# Интервальный анализ: теория и приложения*

**Гётц Алефельд, Гюнтер Майер**

Институт прикладной математики, Университет г. Карлслруэ, D-76128 Карлсруэ, Германия
Отделение математики, Университет г. Росток, D-18051, Росток, Германия

Резюме: В статье приводится обзор некоторых приложений интервальных вычислений. В частности, обсуждаются доказательные методы для решения систем линейных и нелинейных уравнений, алгебраической проблемы собственных значений, задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых эллиптических задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Кроме того, рассмотрено программное обеспечение, созданное в этой области, и даются некоторые исторические комментарии.

**Содержание**



## 1. Историческая справка и введение

Прежде всего, мы попытаемся дать обзор того, как и где был развит интервальный анализ. Естественно, мы не сможем полностью описать каждый отдельный шаг этого развития. Мы просто попытаемся изложить наиболее важные результаты и перечислить содержащие их публикации. На наш обзор, конечно, оказали сильное влияние личный опыт и научные предпочтения авторов.

Знаменитым и очень старым примером интервального оценивания можно считать метод Архимеда, который для окружности единичного радиуса рассматривал последовательность вписанных и описанных многоугольников, и получил в результате возрастающую последовательность нижних границ и убывающую последовательность верхних границ для площади круга. Вычислив площади вписанного и описанного $n$-угольника, Архимед определил интервал, содержащий число $\pi$. Выбирая в этом процессе $n$ достаточно большим, можно найти сколь угодно малый интервал, содержащий $\pi$.

Примеры использования интервальной арифметики как средства численных расчетов можно увидеть в работе [35, стр. 346] (оригинал этой энциклопедии издан на русском языке в СССР в 1951 г.), где подробно изложены правила арифметики интервалов (в случае, когда оба операнда содержат только положительные числа) и их применение для

* Опубликовано в виде статьи G. Alefeld, G. Mayer, “Interval analysis: theory and applications” // *Journal of Computational Applied Mathematics*. – 2000. – Vol. 121. – P. 421-464.

того, что называется сегодня «интервальным оцениванием рациональных выражений» (см. §2 данной статьи). Например, рассмотрен вопрос: какова область значений выражения

$$x = \frac{a+b}{(a-b)c} \ ,$$

если известно, что точные значения $a$, $b$ и $c$ принадлежат некоторым заданным интервалам. Подставляя вместо $a, b, c$ эти интервалы, получаем множество значений $x$.

Согласно Муру [64], в 1951 году П.С. Двайер в своей книге [29] использовал интервальную арифметику в вычислениях над матрицами.

Возможно, наиболее важная для развития интервального анализа работа была опубликована японским ученым Теруо Сунагой [88]. В этой публикации можно найти не только алгебраические правила основных операций над интервалами, но и систематическое исследование свойств, которым они удовлетворяют. Им был также сформулирован основной принцип оценивания области значений рациональной функции в виде интервала, границы которого вычисляются с помощью интервальной арифметики. Кроме того, в [88] введены интервальные векторы (как многомерные интервалы) и рассмотрены соответствующие операции над ними. В статье Сунаги описана идея вычисления интервальной оценки нуля вещественной функции посредством метода, известного сегодня как интервальный метод Ньютона (пример 9.1). Наконец, в данной работе обсуждается интервальное оценивание значения определенного интеграла путем оценивания остаточного члена средствами интервальной арифметики и вычисление сеточной оценки решения задачи Коши посредством оценивания остаточного члена. Эти результаты, хотя и были опубликованы на английском языке, не привлекли большого внимания вплоть до появления первой книги по интервальному анализу, написанной Муром [64].

Книга Р.Е. Мура, выросшая из его докторской диссертации [63], была, в основном, посвящена интервальному оцениванию решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, хотя и содержала ряд общих идей.

После публикации книги Мура группы ученых разных стран начали систематическое исследование теории интервального анализа и его приложений. Вслед за книгой Мура появилась обзорная статья У. Кулиша [49], на основе которой была написана книга [12], переведённая на английский язык в 1983 году [13].

Кулиш и его группа достаточно полно исследовали взаимодействие между алгоритмами и их реализацией на цифровых компьютерах. Уже в 60-х годах ими было разработано и реализовано расширение языка программирования АЛГОЛ, содержащее интервальный тип данных и соответствующие арифметические операции и отношения.

Роль интервалов как самостоятельных объектов постоянно возрастает в численном анализе в последние три десятилетия, они широко используются при численной проверке и оценивании решений различных математических задач или при доказательстве того, что данные задачи не имеют решения в заданных областях. Это стало возможным благодаря утверждению взгляда на интервалы как на естественное расширение вещественных и комплексных чисел, введению и развитию понятий интервальной функции и интервальной арифметики, использованию соответствующих теорем о неподвижных точках. Кроме того, полная, отвечающая современным требованиям компьютерная реализация интервальных арифметик совместно с новыми средствами, такими как управляемое округление, переменная точность, переопределение («перегрузка») операторов и эпсилон-раздутие, создали возможности для эффективного применения теории на практике и привели к тому, что с помощью цифровых ЭВМ мы во многих ситуациях можем строго доказать существование решения и найти для него гарантированные двусторонние оценки.

В данном обзоре представлены лишь некоторые средства интервального анализа. В частности, сформулирован ряд важных теорем, являющихся отправным пунктом для создания эффективных интервальных алгоритмов. В §2 изложены основы классической интервальной арифметики, определены арифметические операции, перечислены некоторые их свойства и рассмотрен простой способ оценивания множества значений заданной функции. Последнему вопросу уделено внимание и в §3, где также рассмотрена проблема качества интервального оценивания области значений функции. В конце §3 показано, как можно использовать интервальную оценку области значений функции и её первой производной для вычисления нулей функции с помощью интервальных методов.

В интервальных методах рассматриваемого типа обычно выбирается начальный интервальный вектор, содержащий решение, который затем уточняется с помощью итерационной процедуры. Возникает вопрос, при каких условиях последовательность интервальных векторов-оценок сходится к решению. Применительно к некоторым интервальным методам для нелинейных систем уравнений этот вопрос обсуждается в §4. Интересной особенностью этих методов является их способность доказывать отсутствие решения в заданном интервальном векторе-брусе. В работе показано, что если проверяемый брус имеет достаточно малый диаметр, то для подобного доказательства требуется всего несколько шагов. Кроме того, описан способ построения для заданной нелинейной системы такого вектора, который почти наверняка содержит решение.

В §5 рассмотрены системы линейных уравнений $Ax = b$, в которых элементы $A$ и $b$ могут изменяться в пределах заданных границ. Идеи, рассмотренные в §4, уточняются и используются здесь для получения внешних интервальных оценок соответствующих множеств решений. Исследован частный случай линейной системы, в которой все точечные матрицы в пределах рассматриваемой интервальной матрицы предполагаются симметричными, и предложены итерационные методы интервального оценивания её «симметричного» множества решений. Для обоих случаев показано, как можно измерить точность интервальной оценки без знания точного множества решений системы.

§6 посвящён таким слабо нелинейным задачам, как задачи нахождения собственных чисел, обобщённых собственных чисел и сингулярных чисел, а в качестве приложения рассматривается решение одного класса обратных спектральных задач.

В §7 представлены основные идеи, относящиеся к интервальным методам проверки существования и оценивания решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для краткости, однако, мы вынуждены ограничить изложение всего одним популярным классом интервальных методов, основанных на разложении в ряд Тейлора (методе степенных рядов).

§8 содержит сведения о некоторых классах дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Рассмотрены, в основном, эллиптические краевые задачи и предложен подход, ведущий к мощным доказательным методам решения таких задач.

Практическое применение интервального анализа решающим образом зависит от его компьютерной реализации. Сочетание существующей машинной арифметики с направленным округлением даёт возможность реализовать интервальную арифметику таким образом, что интервальные алгоритмы сохраняют теоретически доказанные свойства решения – существование, единственность и вложенность в результирующий интервал. На основе подобной машинной интервальной арифметики можно создать программное обеспечение, которое предоставит возможности широкого применения интервальных методов в различных областях математики. Вкратце этот вопрос обсуждается в §9.

В последние двадцать лет продолжается интенсивная разработка алгоритмов интервальных вычислений и их реализация на компьютерах (включая пакеты программ для решения различных задач). Понимание теории и использование подходящих языков программирования становится необходимым средством современных надежных научных вычислений в настоящее время.

## 2. Определения, обозначения и основные понятия

Пусть $\boldsymbol{a} = [\,\underline{a}, \overline{a}\,]$, $\boldsymbol{b} = [\,\underline{b}, \overline{b}\,]$ – вещественные интервалы, через $\circ$ обозначим одну из основных операций над вещественными числами: сложение, вычитание, умножение и деление, т.е. $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$. Определим соответствующие операции над интервалами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \{a \circ b \mid a \in \boldsymbol{a}, b \in \boldsymbol{b}\}, \tag{1}$$

при этом мы предполагаем, что $0 \notin \boldsymbol{b}$ в случае деления интервалов.

Легко доказать, что множество $\mathbb{IR}$ вещественных интервалов замкнуто относительно введенных операций. Важным является тот факт, что результат операции $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ может быть вычислен с использованием только границ интервалов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Справедливы следующие формулы:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [\underline{a} + \underline{b},\ \overline{a} + \overline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [\underline{a} - \overline{b},\ \overline{a} - \underline{b}],$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = [\min\{\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\}].$$

Если положить

$$\frac{1}{\boldsymbol{b}} = \left\{ \frac{1}{b} \,\middle|\, b \in \boldsymbol{b} \right\}, \quad \text{где } 0 \notin \boldsymbol{b},$$

то

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{b}}.$$

Если $\underline{a} = \overline{a} = a$, т.е. $\boldsymbol{a}$ содержит только один элемент $a$, то вещественное число $a$ отождествляется с вырожденным интервалом $[a, a]$ при сохранении тех же обозначений, т.е. $a \equiv [a, a]$. Таким образом, множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ и соответствующая вещественная арифметика могут быть получены при сужении множества $\mathbb{IR}$ до множества вырожденных интервалов с арифметикой, определенной в соответствии с (1). К сожалению, $\langle \mathbb{IR}, +, \cdot \rangle$ не является ни полем, ни кольцом. Структуры $\langle \mathbb{IR}, + \rangle$ и $\langle \mathbb{IR} \backslash \{0\}, \cdot \rangle$ – коммутативные полугруппы с нейтральными элементами 0 и 1 соответственно, но не группы. Невырожденный интервал $\boldsymbol{a}$ не имеет обратного по сложению или умножению. Наконец, вместо дистрибутивного закона выполняется так называемая субдистрибутивность

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}. \tag{2}$$

Простой пример $[-1, 1](1 + (-1)) = 0 \subset [-1, 1] \cdot 1 + [-1, 1] \cdot (-1) = [-2, 2]$ иллюстрирует (2) и показывает, что $-[-1,1]$ не является обратным к $[-1, 1]$ по сложению. Отметим, что соотношение (2) выполняется в некоторых важных частных случаях, например, если $\boldsymbol{a}$ – вырожденный интервал или если $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ расположены с одной стороны от 0.

Из (1) прямо вытекает, что введенная выше интервальная арифметика обладает свойством монотонности по включению

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{d} \implies \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{d}. \tag{3}$$

Элементарные интервальные функции $\varphi \in F = \{\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{arctg}, \exp, \ln, \mathrm{abs}, \mathrm{sqr}, \mathrm{sqrt}\}$ определяются через свои области значений, т.е.

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \{\varphi(x) | x \in \boldsymbol{x}\}. \tag{4}$$

Очевидно, что полученные интервальные функции являются расширениями соответствующих вещественных функций. Эти вещественные функции непрерывны и кусочно-монотонны на подынтервалах своих областей определения, и потому значение $\varphi(\boldsymbol{x})$ может легко быть вычислено через значения $\varphi$ на границах интервала $\boldsymbol{x}$, иногда с привлечением специальных констант, таких как 0 в случае возведения в квадрат или $-1$ и 1 в случае синуса и косинуса. Ясно, что элементарные интервальные функции монотонны по включению, т.е.

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{x}) \subseteq \varphi(\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

Пусть функция $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ задана аналитическим выражением $f(x)$, которое является конечной комбинацией элементарных операций $+, -, \cdot, /$ и элементарных функций $\varphi \in F$. Если в этом выражении вместо переменной $x$ подставить интервал $\boldsymbol{x} \subseteq D$ и вычислить значение интервального выражения по правилам (1) и (4), то в результате снова получится интервал. Он обозначается через $f(\boldsymbol{x})$ и обычно называется *естественным интервальным расширением* функции $f$ на $\boldsymbol{x}$. Далее в статье при упоминании естественного интервального расширения $f(\boldsymbol{x})$ будем всюду предполагать, что оно существует.

Из (3) и (5) следует, что естественное интервальное расширение монотонно по включению, т.е.

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) \subseteq f(\boldsymbol{y}). \tag{6}$$

В частности, $f(\boldsymbol{x})$ существует, если $f(\boldsymbol{y})$ существует на $\boldsymbol{y} \supseteq \boldsymbol{x}$. Из (6) получим

$$x \in \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in f(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

отсюда

$$\mathrm{range}(f;\, \boldsymbol{x}) \subseteq f(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{range}(f;\, \boldsymbol{x})$ обозначает область значений $f$ на $\boldsymbol{x}$.

Соотношение (8) является фундаментальным свойством, на котором основаны почти все приложения интервальной арифметики. Важно отметить, какое значение имеет соотношение (8): без каких-либо дополнительных ограничений можно вычислить нижнюю и верхнюю границы области значений на интервале, используя только границы данного интервала.

**Пример 1.** Рассмотрим рациональную функцию

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x \neq 1,$$

и интервал $\boldsymbol{x} = [2,3]$. Легко найти ее область значений

$$\mathrm{range}(f;\, \boldsymbol{x}) = \left[-2, -\frac{3}{2}\right]$$

и естественное интервальное расширение

$$f(\boldsymbol{x}) = [-3, -1],$$

которое удовлетворяет (8).

При $x \neq 0$ можно переписать выражение $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{1/x - 1}, \qquad x \neq 0, \qquad x \neq 1,$$

и, заменяя $x$ интервалом $[2, 3]$, получить

$$\frac{1}{1/[2,3] - 1} = \left[2, -\frac{3}{2}\right] = \text{range}(f; [x]).$$

Из данного примера видно, что качество естественного интервального расширения, как оценки области значений $f$ на интервале $\boldsymbol{x}$, сильно зависит от того, каким аналитическим выражением $f(x)$ представлена функция. Для того чтобы измерить качество оценки вводится так называемое хаусдорфово расстояние $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ между интервалами. Множество $\mathbb{IR}$, снабженное расстоянием $\text{dist}(\cdot, \cdot)$, является полным метрическим пространством.

Пусть $\boldsymbol{a} = [\,\underline{a}, \overline{a}\,]$, $\boldsymbol{b} = [\,\underline{b}, \overline{b}\,]$, тогда

$$\text{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|\}. \tag{9}$$

В дальнейшем будем также использовать следующие величины

$$\text{mid}\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \overline{a}),$$

$$\text{wid}\, \boldsymbol{a} = \overline{a} - \underline{a},$$

$$|\boldsymbol{a}| = \max\{\, |a| \;|\, a \in \boldsymbol{a}\} = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\},$$

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \min\{\, |a| \;|\, a \in \boldsymbol{a}\,\} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \in \boldsymbol{a}, \\ \min\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}, & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{a}, \end{cases} \tag{10}$$

называя их $\text{mid}\, \boldsymbol{a}$ – *середина*, $\text{wid}\, \boldsymbol{a}$ – *ширина* и $|\boldsymbol{a}|$ – *абсолютная величина* интервала $\boldsymbol{a}$.

Переходя к многомерной ситуации, введём в рассмотрение интервальные матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ с элементами $\boldsymbol{a}_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, и интервальные векторы $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_{ij})$ с $n$ компонентами $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. Множества интервальных матриц и векторов обозначим через $\mathbb{IR}^{m\times n}$ и $\mathbb{IR}^n$ соответственно. Можно отождествлять интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$ с матрицей, составленной из интервалов, т.е. $[\underline{A}, \overline{A}] = \{B \in \mathbb{R}^{m\times n} | \underline{A} \le B \le \overline{A}\}$, где $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$, $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $A = (a_{ij}) \le B = (b_{ij})$ означает, что $a_{ij} \le b_{ij}$ для любых $i, j$. Поскольку интервальные векторы можно рассматривать как матрицы размерностью $n \times 1$, то аналогичное свойство выполняется и для них. Нулевая матрица $O$ и единичная матрица $I$ имеют обычный смысл, а через $e$ обозначается вектор $(1,1, \dots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$. Операции над интервальными матрицами и интервальными векторами определяются совершенно так же, как соответствующие точечные операции, и они удовлетворяют свойствам, аналогичным (6) – (8). Например,

$$\{\, Ax \mid A \in \boldsymbol{A}, x \in \boldsymbol{x}\,\} \subseteq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, \boldsymbol{x}_j\right) \in \mathbb{IR}^m \tag{11}$$

где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ и $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$. Очевидно, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ есть наименьший интервальный вектор, содержащий левую часть соотношения (11) и обычно не равный ей. Наименьший по включению интервальный вектор-брус, объемлющий некоторое множество, называется *интервальной оболочкой* этого множества. Результатом введенных ранее арифметических операций над интервальными операндами всегда являются интервальные оболочки соответствующих множеств.

Интервальная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется *неособенной*, если она не содержит особенных вещественных $n \times n$-матриц. Операции нахождения хаусдорфова расстояния, центра, ширины и абсолютного значения, введённые в (9) и (10), можно обобщить на интервальные матрицы и интервальные векторы путём поэлементного и покомпонентного их применения, например,

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \left(\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}_{ij},\boldsymbol{b}_{ij})\right) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

где $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$. Часто используется понятие *компаранта* $\langle \boldsymbol{A} \rangle$ интервальной матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, который определяется как точечная $n \times n$-матрица $C$ с элементами

$$c_{ij} = \begin{cases} \langle\, \boldsymbol{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\, \boldsymbol{a}_{ij}\,|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Через $\operatorname{int} \boldsymbol{x}$ обозначим внутренность интервального вектора $\boldsymbol{x}$, через $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и через $\|x\|_\infty = \max_i x_i$ – обычную максимум-норму для векторов из $\mathbb{R}^n$ или подчинённую ей матричную норму для матриц из $\mathbb{R}^{n\times n}$ – сумм модулей элементов по строкам. Кроме того, будет использоваться евклидова норма $\|\cdot\|_2$ в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называют *M-матрицей*, если $a_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$ и существует обратная неотрицательная матрица $A^{-1}$, т.е. $A^{-1} \geq O$. Если каждая вещественная матрица $A$, принадлежащая заданной интервальной матрице $\mathbf{A}$, является $M$-матрицей, то интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ также называется $M$-матрицей.

Пусть каждый компонент $f_i$ функции $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ задан аналитическим выражением $f_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, и $\boldsymbol{x} \subseteq D$. Тогда естественное интервальное расширение $f(\boldsymbol{x})$ определяется аналогично одномерному случаю.

В данной статье мы ограничимся рассмотрением вещественных интервалов. Однако, комплексные интервалы, представленные в «прямоугольной» форме $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$) или в «круговой» форме $\boldsymbol{z} = \langle \check{z}, r\rangle$ ($\check{z}, r \in \mathbb{R}, r \geq 0$), также используются на практике. В первом случае комплексному интервалу соответствует прямоугольник на комплексной плоскости, во втором случае – круг с центром в $\check{z}$ и радиусом $r$. В обоих случаях может быть определена комплексная интервальная арифметика, рассмотрены комплексные интервальные функции как обобщение вещественных аналогов. Более подробное изложение данных вопросов можно найти в [3, 13] или [73].

### 3. Интервальное оценивание областей значений вещественных функций

Оценивание области значений $\operatorname{range}(f;\boldsymbol{x})$ функции $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где $\boldsymbol{x} \subseteq D$, является важной задачей интервального анализа. Далее эта задача может входить составной частью в решение, например, следующих задач:

- локализация и оценивание глобальных экстремумов и доставляющих их значений аргумента функции $f$ на интервале $\boldsymbol{x}$, если $m = 1$,
- проверка того, что $\operatorname{range}(f;\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x}$, которая необходима в некоторых теоремах о неподвижной точке функции $f$, если $m = n$,
- оценивание области значений $\operatorname{range}(f';\boldsymbol{x})$ производной (матрицы Якоби) функции $f$, если $m = n$,
- оценивание области значений $k$-ой производной $\operatorname{range}(f^{(k)};\boldsymbol{x})$ функции $f$, которое необходимо при проверке существования и оценивании решений задачи Коши для дифференциальных уравнений,
- проверка отсутствия нуля функции $f$ на интервале $\boldsymbol{x}$.

Согласно §2 естественное интервальное расширение $f(\boldsymbol{x})$ автоматически является внешней оценкой $\operatorname{range}(f;\boldsymbol{x})$. Но, как видно из Примера 1, $f(\boldsymbol{x})$ может достаточно сильно отличаться от точной области значений. В следующей теореме показано, насколько большим может быть это отличие.

**Теорема 1** (Мур [64]). *Пусть функция* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна и* $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0 \subseteq D$. *Тогда (при некоторых слабых дополнительных предположениях)*

$$\operatorname{dist}(\operatorname{range}(f; \boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) \le \gamma \, \|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}\|_\infty, \qquad \gamma \ge 0,$$

$$\operatorname{wid} f(\boldsymbol{x}) \le \delta \, \|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}\|_\infty, \qquad \delta \ge 0,$$

*где константы* $\gamma$ *и* $\delta$ *зависят от* $\boldsymbol{x}^0$ *и не зависят от* $\boldsymbol{x}$.

В Теореме 1 утверждается, что если интервальное расширение существует, то хаусдорфово расстояние между $\operatorname{range}(f; \boldsymbol{x})$ и $f(\boldsymbol{x})$ линейно стремится к нулю при уменьшении ширины $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}$. Аналогично, ширина интервального расширения линейно стремится к нулю при приближении $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}$ к нулю.

С другой стороны, как видно из Примера 1, интервальное расширение $f(\boldsymbol{x})$ может зависеть от выражения, которое используется для вычисления $f(\boldsymbol{x})$. Тогда естественно возникает вопрос: можно ли представить заданное функциональное выражение в таком виде, чтобы естественное интервальное расширение имело более высокий, чем линейный, порядок сходимости к области значений?

Ниже приводится первый результат, полученный при исследовании этого вопроса. Он показывает, в частности, почему естественное интервальное расширение второго функционального выражения в Примере 1 является оптимальным.

**Теорема 2** (Мур [64]). *Пусть непрерывная функция* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *задана выражением* $f(x)$, *причем каждая переменная* $x_i$, $i = 1, \dots, n$, *входит в это выражение однократно. Тогда*

$$f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{range}(f; \boldsymbol{x}) \qquad \text{для всех } \boldsymbol{x} \subseteq D.$$

К сожалению, весьма немногие выражения $f(x)$ могут быть преобразованы к виду, удовлетворяющему условиям Теоремы 2. Для того, чтобы представить альтернативный способ повышения точности оценивания, рассмотрим сначала простой пример.

**Пример 2.** Пусть $f(x) = x - x^2, x \in [0,1] = \boldsymbol{x}^0$.

Очевидно, что при $0 \le r \le \frac{1}{2}$ и $\boldsymbol{x} = \left[\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right]$ имеем

$$\operatorname{range}(f; \boldsymbol{x}) = \left[\frac{1}{4} - r^2, \frac{1}{4}\right]$$

и

$$f(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{1}{4} - 2r - r^2, \frac{1}{4} + 2r - r^2\right].$$

Из этого следует, согласно Теореме 1, что

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{range}(f; \boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})\big) \le \gamma \operatorname{wid} \boldsymbol{x}, \qquad \text{где } \gamma = 1$$

и

$$\operatorname{wid} f(\boldsymbol{x}) \le \delta \operatorname{wid} \boldsymbol{x}, \qquad \text{где } \delta = 2.$$

Если переписать выражение для $f(x)$ в виде

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$$

и подставить в правую часть этого равенства интервал $\boldsymbol{x} = \left[\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right]$, получим интервал $\left[\frac{1}{4} - r^2, \frac{1}{4} + r^2\right]$, который также содержит $\mathrm{range}(f; \boldsymbol{x})$, причем

$$\mathrm{dist}\left(\mathrm{range}(f; \boldsymbol{x}), \left[\frac{1}{4} - r^2, \frac{1}{4} + r^2\right]\right) \;=\; r^2 \;=\; \frac{1}{4}(\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x})^2.$$

Следовательно, при уменьшении ширины интервала $\boldsymbol{x}$ расстояние между точной областью значений $\mathrm{range}(f; \boldsymbol{x})$ и объемлющим её интервалом $\left[\frac{1}{4} - r^2, \frac{1}{4} + r^2\right]$ сходится к нулю со вторым порядком относительно $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}$.

Приведенный пример иллюстрирует следующий общий результат.

**Теорема 3** (Центрированная форма). *Пусть функция $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ представлена в «центрированной форме»*

$$f(x) = f(z) + h(x)^{\mathrm{T}}(x - z) \tag{12}$$

*для некоторого $z \in \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0 \subseteq D$ и $h(x) \in \mathbb{R}^n$. Если*

$$f(\boldsymbol{x}) \;= f(z) + h(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - z), \tag{13}$$

*то*

$$\mathrm{range}(f; \boldsymbol{x}) \subseteq f(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

*и (при некоторых дополнительных предположениях)*

$$\mathrm{dist}\big(\mathrm{range}(f; \boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})\big) \;\leq \kappa\, \|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2, \quad \kappa \geq 0, \tag{15}$$

*где константа $\kappa$ зависит от $\boldsymbol{x}^0$ и не зависит от $\boldsymbol{x}$ и $z$.*

Соотношение (15) называется «свойством квадратичной аппроксимации» центрированной формы. Рациональные функции достаточно просто могут быть приведены к центрированной форме, примеры этого можно найти в [77].

После введения центрированной формы зададимся вопросом, существуют ли формы, имеющие более высокий, чем второй, порядок аппроксимации области значений. К сожалению, ответ на этот вопрос отрицателен, что было доказано П. Хертлингом [39] (см. также [70]).

Для получения оценок областей значений, имеющих более высокий порядок аппроксимации, в некоторых специальных случаях можно использовать так называемые обобщённые центрированные формы (см., например, [18]). Другая интересная идея, основанная на использовании «остаточных форм функции $f$», была предложена Корнелиусом и Лонером в [27].

Наконец, для улучшения качества оценивания области значений можно применить дробление области определения. Представим $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$ в виде объединения $k^n$ интервальных векторов $\boldsymbol{x}^l$, $l = 1, \dots, k^n$, таких что $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}_i{}^l = \mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}_i / k$ для $i = 1, \dots, n$ и $l = 1, \dots, k^n$. Обозначая

$$f(\boldsymbol{x}; k) \;= \bigcup_{l=1}^{k^n} f(\boldsymbol{x}^l)\;, \tag{16}$$

можем сформулировать следующее утверждение:

**Теорема 4.** *Рассмотрим функцию $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(a) *Пусть выполняются условия Теоремы* 1 *и соотношение* (16). *Используя те же обозначения, имеем*

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{range}(f;\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x};k)\big) \le \frac{\hat{\gamma}}{k},$$

*где* $\hat{\gamma} = \gamma \|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^0\|_\infty$.

(b) *Пусть справедливы обозначения и предположения Теоремы* 3. *Тогда, подставляя в* (16) *вместо* $f(\boldsymbol{x}^l)$ *выражение* (13), *в котором* $z = z^l \in \boldsymbol{x}^l$, $l = 1, \dots, k$, *имеем*

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{range}(f;\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x};k)\big) \le \frac{\hat{\kappa}}{k^2},$$

*где* $\hat{\kappa} = \kappa \|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^0\|_\infty^2$.

В Теореме 4 утверждается, что интервальная оценка может быть сколь угодно близка к области значений, если $k$ стремится к бесконечности, т.е. дробление достаточно мелкое (более подробно этот вопрос изложен, например, в [78]).

Отметим, что приведённые выше результаты лежат в основе методов интервального оценивания экстремумов и доставляющих их аргументов в глобальной оптимизации. Детальное описание практических интервальных алгоритмов глобальной оптимизации можно найти, например, в [36, 37, 38, 42, 44] или [79].

В качестве простого примера, демонстрирующего использование методов интервального анализа, рассмотрим следующую задачу.

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $f: D \subset R \longrightarrow R$ и интервал $\boldsymbol{x}^0 \subseteq D$, для которого существует естественное интервальное расширение производной, причем $0 \notin f'(\boldsymbol{x}^0)$. Необходимо проверить, существует ли нуль $x^*$ функции $f$ на $\boldsymbol{x}^0$, и, если он существует, то найти его оценку, вычисляя последовательность интервалов, содержащих $x^*$, и обладающих следующим свойством: нижние и верхние границы интервалов стремятся к $x^*$. (Очевидно, в этом случае проверка существования нуля легко осуществляется путем вычисления значений функции на границах заданного интервала $\boldsymbol{x}^0$. Эта же идея применима для систем уравнений, что будет показано в следующем параграфе.)

Для $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0$ введем так называемый *оператор Ньютона*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) = m(\boldsymbol{x}) - \frac{f\big(m(\boldsymbol{x})\big)}{f'(\boldsymbol{x})}, \qquad \text{где } m(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{x} - \text{некоторая точка из } \boldsymbol{x}, \qquad (17)$$

и рассмотрим следующий итерационный метод:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}^k) \cap \boldsymbol{x}^k, \qquad k = 0, 1, 2 \dots, \qquad (18)$$

который называется *интервальным методом Ньютона*.

Свойства оператора (17) и метода (18) описываются следующим результатом.

**Теорема 5.** *Если имеют место указанные выше предположения, то для* (17) *и* (18) *верны следующие утверждения:*

(a) *Если*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0, \qquad (19)$$

*то* $f$ *имеет нуль* $x^* \in \boldsymbol{x}$, *причем единственный на интервале* $\boldsymbol{x}^0$.

(b) *Если* $f$ *имеет нуль* $x^* \in \boldsymbol{x}^0$, *то последовательность* $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^\infty$ *корректно определена,*

$$x^* \in \boldsymbol{x}^k \text{ и } \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = x^*.$$

*Если* $\operatorname{wid} f'(\boldsymbol{x}) \le c \operatorname{wid} \boldsymbol{x}$, *где* $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0$, *то* $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^{k+1} \le \gamma (\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k)^2$.

(c) $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$ *(где* $\emptyset$ *– пустое множество) для некоторого* $k_0 \geq 0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \boldsymbol{x}^0$.

Теорема 5 определяет две стратегии поиска нулей на интервале $\boldsymbol{x}^0$. В первой *доказывается*, что $f$ *имеет* единственный нуль $x^*$ на $\boldsymbol{x}^0$. Эта стратегия основана на утверждении (a) и может быть реализована с помощью итерационного метода (18) и проверки соотношения (19) для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k$. Во второй стратегии, основанной на утверждении (c), *доказывается*, что $f$ *не имеет* нулей $x^*$ на $\boldsymbol{x}^0$. В то время как вторая стратегия всегда приводит к успеху в случае, когда $\boldsymbol{x}^0$ не содержит нуля функции $f$, первая не всегда работает успешно, в чём можно убедиться на простом примере. Пусть задана функция $f(x) = x^2 - 4$, интервал $\boldsymbol{x}^0 = [2{,}4]$, и на каждом шаге выбирается $m(\boldsymbol{x}^k) > \underline{x}^k$. При этом интервал $\boldsymbol{x}^k$ имеет вид $\boldsymbol{x}^k = [2, a_k]$, где $a_k > 2$, тогда как $\underline{\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^k)} < 2$. Поэтому соотношение (19) никогда не выполнится.

В утверждении (b) говорится о том, что ширина интервалов стремится квадратично к нулю. С другой стороны, если после конечного числа $k_0$ шагов получаем пустое пересечение, т.е. $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$, и итерационная процедура (18) прерывается, то с практической точки зрения в этом случае было бы полезно иметь качественную характеристику величины числа $k_0$. Этот вопрос будет обсуждаться в следующем параграфе с более общих позиций.

## 4. Системы нелинейных уравнений

В этом параграфе мы будем рассматривать системы нелинейных уравнений вида

$$f(x) = 0 \tag{20}$$

и

$$f(x) = x, \tag{21}$$

т.е. решать задачу нахождения нулей и неподвижных точек функции $f$, соответственно. (Известно, что задача (20) эквивалентна задаче (21), если выбрать в (21) подходящим образом функцию $f$.) Используя средства интервального анализа, сформулируем простой критерий, гарантирующий, что заданный интервал $\boldsymbol{x}$ содержит по крайней мере один нуль $x^*$ функции $f$ или соответствующую неподвижную точку. Кроме того, мы перечислим условия единственности $x^*$ на интервале $\boldsymbol{x}$ и покажем, как можно уточнить $\boldsymbol{x}$ с помощью итерационной процедуры, в результате которой получается вектор-брус $\boldsymbol{x}^*$, содержащий $x^*$ и имеющий меньшую ширину.

Далее на протяжении всего §4 будем предполагать, что функция $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, по крайней мере, непрерывна на $D$, и в большинстве случаев она, по крайней мере, непрерывно дифференцируема (дифференцируема по Фреше).

Сначала рассмотрим неподвижные точки $x^*$ функции $f$ на брусе $\boldsymbol{x} \subseteq D$. Простой метод проверки существования такой точки основан на (6) – (8) и теореме Брауэра о неподвижной точке и заключается в следующем.

**Теорема 6.** *Пусть функция* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *непрерывна и*

$$f(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x} \subseteq D. \tag{22}$$

*Тогда* $f$ *имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку на* $\boldsymbol{x}$ *и итерационный процесс*

$$\boldsymbol{x}^0 := \boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} := f(\boldsymbol{x}^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

*сходится к некоторому интервалу* $\boldsymbol{x}^*$, *такому что*

$$\boldsymbol{x}^* \subseteq \boldsymbol{x}^{k+1} \subseteq \boldsymbol{x}^k \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}. \tag{24}$$

*Предельный интервал* $\boldsymbol{x}^*$ *содержит все неподвижные точки* $f$ *на* $\boldsymbol{x}$.

Назовем последовательность интервалов $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ *монотонно сходящейся,* если выполняется условие (24).

В Теореме 6 ничего не говорится ни о единственности $x^* \in \boldsymbol{x}$, ни о ширине $\boldsymbol{x}^*$. Действительно, простой пример $f(x) = -x, \boldsymbol{x} = [-1, 1]$ и $\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}$ показывает, что может иметь место $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^* > 0$, хотя $x^* = 0$ – единственная неподвижная точка $f$ на $\mathbb{R}$. Но для $P$-сжатий путем непосредственного применения теоремы Банаха о неподвижной точке могут быть доказаны более сильные результаты. Напомним, что отображение $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ называется *$P$-сжатием* на множестве $\mathbb{I}\boldsymbol{x}$ всех интервалов, содержащихся в $\boldsymbol{x} \subseteq D$, если существует матрица $P \geq O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ со спектральным радиусом $\rho(P) < 1$ и

$$\operatorname{dist}\big(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z})\big) \;\leq\; P \cdot \operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \text{для всех } \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \subseteq \boldsymbol{x}.$$

Тривиальным примером являются линейные функции $f(x) = Ax - b$, где $D = \mathbb{R}^n$,

$$A = \mathbb{R}^{n\times n}, \;\; \rho(P) < 1, \quad b \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad P = |A|.$$

**Теорема 7.** *Пусть* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *есть $P$-сжатие на* $\mathbb{I}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \subseteq D$, *и пусть имеет место соотношение* (22). *Тогда* $f$ *имеет только одну неподвижную точку* $x^* \in \boldsymbol{x}$ *и итерационный процесс* (23) *сходится к* $x^*$ *при любом начальном векторе* $\boldsymbol{x}^0 \subseteq \boldsymbol{x}$. *Более того,* $x^* \in \boldsymbol{x}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, *если* $x^* \in \boldsymbol{x}^0$, *что имеет место, в частности, когда* $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}$.

**Замечание 1.** В Теореме 7 условие (22) можно опустить, если $f$ является $P$-сжатием на всём пространстве $\mathbb{IR}^n$ (см. [13]). Тогда для любого $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{IR}^n$ единственная неподвижная точка содержится в интервале $[-\underline{x}^0 - \Delta, \overline{x}^0 + \Delta]$, где $\Delta = (I - P)^{-1}\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}^1,\ \boldsymbol{x}^0)$.

Замечание 1 заслуживает внимания, так как не всегда удаётся легко найти брус $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий соотношению (22). Однако существует предложенный ещё Румпом [81] метод проб и ошибок, который на практике, как правило, порождает требуемый брус $\boldsymbol{x}$ за небольшое число шагов. Эта методика называется «эпсилон-раздутием» ($\varepsilon$-раздутием) и является достаточно общим инструментом интервального анализа. Она состоит в том, что некоторый интервал, полученный на текущем шаге итерационного процесса, заменяется на объемлющий интервал, отличающийся от него на некоторый малый параметр $\varepsilon$. Это может быть сделано, например, следующим образом: сначала, используя любой подходящий стандартный метод численного анализа, вычисляется некоторое приближение $\tilde{x}$ неподвижной точки $x^*$. Затем применяется итерационная процедура:

$$\boldsymbol{x}^0 := \tilde{x},$$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} := f(\boldsymbol{x}^k + [-\varepsilon, \varepsilon] \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k + [-\eta, \eta]e), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{25}$$

где $\varepsilon$, $\eta$ – некоторые малые положительные вещественные числа, $e = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$. Если $f$ является $P$-сжатием на $\mathbb{IR}^n$, то итерационный процесс (25) сходится за конечное число шагов, на каждом из которых интервал $\boldsymbol{x}^k$ удовлетворяет соотношению (22). Данное утверждение сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 8.** *Пусть* $f: D = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *есть P-сжатие на* $\mathbb{IR}^n$. *При заданном* $\boldsymbol{x}_\varepsilon^0$ *в результате итерационной процедуры* (25):

$$\boldsymbol{x}_\varepsilon^{k+1} := f(\boldsymbol{x}_\varepsilon^k) + \boldsymbol{\delta}^k, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

*где* $\boldsymbol{\delta}^k \in \mathbb{IR}^n$, *получаем векторы, которые сходятся к некоторому пределу* $\boldsymbol{\delta}$. *Если* $0 \in \operatorname{int}(\boldsymbol{\delta})$, *то существует целое число* $k_0 = k_0(\boldsymbol{x}_\varepsilon^0)$, *такое что*

$$f\left(\boldsymbol{x}_\varepsilon^{k_0}\right) \in \operatorname{int} \boldsymbol{x}_\varepsilon^{k_0}.$$

Используя итерационную процедуру (25), попытаемся применить Теорему 8, полагая, что $\boldsymbol{\delta}^k = (\operatorname{wid} f(\boldsymbol{x}_\varepsilon^k))[-\varepsilon, \varepsilon] + [-\eta, \eta]e$ и $\boldsymbol{x}_\varepsilon^0 = \boldsymbol{x}^0 + (\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^0)[-\varepsilon, \varepsilon] + [-\eta, \eta]e$. Если существует $\boldsymbol{\delta} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\delta}^k$, то $0 \in \operatorname{int} \boldsymbol{\delta}$, так как $0 \in [-\eta, \eta]e \subseteq \boldsymbol{\delta}^k$, где $k = 0, 1, \ldots$.

Теорема 8 была впервые сформулирована и доказана Румпом [83] для линейных функций $f$. Она была обобщена на $P$-сжатия и сжимающие интервальные функции в [58, 59], где также рассмотрен случай $D \neq \mathbb{R}^n$ и приведены различные примеры эпсилон-раздутия. К сожалению, в Теореме 8 ничего не говорится о количестве шагов, приводящих к результату, который удовлетворяет (22). Поэтому представляют интерес другие методы, которые будут рассмотрены во второй части этого параграфа и в §6.

Рассмотрим теперь методы локализации (оценивания) нулей заданной функции $f$.

Первый из них может быть основан на результате К. Миранды (см. [62] или Следствие 5.3.8 в [69]), который эквивалентен теореме Брауэра о неподвижной точке. Изложим этот результат в модифицированном виде, приспособленном для нужд интервального анализа.

**Теорема 9** (теорема Миранды)**.** *Пусть функция* $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *непрерывна,* $\boldsymbol{x} \subseteq D$ *и*

$$\boldsymbol{l}^i = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \underline{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{u}^i = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \overline{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^{\mathrm{T}}.$$

*Если неравенства* $\overline{f_i(\boldsymbol{l}^i)} \leq 0$, $\underline{f_i(\boldsymbol{u}^i)} \geq 0$ *или* $\underline{f_i(\boldsymbol{l}^i)} \geq 0$, $\overline{f_i(\boldsymbol{u}^i)} \leq 0$ *выполняются для каждого* $i = 1, \ldots, n$, *то функция* $f$ *имеет по крайней мере один нуль на брусе* $\boldsymbol{x}$.

Теорема 9, используемая совместно с процедурами интервального оценивания, дробления и обработки списка подбрусов, служит основой простого и эффективного метода проверки существования и оценки нулей функции $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ даже в случае $m < n$. Таким образом могут быть найдены весьма точные интервальные оценки кривых и поверхностей и, как следствие, могут быть решены задачи компьютерного графического проектирования (CAGD), такие, например, как трассировка луча. Подробное изложение данных вопросов можно найти в [31, 52, 68].

Другой метод проверки существования нулей функции состоит в обобщении интервального метода Ньютона, рассмотренного в §3, на многомерный случай. Обозначим через

$$\operatorname{IGA}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$$

результат применения метода Гаусса к интервальной линейной системе $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с неособенной интервальной матрицей $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и интервальным вектором $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ (см., например, §5 и [13, §15]). Предположим, что в процессе исключения переменных не возникает деление на интервал, содержащий нуль. Легко показать, что выполняется следующее соотношение:

$$\Xi = \{\, x = A^{-1}b \mid A \in \boldsymbol{A},\ b \in \boldsymbol{b} \,\} \subseteq \operatorname{IGA}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}). \tag{26}$$

Условимся, что всюду далее через $\mathrm{IGA}(\boldsymbol{A})$ будет обозначаться интервальная матрица, $i$-й столбец которой получен как $\mathrm{IGA}(\boldsymbol{A}, e^i)$, где $e^i$ – $i$-й столбец единичной матрицы. Другими словами, $\mathrm{IGA}(\boldsymbol{A})$ есть внешняя интервальная оценка множества всех матриц, обратных матрицам $A \in \boldsymbol{A}$.

Теперь предположим, что функция

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{27}$$

непрерывно дифференцируема. Если $x, y \in \boldsymbol{x} \subseteq D$, то

$$f(x) - f(y) = J(y,x)(x - y), \tag{28}$$

где

$$J(y,x) = \int_0^1 f'(y + t(x-y))\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Заметим, что $J$ – непрерывное отображение переменных $x$ и $y$, которое обладает свойством $J(y,x) = J(x,y)$. Так как $t \in [0,1]$, то $y + t(x-y) \in \boldsymbol{x}$ и, следовательно,

$$J(y,x) \in f'(\boldsymbol{x}), \tag{30}$$

где $f'(\boldsymbol{x})$ обозначает естественное интервальное расширение производной функции $f$. Для фиксированного $y \in \boldsymbol{x}$ из соотношений (28) и (30) получим

$$p(x) = x - J^{-1}(y,x)f(x) = y - J^{-1}(y,x)\, f(y) \in y - \mathrm{IGA}(f'(\boldsymbol{x}), f(y)). \tag{31}$$

Если $x \in \boldsymbol{x}$ – нуль функции $f$, то из (31) имеем $x \in y - \mathrm{IGA}(f'(\boldsymbol{x}), f(y))$. Отсюда получим следующее определение оператора Ньютона $\mathcal{N}(\boldsymbol{x})$, которое введём по аналогии с (18). Предположим, что $m(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{x}$ – точечный вещественный вектор. Тогда

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) = m(\boldsymbol{x}) - \mathrm{IGA}(f'(\boldsymbol{x}), f(m(\boldsymbol{x}))). \tag{32}$$

Интервальный метод Ньютона определим рекуррентным равенством:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}^k) \cap \boldsymbol{x}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{33}$$

Сформулируем следующий результат, аналогичный Теореме 5:

**Теорема 10.** *Пусть $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая функция. Допустим, что $\mathrm{IGA}(f'(\boldsymbol{x}^0))$ существует для некоторого интервального вектора $\boldsymbol{x}^0 \subseteq D$.* (*Это равносильно предположению о применимости алгоритма Гаусса к $f'(\boldsymbol{x}^0)$. В частности, матрица $f'(\boldsymbol{x}^0)$ в этом случае неособенная.*)

(a) *Если*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x},$$

*для некоторого $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0$, то $f$ имеет нуль $x^* \in \boldsymbol{x}$, который единственен на $\boldsymbol{x}^0$.*
*Предположим, что*

$$\rho(A) < 1, \text{где } A = |I - \mathrm{IGA}(f'(\boldsymbol{x}^0))f'(\boldsymbol{x}^0)|. \tag{34}$$

(b) *Если $f$ имеет нуль $x^* \in \boldsymbol{x}^0$, то последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$, заданная рекуррентной формулой* (33), *корректно определена, $x^* \in \boldsymbol{x}^k$* и $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = x^*$. *В частности, $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ – монотонно сходящаяся последовательность и $\boldsymbol{x}^0$ содержит единственный нуль $x^*$.*
*Кроме того, если*

$$\mathrm{wid}\, f'(\boldsymbol{x})_{ij} \le \alpha \|\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}\|_\infty, \quad \alpha \ge 0, \ 1 \le i, \ j \le n \tag{35}$$

*для всех $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0$, то*

$$\|\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^{k+1}\|_\infty \le \gamma \|\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^k\|_\infty^2, \quad \gamma \ge 0. \tag{36}$$

(c) $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$ *для некоторого* $k_0 \geq 0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \boldsymbol{x}^0$.

Утверждение (a) можно легко доказать, применив теорему Брауэра о неподвижной точке для функции $p$, определённой равенством (31). Доказательства утверждений (b) и (c) могут быть найдены в [9].

Заметим, что в отличие от одномерного случая для справедливости утверждений (b) и (c) необходимо выполнение условия (34).

В силу соображений непрерывности данное условие всегда выполняется, если ширина wid $\boldsymbol{x}^0$ заданного интервального вектора («начального вектора») достаточно мала и если $f'(\boldsymbol{x}^0)$ не содержит особенных матриц, так как вследствие Теоремы 1 в предельном случае при wid $\boldsymbol{x}^0 = 0$ имеет место равенство $A = O$. Швандт [86] привёл простой пример, показывающий, что при $\rho(A) \geq 1$ для некоторого интервального вектора соотношение (33) даёт непустой результат, $x^* \in \boldsymbol{x}^k$, но $\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^k \neq x^*$.

В случае выполнения условия (a) предыдущей теоремы из соотношения (36) следует квадратичная сходимость ширины объемлющих интервалов к нулевому вектору. Столь же высокий порядок сходимости имеет хорошо известный метод Ньютона. Если уравнение $f(x) = 0$ не имеет решения $x^*$ на $\boldsymbol{x}^0$, то этот факт может быть установлен с помощью применения итерационной процедуры (33) до тех пор, пока на некотором шаге $k_0$ не получится пустого пересечения. С практической точки зрения, важно, чтобы число итераций $k_0$, как правило, было небольшим. Покажем, что при выполнении некоторых естественных условий число $k_0$ мало, если мала ширина интервала $\boldsymbol{x}^0$.

Пусть для интервального оператора Ньютона (32) имеет место $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) = [\underline{n}, \overline{n}]$. Легко доказать, что

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{x} = \emptyset$$

тогда и только тогда, когда хотя бы для одной компоненты $i_0$ выполняется либо

$$(\overline{n} - \underline{x})_{i_0} < 0, \tag{37}$$

либо

$$(\overline{x} - \underline{n})_{i_0} < 0. \tag{38}$$

Кроме того, можно показать, что из неравенств

$$\overline{x} - \underline{n} \leq O(\|\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}\|_\infty^2)e + A^2 f(\overline{x}) \tag{39}$$

и

$$\overline{n} - \underline{x} \leq O(\|\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}\|_\infty^2)e - A^1 f(\underline{x}) \tag{40}$$

следует условие (35). Здесь $A^1$ и $A^2$ – две вещественных матрицы, принадлежащие IGA$(f'(\boldsymbol{x}^0))$. Следовательно, если $f(x) \neq 0$, $x \in \boldsymbol{x}$, то для достаточно малой ширины wid $\boldsymbol{x}$ найдется, по крайней мере, одна компонента $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, такая что

$$(A^1 f(\underline{x}))_{i_0} \neq 0 \tag{41}$$

и

$$\mathrm{sign}(A^1 f(\underline{x}))_{i_0} = \mathrm{sign}(A^2 f(\overline{x}))_{i_0}. \tag{42}$$

Предположим теперь, что $\mathrm{sign}(A^1 f(\underline{x}))_{i_0} = 1$. Тогда для достаточно малой ширины wid $\boldsymbol{x}$ из соотношения (40) следует, что $(\overline{n} - \underline{x})_{i_0} < 0$, и из соотношения (37) следует, что пересечение пусто. Если $\mathrm{sign}(A^1 f(\underline{x}))_{i_0} = -1$ , то в силу (39) получаем $(\overline{x} - \underline{n})_{i_0} < 0$ для достаточно малых wid $\boldsymbol{x}$ , и из соотношения (38) следует, что пересечение также пусто.

Если $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$ для некоторого $k_0$, то итерации интервального метода Ньютона прерываются и при этом говорят, что метод расходится. Поскольку в (39) и (40) присутствуют выражения $O(\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2)$, то можно сказать, что в случае $f(x) \neq 0$, $x \in \boldsymbol{x}^0$, интервальный метод Ньютона квадратично расходится.

Продемонстрируем это замечание на простом примере одномерной функции.

**Пример 3.** Рассмотрим многочлен

$$f(x) = x^5 + x^4 - 11x^3 - 3x^2 + 18x,$$

который имеет только простые вещественные нули, принадлежащие интервалу $\boldsymbol{x}^0 = [-5, 6]$. К сожалению, итерационный метод (18) не может быть использован в данном случае, так как $0 \in f'(\boldsymbol{x}^0)$. Применяя модификацию интервального метода Ньютона, описанную в [3], можно вычислить непересекающиеся подынтервалы, содержащиеся в $\boldsymbol{x}^0$, для которых естественное интервальное расширение не содержит нуля. Затем для каждого из этих интервалов выполняется процедура (18). Если рассматриваемый подынтервал содержит нуль функции, то имеет место утверждение (a) Теоремы 5, в противном случае верно утверждение (b). В Таблице 1 перечислены интервалы, полученные в результате применения указанной выше модификации метода Ньютона до тех пор, пока $0 \notin f'(\boldsymbol{x}^0)$ для всех вычисленных подынтервалов из $\boldsymbol{x}^0$ (для простоты мы ограничились указанием в мантиссах только трех цифр).

Подынтервалы, не содержащие нуля функции $f$, отмечены в Таблице 2 «звездочкой» (*). Соответствующее число, указанное во второй строке этой таблицы, показывает количество итераций, которые необходимо выполнить для получения пустого пересечения. Для $n = 9$ ширина интервала, приблизительно равная 2.75, довольно значительна и только после трех итераций (шагов) получается пустое пересечение. Каждый из интервалов с номерами $n = 1, 2, 3, 6, 8$ содержит нуль функции $f$. Соответствующее число во второй строке таблицы показывает количество шагов, выполняемых до тех пор, когда нижняя и верхняя границы уже не могут быть улучшены на_компьютере. Для данных номеров подтверждают квадратичную сходимость ширины объемлющих интервалов. (Для $n = 3$ оцениваемый нуль $x^* = 0$ и мы сталкиваемся с исчезновением порядка компьютерной арифметики).

Изложение вопросов, касающихся скорости расходимости, можно найти в [8].

Интервальный метод Ньютона имеет большой недостаток, состоящий в том, что даже при выполнении условия неособенности матриц, содержащихся в естественном интервальном расширении $f'(\boldsymbol{x}^0)$ производной функции, нет гарантии, что применение метода будет успешным, так что в общем случае можно вычислить $\mathrm{IGA}(f'(\boldsymbol{x}^0), f(m(\boldsymbol{x}^0)))$, только если ширина $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}^0$ достаточно мала. По этой причине Кравчик [48] предложил ввести отображение, известное в настоящее время как оператор Кравчика.

Предположим, что задана функция (27), обладающая указанными выше свойствами. Аналогично (32) рассмотрим так называемый *оператор Кравчика*:

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) = m(\boldsymbol{x}) - C\,f\big(m(\boldsymbol{x})\big) + \big(I - Cf'(\boldsymbol{x})\big)\big(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{x})\big), \tag{43}$$

где $C$ – неособенная вещественная матрица и $m(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{x}$. Для фиксированной матрицы $C$ определим *метод Кравчика* следующим образом:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{K}(\boldsymbol{x}^k) \cap \boldsymbol{x}^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{44}$$

Для данного метода можно сформулировать результаты, аналогичные тем, которые были приведены в Теореме 10 для интервального метода Ньютона.

Таблица 1.
Применение модифицированного интервального метода Ньютона для функции $f$ из примера 3.

| $n$ | |
|---|---|
| 1 | $[-0.356 \cdot 10^1, -0.293 \cdot 10^1]$ |
| 2 | $[-0.141 \cdot 10^1, -0.870 \cdot 10^0]$ |
| 3 | $[-0.977 \cdot 10^0, 0.499 \cdot 10^0]$ |
| 4 | $[0.501 \cdot 10^0, 0.633 \cdot 10^0]$ |
| 5 | $[0.140 \cdot 10^1, 0.185 \cdot 10^1]$ |
| 6 | $[0.188 \cdot 10^1, 0.212 \cdot 10^1]$ |
| 7 | $[0.265 \cdot 10^1, 0.269 \cdot 10^1]$ |
| 8 | $[0.297 \cdot 10^1, 0.325 \cdot 10^1]$ |
| 9 | $[0.327 \cdot 10^1, 0.600 \cdot 10^1]$ |

Таблица 2
Применение интервального метода Ньютона для $f$ из примера 3.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4* | 5* | 6 | 7* | 8 | 9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 9 | 1 | 2 | 6 | 1 | 5 | 3 |

**Теорема 11.** *Пусть $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что для некоторого интервального вектора $\boldsymbol{x}^0 \subseteq D^0$ существует естественное интервальное расширение $f'(\boldsymbol{x}^0)$ производной функции $f$.*

(a) *Если*

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x} \tag{45}$$

*для некоторого $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0$, то $f$ имеет нуль $x^*$ на $\boldsymbol{x}$.*

*Если условие* (45) *немного усилить, т.е. положить, что*

$$(\mathcal{K}(\boldsymbol{x}))_i \subset \boldsymbol{x}_i \subseteq \boldsymbol{x}_i{}^0 \text{ для } i = 1, \dots, n, \tag{46}$$

*то выполняется неравенство $\rho(|I - Cf'(\boldsymbol{x})|) < 1$, матрица $f'(\boldsymbol{x})$ является неособенной и $x^*$ – единственный нуль на $\boldsymbol{x}$.*

*Пусть $m(\boldsymbol{x})$ – середина интервала $\boldsymbol{x}$ и предположим, что*

$$\rho(B) < 1, \quad \text{где } B = |I - Cf'(\boldsymbol{x}^0)|. \tag{47}$$

(b) *Если $f$ имеет нуль $x^* \in \boldsymbol{x}^0$, то последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$, заданная рекуррентной формулой* (44), *корректно определена, $x^* \in \boldsymbol{x}^k$* и $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = x^*$. *В частности, $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ – монотонно сходящаяся последовательность и $\boldsymbol{x}^0$ содержит единственный нуль $x^*$. Более того, если матрица $C = C_k$ изменяется в зависимости от $k$ так, что она является обратной некоторой матрице из $f'(\boldsymbol{x}^k)$, и если*

$$\operatorname{wid} f'(\boldsymbol{x})_{ij} \le \alpha \|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}\|_\infty, \quad \alpha \ge 0, \quad 1 \le i, j \le n \tag{48}$$

*для всех $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{x}^0$, то*

$$\|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^{k+1}\|_\infty \le \gamma \|\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k\|_\infty^2, \quad \gamma \ge 0. \tag{49}$$

(c) $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$ *для некоторого $k_0 \ge 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \ne 0$ для всех $x \in \boldsymbol{x}^0$.*

**Доказательство.** (a) Для неособенной матрицы $C$ из $\mathcal{K}(\boldsymbol{x})$ рассмотрим непрерывное отображение

$$g: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

заданное следующим образом:

$$g(x) = x - Cf(x).$$

Используя (28) и условия теоремы, получим

$$\begin{aligned} g(x) &= x - Cf(x) \\ &= x - C\Big(f(x) - f\big(m(\boldsymbol{x})\big)\Big) - Cf(m(\boldsymbol{x})) \\ &= m(\boldsymbol{x}) + \big(x - m(\boldsymbol{x})\big) - C\,J(m(\boldsymbol{x}), x)\big(x - m(\boldsymbol{x})\big) - C\,f(m(\boldsymbol{x})) \\ &\in m(\boldsymbol{x}) - Cf(m(\boldsymbol{x})) + \big(I - Cf'(\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{x})) \\ &= \mathcal{K}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x}, \qquad x \in \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

По теореме Брауэра о неподвижной точке функция $g$ имеет неподвижную точку $x^* \in \boldsymbol{x}$. Эта неподвижная точка и является нулем функции $f$.

Если заменить (45) на (46), то получим $|I - Cf'(\boldsymbol{x})| \operatorname{wid} \boldsymbol{x} \leq \operatorname{wid} \mathcal{K}(\boldsymbol{x}) < \operatorname{wid} \boldsymbol{x}$. Следовательно,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n} |I - Cf'(\boldsymbol{x})|_{ij} \operatorname{wid} \boldsymbol{x}_j}{\operatorname{wid} \boldsymbol{x}_i} < 1,$$

что эквивалентно неравенству

$$\left\| \widehat{D}^{-1} |I - Cf'(\boldsymbol{x})| \widehat{D} \right\|_\infty < 1.$$

Здесь $\widehat{D}$ – диагональная матрица с элементами $\hat{d}_{ij} = \operatorname{wid} \boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\rho(|I - Cf'(\boldsymbol{x})|) = \rho(\widehat{D}^{-1} |I - Cf'(\boldsymbol{x})| \widehat{D}) \leq \left\| \widehat{D}^{-1} |I - Cf'(\boldsymbol{x})| \widehat{D} \right\|_\infty < 1.$$

Если $f'(\boldsymbol{x})$ содержит особенную матрицу $A$, то 1 является собственным значением матрицы $I - CA$ и имеет место противоречие:

$$1 \leq \rho(I - CA) \leq \rho(|I - CA|) \leq \rho(|I - Cf'(\boldsymbol{x})|) < 1. \tag{50}$$

Следовательно, $f'(\boldsymbol{x})$ неособенная матрица. В случае, когда $f$ имеет два нуля $x^*, y^* \in \boldsymbol{x}$, то из (28) и (30) получим $x^* = y^*$.

(b) Из (28) имеем

$$f(x^*) - f(m(\boldsymbol{x})) = J(m(\boldsymbol{x}), x^*)(x^* - m(\boldsymbol{x}))$$

и так как $f(x^*) = 0$, то получим

$$\begin{aligned} x^* &= m(\boldsymbol{x}) - Cf(m(\boldsymbol{x})) + (I - CJ(m(\boldsymbol{x}), x^*))(x^* - m(\boldsymbol{x})) \\ &\in m(\boldsymbol{x}) - Cf(m(\boldsymbol{x})) + (I - Cf'(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{x})) \\ &= \mathcal{K}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $x^* \in \boldsymbol{x}^0$, то $x^* \in \mathcal{K}(\boldsymbol{x}^0)$, и поэтому $x^* \in \mathcal{K}(\boldsymbol{x}^0) \cap \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^1$. Далее, используя математическую индукцию, можно доказать, что $x^* \in \boldsymbol{x}^k,\ k \geq 0$.

Для последовательности интервалов $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ имеем $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^{k+1} \leq \operatorname{wid} \mathcal{K}(\boldsymbol{x}^k) \leq$ $\leq B \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k$, где последнее неравенство следует из предположения, что $m(\boldsymbol{x}^k)$ – середина интервала $\boldsymbol{x}^k$. Из неравенства $\rho(B) < 1$, следует, что $\lim_{k \to \infty} \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k = 0$, и так как $x^* \in \boldsymbol{x}^k$, то $\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^k = x^*$. В частности, $x^*$ – единственный нуль на интервале $\boldsymbol{x}^0$.

Аналогично доказательству (a), из условия (47) следует, что $f'(\boldsymbol{x}^0)$ является неособенной матрицей. Поскольку она является компактным множеством, а также потому что матрица, обратная к $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, непрерывно зависит от элементов матрицы $M$, множество $\{|M^{-1}| | M \in f'(\boldsymbol{x}^0)\}$ ограничено некоторой матрицей $\hat{C}$. Используя условие (48), покажем, что имеет место квадратичный порядок сходимости (49):

$$\begin{aligned} \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^{k+1} &\le |I - C_k f'(\boldsymbol{x}^k)| \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k \\ &\le |C_k||C_k^{-1} - f'(\boldsymbol{x}^k)| \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k \\ &\le \hat{C}|f'(\boldsymbol{x}^k) - f'(\boldsymbol{x}^k)| \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k \\ &= \hat{C} \operatorname{wid} f'(\boldsymbol{x}^k) \operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k. \end{aligned}$$

(c) Предположим теперь, что $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$ для некоторого $k_0 \ge 0$. Тогда $f(x) \ne 0$ для $x \in \boldsymbol{x}^0$, поскольку при $f(x^*) = 0$ для некоторого $x^* \in \boldsymbol{x}^0$ метод Кравчика корректно определен и $x^* \in \boldsymbol{x}^k, k \ge 0$.

С другой стороны, если $f(x) \ne 0$ и $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}^k) \cap \boldsymbol{x}^k \ne \emptyset$, то последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}$ корректно определена. Из неравенства $\rho(B) < 1$, следует, что $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}^k \longrightarrow 0$, и поскольку $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ есть последовательность вложенных интервалов, то $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Так как оператор Кравчика – непрерывное отображение и этим же свойством обладает операция пересечения, то, переходя к пределу в (44), получим:

$$\hat{x} = \mathcal{K}(\hat{x}) \cap \hat{x} = \mathcal{K}(\hat{x}) = \hat{x} - Cf(\hat{x}).$$

Отсюда $f(\hat{x}) = 0$, что противоречит предположению, что $f(x) \ne 0$ для $x \in \boldsymbol{x}^0$.

Таким образом, Теорема 11 доказана. ■

**Замечание 2.** (a) При введении оператора Кравчика в (43) мы потребовали, чтобы матрица $C$ была неособенной. Это требование становится излишним в случае выполнения условия (45) или (47), поскольку любое из них приводит к неособенности матрицы, что может быть доказано аналогично доказательству утверждения (a).

(b) Легко показать, что в случае выполнения условий (a) теоремы все нули $x^*$ функции $f$ на $\boldsymbol{x}$ содержатся также в $\mathcal{K}(\boldsymbol{x})$.

(c) Если $m(\boldsymbol{x})$ не является серединой интервала $\boldsymbol{x}$, но содержится в нем, то утверждения (b), (c) остаются справедливыми, если (47) заменить на неравенство:

$$\rho(B) < \frac{1}{2}.$$

(d) Утверждение (47) непосредственно следует из справедливости условия (34) для $C \in \operatorname{IGA}(f'(\boldsymbol{x}^0))$.

В случае выполнения условия (c) Теоремы 11, т.е. при $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}^{k_0}) \cap \boldsymbol{x}^{k_0} = \emptyset$ для некоторого $k_0 \ge 0$, можно также говорить о «расходимости» метода Кравчика. Аналогично интервальному методу Ньютона число $k_0$ мало, если мала ширина интервала $\boldsymbol{x}^0$. Это будет продемонстрировано позже при следующих предположениях:

(i) $f'(\boldsymbol{x}^0)$ – неособенная матрица,

(ii) выполняется условие (48),

(iii) матрица $C = C_k$ изменяется в зависимости от $k$ так, что она является обратной некоторой матрице из $f'(\boldsymbol{x}^k)$.

Заметим, что эти предположения всегда выполняются, если имеют место предположения для (49).

Как и в случае интервального оператора Ньютона пусть $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) = [\underline{k}, \overline{k}]$. Тогда $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{x} = \emptyset$ в том и только в том случае, если выполняется

$$(\overline{x} - \underline{k})_{i_0} < 0 \qquad (51)$$

или

$$(\overline{k}-\underline{x})_{i_0}<0 \tag{52}$$

хотя бы для одного $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$. (Сравните с (37) и (38).)

Сначала докажем, что для оператора $\mathcal{K}(\boldsymbol{x})$, определенного равенством (43), имеют место векторные неравенства

$$\overline{x}-\underline{k}\ \le\ O(\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2)e+Cf(\overline{x}) \tag{53}$$

и

$$\overline{k}-\underline{x}\ \le\ O(\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2)e-Cf(\underline{x}), \tag{54}$$

где $e=(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$.

Докажем неравенство (54). Для $\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{x}^0$ положим $f'(\boldsymbol{x})=[\underline{F'},\overline{F'}]$. Пусть $C=\widehat{M}^{-1}$ для некоторой матрицы $\widehat{M}\in f'(\boldsymbol{x})$. После простых преобразований получим:

$$I-Cf'(\boldsymbol{x})=C[\widehat{M}-\overline{F'},\widehat{M}-\underline{F'}]\subseteq|C|[\underline{F'}-\overline{F'},\overline{F'}-\underline{F'}]\subseteq[-1,1]\widehat{C}\,\mathrm{wid}\,f'(\boldsymbol{x}),$$

где $\hat{C}$ – некоторая верхняя оценка множества $\{|M^{-1}||M\in f'(\boldsymbol{x}^0)\}$. Следовательно,

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x})\ \subseteq\ m(\boldsymbol{x})-C\,f(m(\boldsymbol{x}))+[-1,1]\,\widehat{C}\,\mathrm{wid}\,f'(\boldsymbol{x})\cdot|\boldsymbol{x}-m(\boldsymbol{x})|.$$

Отсюда, используя (48) и то, что $m(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{x}$, имеем

$$\begin{aligned}\overline{k}-\underline{x}\ &\le\ m(\boldsymbol{x})-\underline{x}-C\,f\big(m(\boldsymbol{x})\big)+\hat{C}\,\mathrm{wid}\,f'(\boldsymbol{x})\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\\ &\le\ \tfrac{1}{2}\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}-Cf(m(\boldsymbol{x}))+O(\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2)e.\end{aligned}$$

Полагая в (28) $x=m(\boldsymbol{x})$, $y=\underline{x}$, получим

$$f\big(m(\boldsymbol{x})\big)-f\big(\underline{x}\big)\ =J\Big(\underline{x},m(\boldsymbol{x})\Big)\,(m(\boldsymbol{x})-\underline{x}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\overline{k}-\underline{x}\ &\le\ \frac{1}{2}\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}-C\,f(\underline{x})-\frac{1}{2}C\,J\Big(\underline{x},m(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}+O(\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2)e\\ &=\ \tfrac{1}{2}\ (I-C\,J(\underline{x},m(\boldsymbol{x}))\ (\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}-C\,f(\underline{x})+O(\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2)e.\end{aligned}$$

Используя равенство

$$I-C\,J\Big(\underline{x},m(\boldsymbol{x})\Big)\ =C\left(C^{-1}-J\Big(\underline{x},m(\boldsymbol{x})\Big)\right)\in\hat{C}\big(f'(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})\big)=\ \hat{C}\,\mathrm{wid}\,f'(\boldsymbol{x}),$$

а также соотношение (48), получим требуемое утверждение.

Второе неравенство можно доказать аналогично, и, тем самым, доказать справедливость соотношений (53) и (54).

Если $f(x)\neq 0$, $x\in\boldsymbol{x}$ и ширина $\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}$ достаточно мала, то существует $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$, такое что

$$(Cf(\underline{x}))_{i_0}\neq 0 \tag{55}$$

и

$$\mathrm{sign}(Cf(\overline{x}))_{i_0}=\mathrm{sign}(Cf(\underline{x}))_{i_0}. \tag{56}$$

Данное утверждение можно доказать следующим образом. Так как $\underline{x}\in\boldsymbol{x}$, то $f(\underline{x})\neq 0$ и, поскольку $C$ – неособенная матрица, то $C(f(\underline{x}))\neq 0$. Следовательно, по крайней мере для одного $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеет место $(Cf(\underline{x}))_{i_0} \neq 0$, что доказывает (55). Вновь используя (28), где $x = \overline{x}$, $y = \underline{x}$, получим

$$f(\overline{x}) - f(\underline{x}) = J(\underline{x}, \overline{x})(\overline{x} - \underline{x}).$$

Отсюда следует, что

$$Cf(\overline{x}) = Cf(\underline{x}) + C\,J(\underline{x}, \overline{x})(\overline{x} - \underline{x}).$$

Поскольку второй член в правой части равенства стремится к нулю при $\operatorname{wid} \boldsymbol{x} \longrightarrow 0$, то при достаточно малой ширине $\operatorname{wid} \boldsymbol{x}$ имеет место (56).

Используя (53), (54) совместно с (55) и (56), можно показать, что при достаточно малой ширине интервала $\boldsymbol{x}$ пересечение $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{x}$ будет пустым. Это утверждение аналогично выводам, полученным для интервального оператора Ньютона с использованием соотношений (41), (42) совместно с (39) и (40). По тем же причинам, что и для интервального оператора Ньютона, обозначим данное поведение как «квадратичную расходимость» метода Кравчика.

Утверждения (a) в сформулированных выше двух теоремах можно использовать систематическим образом для проверки существования решения нелинейной системы в заданном интервальном векторе-брусе. Помимо утверждения о существовании мы получаем также интервальный вектор, дающий покомпонентную оценку погрешности решения. Теперь обсудим, как может быть построен данный интервальный вектор.

Для нелинейного отображения $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ рассмотрим метод Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - f'(x^k)^{-1} f(x^k), \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{57}$$

В известной теореме Ньютона-Канторовича сформулированы достаточные условия сходимости метода Ньютона с начальным вектором $x^0$. Более того, в этой теореме предложена оценка погрешности. С учетом данной оценки и свойства (36) квадратичной сходимости метода Кравчика (которое было доказано выше при достаточно слабых предположениях) будет представлен способ построения проверяемого интервала на основе последовательных приближений, полученных только с помощью итерационного метода Ньютона.

**Теорема 12.** (см. Ортега и Рейнболдт, [71, теорема 12.6.2]). *Пусть отображение* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *дифференцируемо в любой точке шара* $\{\, x \mid \|x - x^0\|_\infty \leq r \,\}$ *и для всех точек* $x, y$ *данного шара справедливо соотношение*:

$$\|f'(x) - f'(y)\|_\infty \;\leq\; L\|x - y\|_\infty .$$

*Предположим, что существует* $f'(x^0)^{-1}$ и $\|f'(x^0)^{-1}\|_\infty \leq B_0$. *Будем полагать, что*

$$\|x^1 - x^0\|_\infty \;=\; \|f'(x^0)^{-1} \cdot f(x^0)\|_\infty \;=\; \eta_0,$$

*а также*

$$h_0 = B_0 \eta_0 L \;\leq\; \frac{1}{2}, \qquad r_0 \;=\; \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}\eta_0 \;\leq\; r.$$

*Тогда последовательность векторов, полученная в результате итерационного процесса метода Ньютона корректно определена, содержится в шаре* $\{x \mid \|x - x^0\|_\infty \leq r_0\}$ *и сходится к решению* $x^*$ *уравнения* $f(x) = 0$, *которое является единственным на множестве* $D \cap \{x \mid \|x - x^0\|_\infty \leq r_1\}$, где

$$r_1 \;=\; \frac{1+\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0\,,$$

*причем справедливо неравенство* $r \geq r_1$. *Более того, имеет место следующая оценка погрешности*:

$$\|x^* - x^k\|_\infty \le \frac{1}{2^{k-1}}(2h_0)^{2^k-1}\eta_0, \quad k \ge 0. \tag{58}$$

Так как $h_0 \le \frac{1}{2}$, то из оценки погрешности (58) (для $k = 0, 1$ и $\infty$-нормы) получим

$$\|x^* - x^0\|_\infty \le 2\eta_0 = 2\|x^1 - x^0\|_\infty,$$
$$\|x^* - x^1\|_\infty \le 2h_0\eta_0 \le \eta_0 = \|x^1 - x^0\|_\infty.$$

Отсюда следует простой способ построения интервального вектора, содержащего решение $x^*$. Если вектор $x^0$ достаточно близок к решению $x^*$, то вектор $x^1$ еще более близок к $x^*$ чем $x^0$, поскольку метод Ньютона имеет квадратичный порядок сходимости. То же самое происходит, если мы выберем любой вектор ($\neq x^*$), содержащийся в шаре $\{x | \|x - x^1\|_\infty \le \eta_0\}$, в качестве начального в методе Ньютона. Поскольку справедливо соотношение (36) и $x^* \in \mathcal{K}(\boldsymbol{x})$, разумно предположить, что

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) = x^1 - f'(x^0)^{-1}f(x^1) + (I - f'(x^0)^{-1}f'(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - x^1) \subseteq \boldsymbol{x}$$

для

$$\boldsymbol{x} = \{\, x |\ \|x - x^1\|_\infty \le \eta_0 \,\}. \tag{59}$$

Важным моментом является то, что проверяемый интервал $\boldsymbol{x}$ может быть вычислен без знания $B_0$ и $L$. Конечно, все предыдущие утверждения основаны на предположении о том, что выполняются условия теоремы Ньютона-Канторовича, которые исключают случай удаленности начального вектора $x^0$ от решения $x^*$.

Эту трудность можно преодолеть путём выполнения нескольких итераций метода Ньютона, позволяющих получить достаточно близкое приближение к решению $x^*$ уравнения $f(x) = 0$. Далее вычисляется интервал (59), где вместо $x^1$ используется $x^{k+1}$. С помощью оператора Кравчика проверяется, содержит ли данный интервал решение. Вопрос, когда заканчивать итерационный процесс Ньютона, решается на основе следующих рассуждений.

Наше основное предположение заключается в том, что итерационный метод Ньютона сходится к $x^*$. Для простоты обозначений введем

$$\boldsymbol{y} = x^{k+1} - f'(x^k)^{-1}f(x^{k+1}) + (I - f'(x^k)^{-1}f(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - x^{k+1}),$$

где

$$\boldsymbol{x} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x^{k+1} - x\|_\infty \le \eta_k \,\},$$
$$\eta_k = \|x^{k+1} - x^k\|_\infty \tag{60}$$

для некоторого фиксированного $k$. Наша цель состоит в том, чтобы остановить итерационную процедуру Ньютона тогда, когда будет выполняться неравенство:

$$\frac{\|\mathrm{wid}\ \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|x^{k+1}\|_\infty} \le \mathrm{eps}, \tag{61}$$

где eps – машинная точность операций с плавающей запятой. Если $x^* \in \boldsymbol{x}$, то $x^* \in \boldsymbol{y}$ и, следовательно, для любого $y \in \boldsymbol{y}$ имеем:

$$\frac{\|x^* - y\|_\infty}{\|x^*\|_\infty} \le \frac{\|\mathrm{wid}\ \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|x^*\|_\infty}.$$

Поскольку $\|x^*\|_\infty$ мало отличается от $\|x^{k+1}\|_\infty$ в случае, когда вектор $x^{k+1}$ близок к $x^*$, то условие (61) гарантирует, что относительная погрешность, с которой любой вектор $y \in \boldsymbol{y}$ аппроксимирует $x^*$, близка к предельной машинной точности. Используя (35), можно показать, что

$$\|\mathrm{wid}\ f'(\boldsymbol{x})\|_\infty \le \hat{L}\,\|\mathrm{wid}\ \boldsymbol{x}\|_\infty$$

и

$$\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{y}\|_\infty \le \|f'(x^k)^{-1}\|_\infty\, \tilde{L}\, \|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty^2,$$

где $\tilde{L} = \max\{\hat{L}, L\}$, и поскольку $\|\mathrm{wid}\,\boldsymbol{x}\|_\infty = 2\eta_k$, то неравенство (61) выполняется, если справедливо неравенство:

$$4\,\frac{\|f'(x^k)^{-1}\|_\infty\, \tilde{L}\,\eta_k^2}{\|x^{k+1}\|_\infty} \le \mathrm{eps}. \qquad (62)$$

Согласно методу Ньютона имеем

$$x^{k+1} - x^k \;=\; f'(x^k)^{-1}\big(f(x^k) - f(x^{k-1}) - f'(x^{k-1})(x^k - x^{k-1})\big)$$

и, используя Теорему 3.2.12 из [71], получим

$$\eta_k \le \frac{1}{2}\|f'(x^k)^{-1}\|_\infty\, \tilde{L}\,\eta_{k-1}^2.$$

Заменив знак неравенства на равенство в этом соотношении и исключив $\|f'(x^k)^{-1}\|_\infty \tilde{L}$ в (62), получим следующий критерий останова для метода Ньютона:

$$\frac{8\,\eta_k^3}{\|x^{k+1}\|_\infty\,\eta_{k-1}^2} \le \mathrm{eps}. \qquad (63)$$

Конечно, данные рассуждения не являются строгим математическим доказательством того, что интервал $\boldsymbol{y}$, построенный выше, содержит $x^*$ и что векторы из $\boldsymbol{y}$ аппроксимируют $x^*$ с относительной погрешностью, близкой к eps. Однако, как показано в [11], процедура проверки, использующая критерий останова (63), чрезвычайно хорошо работает на практике.

Некоторые идеи данного параграфа были распространены на негладкие отображения Ченом [24].

Нелинейные интервальные системы, т.е. системы нелинейных уравнений, входные данные которых зависят от параметров, рассмотрены, например, в [58].

Важно отметить также тот факт, что для доказательных методов решения нелинейных систем уравнений можно заменить естественное интервальное расширение производной на интервальную оценку матрицы наклонов функции $f$. В этой связи наклоны были впервые рассмотрены в [5] и обсуждались также в [75].

## 5. Системы линейных уравнений

Для заданных интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и интервального вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ в этом параграфе мы рассмотрим задачи описания и оценивания множества решений

$$\Xi \;=\; \{x \in \mathbb{IR}^n \mid Ax = b, A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}\} \qquad (64)$$

и симметричного множества решений

$$\Xi_{\mathrm{sym}} \;= \{\, x \in \mathbb{IR}^n \mid Ax = b, A = A^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, b \in \boldsymbol{b}\,\} \qquad (65)$$

для интервальных систем линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Эти множества решений могут возникать при решении систем линейных уравнений, входные данные которых изменяются в пределах некоторых допустимых отклонений (см., например, [13, 69] или [84]). Такая ситуация возможна в случае, когда данные $\check{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\check{b} \in \mathbb{R}^n$ для системы заданы с некоторыми ошибками, вызванными, например, погрешностями измерений, округлениями машинного перевода из десятичной в двоичную систему счисления, и т.п. Допустим, что для этих ошибок известны границы их изменения $\Delta A \in$

$\mathbb{R}^{n\times n}$ и $\Delta b \in \mathbb{R}^n$, которые неотрицательны. Далее естественно считать, что вектор $\check{x}$ есть «правильное» («корректное») решение системы $\check{A}x = \check{b}$, если он действительно является решением возмущенной системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$, где

$$\check{A} \in \boldsymbol{A} = [\check{A} - \Delta A, \check{A} + \Delta A], \quad \check{b} \in \boldsymbol{b} = [\check{b} - \Delta b,\ \check{b} + \Delta b].$$

Рассматривая множество всех таких векторов $\check{x}$, Оеттли и Прагер [72] сформулировали утверждения (a) и (b) следующей теоремы.

**Теорема 13.** *Для* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ *следующие свойства эквивалентны:*
(a) $x \in \Xi$;
(b) $\left|\check{A}x - \check{b}\right| \le \frac{1}{2}(\operatorname{wid} \boldsymbol{A}\,|x| + \operatorname{wid} \boldsymbol{b})$;
(c) $\boldsymbol{A}x \cap \boldsymbol{b} \neq \emptyset$**;**
(d)

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \le 0 \\ -\overline{b}_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le 0 \end{array}\right\}, \qquad i = 1, \dots, n$$

где $a_{ij}^{-}$ и $a_{ij}^{+}$ *определяются следующим равенством*

$$[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] = \begin{cases} [a_{ij}^{-}, a_{ij}^{+}], & \text{если } x_j \ge 0, \\ [a_{ij}^{+}, a_{ij}^{-}], & \text{если } x_j < 0. \end{cases}$$

Неравенство (b) соотносит невязку средней точечной линейной системы с шириной $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$, свойство (c) есть интервальная версия свойства (b), предложенная Беком [22], а свойство (d) описывает множество $\Xi$ в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$ как пересечение конечного числа полупространств. Это последнее свойство показывает, в частности, что точное описание $\Xi$ является весьма непростым. По этой причине часто ищут интервальный вектор $\boldsymbol{x}$, объемлющий множество $\Xi$. В соответствии с (26) такой вектор может быть вычислен, например, с помощью алгоритма Гаусса, примененного к интервальным данным, как это было описано в §4. На настоящий момент вопрос о необходимых и достаточных условиях выполнимости данного алгоритма в случае существенно интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ остаётся открытым. В частности, $\mathrm{IGA}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ существует, если $\langle \boldsymbol{A} \rangle$ является *M*-матрицей, как показано в [4]. Формулировку других необходимых условий можно найти в [13, 55, 60].

Для оценки множества решений $\Xi$ можно использовать итерационные методы. Примерами могут служить два простых метода: интервальный метод Якоби

$$\boldsymbol{x}_i^{k+1} = \left( \boldsymbol{b}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, \boldsymbol{x}_j^{k} \right) \Big/ \boldsymbol{a}_{ii}\,, \quad i = 1, \dots, n \tag{66}$$

и интервальный метод Гаусса-Зейделя

$$\boldsymbol{x}_i^{k+1} = \left( \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{a}_{ij}\, \boldsymbol{x}_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, \boldsymbol{x}_j^{k} \right) \Big/ \boldsymbol{a}_{ii}\,,\ \ i = 1, \dots, n\,, \tag{67}$$

где $0 \notin \boldsymbol{a}_{ij}$ для $i = 1, \dots, n$. Можно также использовать модификации этих методов, в которой в качестве $\boldsymbol{x}_i^{k+1}$ взято пересечение правых частей равенств (66) и (67).

Обозначим через $\boldsymbol{D}$, $-\boldsymbol{L}$ и $-\boldsymbol{U}$ главную диагональ матрицы $\boldsymbol{A}$ и её части, лежащие ниже и выше главной диагонали, соответственно. Тогда $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$, и в виде

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = f(\boldsymbol{x}^k), \quad \text{где } f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{IGA}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) \tag{68}$$

можно представить широкий класс итерационных методов для внешнего оценивания множества решений $\Xi$ интервальной линейной системы. Здесь $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$, и мы предполагаем, что $\mathrm{IGA}(\boldsymbol{M})$ существует. При $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D}$ получаем метод Якоби (66), а при $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}$ – метод Гаусса-Зейделя (67). Следующие утверждения выполняются в обоих этих случаях, а также при незначительных обобщениях, касающихся вида матрицы $\boldsymbol{M}$.

**Теорема 14.** *Пусть* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$, *где* $\boldsymbol{M}$=$(\boldsymbol{m}_{ij})$ *– неособенная нижняя треугольная интервальная матрица.*

(a) *Итерационный процесс* (68) *эквивалентен итерациям*

$$\boldsymbol{x}_i^{k+1} = \left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{m}_{ij}\boldsymbol{x}_j^{k+1} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{n}_{ij}\boldsymbol{x}_j^{k}\right)\Big/ \boldsymbol{m}_{ii}, \quad i = 1, \dots, n\,. \tag{69}$$

(b) *Итерационный процесс* (68) *сходится к некоторому пределу* $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ (*т.е. каждая последовательность* $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ *итераций, определяемая соотношением* (68) *сходится к* $\boldsymbol{x}^*$) *тогда и только тогда, когда* $\rho(\langle \boldsymbol{M}\rangle^{-1}|\boldsymbol{N}|) < 1$.
*В этом случае* $\Xi \subseteq \boldsymbol{x}^*$.

(c) *Если* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{M}$ *являются* $M$*-матрицами и* $\underline{N} \geq 0$, *то* $\rho(\langle \boldsymbol{M}\rangle^{-1}|\boldsymbol{N}|) = \rho(\underline{\boldsymbol{M}}^{-1}\overline{\boldsymbol{N}}) < 1$ *и* $\boldsymbol{x}^*$ *из* (b) *является интервальной оболочкой множества* $\Xi$.

(d) *Пусть* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$. *Если* $f(\boldsymbol{x})$ *из* (68) *удовлетворяет* $(f(\boldsymbol{x}))_i \subset \boldsymbol{x}_i$ *для* $i = 1, \dots, n$, *то* $\rho(\langle \boldsymbol{M}\rangle^{-1}|\boldsymbol{N}|) < 1$.

**Доказательство.** Утверждение (a) можно доказать, используя индукцию по $i$, учитывая при этом, что для нижней треугольной матрицы на $i$-ом шаге алгоритма Гаусса меняется только $i$-ый столбец матрицы $\boldsymbol{A}$.

(b) Пусть $P = \langle \boldsymbol{M}\rangle^{-1}|\boldsymbol{N}|$. Так как $\boldsymbol{M}$ – треугольная матрица, то $\langle \boldsymbol{M}\rangle$ является $M$-матрицей, поскольку $P \geq O$.

'$\Longrightarrow$': (необходимость) Из (69) получаем соотношение

$$\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_i^{k+1} \geq \left(\sum_{j=1}^{i-1} |\boldsymbol{m}_{ij}|\, \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_j^{k+1} + \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{n}_{ij}|\, \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_j^{k}\right)\Big/ \langle \boldsymbol{m}_{ii}\rangle, \quad i = 1, \dots, n\,, \tag{70}$$

которое эквивалентно $\langle \boldsymbol{M}\rangle\, \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^{k+1} \geq |\boldsymbol{N}|\, \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^k$. Отсюда $\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^{k+1} \geq P\, \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^k$ и по индукции следует, что $\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^k \geq P^{\mathrm{k}}\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^0$. Выберем $\boldsymbol{x}^0$ так, что $\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}^0$ – вектор Перрона для $P$, где $\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_{i_0}^* < \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_{i_0}^0$ для некоторого индекса $i_0$. Если $\rho(P) \geq 1$, то

$$\mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_{i_0}^k \geq \rho(P)^k \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_{i_0}^0 \geq \mathrm{wid}\, \boldsymbol{x}_{i_0}^0 > wid\, \boldsymbol{x}_{i_0}^*,$$

и при $k \to \infty$ получаем противоречие.

'$\Longleftarrow$': (достаточность) Пусть $f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{IGA}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$. Из (69) получаем

$$\mathrm{dist}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))_i \leq \frac{1}{\langle \boldsymbol{m}_{ii}\rangle}\left(\sum_{j=1}^{i-1} |\boldsymbol{m}_{ij}|\, \mathrm{dist}(f(\boldsymbol{x}_j), f(\boldsymbol{y}_j)) + \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{n}_{ij}|\, \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j)\right),$$

$$i = 1, \dots, n\,,$$

отсюда $\langle \boldsymbol{M}\rangle \operatorname{dist}\big(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\big) \le |\boldsymbol{N}| \operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и $\operatorname{dist}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) \le P \operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Так как $f$ является $P$-сжатием, то из Теоремы 7 и Замечания 1 следует сходимость.

Предположим теперь, что итерационный процесс (68) сходится для всех $\boldsymbol{x}^0$, и выберем $\tilde{x} \in \Xi$. Пусть $\tilde{A} \in \boldsymbol{A}$, $\tilde{b} \in \boldsymbol{b}$, $\tilde{M} \in \boldsymbol{M}$, $\tilde{N} \in \boldsymbol{N}$, такие что $\tilde{A}\,\tilde{x} = \tilde{b}$, $\tilde{A} = \tilde{M} - \tilde{N}$ и $\tilde{x} = \tilde{M}^{-1}(\tilde{N}\tilde{x} + \tilde{b})$. Тогда $\tilde{x} \in \mathrm{IGA}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\tilde{x} + \boldsymbol{b})$. В качестве начального вектора в (68) возьмем $\boldsymbol{x}^0 = \tilde{x}$. Тогда $\tilde{x} \in \boldsymbol{x}^k$ для $k = 0, 1, \dots$, поскольку $\tilde{x} \in \boldsymbol{x}^*$. Это доказывает, что в самом деле $\Xi \subseteq \boldsymbol{x}^*$.

(c) Из условий утверждения следует, что $\underline{A} = \underline{M} - \overline{N}$ – регулярное расщепление матрицы $\underline{A}$ и $\underline{A}^{-1} \ge O$. Поэтому утверждение 2.4.17 из [71] гарантирует выполнение $\rho(\langle \boldsymbol{M}\rangle^{-1}|\boldsymbol{N}|) = \rho(\underline{\boldsymbol{M}}^{-1}\overline{\boldsymbol{N}}) < 1$.

Докажем, что $\boldsymbol{x}^*$ – интервальная оболочка $\Xi$. Предположим, что $\boldsymbol{x}^*$ является пределом (68), и

$$m_{ij}^* = \begin{cases} \underline{m}_{ij}, \text{если } \underline{x}_j^* \le 0, \\ \overline{m}_{ij}, \text{если } \underline{x}_j^* > 0, \end{cases} \qquad n_{ij}^* = \begin{cases} \overline{n}_{ij}, \text{если } \underline{x}_j^* \le 0, \\ \underline{n}_{ij}, \text{если } \underline{x}_j^* > 0. \end{cases}$$

Пусть $A^* = M^* - N^*$. Тогда $A^* \in \boldsymbol{A}$, и из (69) при $k \to \infty$ получим $A^*\underline{x}^* = b^*$, поскольку $\underline{x}^* \in \Xi$. Аналогично можно показать, что $\overline{x}^* \in \Xi$.

(d) Заменим в соотношении (70) $\boldsymbol{x}_j^k$ на $\boldsymbol{x}_j$ и $\boldsymbol{x}_i^{k+1}$ на $f(\boldsymbol{x})_i$. Учитывая сделанные ранее предположения, получим $P \operatorname{wid} \boldsymbol{x} \le \operatorname{wid} f(\boldsymbol{x}) < \operatorname{wid} \boldsymbol{x}$, отсюда аналогично доказательству Теоремы 11(a) получим $\rho(P) < 1$. ∎

Для расщепления Ричардсона $\boldsymbol{A} = I - (I - \boldsymbol{A})$ утверждения Теоремы 14 были сформулированы и доказаны в [61]. Большинство из известных сегодня аналогов Теоремы 14 можно найти в [69, §4.4 и §4.5].

Теперь применим оператор Кравчика для функции $Ax - b$ и заменим $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ на $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$. Получим модифицированный оператор Кравчика

$$\mathcal{K}_{\mathrm{mod}}(\boldsymbol{x}) = m(\boldsymbol{x}) + C(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\, m(\boldsymbol{x})) + (I - C\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{x})) \qquad (71)$$

с некоторой неособенной матрицей $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и некоторым вектором $m(\boldsymbol{x})$ из $\mathbb{R}^n$. Для $\mathcal{K}_{\mathrm{mod}}(\boldsymbol{x})$ и итерационной процедуры

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{K}_{\mathrm{mod}}(\boldsymbol{x}^k) \cap \boldsymbol{x}^k \qquad (72)$$

с фиксированной матрицей $C$ выполняется следующий аналог Теоремы 11.

**Теорема 15.** *Пусть* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$.

(a) *Если*

$$\rho(|I - C\boldsymbol{A}|) < 1, \qquad (73)$$

*то* $\boldsymbol{A}$ *– неособенная матрица, т.е. каждая линейная система* $Ax = b$, *где* $A \in \boldsymbol{A}$ *и* $b \in \boldsymbol{b}$ *имеет единственное решение. Если, кроме того,* $\Xi \subseteq \boldsymbol{x}^0$, *то последовательность* $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$, *заданная соотношением* (72), *корректно определена,* $\Xi \subseteq \boldsymbol{x}^k$ *и* $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^* \supseteq \Xi$. *В частности, последовательность* $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ *– монотонно сходящаяся.*

(b) *Если*

$$\mathcal{K}_{\mathrm{mod}}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x} \qquad (74)$$

*для некоторого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$, *то любая линейная система* $Ax = b$ *с* $A \in \boldsymbol{A}$ *и* $b \in \boldsymbol{b}$ *имеет решение* $x^* \in \boldsymbol{x}$.

*Если несколько усилить условие* (74), *положив*

$$(\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x}))_i \subset \boldsymbol{x}_i \quad \text{для } i = 1, \dots, n, \tag{75}$$

*то* $\rho(I - C\boldsymbol{A}) < 1$, *т.е. утверждение* (a) *выполняется для* $\Xi \subset \boldsymbol{x}$.

(c) *Если*

$$|||I - C\boldsymbol{A}|||_\infty < 1, \tag{76}$$

*то выполняется утверждение* (a). *Кроме того,*

$$\Xi \subseteq \tilde{\boldsymbol{x}} = [\tilde{x} - \alpha e, \tilde{x} + \alpha e], \tag{77}$$

*где*

$$\alpha = \frac{|||C(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{x}|||_\infty}{1 - |||I - C\boldsymbol{A}|||_\infty}.$$

*Следовательно, вторая часть утверждения* (a) *выполняется для любого* $\boldsymbol{x}^0 \supseteq \tilde{\boldsymbol{x}}$.

**Доказательство.** Утверждение (a) может быть доказано аналогично (50) с использованием для $x^*$ представления вида

$$x^* = m(\boldsymbol{x}) + C(b - Am(\boldsymbol{x})) + (I - CA)(x^* - m(\boldsymbol{x})) \in \mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x}), \tag{78}$$

где $x^* = A^{-1}b$, $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$.

Утверждение (b) доказывается аналогично части (a) Теоремы 11.

Так как из утверждения (c) следует $\rho(|I - C\boldsymbol{A}|) < 1$, то выполняется утверждение (a). Пусть $x^* \in \Xi$. Тогда найдутся $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$, такие что $Ax^* = b$. Отсюда имеем

$$\|x^* - \tilde{x}\|_\infty = \|A^{-1}(b - A\tilde{x})\|_\infty \le \|(I - (I - CA))^{-1}\|_\infty \|C(b - A\tilde{x})\|_\infty \le \alpha,$$

где в последнем неравенстве использовался матричный ряд Неймана. ■

**Замечание 3.** (a) Аналогично Замечанию 2 не обязательно знать, является ли матрица $C$ неособенной, если выполняются (73), (75) или (76). Любое из этих условий гарантирует неособенность $C$.

(b) Если справедливо (74) или (75), то $\Xi \subseteq \mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x})$.

(c) Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ – вырожденные, т.е. $\boldsymbol{A} \equiv A$, $\boldsymbol{b} \equiv b$, то из предположения $\rho(|I - C\boldsymbol{A}|) < 1$ Теоремы 15 следует

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = x^*,$$

где $Ax^* = b$.

Замечание 3 (b) приводит к вопросу, насколько точна оценка множества решений $\Xi$, полученная в результате итерационной процедуры (72). Следующий результат, полученный Румпом [82], отвечает на этот вопрос в случае выполнения соотношения (75). Обозначим через $\Xi_i$ проекцию множества решений $\Xi$ на *i*-ю координатную ось, т.е.

$$\Xi_i = \{\, x_i \mid x \in \Xi \,\} \subseteq \mathbb{R}. \tag{79}$$

Для неособенной матрицы $\boldsymbol{A}$ в силу известного правила Крамера компоненты решения $x_i$ непрерывно зависят от $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Поскольку $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ связны и компактны, то множества $\Xi_i$ также являются компактными интервалами.

**Теорема 16.** *Пусть* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ *и* $\Xi_i$ *задаётся равенством* (79). *Используя* (71), *вычислим оператор* $\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x})$ *для некоторого вектора* $m(\boldsymbol{x}) = \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *и некоторой неособенной матрицы* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и положим*

$$\boldsymbol{z} = C(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{x}), \quad \boldsymbol{\delta} = (I - C\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} - \tilde{x}).$$

*Если* $(\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x}))_i \subset \boldsymbol{x}_i$ *для* $i = 1, \ldots, n$, *то*

$$\tilde{x}_i + \underline{z}_i + \underline{\delta}_i \le \min \Xi_i \le \tilde{x}_i + \underline{z}_i + \overline{\delta}_i, \tag{80}$$

$$\tilde{x}_i + \overline{z}_i + \underline{\delta}_i \le \max \Xi_i \le \tilde{x}_i + \overline{z}_i + \overline{\delta}_i, \tag{81}$$

*т.е.* wid $\boldsymbol{\delta}$ *есть показатель качества оценки* $\Xi$ *посредством* $\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x})$.

**Доказательство.** Левая часть неравенства (80) и правая часть неравенства (81) следуют непосредственно из Замечания 3 (b). Для того чтобы доказать оставшиеся неравенства, заметим, что интервал $\boldsymbol{z}_i$ есть естественное интервальное расширение функции $f: \mathbb{R}^{n^2+n} \to \mathbb{R}$, заданной равенством $f(A, b) = (C(b - A\tilde{x}))_i$. В выражение $f(A, b)$ каждая переменная входит однократно. Следовательно, по Теореме 2 имеем

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \text{range}(f; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}), \tag{82}$$

т.е. найдутся некоторые $A^* \in \boldsymbol{A}$, $b^* \in \boldsymbol{b}$, такие что $\underline{z}_i = f(A^*, b^*)$. Используя соотношение (78) при $x^* = (A^*)^{-1}b^* \in \Xi$ и $\delta^* = (I - CA^*)(x^* - \tilde{x})$, получим

$$\min \Xi_i \le x_i^* = \tilde{x}_i + \underline{z}_i + \delta_i^* \le \tilde{x}_i + \underline{z}_i + \overline{\delta}_i,$$

откуда следует правая часть неравенства (80). Аналогично доказывается левая часть неравенства (81). ■

**Замечание 4.** Пусть для матрицы $C$, являющейся обратной к середине интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$, выполняется соотношение (75), и $\tilde{x}$ является достаточно точной аппроксимацией некоторого элемента множества решений $\Xi$. Предположим также, что wid $\boldsymbol{A}$ и wid $\boldsymbol{b}$ малы, и соотношение (75) выполняется для некоторого $\boldsymbol{x}$, причем $m(\boldsymbol{x}) = \tilde{x} \in \boldsymbol{x}$. Тогда ширина wid $\boldsymbol{z} = |C|(\text{wid}\,\boldsymbol{b} + \text{wid}\,\boldsymbol{A}\tilde{x})$ также мала, и из равенства

$$\boldsymbol{\delta} = |C| \left[-\frac{1}{2}\text{wid}\,\boldsymbol{A}, \frac{1}{2}\text{wid}\,\boldsymbol{A}\right](\boldsymbol{x} - \tilde{x}) = |C| \left[-\frac{1}{2}\text{wid}\,\boldsymbol{A}, \frac{1}{2}\text{wid}\,\boldsymbol{A}\right]|\boldsymbol{x} - \tilde{x}|$$

имеем wid $\boldsymbol{\delta} \le |C|$ wid $\boldsymbol{A}$ wid $\boldsymbol{x}$. Следовательно, если вдобавок мала ширина wid $\boldsymbol{x}$ (это можно ожидать в случае, когда некоторая матрица $A \in \boldsymbol{A}$ не является плохо обусловленной), то wid $\boldsymbol{\delta}$ – малая второго порядка, т.е. wid $\boldsymbol{\delta} \ll$ wid $\boldsymbol{z}$. Полученное неравенство свидетельствует о небольшой погрешности оценки $\Xi$ посредством $\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x})$.

Если на самом деле выполняется, по крайней мере, неравенство wid $\boldsymbol{\delta} \le$ wid $\boldsymbol{z}$, то $\underline{z} + \overline{\delta} \le \overline{z} + \underline{\delta}$ и $\boldsymbol{x}^{\text{int}} = [\underline{x}^{\text{int}}, \overline{x}^{\text{int}}] = \tilde{x} + [\underline{z} + \overline{\delta}, \overline{z} + \underline{\delta}]$ есть интервальный вектор, удовлетворяющий неравенству $\min \Xi_i \le \underline{x}^{\text{int}} \le \overline{x}^{\text{int}} \le \max \Xi_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Такой вектор был назван Румпом [84] «inner enclosure»[1] – *слабой внешней оценкой* множества $\Xi$. Если известна слабая внешняя интервальная оценка $\Xi$, то можно непосредственно оценить качество внешней оценки в теоретико-множественном смысле. Слабые внешние интервальные оценки и связанные с ними вопросы обсуждаются, например, в [84, 87].

Теперь рассмотрим симметричное множество решений $\Xi_{\text{sym}}$ из (65), т.е. нас будут интересовать линейные системы $Ax = b$ с симметричными матрицами $A \in \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Для простоты положим

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\text{T}}. \tag{83}$$

[1] *Прим. перев.* На русском языке подобный способ оценивания множества решений, по-видимому, наиболее уместно назвать «слабым внешним» оцениванием, и в дальнейшем мы будем придерживаться этого термина.

В противном случае сформулированные ниже результаты справедливы для наибольшей по включению матрицы, содержащейся в $\boldsymbol{A}$ и обладающей свойством (83).

Очевидно, что симметричное множество решений $\Xi_{\text{sym}}$ есть подмножество обычного множества решений $\Xi$, но $\Xi_{\text{sym}}$ описывается существенно более сложным образом чем $\Xi$. В частности, оно может иметь криволинейные границы, как показывает следующий результат.

**Теорема 17.** *Пусть симметричное множество решений $\Xi_{\text{sym}}$ определено для заданных неособенной интервальной матрицы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и интервального вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда для любого замкнутого ортанта $O \subseteq \mathbb{R}^n$ множество $\Xi_{\text{sym}} \cap O$ может быть представлено как пересечение конечного числа замкнутых множеств, границы которых есть поверхности второго порядка либо гиперплоскости. Эти множества могут быть описаны системой неравенств, полученной, например, с помощью процесса исключения Фурье-Моцкина.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [15], а дальнейшее исследование свойств множеств решений интервальных линейных систем с матрицами, на которые наложены более общие зависимости – в [16, 17]. Описание процесса исключения Фурье-Моцкина содержится, например, в [85].

Будем искать внешнюю оценку $\Xi_{\text{sym}}$ в виде интервального вектора. Очевидно, что требуемый вектор можно получить в результате любого метода оценивания обычного множества решений $\Xi$. Но симметричное множество решений, как правило, содержит гораздо меньше элементов, чем $\Xi$. Поэтому имеет смысл конструировать методы, специально предназначенные для оценивания $\Xi_{\text{sym}}$, и не обязательно оценивающие $\Xi$. Таким методом является, к примеру, интервальный метод Холесского, основанный на формальном применении формул обычного метода Холесского к интервальным данным $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{b}$, причём операции возведения в квадрат и извлечения квадратного корня определяются соотношением (4).

Предположим, что в процессе выполнения интервального метода Холесского нам не встретилось деление на интервал, содержащий нуль. Тогда алгоритм прорабатывает до конца, и получающийся в результате интервальный вектор будем обозначать через $\mathrm{ICh}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. В частности, $\mathrm{ICh}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ существует, если $\boldsymbol{A}$ – *M*-матрица, и её диагональные элементы удовлетворяют условиям $\underline{a}_{ii} > 0$ для $i = 1, \dots, n$. Это показано в работе [19], детально рассматривающей интервальную версию метода Холесского (см. также [21]).

Другой метод внешнего оценивания симметричного множества решений $\Xi_{\text{sym}}$ был предложен Янссоном в [41]. Взяв за основу модифицированный оператор Кравчика $\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x})$, определённый посредством (71), он ввёл в рассмотрение новый оператор

$$\mathcal{K}_{\text{mod}}^{\text{sym}}(\boldsymbol{x}) = m(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z}^{\text{sym}} + (I - C\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{x})), \tag{84}$$

где $\boldsymbol{z}^{\text{sym}} = (\boldsymbol{z}_i^{\text{sym}}) \in \mathbb{IR}^n$ задаются соотношениями

$$\boldsymbol{z}_i^{\text{sym}} = \sum_{j=1}^n c_{ij}(\boldsymbol{b}_j - \boldsymbol{a}_{jj}(m(\boldsymbol{x}))_j) - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{j-1} (c_{ij}(m(\boldsymbol{x}))_l + c_{il}(m(\boldsymbol{x}))_j)\boldsymbol{a}_{jl}.$$

Далее организуется аналогичный (72) итерационный процесс, где вместо $\mathcal{K}_{\text{mod}}(\boldsymbol{x})$ берётся оператор $\mathcal{K}_{\text{mod}}^{\text{sym}}(\boldsymbol{x})$. По тем же причинам, что и ранее, имеем

$$\boldsymbol{z}_i^{\text{sym}} = \{\, (C(b - A\, m(\boldsymbol{x})))_i \mid A = A^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b} \,\}$$

и, кроме того, справедливы утверждения Теорем 15 и 16, в которых $\Xi$, $\boldsymbol{z}$ заменены на $\Xi_{\text{sym}}$, $\boldsymbol{z}^{\text{sym}}$ соответственно.

## 6. Алгебраическая проблема собственных значений и родственные вопросы

В этом параграфе мы ищем интервалы $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{IR}$ и интервальные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$, такие что $\boldsymbol{\lambda}$ содержит собственное значение $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{x}$ содержит соответствующий собственный вектор $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ данной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Здесь мы ограничимся рассмотрением только вещественных собственных значений и векторов. Изучались также их комплексные аналоги; см., например, в качестве обзора [56, 57].

Рассмотрим сначала слабо нелинейную систему уравнений

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ x_{i_0} - \alpha \end{pmatrix} = 0, \tag{85}$$

где $i_0$ – некоторый фиксированный индекс из $\{1,\dots,n\}$ и константа $\alpha \neq 0$. Очевидно, что $(x^*,\lambda^*)$ есть решение уравнения (85) тогда и только тогда, когда $(x^*,\lambda^*)$ – собственные вектор и значение матрицы $A$, причем $x^*$ − собственный вектор с нормировкой, задаваемой соотношением $x^*_{i_0} = \alpha$. Разлагая функцию $f$ по формуле Тейлора относительно значений $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$, близких к $(x^*,\lambda^*)$, получим

$$f(x,\lambda) = f(\tilde{x},\tilde{\lambda}) + \begin{pmatrix} A - \tilde{\lambda} I_n & -\tilde{x} \\ (\mathrm{e}^{(i_0)})^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\lambda\, \Delta x \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

где $\Delta x = x - \tilde{x}$, $\Delta\lambda = \lambda - \tilde{\lambda}$, $I_k$ – единичная матрица размерности $k \times k$, $\mathrm{e}^{(i_0)}$ – $i$-й столбец единичной матрицы $I_n$. Умножив (86) на предобуславливающую матрицу $-C \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ и добавив $((\Delta x)^{\mathrm{T}}, \Delta\lambda)^{\mathrm{T}}$ к обеим частям равенства, получим уравнение в рекуррентном виде

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = g(\Delta x, \Delta\lambda) = -Cf(\tilde{x},\tilde{\lambda}) + \left( I_{n+1} - C \begin{pmatrix} A - \tilde{\lambda} I_n & -\tilde{x} - \Delta x \\ (\mathrm{e}^{(i_0)})^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}, \tag{87}$$

где $(\Delta x, \Delta\lambda) = (\Delta x^*, \Delta\lambda^*) = (x^* - \tilde{x}, \lambda^* - \tilde{\lambda})$ – погрешность аппроксимации собственного вектора и собственного значения $(x^*,\lambda^*)$. Следующая теорема получена Румпом в [81].

**Теорема 18.** *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, *а функция* $g$ *определяется равенством* (87). *Пусть* $\tilde{x}$ *нормирован условием* $x^*_{i_0} = \alpha \neq 0$. *Если функция* $g$ *удовлетворяет соотношению*

$$g(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{\lambda}) \subseteq \operatorname{int}(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \Delta\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}, \tag{88}$$

*то имеют место следующие утверждения*:

(a) *Матрица* $C$ *является неособенной.*

(b) *Существует единственный собственный вектор* $x^* \in \tilde{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ *матрицы* $A$, *нормированный условием* $x^*_{i_0} = \alpha$.

(c) *Существует единственное собственное значение* $\lambda^* \in \tilde{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}$ *матрицы* $A$.

(d) $Ax^* = \lambda^* x^*$, *где* $x^*$ *определено в* (b) *и* $\lambda^*$ *определено в* (c).

(e) *Собственное значение* $\lambda^*$, *определённое в* (d), *является геометрически простым*.

(f) *Если* $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ *является достаточно хорошей аппроксимацией пары* $(x^*,\lambda^*)$ *из* (d), *то можно гарантировать, что* $\lambda^*$ *алгебраически просто*.

(g) *Если в начале итерационного процесса*

$$\begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{k+1} \end{pmatrix} = g(\Delta\boldsymbol{x}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{89}$$

*положить*

$$(\Delta\boldsymbol{x}^0, \Delta\boldsymbol{\lambda}^0) = (\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{\lambda})$$

*из соотношения* (88), *то итерационный процесс сходится, причем*

$$(\Delta\boldsymbol{x}^{k+1}, \Delta\boldsymbol{\lambda}^{k+1}) \subseteq (\Delta\boldsymbol{x}^{k}, \Delta\boldsymbol{\lambda}^{k}), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

*и*

$$(x^*, \lambda^*) \in (\tilde{x}, \tilde{\lambda}) + (\Delta\boldsymbol{x}^{k}, \Delta\boldsymbol{\lambda}^{k}), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

*где* $(x^*, \lambda^*)$ *определено в* (d).

Интервальные величины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$**,** удовлетворяющие (88), могут быть найдены, например, с помощью эпсилон-раздутия, введённого в §4 (см. также [58] или [59]). Другой путь был предложен в [6], и в его основе лежит следующий результат:

**Теорема 19.** *С помощью обозначений, принятых в Теореме* 18, *определим*

$$\rho = \left\| C \begin{pmatrix} A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty, \quad \sigma = \left\| I_{n+1} - C \begin{pmatrix} A - \tilde{\lambda} I_n & -\tilde{x} \\ (\mathrm{e}^{(i_0)})^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty, \quad \tau = \|C\|_\infty \tag{90}$$

*и предположим, что*

$$\sigma < 1, \quad \Delta = (1-\sigma)^2 - 4\rho\tau \ge 0. \tag{91}$$

*Тогда числа*

$$\beta^- = \frac{1 - \sigma - \sqrt{\Delta}}{2\tau} = \frac{2\rho}{1 - \sigma + \sqrt{\Delta}},$$

$$\beta^+ = (1 - \sigma + \sqrt{\Delta})/(2\tau)$$

*неотрицательны, и условие* (88) *Теоремы* 18 *выполняется для* $(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \Delta\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}} = [-\beta, \beta]e \in \in \mathbb{IR}^{(n+1)\times(n+1)}$ *при произвольном* $\beta \in \,]\,\beta^-, \beta^+[$. *В частности, имеют место все утверждения этой теоремы. Если* $\beta$ *ограничено интервалом* $[\beta^-, (\beta^- + \beta^+)/2[$, *то итерационный процесс* (89) *сходится к ошибке* $\begin{pmatrix} \Delta x^* \\ \Delta\lambda^* \end{pmatrix}$.

В [58] показано, как уравнение (87) может быть сведено к $n$-мерной задаче выбора начальной точки, описанной в [6]. Там же рассмотрен вопрос модификации (87) в случае замены нормировки $x^*_{i_0} = \alpha$ на $\|x^*\|_2 = 1$.

Второй метод нахождения внешних интервальных оценок собственных значений и векторов использует центрированную форму

$$f(x, \lambda) = f(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) + \begin{pmatrix} A - \tilde{\lambda} I_n & -\tilde{x} - \Delta x \\ (\mathrm{e}^{(i_0)})^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что здесь для любого начального множества $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ можно применить дробление, рассмотренное в §3. Ключевой проблемой остается доказательство того, что из $0 \in f(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})$ следует $f(x^*, \lambda^*) = 0$ для некоторого подмножества $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \subseteq (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$.

Третий метод предложен Г. Бенке и Ф. Гёришем. В этом методе предполагается, что матрица $A$ симметричная, и используется дополнительный вариационный принцип. Более подробное описание метода можно найти, например, в [23, §6] или в работах, ссылки на которые приведены ниже.

К симметричным матрицам можно также применить подход, предложенный Лонером [54]. Сначала матрица $A$ преобразуется к почти диагональному виду посредством вращений Якоби и специальной машинной арифметики «с отложенной коррекцией результата». Далее для оценки собственных значений используется теорема Гершгорина.

Наконец, внешние интервальные оценки собственных векторов могут быть получены с помощью результата, называемого теоремой Уилкинсона.

Можно легко распространить рассмотренные выше идеи на случай обобщенной проблемы собственных значений $Ax = \lambda Bx,\ x \neq 0,$ где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неособенная матрица. В соответствии с (85) имеем

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda Bx \\ x_{i_0} - \alpha \end{pmatrix} = 0.$$

Аналогичным образом можно исследовать задачу нахождения сингулярных чисел заданной матрицы $A$ размерности $m \times n$, где $m \geq n$. Здесь мы рассмотрим ортогональные матрицы $U \in \mathbb{R}^{n\times n},\ V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и диагональную матрицу $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с сингулярными числами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = 0 = \dots = \sigma_n$, $r = \mathrm{rank}(A)$, такую что $A = V\Sigma U^{\mathrm{T}}$. Можно начать с представлений

$$f(u,v,\sigma) = \begin{pmatrix} Au - \sigma v \\ A^{\mathrm{T}}v - \sigma u \\ u^{\mathrm{T}}u - 1 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad f(u,v,\sigma,\sigma') = \begin{pmatrix} Au - \sigma v \\ A^{\mathrm{T}}v - \sigma' u \\ u^{\mathrm{T}}u - 1 \\ v^{\mathrm{T}}v - 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае нуль функции $f$ удовлетворяет $v^{\mathrm{T}}v = 1$, во втором случае получим $\sigma = \sigma'$. В обоих случаях $u$ – столбец матрицы $U$, $v$ – соответствующий столбец матрицы $V$, $\sigma$ – сингулярное число матрицы $A$, соответствующее $u$ и $v$. Более подробное описание, дополнительные замечания, а также ссылки на работы, в которых предлагаются другие методы интервального оценивания сингулярных чисел, можно найти в [7, 57].

Отметим также предложенные в [14] доказательные методы оценки обобщенных сингулярных чисел $(c^*, s^*)$ для заданной пары матриц $(A, B)$ с $A \in \mathbb{R}^{p\times n},\ B \in \mathbb{R}^{q\times n}$, которые находятся как нули функции $f(c,s) = \det(s^2A^{\mathrm{T}}A - c^2B^{\mathrm{T}}B)$ с дополнительными условиями $c, s \geq 0,\ c^2 + s^2 = 1$. Приложения обобщенных сингулярных чисел описаны в работе [33].

Методы и результаты, представленные в параграфах 4–6, могут быть применены для исследования следующей обратной проблемы собственных значений:

Даны $n+1$ симметричные матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n},\ i = 0, 1, \dots, n.$ Найдем $n$ вещественных чисел $c_i^*,\ i = 1, \dots, n,$ таких что матрица $A(c) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$, $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, имеет для $c = c^* = (c_i^*)$ заданные собственные значения

$$\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_n^*. \tag{92}$$

Здесь можно начать с функции $f(c) = \lambda(c) - \lambda^* \in \mathbb{R}^n$, где $c$ мало отличается от $c^*$, компоненты $\lambda_i(c)$ вектора $\lambda(c)$ есть собственные значения матрицы $A(c)$, упорядоченные по возрастанию, и $\lambda^* = (\lambda_i^*)$ определяется неравенствами (92). Легко показать, что уравнение, решаемое в процессе итерирования методом Ньютона, имеет вид

$$\left(x^i(c^k)\right)^{\mathrm{T}} A_j \left(x^i(c^k)\right)(c^{k+1} + c^k) = -(\lambda(c^k) - \lambda^*),$$

где $x^i(c^k)$ – собственные векторы матрицы $A(c^k)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_i(c^k)$ и нормированные так, что $x^i(c^k)^{\mathrm{T}}x^i(c^k) = 1,\ \mathrm{sign}(x^i_{i_0}(c^k)) = 1$ для некоторого фиксированного индекса $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

На первом шаге вычисляются аппроксимации векторов $x^i(c^k)$ и собственных значений $\lambda_i(c^k)$ для $i = 1, \dots, n$. Полученные результаты подставляются в уравнение (93), которое далее решается. Описанные действия производятся для $k = 0, 1, \dots$ до некоторого $k_0$. На втором шаге выполняется процесс проверки существования решения с использованием интервального метода Ньютона, а также результатов, изложенных в параграфе 6, обобщенных на случай интервальных матриц. Более подробно данные вопросы рассматриваются в [10, 20] или [57].

## 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Значительная часть работ, связанных с доказательным численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений относится к задаче Коши

$$y' = f(y), \tag{94}$$

$$y(x_0) = y^0, \tag{95}$$

где мы предполагаем, что функция $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ достаточно гладкая и уравнение (94) имеет единственное решение в некотором заданном интервале $[x_0, x_0 + T]$ для любого начального значения $y^0 \in \boldsymbol{y}^0 \subseteq D$. Для простоты изложения положим, что система уравнений (94) автономна. Это не слишком строгое ограничение, так как любая неавтономная задача Коши сводится к автономной путем введения дополнительной компоненты $y_{n+1} = x$, дополнительного дифференциального уравнения $y_{n+1}' = 1$ и дополнительного начального условия $y_{n+1}(x_0) = y_{n+1}^0 = x_0$. Будем использовать сетку $x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_K = x_0 + T$ с узлами $x_k$ и шагами $h_k = x_{k+1} - x_k$, которые будут определены ниже, и рассматривать уравнение (94) с начальными значениями $y(x_k)$, принадлежащими некоторым промежуточным интервальным векторам $\boldsymbol{y}^k$. Наконец, введем в рассмотрение множество

$$y(x;\, x_k,\, \boldsymbol{y}^k) = \{y(x) |\, y' = f(y),\ y(x_k) \in \boldsymbol{y}^k\} \tag{96}$$

всех решений уравнения (94) с начальными значениями из $\boldsymbol{y}^k$. В дальнейшем нам понадобится следующий вспомогательный результат:

**Теорема 20.** *Если для функции* $f$ *из уравнения* (94) *и некоторого* $h > 0$ *имеет место* $\tilde{\boldsymbol{y}} + [0, h]\, f(\hat{\boldsymbol{y}}) \subseteq \hat{\boldsymbol{y}}$, *где* $\tilde{\boldsymbol{y}} \subseteq \hat{\boldsymbol{y}} \subseteq D$, *то* $y(x;\, \tilde{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \subseteq \hat{\boldsymbol{y}}$ *для всех* $x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h]$.

**Доказательство.** Для фиксированного $\tilde{y}^0 \in \tilde{\boldsymbol{y}}$ применим теорему Банаха о неподвижной точке к оператору Пикара-Линделёфа $(Tu)(x) = \tilde{y}^0 + \int_{\tilde{x}}^{x} f(u(t))\, \mathrm{d}t$, множеству $U = \{u \mid u \in C^0\, [\tilde{x}, \tilde{x} + h]$ и $u(x) \in \hat{\boldsymbol{y}}$ для $x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h]\}$ и метрике, порождённой нормой $\|u\|_\alpha = \max_{\tilde{x} \le x \le \tilde{x}+h}\left\{e^{-\alpha(x - \tilde{x})}\, \|u(x)\|_\infty\right\}$ с любым $\alpha > \|\, |\partial f(\hat{\boldsymbol{y}})/\partial y|\, \|_\infty$. ■

Наиболее известным доказательным методом интервального оценивания решений задачи Коши является интервальный метод, использующий разложения в ряды Тейлора (метод степенных рядов). Он был предложен Р. Е. Муром и затем модифицирован разными способами – можно сравнить, например, работы [30, 53] и обзоры [26, 66, 80]. Чтобы описать данный метод, предположим, что нам известны узлы сетки $x_k < x_K$ и внешние интервальные оценки $\boldsymbol{y}^k$ значений $y(x_k;\, x_0,\, \boldsymbol{y}^0)$. Пусть такая же интервальная оценка задана для $k = 0$. Метод состоит из двух основных этапов:

На первом этапе вычисляются новый шаг $h_k > 0$ и грубая априорная оценка $\hat{\boldsymbol{y}}^k$, такие что

$$y(x;\, x_k, \boldsymbol{y}^k) \subseteq \hat{\boldsymbol{y}}^k \quad \text{для всех } x \in [x_k, x_k + h_k]. \tag{97}$$

Можно в качестве $\hat{\boldsymbol{y}}^k$ взять любой вектор, содержащий $\boldsymbol{y}^k$, и выбрать $h_k > 0$ таким малым, чтобы $\boldsymbol{y}^k + [0, h_k]\, f(\hat{\boldsymbol{y}}^k) \subseteq \hat{\boldsymbol{y}}^k$. Тогда утверждение (97) справедливо на основании Теоремы 20. Зная $h_k$, находим $x_{k+1} = x_k + h_k$ и из (97) при $x = x_{k+1}$ следует, что в качестве оценки $\boldsymbol{y}^{k+1}$ можно взять $\hat{\boldsymbol{y}}^k$.

На втором этапе полученную ранее оценку можно улучшить следующим образом: рассмотрим любое частное решение $y^*$ уравнения (94), такое что $y^*(x_k) \in \boldsymbol{y}^k$. Используя

(94) и разложение $y^*$ в ряд Тейлора в точке $x_k$, получим для фиксированного $p \in \mathbb{N}$ и $h = x - x_k$

$$y^*(x) = \psi(h, y^*(x_k)) + r_p(h, y^*), \tag{98}$$

где

$$\psi(h, y) = y + \sum_{j=1}^{p} h^j f^{[j]}(y), \qquad f^{[1]} = f, \qquad f^{[j]} = \frac{1}{j}(f^{[j-1]})' = \frac{1}{j}\frac{\partial f^{[j-1]}}{\partial y} f \quad \text{для } j \geq 2$$

и остаточный член $r_p(h, y^*) \in h^{p+1} f^{[p+1]}(\hat{\boldsymbol{y}}^k)$. В этом параграфе будем предполагать, что коэффициенты ряда Тейлора $f^{[j]}(y^*(x_k))$ существуют. Они могут быть вычислены рекуррентно с помощью автоматического дифференцирования, что описано, например, в [34] или [76]. Очевидно,

$$y(x;\, x_0, \boldsymbol{y}^0) \subseteq y(x;\, x_k, \boldsymbol{y}^k) \subseteq \psi(h, \boldsymbol{y}^k) + h^{p+1} f^{[p+1]}(\hat{\boldsymbol{y}}^k) \quad \text{для } x_k \leq x \leq x_{k+1}. \tag{99}$$

В силу того, что $\operatorname{wid} \psi(h_k, \boldsymbol{y}^k) \geq \operatorname{wid} \boldsymbol{y}^k$, правое выражение в (99) при $h = h_k$ не подходит в качестве хорошей оценки $\boldsymbol{y}^{k+1}$, так как его диаметр превосходит $\operatorname{wid} \boldsymbol{y}^k$. Поэтому представим $\psi(h, y)$ в виде центрированной формы:

$$\psi(h, y) = \psi(h, \tilde{y}^k) + \left(I + \sum_{j=1}^{p} h^j J(y, \tilde{y}^k;\, f^{[j]}\right)(y - \tilde{y}^k) \tag{100}$$

$$\in \psi(h, \tilde{y}^k) + \left(I + \sum_{j=1}^{p} h^j \frac{\partial f^{[j]}(\boldsymbol{y}^k)}{\partial y}\right)(\boldsymbol{y}^k - \tilde{y}^k), \tag{101}$$

где $y, \tilde{y}^k \in \boldsymbol{y}^k$ и $J(y, z;\, f)$ определяется как $J(y, z)$ в (29), используя третий аргумент как подынтегральную функцию. Пусть $y^*$ имеет вид (98) и

$$S_k^* = I + \sum_{j=1}^{p} h_k^j J(y^*, \tilde{y}^k;\, f^{[j]}), \tag{102}$$

$$\boldsymbol{S}_k = I + \sum_{j=1}^{p} h_j^k \frac{\partial f^{[j]}(\boldsymbol{y}^k)}{\partial y}, \tag{103}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} = \psi(h_k, \tilde{y}^k) + h_k^{p+1} f^{[p+1]}(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) \tag{104}$$

для $k = 0, 1, \ldots, K - 1$, тогда получим

$$y^*(x_{k+1}) = \psi(h_k, \tilde{y}^k) + r_p(h_k, y^*) + S_k^*(y^*(x_k) - \tilde{y}^k) \tag{105}$$

$$\in \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} + \boldsymbol{S}_k(\boldsymbol{y}^k - \tilde{y}^k). \tag{106}$$

Как и ранее, частные производные в (101) и (103) могут быть вычислены посредством автоматического дифференцирования $f^{[j]}$. Формула (105) составляет основу большинства вариантов интервального метода, основанного на разложении в ряд Тейлора, и все эти варианты различаются своим вторым этапом. Ясно, что

$$y(x_{k+1};\, x_0,\, \boldsymbol{y}^0) \subseteq y(x_{k+1};\, x_k,\, \boldsymbol{y}^k) \subseteq \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} + \boldsymbol{S}_k(\boldsymbol{y}^k - \tilde{y}^k), \tag{107}$$

и потому выражение в правой части этого включения можно принять за следующее приближение $\boldsymbol{y}^{k+1}$, причём на этот раз возможно неравенство $\operatorname{wid} \boldsymbol{y}^{k+1} \leq \operatorname{wid} \boldsymbol{y}^k$. Построение последовательных приближений $\boldsymbol{y}^{k+1}$ в соответствии с (106) называется «методом средних значений». Так как $0 \in \boldsymbol{S}_k(\boldsymbol{y}^k - \tilde{y}^k)$, то имеем $\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} \subseteq \boldsymbol{y}^{k+1}$.

Следовательно, для следующего интервала $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ значение $\tilde{y}^{k+1} \in \boldsymbol{y}^{k+1}$, используемое в соотношении (100), можно выбрать из интервала $\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1}$ – разумно взять его середину – что оправдывает название метода.

К сожалению, множество $y(x_{k+1};\ x_k,\ \boldsymbol{y}^k)$ не обязательно является интервальным вектором. Поэтому $\boldsymbol{y}^{k+1}$ может оказаться весьма грубой оценкой данного множества, а следовательно, и множества $y(x_{k+1};\ x_0,\ \boldsymbol{y}^0)$. Этот феномен, возникающий в каждом узле $x_k,\ k > 0$, сетки, называется «эффектом обёртывания». Его наличие обусловлено свойствами, присущими интервальным вычислениям вообще, и не зависит от применяемого метода. Однако ширина оценки весьма сильно зависит от выбора того или иного метода. С целью ее уменьшения метод средних значений часто необходимо модифицировать. Если $h_k > 0$ мало и $p$ велико, можно ожидать, что второе слагаемое $\boldsymbol{S}_k(\boldsymbol{y}^k - \tilde{y}^k)$ в (106) вносит наибольший вклад в эффект обертывания. На данную ситуацию можно повлиять путем предобуславливания с помощью неособенной матрицы $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, что приводит к следующему варианту метода средних значений:

- Выберем $\tilde{y}^0 \in \boldsymbol{y}^0$ и положим $\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{y}^0 - \tilde{y}^0$, $A_0 = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Для $k = 0, 1, \dots, K-1$ выполним следующие шаги:

- Вычислим $\boldsymbol{S}_k$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1}$, используя (103), (104).
- Выберем $\tilde{y}^{k+1} \in \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1}$.
- Выберем неособенную матрицу $A_{k+1} = \mathbb{R}^{n\times n}$, как будет описано ниже.
- Вычислим

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = (A_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{S}_k A_k))\, \boldsymbol{r}^k + A_{k+1}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} - \tilde{y}^{k+1}), \tag{108}$$

$$\boldsymbol{y}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} + (\boldsymbol{S}_k A_k)\boldsymbol{r}^k. \tag{109}$$

Перед тем, как мы рассмотрим вопрос выбора матриц $A_k$, докажем утверждение, аналогичное (107).

**Теорема 21.** *Пусть* $\tilde{y}^k$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^k$, $\boldsymbol{y}^k$, $\boldsymbol{r}^k$, $A_k$ *определены для* $k = 0, 1, \dots, K$ *так, как это описано в вышеизложенном варианте метода средних значений, и положим формально, что* $x_{-1} = x_0$, $\boldsymbol{y}^{-1} = \boldsymbol{y}^0$. *Тогда для* $k = 0, 1, \dots, K$ *справедливы соотношения*

$$y(x_k;\ x_{k-1}, \boldsymbol{y}^{k-1}) \subseteq \boldsymbol{y}^k, \tag{110}$$

$$A_k^{-1}(y^*(x_k) - \tilde{y}^k) \in \boldsymbol{r}^k \text{ для любого решения } y^* \text{ уравнения (94) и } y^*(x_{k-1}) \in \boldsymbol{y}^{k-1}. \tag{111}$$

**Доказательство.** Утверждение теоремы верно для $k = 0$, что следует из определения $x_{-1}$, $\boldsymbol{y}^{-1}$ и $A_0 = I$. Пусть оно верно для некоторого $k < K$ и $y^*$ есть решение уравнения (94), причем $y^*(x_{k-1}) \in \boldsymbol{y}^{k-1}$. Из (105), (111) и (109) получим

$$y^*(x_{k+1}) \in \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} + S_k^*(y^*(x_k) - \tilde{y}^k) = \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} + (S_k^* A_k)(A_k^{-1}(y^*(x_k) - \tilde{y}^k)) \tag{112}$$

$$\subseteq \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} + (\boldsymbol{S}_k A_k)\, \boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{y}^{k+1}, \tag{113}$$

откуда утверждение (110) верно для $k+1$. Поскольку из (112) следует $y^*(x_{k+1}) - \tilde{y}^{k+1} \in \tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} - \tilde{y}^{k+1} + S_k^*(y^*(x_k) - \tilde{y}^k)$, то имеем

$$A_{k+1}^{-1}(y^*(x_{k+1}) - \tilde{y}^{k+1}) \in A_{k+1}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} - \tilde{y}^{k+1}) + (A_{k+1}^{-1} S_k^* A_k)(A_k^{-1}(y^*(x_k) - \tilde{y}^k))$$

$$\subseteq A_{k+1}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{y}}^{k+1} - \tilde{y}^{k+1}) + (A_{k+1}^{-1}\boldsymbol{S}_k^* A_k)\, \boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{r}^{k+1},$$

Здесь мы использовали (111) и (108). ■

С помощью индукции можно показать, что при $A_k = I$ для $k = 0, 1, \dots, K$ представленный выше вариант алгоритма сводится к методу средних значений.

Если $A_{k+1} \in \boldsymbol{S}_k A_k$, то $I \in A_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{S}_k A_k)$ и можно предположить, что $(A_{k+1}^{-1}\boldsymbol{S}_k A_k)\boldsymbol{r}^k \approx \boldsymbol{r}^k$, если $A_k$ не является плохо обусловленной (сравните [66, стр. 32]). Поэтому эффект обёртывания в этом случае не приведёт к широким оценкам. К сожалению, $A_k$ не всегда хорошо обусловлена. Таким образом, встаёт важная проблема выбора матриц $A_k$. Р. Лонер предложил в [53] начать с выбора некоторой матрицы $\tilde{A}_{k+1} \in \boldsymbol{S}_k A_k$ и затем выполнить её QR-разложение (в конечном счете после перестановки столбцов этой матрицы), т.е. представить $\tilde{A}_{k+1} = Q_{k+1}R_{k+1}$. Далее полагаем $A_{k+1} = Q_{k+1}$, что приводит к повороту системы координат. Более подробное описание можно найти в [53] или [66].

Отметим дополнительно варианты, предложенные Эйгенрамом [30] и Римом [80], а также реализацию Лонера своего метода в виде комплекса программ AWA. Для дальнейшего чтения рекомендуем работу [66], в которой рассматривается интервальный метод Эрмита-Обрешкова, а также работу [67], в которой представлен метод нахождения внешней оценки решения ОДУ с полиномиальными коэффициентами.

На основе рассмотренных выше идей можно решать краевые задачи с помощью хорошо известного метода стрельбы (или пристрелки) [53].

В работе [51] с помощью интервальных методов исследуется устойчивость уравнения Орра-Зоммерфельда для различных параметров.

Обыкновенные дифференциальные уравнения тесно связаны с интегральными уравнениями. Поэтому вызывают интерес доказательные методы интервального оценивания решений этих уравнений, а также определённых интегралов. В рамках данной статьи мы не имеем возможности рассмотреть данные вопросы детально, поэтому рекомендуем обратиться к работам [25, 32, 43] и разнообразным статьям из сборника [1].

## 8. Дифференциальные уравнения в частных производных

Доказательные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных весьма разнотипны. Эти методы, как и рассмотренные выше, основаны, по большей части, на теоремах о неподвижной точке и специальном функциональном пространстве. Для того чтобы дать понятие о некоторых идеях, рассмотрим предложенный Плюомом [74] метод, который применяется для решения краевых эллиптических задач вида

$$-\Delta u + F(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{в} \ \Omega, \tag{114}$$

$$B(u) = 0 \quad \text{на} \ \Omega, \tag{115}$$

где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, есть ограниченная область, граница $\partial\Omega$ которой, по крайней мере, непрерывна по Липшицу. Определим граничный оператор $B$ следующим образом:

$$B(u) = \begin{cases} u & \text{на } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u & \text{на } \partial\Omega \backslash \Gamma_0, \end{cases}$$

где $\Gamma_0 \subseteq \partial\Omega$ ограничено, а через $\nu$ обозначен вектор внешней единичной нормали. Функция $F: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $|F(x, y, z)| \le C(1 + \|z\|_2^2)$ для $C \ge 0$ и любого $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \mathbb{R}$, $|y| \le \alpha$, $z \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $F$ и её производные $F_y = \partial F/\partial y$, $F_z = (\partial F/\partial z_1, \dots, \partial F/\partial z_n)^{\mathrm{T}}$ непрерывны.

В соответствии с теорией решения краевой задачи (114) предположим для некоторого $\sigma \in \mathbb{R}$ и всякого $r \in L^2(\Omega)$ (где $L^2(\Omega)$ – множество квадратично интегрируемых функций), что краевая задача $-\Delta u + \sigma u = r$ в $\Omega$ имеет единственное решение в $H_B^2 = \mathrm{cl}\,\{u \in \mathrm{C}^2(\bar{\Omega}) \mid B(u) = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, где через «cl» обозначено замыкание в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$.

Начнем с функции $\omega \in H_B^2(\Omega)$, которую примем за оценку решения $u^*$ задачи (114), (115) несмотря на то, что в данный момент мы не знаем, существует ли вообще это решение.

Применим оператор $L: H_B^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ вида

$$L(u) = -\Delta u + b \cdot \nabla u + cu, \quad b = F_z(\cdot, \omega, \nabla\omega), \quad c = F_y(\cdot, \omega, \nabla\omega). \tag{116}$$

Для того чтобы гарантировать обратимость оператора $L$, необходимо положить $\nabla\omega \in (L^\infty(\Omega))^n$ и проверить численно, что все собственные значения оператора $L$ на $H_B^2(\Omega)$ ненулевые. Дополнительно предположим, что для некоторого банахова пространства $X \supseteq H_B^2(\Omega)$ с нормой $\|\cdot\|_X$ справедливы следующие утверждения:

(a) функция

$$\Phi: \begin{cases} X \ \to \ L^2(\Omega), \\ u \ \mapsto \ b \cdot \nabla u + cu - F(\cdot, u, \nabla u) \end{cases} \tag{117}$$

непрерывна, ограничена на ограниченных множествах и дифференцируема по Фреше в точке $\omega$, причём $\Phi'(\omega) = 0$,

(b) вложение $H_B^2(\Omega) \hookrightarrow X$ компактно.

В качестве оператора, неподвижную точку которого мы будем искать, возьмём упрощенный оператор Ньютона

$$Tu = u - \mathcal{F}'(\omega)^{-1}\mathcal{F}(u), \tag{118}$$

где $\mathcal{F}(u) = -\Delta u + F(\cdot, u, \nabla u)$, $\mathcal{F}'$ – производная $\mathcal{F}$ по Фреше, а $\omega$ определена выше. Так как $\mathcal{F}'(\omega) = L$ и $-\Delta u = L(u) - b \cdot \nabla u - cu$, то получим

$$Tu \ = \ u - L^{-1}\big(b \cdot \nabla u + cu - F(\cdot, u, \nabla u)\big) \ = L^{-1}\big(\Phi(u)\big). \tag{119}$$

Принимая во внимание наши предположения, можно показать, что оператор $T: X \to X$ непрерывен, компактен, дифференцируем по Фреше в точке $\omega$ и $T'(\omega) = 0$. Если мы сможем найти такое замкнутое ограниченное множество функций $U \subseteq X$, что

$$TU \subseteq U, \tag{120}$$

то в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке найдётся некоторая точка $u^* \in U$, которая в силу (119) является решением (114), (115). Чтобы найти это множество $U$, сначала осуществим замену $u \longmapsto v = u - \omega$, в результате которой получится множество $V = U - \omega$. Это подчеркивает тот факт, что $\omega$ является аппроксимацией решения. Более того, мы можем использовать представление в виде центрированной формы, которую уже неоднократно применяли выше. Из $u^* = Tu^*$ и $v^* = u^* - \omega \in X$ получим

$$v^* \ = \ T\omega - \omega + (T(\omega + v^*) - T\omega) \ = \ L^{-1}\big(-\delta(\omega) + \varphi(v^*)\big), \tag{121}$$

где

$$\delta(\omega) = -\Delta\omega + F(\cdot, \omega, \nabla\omega),$$

$$\varphi(\omega) \ = \ -(F(\cdot, \omega + v, \nabla\omega + \nabla v) \ - \ F(\cdot, \omega, \nabla\omega) - b \cdot \nabla - cv). \tag{122}$$

Далее, если заменим (120) на

$$L^{-1}(-\delta(\omega) + \varphi(V)) \subseteq V, \tag{123}$$

то по теореме Шаудера о неподвижной точке снова будем иметь неподвижную точку $v^*$, такую что $u^* = \omega + v^*$ есть решение (114), (115). Теперь построим замкнутое, ограниченное, выпуклое множество $V$, для которого выполняется (123). Так как из определения $\omega$ следует $T'(\omega) = 0$, то имеем $T(\omega + v) - T(\omega) = (T'(\omega))(v) + o(\|v\|_X) = o(\|v\|_X)$, поскольку вследствие (121) $v^*$ мало, если $\omega$ близко к решению $u^*$ задачи (114), (115). Как следствие, можно считать, что $V$ – некоторый шар малого радиуса $\alpha > 0$, т.е.

$$V = \{v \in X \mid \|v\|_X \leq \alpha\}. \tag{124}$$

В [74] предполагается, что $X$ есть пространство $H^{1,4}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_X = \max\{\|u\|_\infty, \gamma\|\nabla u\|_4\}, \tag{125}$$

а здесь и в дальнейшей части параграфа мы снабжаем его нормой

$$\|u\|_p = \left(\frac{1}{\mathrm{meas}(\Omega)}\int_\Omega |v(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \quad \text{для } p \in \{2,4\}.$$

Значение $\gamma > 0$ подобрано таким образом, что

$$\|L^{-1}(r)\|_X \leq K\|r\|_2 \quad \text{для всех } r \in L^2(\Omega) \tag{126}$$

с некоторой вычисляемой константой $K > 0$. Поскольку $\Phi'(\omega) = 0$, имеем

$$\|\varphi(v)\|_2 = \|\Phi(\omega + v) - \Phi(\omega)\|_2 = o(\|v\|_X) \quad \text{при } \|v\|_X \to 0.$$

Пусть $G\colon [0,\infty[ \to [0,\infty[$ – мажорирующая монотонно неубывающая функция, такая что

$$\|\varphi(v)\|_2 \leq G(\|v\|_X) \text{ для всех } v \in X \tag{127}$$

и

$$G(t) = o(t) \quad \text{при } t \to +0. \tag{128}$$

Эта функция может быть однозначно найдена с помощью подхода, описанного в [74]. Ввиду (123) ключевое значение имеет следующий результат:

**Теорема 22.** *Используя принятые выше обозначения и предположения, допустим, что $\|\delta(\omega)\|_2 \leq \beta$ для некоторого $\beta > 0$. Если*

$$\beta \leq \frac{\alpha}{K} - G(\alpha), \tag{129}$$

*то для шара $V$, определённого равенством* (124), *справедливо* (123), *т.е. существует решение $u^* \in H_B^2(\Omega)$ задачи* (114), (115), *такое что $\|u^* - \omega\|_X \leq \alpha$.*

Доказательство непосредственно следует из того, что

$$\|L^{-1}(-\delta(\omega) + \varphi(v))\|_X \leq K(\|\delta(\omega)\|_2 + \|\varphi(v)\|_2) \leq K(\beta + G(\|v\|_X)) \leq K(\beta + G(\alpha)) \leq \alpha$$

для каждого $v \in V$. Отметим, что правая часть (129) положительна при малом $\alpha$, поскольку неравенство (129) верно, если $\omega$ хорошо аппроксимирует $u^*$, т.е. ошибка $\delta(\omega)$ мала. Вычисление констант в неравенствах требует при этом особого внимания, и в этом случае с успехом могут быть применены интервальные вычисления. Например, для получения константы $K$ в (126) и проверки обратимости оператора $L$ на $H_B^2(\Omega)$ необходимо проверить, что наименьшее собственное значение $\lambda_1 > 0$ в задаче на собственное значение (в слабой формулировке)

$$u \in H_B^2(\Omega), \;\; \langle L(u), L(\psi)\rangle = \lambda\langle u, \psi\rangle \;\; \text{для всех } \psi \in H_B^2(\Omega),$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено каноническое скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Посредством интервальных методов можно осуществить проверку границ для $\lambda_1$ и $K$. Более детальное изложение вышеописанной методики, включая вычисление аппроксимации функции $\omega$ с помощью конечных элементов, можно найти в [74], а также указанных там работах.

В отличие от метода Плюма, который можно считать аналитическим, существуют другие методы, непосредственно ориентированные на интервальные вычисления. Так, для задачи Дирихле

$$-\Delta u = f(u) \;\text{ в } \Omega,$$

$$u = 0 \;\text{ на } \partial\Omega,$$

Накао [65] предложил рассматривать множество $U$ в виде

$$U = \omega + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a}_j \phi_j + \{\phi \in S^{\perp} \big| \|\phi\|_{H_0^1} \le \alpha\},$$

где $S \subseteq H_0^1(\Omega)$ – конечномерное конечноэлементное подпространство, $S^{\perp}$ – его ортогональное дополнение в $H_0^1$, $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ – базис пространства $S$ и $\alpha$ – некоторая численно определяемая константа.

В заключении отметим доказательные методы решения гиперболических уравнений, описание которых можно найти в [28, 47], а также используемых там работах.

Анализ уже предложенных, а также разработка новых методов оценивания решений дифференциальных уравнений в настоящее время является активно разрабатываемым направлением.

## 9. Программное обеспечение для интервальных вычислений.

Интервальная арифметика реализована на многих компьютерных платформах и поддерживается несколькими языками программирования. Расширенные языки для научных вычислений (так называемые «XSC-языки») предоставляют мощные средства, обеспечивающие высокую точность и надежность результатов. Они содержат большое число предопределённых числовых типов данных и операции для обработки данных с неопределённостями.

Один из них – язык программирования общего назначения PASCAL-XSC [46]. По сравнению с языком PASCAL он предоставляет расширенное множество математических функций для таких типов данных, как real, complex, interval и cinterval (complex interval) с максимальной точностью результата. На PASCAL-XSC реализованы пакеты программ для решения некоторых задач численного анализа. Система PASCAL-XSC может быть установлена на персональные компьютеры, рабочие станции, большие универсальные ЭВМ и суперкомпьютеры.

Все вышесказанное относится также и к языкам C-XSC [45] и FORTRAN-XSC [89].

ACRITH-XSC [40] является расширением языка FORTRAN 77. Это совместная разработка компании IBM/Германия и Института прикладной математики Университета г. Карлсруэ (где работами руководил профессор У. Кулиш). К сожалению, ACRITH-XSC может использоваться только на компьютерах с архитектурой IBM/370 под управлением операционной системы VMCMS. Он организован как библиотека, сопровождающая FORTRAN. Среди его возможностей – динамические массивы, подмассивы, интервальная и векторная арифметики, программы, реализующие некоторые доказательные методы решения математических задач.

В последнем параграфе работы [50] можно найти обсуждение различных существующих арифметик, необходимых для программной поддержки доказательных вычислений, а также подходящих аппаратных средств. Информацию о последних разработках группы исследователей под руководством У. Кулиша можно найти по адресу http://www.rz.uni-karlsruhe.de/~iam.

По адресу http://interval.louisiana.edu можно получить обзор программного обеспечения, разработанного отделом вычислительной техники Университета Луизианы в Лафайете (США) под руководством Р. Б. Кирфотта. Приведем краткий перечень доступного программного обеспечения:

- INTBIS (пакет программ на FORTRAN 77 для решения полиномиальных систем уравнений),

- INTLIB (ACM TOMS Algorithm 737 – библиотека программ на FORTRAN 77, предназначенных для реализации интервальной арифметики и точной оценки границ областей значений стандартных функций),
- INTERVAL ARITHMETIC (модуль FORTRAN 77, использующий INTLIB для определения интервального типа данных).

Пакет Programmer's Runtime Optimized Fast Library (PROFIL), разработанный в Техническом Университете Гамбург-Харбург (под руководством проф. З. М. Румпа), представляет собой библиотеку C++, реализующий обычные вещественные операции и соответствующие операции над интервалами. В настоящее время поддерживаются следующие типы данных: int, real, interval, векторы и матрицы этих типов и комплексные числа. Более детальное описание можно найти http://www.ti3.tu-harburg.de/Software/PROFIL.html.

В 1998 году З.М. Румп объявил о разработке пакета INTLAB – библиотеки MATLAB интервальных арифметических программ, реализующего интервальную арифметику в рамках среды MATLAB. Инструментарий INTLAB составляют

- арифметические операции над вещественными и комплексными интервалами, векторами и матрицами, в том числе разреженными матрицами,
- точечные (вещественные) стандартные функции,
- автоматическое дифференцирование, в том числе для интервальных данных,
- автоматическое вычисление наклонов, в том числе для интервальных данных,
- многократная точность, в том числе для интервальных данных,
- корректный (доказательный) ввод и вывод,
- некоторые примеры доказательных программ.

Пакет INTLAB реализован на MATLAB для лучшей транспортабельности. Единственным исключением является программа на языке ассемблера для переключения режима округления процессора (необходимая на некоторых платформах).

Главными целями, преследуемыми при разработке пакета INTLAB, являлись скорость работы и простота применения. Первое достигается за счет специальной реализации некоторых арифметических программ, второе есть следствие операторной концепции среды MATLAB.

Код на INTLAB легко читается и пишется, почти как текст спецификации. INTLAB доступен для операционных систем WINDOWS и UNIX, единственным необходимым условием его работы является наличие среды MATLAB версии не ниже 5. Дополнительную информацию и собственно программу можно получить по адресу http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/.

## Список литературы

1. E. Adams, U. Kulisch (Eds.), Scientific Computing with Automatic Result Verification, Academic Press, Boston, 1993.
2. R. Albrecht, G. Alefeld, H. J. Stetter (Eds.), Validation Numerics, Theory and Applications, Springer, Wien, 1993.
3. G. Alefeld, Intervallrechnung über den komplexen Zahlen und einige Anwendungen, Ph.D. Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1968.
4. G. Alefeld, Über die Durchführbarkeit des Gaußschen Algorithmus bei Gleichungen mit Intervallen als Koeffizienten, Comput. Suppl. 1 (1977) 15-19.

5. G. Alefeld, Bounding the slope of polynomials and some applications, Computing 26 (1981) 227-237.
6. G. Alefeld, Berechenbare Fehlerschranken für ein Eigenpaar unter Einschluß von Rundungsfehlern bei Verwendung des genauen Skalarprodukts, Z. Angew. Math. Mech. 67 (1987) 145-152.
7. G. Alefeld, Rigorous error bounds for singular values of a matrix using the precise scalar product, in: E. Kaucher, U. Kulisch, C. Ullrich (Eds.), Computerarithmetic, B.G. Teubner, Stuttgart, 1987, pp. 9-30.
8. G. Alefeld, Über das Divergenzverhalten des Intervall-Newton-Verfahrens, Computing 46 (1991) 289-294.
9. G. Alefeld, Inclusion methods for systems of nonlinear equations – the interval Newton method and modifications, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 7-26.
10. G. Alefeld, A. Gienger, G. Mayer, Numerical validation for an inverse matrix eigenvalue problem, Computing 53 (1994) 311-322.
11. G. Alefeld, A. Gienger, F. Potra, Efficient numerical validation of solutions of nonlinear systems, SIAM J. Numer. Anal. 31 (1994) 252-260.
12. G. Alefeld, J. Herzberger, Einführung in die Intervallrechnung, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.
13. G. Alefeld, J. Herzberger, Introduction to Interval Computations, Academic Press, New York, 1983.
14. G. Alefeld, R. Hoffmann, G. Mayer, Verification algorithms for generalized singular values, Math. Nachr. 208 (1999) 5-29.
15. G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer, On the shape of the symmetric, persymmetric, and skew-symmetric solution set, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 18 (1997) 693-705.
16. G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer, The shape of the solution set of linear interval equations with dependent coefficients, Math. Nachr. 192 (1998) 23-36.
17. G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer, On the solution sets of particular classes of linear systems, submitted for publication.
18. G. Alefeld, R. Lohner, On higher order centered forms, Computing 35 (1985) 177-184.
19. G. Alefeld, G. Mayer, The Cholesky method for interval data, Linear Algebra Appl. 194 (1993) 161-182.]
20. G. Alefeld, G. Mayer, A computer-aided existence and uniqueness proof for an inverse matrix eigenvalue problem, Int. J. Interval Comput. 1994 (1) (1994) 4-27.
21. G. Alefeld, G. Mayer, On the symmetric and unsymmetric solution set of interval systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 16 (1995) 1223-1240.
22. H. Beeck, Über Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten, Computing 10 (1972) 231-244.
23. H. Behnke, F. Goerisch, Inclusions for eigenvalues of selfadjoint problems, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 277-322.
24. X. Chen, A verification method for solution of nonsmooth equations, Computing 58 (1997) 281-294.
25. G.F. Corliss, Computing narrow inclusions for definite integrals, MRC Technical Summary Report # 2913, University of Madison, Madison, Wisconsin, February 1986.
26. G.F. Corliss, Introduction to validated ODE solving, Technical Report No. 416. Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, March 1995.
27. H. Cornelius, R. Lohner, Computing the range of values of real functions with accuracy higher than second order, Computing 33 (1984) 331-347.
28. H.-J. Dobner, Einschließungsalgorithmen für hyperbolische Differentialgleichungen, Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1986.
29. P.S. Dwyer, Linear Computations, Wiley, New York, 1951.

30. P. Eijgenraam, The solution of initial value problems using interval arithmetic. Formulation and analysis of an algorithm, Thesis, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.
31. W Enger, Intervall Ray Tracing – Ein Divide-and-Conquer Verfahren für photorealistische Computergrafik, Thesis, Universität Freiburg, Freiburg, 1990.
32. A. Gienger, Zur Lösungsverifikation bei Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art, Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1997.
33. G.H. Golub, C.F. van Loan, Matrix Computations, 3rd Edition, John Hopkins, Baltimore, 1995.
34. A. Greiwank, G.F. Corliss (Eds.), Automatic Differentiation of Algorithms, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
35. H. Grell, K. Maruhn, W. Rinow (Eds.), Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I Arithmetik, Dritte Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966. (*Прим. перев.* Русский оригинал соответствующей статьи – В.М.Брадис «Устный и письменный счёт. Вспомогательные средства вычислений» // Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. – Москва: Учпедгиз, 1951.)
36. R. Hammer, M. Hocks, U. Kulisch, D. Ratz, Numerical Toolbox for Verified Computing I, Springer, Berlinn, 1993.
37. E. Hansen, An overview of global optimization using interval analysis, in: R.E. Moore (Ed.), Reliability in Computing, The Role of Interval Methods in Scientific Computing, Perspectives in Computing, Vol. 19, Academic Press, Boston, 1988, pp. 289-307.
38. E. Hansen, Global Optimization Using Interval Analysis, Dekker, New York, 1992.
39. P. Hertling, A Lower Bound for Range Enclosure in Interval Arithmetic, Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Research Report Series, Department of Computer Science, University of Auckland, January 1998.
40. IBM High Accuracy Arithmetic-Extended Scientific Computation (ACRITH-XSC), General Information GC 33-646-01, IBM Corp.,1990.
41. C. Jansson, Rigorous sensitivity analysis for real symmetric matrices with interval data, in: E. Kaucher, S.M. Markov, G. Mayer (Eds.), Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modeling, IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, Vol. 12, J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing, Basel, 1994, pp. 293-316.
42. C. Jansson, On self-validating methods for optimization problems, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam,1994, pp. 381-438.
43. E.W. Kaucher, W.L. Miranker, in: Self-Validating Numerics for Function Space Problems, Computations with Gaurantees for Differential and Integral Equations, Academic Press, Orlando, 1984.
44. R.B Kearfott, A review of techniques in the verified solution of constrained global optimization problems, in: R.B. Kearfott, V. Kreinovich (Eds.), Applications of Interval Computations, Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 23-59.
45. R. Klatte, U. Kulisch, C. Lawo, M. Rauch, A. Wiethoff, C-XSC, A $C^{++}$ Class Library for Extended Scientific Computing, Springer, Berlin, 1993.
46. R. Klatte, U. Kulisch, M. Neaga, D. Ratz, C. Ullrich, PASCAL-XSC, Language Reference with Examples, Springer, Berlin, 1992.
47. M. Koeber, Lösungsienschließung bei Anfangswertproblemen für quasilineare hyperbolische Differentialgleichungen, Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1997.
48. R. Krawczyk, Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken, Computing 4 (1969) 187-201.
49. U. Kulisch, Grundzüge der Intervallrechnung, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Vol. 2, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.
50. U. Kulisch, Numerical algorithms with automatic result verification, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 32, 1996, pp. 471-502.

51. J.-R. Lahmann, Eine Methode zur Einschließung von Eigenpaaren nichtselbstadjungierter Eigenwertprobleme und ihre Anwendung auf die Orr-Sommerfeld-Gleichung, Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1999.
52. B. Lang, Lokalisierung und Darstellung von Nullstellenmengen einer Funktion, Diploma Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1989.
53. R. Lohner, Einschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs- und Randwertaufgaben und Anwendungen, Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1988.
54. R. Lohner, Enclosing all eigenvalues of symmetric matrices, in: C. Ullrich, J. Wolff von Gudenberg (Eds.), Accurate Numerical Algorithms. A Collection of Research Papers, Research Reports, ESPRIT, Project 1072, Diamond, Vol. 1, Springer, Berlin, 1989, pp.87-103.
55. G. Mayer, Old and new aspects for the interval Gaussian algorithm, in: E. Kaucher, S.M. Markov, G. Mayer (Eds.), Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling, IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, Vol. 12, J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing, Basel, 1991, pp. 329-349.
56. G. Mayer, Enclosures for eigenvalues and eigenvectors, in: L. Atanassova, J. Herzberger (Eds.), Computer Arithmetic and Enclosure Methods, Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 49-67.
57. G. Mayer, Result verification for eigenvectors and eigenvalues, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 209-276.
58. G. Mayer, Epsilon-inflation in verification algorithms, J. Comput, Appl. Math. 60 (1995) 147-169.
59. G. Mayer, Epsilon-inflation with contractive interval function, Appl. Math. 43 (1998) 241-254.
60. G. Mayer, J.Rohn, On the applicability of the interval Gaussian algorithm, Reliable Comput. 4 (1998) 205-222.
61. O. Mayer, Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen, Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1968.
62. C. Miranda, Un' osservazion su un teorema di Brouwer, Bol. Un. Mat. Ital. Ser. II 3 (1941) 5-7.
63. R.E. Moore, Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing, Thesis, Stanford University, October 1962.
64. R.E. Moore, Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
65. M.T. Nakao, State of the art for numerical computations with guaranteed accuracy, Math. Japanese 48 (1998) 323-338.
66. N.S. Nedialkov, Computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1999.
67. M. Neher, An enclosure method for the solution of linear ODEs with polynomial coefficients, Numer. Funct. Anal. Optim. 20 (1999) 779-803.
68. A. Neumaier, The enclosure of solutions of parameter-dependent systems of equations, in: R.E. Moore (Ed.), Reliability in Computing. The Role of Interval Methods in Scientific Computing, Perspectives in Computing, Vol. 19, Academic Press, Boston, 1988, pp. 269-286.
69. A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations, University Press, Cambridge, 1990.
70. H.T. Nguyen,V. Kreinovich, V. Nesterov, M. Nakumura, On hardware support for interval computations and for soft computing: theorems, IEEE Trans. Fuzzy Systems 5 (1) (1997) 108-127.
71. J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.
72. W. Oettli, W. Prager, Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bound for coefficients and right-hand sides, Numer. Math. 6 (1964) 405-409.

73. M. Petković, L.D. Petković, Complex Interval Arithmetic and Its Applications, Wiley, New York, 1998.
74. M. Plum, Inclusion methods for elliptic boundary value problems, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 323-379.
75. L.B. Rall, Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, Wiley, New York, 1969.
76. L.B. Rall, Automatic Differentiation: Techniques and Applications, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 120, Springer, Berlin, 1981.
77. H. Ratschek, Centered forms, SIAM J. Numer. Anal. 17 (1980) 656-662.
78. H. Ratschek, J.Rokne, Computer Methods for the Range of Functions, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
79. H. Ratschek, J.Rokne, New Computer Methods for Global Optimization, Ellis Horwood, Chichester, UK, 1988.
80. R. Rihm, Interval methods for initial value problems in ODE's, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 173-207.
81. S.M. Rump, Solving algebraic problems with high accuracy, in: U.W. Kulisch, W.L. Miranker (Eds.), A New Approach to Scientific Computation, Academic Press, New York, 1983, pp. 53-120.
82. S.M. Rump, Rigorous sensitivity analysis for systems of linear and nonlinear equations, Math. Comp. 54 (1990) 721-736.
83. S.M. Rump, On the solution of interval linear systems, Computing 47 (1992) 337-353.
84. S.M. Rump, Verification methods for dense and sparse systems of equations, in: J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 63-135.
85. A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley, New York, 1986.
86. H. Schwandt, Schnelle fast global konvergente Verfahren für die Fünf-Punkte-Diskretisierung der Poissongleichung mit Dirichletschen Randbedingungen auf Rechteckgebieten, Thesis, Fachbereich Mathematik der TU Berlin, Berlin, 1981.
87. P.S. Shary, Solving the linear interval tolerance problem, Math. Comput. Simulation 39 (1995) 53-85.
88. T. Sunaga, Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis, RAAG Memoirs 2 (1958) 29-46.
89. W.V. Walter, FORTRAN-XSC: a portable FORTRAN 90 module library for accurate and reliable scientific computing, in: R. Albrecht, G. Alefeld, H.J. Stetter (Eds.), Validation Numerics, Theory and Applications, Springer, Wien, 1993, pp. 265-285.

## Дополнительная литература

1. G. Alefeld, A. Frommer, B. Lang (Eds.), Scientific Computing and Validated Numerics, Mathematical Research, Vol. 90, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
2. G. Alefeld, R.D. Grigorieff (Eds.), Fundamentals of Numerical Computation, Computer-Oriented Numerical Analysis, Computing Supplementum, Vol. 2, Springer, Wien, 1980.
3. G. Alefeld, J. Herzberger (Eds.), Numerical Methods and Error Bounds, Mathematical Research, Vol. 89, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
4. L. Atanassova, J. Herzberger (Eds.), Computer Arithmetic and Enclosure Methods, Elsevier, Amsterdam, 1992.
5. H. Bauch, K.-U. Jahn, D. Oelschlägel, H. Süße, V. Wiebigke, Intervallmathematik, Theorie und Anwendungen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek, Vol. 72, BSB B.G. Teubner, Leipzig,1987.
6. E. Hansen (Ed.), Topics in Interval Analysis, Oxford University Press, Oxford, 1969.
7. J. Herzberger (Ed.), Topics in Validated Computations, Elsevier, Amsterdam, 1994.

8. J. Herzberger (Ed.), Wissenschaftliches Rechnen, Eine Einführung in das Scientific Computing, Akademie Verlag, Berlin, 1995.
9. S.A. Kalmykov, J.I. Shokin, S.C. Yuldashev, Methods of Interval Analysis, Novosibirsk, 1986 (in Russian).
10. E. Kaucher, U. Kulisch, C. Ullrich (Eds.), Computerarithmetic, B.G. Teubner, Stuttgart, 1987.
11. E. Kaucher, S.M. Markov, G. Mayer (Eds.), in: Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling, IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, Vol. 12, J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing, Basel, 1991.
12. R.B. Kearfott, V.Kreinovich (Eds.), Applications of Interval Computations, Kluwer, Dordrecht, 1996.
13. V. Kreinovich, A. Lakeyev, J. Rohn, P. Kahl, Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations, Kluwer, Dordrecht, 1998.
14. U. Kulisch (Ed.), Wissenschaftliches Rechnen mit Ergepnisverifikation, Vieweg, Braunschweig, 1989.
15. U.W. Kulisch, W.L. Miranker, Computer Arithmetic in Theory and Practice, Academic Press, New York, 1981.
16. U.W. Kulisch, W.L. Miranker (Eds.), A New Approach to Scientific Computation, Academic Press, New York, 1983.
17. U. Kulisch, W.L. Miranker, The arithmetic of the digital computer: a new approach, SIAM Rev. 28 (1986) 1-40.
18. U.W. Kulisch, H.J. Stetter (Eds.), Scientific Computation with Automatic Result Verification, Computing Supplementum, Vol. 6, Springer, Wien, 1988.
19. S.M. Markov (Ed.), Scientific Computation and Mathematical Modelling, DATECS Publishing, Sofia, 1993.
20. W.L. Miranker, R.A. Toupin (Eds.), Accurate Scientific Computations, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 235, Springer, 1986.
21. R.E. Moore, Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM, Philadelphia, 1979.
22. R.E. Moore, Computational Functional Analysis, Ellis Horwood, Chichester, 1985.
23. R.E. Moore (Ed.), Reliability in Computing. The Role of Interval Methods in Scientific Computing, Perspectives in Computing, Vol. 19, Academic Press, Boston, 1988.
24. K. Nickel (Ed.), Interval Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 29, Springer, Berlin, 1975
25. K.L.E. Nickel (Ed.), Interval Mathematics 1980, Academic Press, New York, 1980.
26. K. Nickel (Ed.), Interval Mathematics 1985, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 212, Springer, Berlin, 1985.
27. M. Petković, Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1387, Springer, Berlin, 1989.
28. C. Ullrich (Ed.), Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods, Academic Press, Boston, 1990.
29. C. Ullrich (Ed.), Contributions to Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods, IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, Vol. 7, J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing, Basel, 1990.
30. C. Ullrich, J. Wolff von Gudenberg (Eds.), Accurate Numerical Algorithms. A Collection of Research Papers, Research Reports, ESPRIT, Project 1072, Diamond, Vol. 1, Springer, Berlin, 1989.
31. T. Csendes (Ed.), Developments in Reliable Computing, Kluwer, Dordrecht, 1999.

*Перевод с английского Д.Ю. Людвина.*