cdot 0.67366 \cdot \frac{0.6124}{4.4721} = 1.984,$$

и оценка, полученная с использованием нашей меры имеет вид

$$\begin{pmatrix} [-1.6740, 2.2941] \\ [-1.7360, 2.2321] \\ [-1.6119, 2.3561] \\ [-1.6740, 2.2941] \\ [-1.7360, 2.2321] \end{pmatrix},$$

что довольно сильно отличается от оптимальной внешней оценки допускового множества решений

$$\begin{pmatrix} [-0.43016, 1.26386] \\ [-0.44898, 1.26531] \\ [-0.41283, 1.26253] \\ [-0.43016, 1.26386] \\ [-0.43352, 1.26412] \end{pmatrix}.$$

Одной из возможных причин такого расхождения может является приближенный выбор минимального числа обусловленности. Однако, эта оценка все равно не является критичной, т.е. расхождения с оптимальной не фатально большие, и может быть применена в качестве возможной конструкции, оценивающей размеры допускового множества решений.

## 6.6 Связь характеристик матрицы и величины оценки

В процессе проведения численных экспериментов было обнаружено, что размеры допускового множества решений могут быть как больше нашей удвоенной меры, так и меньше ее. Хотелось бы узнать, как матрица экспериментальных данных и вектор правых частей могут влиять на это.

Для анализа свойств матрицы будем использовать следующие характеристики:

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) \quad (35)$$

— спектральный радиус матрицы  $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$ . Эта характеристика используется в критерии Риса-Бека (38). Как можно заметить, этот критерий справедлив для квадратных матриц, позднее будет введен его аналог для прямоугольных матриц.

$$\Delta\sigma = \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) - \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) \quad (36)$$

— разница между максимальным сингулярным числом матрицы радиусов и минимальным сингулярным числом средней матрицы. Эта характеристика, в отличие от предыдущей, может быть использована как для квадратных так и для прямоугольных матриц. Она используется в критерии Румпа (37).

Целесообразность использования этих характеристик следует из соответствующих утверждений. Их формулировки и доказательства мож-

но найти в [16]. При выполнении этих условий:

$$\Delta\sigma > 0, \quad (37)$$

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1, \quad (38)$$

матрица  $\mathbf{A}$ —регулярная, т.е. все точечные матрицы, входящие в нее, невырожденные [17]. Для матриц такого типа можно заранее сказать будет ли значение  $2 * \text{IVE}$  больше размеров оптимальной внешней оценки, либо будет меньше нее.

Проверим эти характеристики и условия для 2-х семейств систем:

$$\begin{pmatrix} \theta & [0, 2] & \dots & [0, 2] \\ [0, 2] & \theta & \dots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \dots & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, N] \\ [1, N] \\ \vdots \\ [1, N] \end{pmatrix}$$

—система Ноймайера, с измененной правой частью.

$$\begin{pmatrix} [n-1, N] & [\alpha-1, 1-\beta] & \dots & [\alpha-1, 1-\beta] \\ [\alpha-1, 1-\beta] & [n-1, N] & \dots & [\alpha-1, 1-\beta] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\alpha-1, 1-\beta] & [\alpha-1, 1-\beta] & \dots & [n-1, N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2-n, K] \\ [2-n, K] \\ \vdots \\ [2-n, K] \end{pmatrix}$$

— система Шарого, с измененной правой частью.

Проведем расчеты для этих систем. В этих таблицах  $\hat{\mathbf{x}}$  — оптимальная внешняя оценка допускового множества решений.

$\theta$	$\rho$	$\Delta\sigma$	$2 * \text{IVE}$	$\max   \sup \hat{\mathbf{x}} - \inf \hat{\mathbf{x}}  $
n = 5, N = 10				
2.0	6.00000	-3.00000	0.62113	2.50000
4.0	1.83333	-1.00000	0.97828	1.75000
6.0	1.04000	1.00000	1.02859	1.27778
8.0	0.71429	3.00000	0.99381	1.00000
10.0	0.53968	5.00000	0.93550	0.82000

Таблица 2: Расчеты для системы Ноймайера

$\theta$	$\rho$	$\Delta\sigma$	$2 * IVE$	$\max   \sup \hat{x} - \inf \hat{x}  $
$n = 5, N = 20$				
2.0	6.0000	-3.0000	1.8634	7.5000
4.0	1.8333	-1.0000	2.3758	4.2500
6.0	1.04000	1.00000	2.37023	2.94444
8.0	0.71429	3.00000	2.23607	2.25000
10.0	0.53968	5.00000	2.07635	1.82000
$n = 10, N = 10$				
8.0	1.89076	-2.00000	0.59088	0.84375
10.0	1.4211	0.0000	0.6302	0.7200
12.0	1.12987	2.00000	0.64536	0.62500
14.0	0.93311	4.00000	0.64561	0.55102
16.0	0.79200	6.00000	0.63752	0.49219
$n = 10, N = 20$				
8.0	1.8908	-2.0000	1.4662	2.0938
10.0	1.4211	0.0000	1.5067	1.7200
12.0	1.1299	2.0000	1.5058	1.4583
14.0	0.93311	4.00000	1.48250	1.26531
16.0	0.79200	6.00000	1.44706	1.11719

Таблица 3: Расчеты для системы Ноймайера

По этим таблицам можно проследить закономерность: если  $\Delta\sigma < 0$  или  $\rho > 1$ , то наша мера получается меньше, чем реальные размеры внешней оценки, если  $\Delta\sigma$  становится больше нуля, а  $\rho$  приближается к единице, то наша оценка становится больше, чем оптимальная. Также можно заметить, что размеры правой части не сказываются на соотношении между размерами оптимальной оценки и  $2 * IVE$ . Правая часть систем влияет лишь на величину этих оценок, но не соотношение между ними.

При положительности  $\Delta\sigma$  по мере приближения  $\rho$  к единице величина нашей оценки стремится к оптимальной, что видно из следующих таблиц.

$N$	$\rho$	$\Delta\sigma$	$2 * IVE$	$\max   \sup \hat{x} - \inf \hat{x}  $
$n = 5, \alpha = 0.2, \beta = 0.4, K = 15$				
35.0	0.95812	0.80000	0.85703	0.51429
45.0	0.96680	0.80000	0.65047	0.40000

Таблица 4: Расчеты для системы Шарого

$N$	$\rho$	$\Delta\sigma$	$2 * \text{IVE}$	$\max  \sup \hat{\mathbf{x}} - \inf \hat{\mathbf{x}} $
$n = 5, \alpha = 0.4, \beta = 0.6, K = 15$				
5.0	0.60976	1.60000	12.54891	3.60000
15.0	0.82418	1.60000	2.46725	1.20000
25.0	0.88652	1.60000	1.32244	0.72000
35.0	0.91623	1.60000	0.89558	0.51429
45.0	0.93361	1.60000	0.67503	0.40000
$n = 5, \alpha = 0.6, \beta = 0.8, K = 15$				
5.0	0.41463	2.40000	11.28167	3.60000
15.0	0.73626	2.40000	2.58812	1.20000
25.0	0.82979	2.40000	1.38445	0.72000
35.0	0.87435	2.40000	0.93159	0.51429
45.0	0.90041	2.40000	0.69834	0.40000
$n = 5, \alpha = 0.8, \beta = 1.0, K = 15$				
5.0	0.21951	3.20000	10.37557	3.60000
15.0	0.64835	3.20000	2.68807	1.20000
25.0	0.77305	3.20000	1.44058	0.72000
35.0	0.83246	3.20000	0.96522	0.51429
45.0	0.86722	3.20000	0.72047	0.40000
55.0	0.89003	3.20000	0.57282	0.32727
65.0	0.90616	3.20000	0.47456	0.27692
75.0	0.91816	3.20000	0.40468	0.24000
85.0	0.92744	3.20000	0.35252	0.21176

Таблица 5: Расчеты для системы Шарого

Таким образом, можно сказать, что наша оценка будет строго больше (любо незначительно меньше в малом числе случаев) оптимальной при выполнении условий (37), (38). При этом приближение  $\rho$  к единице приводит к приближению размеров нашей оценки к размерам оптимальной. При нарушении этих условий, вообще говоря, нельзя с уверенностью сказать будет оценка больше или меньше оптимальной.

Для прямоугольных систем вместо условия (38) следует использовать другое

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^+| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1, \quad (39)$$

где  $\text{mid } \mathbf{A}^+$ —псевдообратная матрица к  $\text{mid } \mathbf{A}$  описанное в [18].

Из выполнения этого условия и условия (37) мы получаем результат,

что при этих условиях наша оценка несколько больше оптимальной, но при нарушении этих условий или при малых значениях  $\Delta\sigma$  наша оценка в разы отличается от оптимальной. Это видно по расчетам проведенным для системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с матрицей размера  $m \times n$  и  $m$ -мерным вектором правой части

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1 - \alpha, 1 + \beta] & [2 - \alpha, 2 + \beta] & \dots & [m - \alpha, m + \beta] \\ [2 - \alpha, 2 + \beta] & [3 - \alpha, 3 + \beta] & \dots & [m - \alpha, m + \beta] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [m - 1 - \alpha, m - 1 + \beta] & [m - \alpha, m + \beta] & \dots & [m - \alpha, m + \beta] \\ [m - \alpha, m + \beta] & [m - \alpha, m + \beta] & \dots & [m - \alpha, m + \beta] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \left( [1, 1 + m] \ [1, 1 + m] \ \dots \ [1, 1 + m] \ [1, 1 + m] \right)^\top.$$

$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\Delta\sigma$	2 * IVE	$\max   \sup \hat{\mathbf{x}} - \inf \hat{\mathbf{x}}  $
m = 5, n = 2					
0.5	0.03	0.262386	1.873592	1.746847	0.943627
0.55	0.03	0.286819	1.796966	1.692669	0.921988
0.6	0.03	0.311192	1.720363	1.640445	0.900765
0.65	0.03	0.335505	1.643785	1.590070	0.879941
0.7	0.03	0.359758	1.567231	1.541443	0.859499
0.75	0.03	0.383948	1.490701	1.494472	0.839423
0.8	0.03	0.408076	1.414196	1.449071	0.819697
0.85	0.03	0.432139	1.337717	1.405160	0.800308
0.9	0.03	0.456138	1.261263	1.362661	0.781243
0.95	0.03	0.480070	1.184835	1.321506	0.762489
1.0	0.03	0.503936	1.108434	1.281627	0.744036
m = 5, n = 2					
0.2	0.5	0.35204	1.57013	1.63482	0.94280
0.2	0.6	0.40308	1.40787	1.55297	0.91694
0.2	0.7	0.45429	1.24568	1.47700	0.89228
0.2	0.8	0.50566	1.08356	1.40637	0.86872
0.2	0.9	0.55720	0.92151	1.34057	0.84619
0.2	1.0	0.60889	0.75954	1.27917	0.82463

$\alpha$	$\beta$	$\rho$	$\Delta\sigma$	$2 * IVE$	$\max  \sup \hat{x} - \inf \hat{x} $
m = 10, n = 2					
0.6	0.6	0.28982	5.21457	1.57812	0.90319
0.7	0.7	0.33812	4.76735	1.53457	0.87528
0.8	0.8	0.38642	4.32014	1.49167	0.84849
0.9	0.9	0.43473	3.87293	1.44944	0.82275
1.0	1.0	0.48303	3.42571	1.40788	0.79798
m = 10, n = 5					
0.1	0.5	4.16513	-1.82361	109.67853	2.38267
0.2	0.5	4.85948	-2.17716	108.14512	2.24084
0.3	0.5	5.55389	-2.53071	106.60876	2.11518
0.4	0.5	6.24835	-2.88427	105.06959	2.00307
0.5	0.5	6.94286	-3.23782	103.52775	1.90244
0.6	0.5	7.63742	-3.59137	101.98339	1.81161
0.7	0.5	8.33203	-3.94493	100.43667	1.72922
0.8	0.5	9.02670	-4.29848	98.88774	1.65415
0.9	0.5	9.72143	-4.65204	97.33679	1.58547
1.0	0.5	10.41621	-5.00559	95.78397	1.52239
m = 20, n = 10					
0.5	0.1	10.09627	-3.98438	540.31617	3.46413
0.5	0.2	11.77894	-4.69148	537.45227	3.34246
0.5	0.3	13.46159	-5.39859	534.61029	3.22896
0.5	0.4	15.14423	-6.10570	531.79002	3.12284
0.5	0.5	16.82686	-6.81280	528.99122	3.02340
0.5	0.6	18.50948	-7.51991	526.21370	2.93003
0.5	0.7	20.19209	-8.22702	523.45724	2.84220
0.5	0.8	21.87468	-8.93412	520.72162	2.75942
0.5	0.9	23.55726	-9.64123	518.00664	2.68127
0.5	1.0	25.23983	-10.34834	515.31208	2.60738

Таким образом, от нашей оценки стоит ожидать результатов близких к оптимальным для тех случаев, когда матрица систем будет регулярной (для квадратных матриц), что имеет место при выполнении пары условий (37)-(38), либо полноранговой, когда все входящие в нее матрицы полноранговые (для прямоугольных матриц), что имеет место при выполнении условий (38)-(39). В этой главе минимальное число обусловленности считалось по рецепту описанному в предыдущей главе, т.е. осуществлялся перебор не по всем угловым матрицам, а лишь по некоторым с определенным шагом.

## 7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе был проведён анализ одной из возможных конструкций меры вариабельности в задаче восстановления функциональной зависимости по данным с интервальной неопределенностью. На основании численных экспериментов, проведённых с использованием различных методов, было показано, что предложенная величина действительно может быть использована в качестве меры, характеризующей размеры множества решений задачи (допускового множества решений). Также была продемонстрирована важность правильного определения каждой входящей в это выражение величины. К примеру, в случае неточного определения минимального числа обусловленности можно получить оценку, во много раз превышающую оптимальную. В ходе численных экспериментов была обнаружена серьезная проблема, связанная с поиском минимального числа обусловленности.

Минимум числа обусловленности достигается на матрицах, состоящих из концевых элементов интервальной матрицы системы. Таким образом, поиск такой матрицы был основан на прямом переборе всех угловых матриц, что весьма трудоемко, так как в таком случае алгоритм имеет экспоненциальную сложность. В связи с чем, возникает необходимость разработке иного, более быстрого способа нахождения минимального числа обусловленности.

Полученная мера вариабельности может применяться в качестве оценки размеров множества решений, однако, ее качество зависит от вида матрицы экспериментальных данных. Наиболее благоприятным случаями для этого метода являются системы, множества решений которых имеет одинаковую ширину по всем компонентам. В таком случае более вероятно, что наша оценка, также имеющая форму  $n$ -мерного куба, будет качественно оценивать допусковое множество решений и не захватывать элементы не из этого множества.

Численные эксперименты показали, что наша мера может быть применена даже для случаев, когда число экспериментов к задаче меньше числа неизвестных. Однако, в этом случае матрица, составленная из экс-



периментальных данных должна быть существенно интервальной, так как в противном случае, когда матрицы мало отлична от точечной, расхождения нашей оценки с оптимальной будет слишком велико.

В ходе работы было исследовано влияние некоторых характеристик интервальных матриц на размер оценки, полученной с использованием меры вариабельности. Обнаружено, что оценка, которую мы строим с помощью нашей меры, наилучшим образом согласуется с оптимальной внешней оценкой допускового множества решений для систем с регулярными матрицами (для квадратных матриц), либо для систем с полноранговыми матрицами (для прямоугольных матриц).

Для проведения численных экспериментов был реализован ряд численных экспериментов. Для нахождения оптимальной внешней оценки допускового множества решений был реализован алгоритм, основанный на теореме Рона и методах линейного программирования. Был адаптирован метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями для поиска максимума распознающего функционала. Предложен один из возможных алгоритмов поиска минимального числа обусловленности матриц систем.

## Список литературы

- [1] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
- [2] Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости. Киев: Наукова думка, 2014.
- [3] Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределённости данных. Вычислительные Технологии. 2017. Т. 22, №2. С. 150–172.
- [4] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2018.
- [5] Шарый С.П. Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью. Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2017. №6. С. 3–19.
- [6] Шарая И.А. Ограничено ли допустимое множество решений интервальной системы. Вычислительные Технологии. 2004. Т. 9, №3. С. 108–112.
- [7] Воронцова Е.А. Метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями и его применение в задачах анализа данных с неопределенностями. Владивосток: XYZ, 2015
- [8] Нурминский Е.А. О сходимости метода подходящих аффинных подпространств для решения задачи о наименьшем расстоянии до симплекса. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2005. – Т. 45, вып. 11. – С. 1996–2004
- [9] Уоткинс Д. Основы матричных вычислений. М.: «Бином. Лаборатория знаний», 2009.
- [10] Шарая И.А. Пакет IntLinIncR3 для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с тремя неизвестными. Новосибирск, 2014. Программное обеспечение, доступное по ссылке <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinIncR3.pdf>.

- [11] Шарая И.А. Пакет IntLinIncR2 для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя неизвестными. Новосибирск, 2014. Программное обеспечение, доступное по ссылке <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinIncR2.pdf>.
- [12] Rohn J. Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985. N.Y.: Springer Verlag, 1986.
- [13] Шарая И.А. Структура допустимого множества решений интервальной линейной системы. Вычислительные Технологии. 2005. Т. 10, №5. С. 103–119.
- [14] Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Вычислительные технологии. 2000. Т. 7, №6. С. 90–113.
- [15] Данилов М.В., Дронов К.С., Жилин С.И., Тепикин Е.Н. Библиотека для интервальных вычислений JInterval: <http://www.nsc.ru/interval/Programing/МАК2009-JInterval.pdf>.
- [16] Rohn J. A Handbook of Results on Interval Linear Problems. Technical Report No. 1163, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2012.
- [17] Людвин Д.Ю., Шарый С.П. Testing Implementations of PPS-methods for Interval Linear Systems.
- [18] Шарый С.П. Об интервальных матрицах полного ранга. Сибирский журнал вычислительные технологии. 2014. Т. 17, № 3

# 8 ПРИЛОЖЕНИЕ

## 8.1 Оптимальное внешнее оценивание допустового множества решений

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function est = optimalEstimation(infA, supA, infb, supb, n, m)
%A массив, описывающий левую часть ограничений в теореме Рона
A = [supA -infA; -infA supA];

%b массив, описывающий правую часть ограничений в теореме Рона
b = [supb; -infb];

%Формируем массив символов с видом ограничений,
%U означает ограничение вида <=
ctype = 'U';
for i = 2:m
    ctype = strcat(ctype, 'U');
endfor

%Формируем массив символов описывающих тип переменных,
%C означает вещественный тип
vartype = 'C';
for i = 2:n
    vartype = strcat(vartype, 'C');
endfor

%sense определяет тип оптимизации(1 для максимизации, -1 для минимизации)
sense = 1;

%dim является размерностью пространства
dim = n/2;

%est вектор содержащий оптимальную оценку допустового множества
est = zeros(n,2);
%Основная часть метода
for i = 1:dim
    %Вектор c определяет целевую функцию
    c = zeros(n, 1);
    %Далее последовательно решаем задачи максимизации и
    %минимизации для каждой пространственной переменной
    c(i) = 1;
    c(i + dim) = -1;
    sense = 1;
    [xmin, fmin, status] = glpk (c, A, b, [], [], ctype,vartype, sense);
    sense = -1;
    [xmax, fmax, status] = glpk (c, A, b, [], [], ctype,vartype, sense);
    est(i,1) = fmin;
    est(i,2) = fmax;
endfor
endfunction
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

## 8.2 Поиск минимального числа обусловленности

```
function findCondBoarders(infA, supA)
min = cond(infA);
max = cond(infA);
m = size(infA, 1);
n = size(infA, 2);
A = zeros(m, n);
N = 2^(m*n);
Ak = zeros(m, n);
for iter = 0:(N-1)
    for i=1:m
        for j=1:n
            if mod(iter, 2) == 0
                A(i, j) = infA(i, j);
                N = fix(N / 2);
            else
                A(i, j) = supA(i, j);
                N = fix(N / 2);
            endif
        endfor
    endfor
    if cond(A) < min
        min = cond(A);
    endif
    if cond(A) > max
        max = cond(A);
    endif
endfor
disp("-----\r\n");
disp("Minimum value of cond");
disp(min);
disp("-----");
disp("-----\r\n");
disp("Cond of mid(A)");
disp(cond((infA + supA)/2));
disp("-----");
disp("-----\r\n");
disp("Maximum value of cond");
disp(max);
disp("-----");
endfunction
```