

В. П. КУЗНЕЦОВ

**ИНТЕРВАЛЬНЫЕ
СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ**

«РАДИО И СВЯЗЬ»

Кузнецов В. П. Интервальные статистические модели. — М.: Радио и связь, 1991. — 352 с.: ил. ISBN 5-256-00726-2.

На базе новой аксиоматики развивается аппарат размытых математических моделей случайных явлений. Эти модели охватывают множественные, интервальные, нечеткие, и вообще любые неполные и отрывочные статистические описания характеристик явления, подходя к распределениям вероятностей как пределу избытка данных. Сфера действия моделей простирается от неустойчивых, уникальных явлений до статистически устойчивых к повторам. В этих широких пределах освещаются и интерпретируются понятия интервальной вероятности и среднего, анализируются причинные связи, случайные преобразования, отношения зависимости и независимости, исследуются предельные законы, описывающие случайные процессы и прочее другое.

Применительно к новым моделям вводятся критерии и разрабатываются универсальные методы синтеза оптимальных решающих правил (оценок, различения гипотез). Реализующие их устройства просты по структуре и способны эффективно работать в изменяющихся окружающих условиях, основанием для чего служит выбор надежных моделей. Доверие к моделям завоевывается вовлечением в них небольшого числа исходных вероятностей и средних, представленных в интервальном виде, отражающем нестабильность реальных явлений и дефицит исходных данных о нем. Рассматривается совместный синтез надежных моделей и решающих правил.

Для научных работников в области связи и управления; может быть полезна всем, кто интересуется математическими методами описания случайных явлений и задачами принятия решений при неопределенности.

Табл. 1. Ил. 37. Библиогр. 25 назв.

Рецензент: проф., докт. техн. наук Ф. П. ТАРАСЕНКО

Редакция литературы по радиотехнике и электросвязи

К 2303020000-040 96-90
046(01)-91

ISBN 5-256-00726-2

© Кузнецов В. П., 1991

*Памяти матери
Кузнецовой Екатерины Ивановны
посвящается*

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей есть не что иное, как математический язык описания случайных явлений. Привычка, навык к этому языку мешают задуматься над существованием других, быть может более удобных форм и описаний, не входящих в словарь общеупотребительного языка, но делающих простыми ситуации, столь трудные в современном «произношении». Разработка нового математического языка шире общепризнанного и его использование составляет суть предлагаемой книги.

Символьный язык — средство описания и способ общения, но в то же время это инструмент, с помощью которого можно что-то исследовать, создавать, обрабатывать, конструировать, а для вероятностно-статистических методов — получать решающие правила, алгоритмы, оценки. Последние реализуются работающими устройствами. Критерием жизнестойкости, приемлемости нового символьного аппарата служит его надежность, адекватность, способность делать то, чего ранее не было, обрабатывать то, что не обрабатывалось, упрощать то, что было сложным. Именно эта цель преследовалась при введении интервальных моделей и старательно претворялась при разработке методов.

Базу книги закладывают интервальные вероятностно-статистические категории, дающие универсальный способ описания как имеющихся знаний, так и их отсутствия, т. е. незнания; под эти категории подводится аксиоматика. Получается новая теория, непривычная, наверно, с первого взгляда, но охватывающая огромное разнообразие явлений как устойчивых, определяемых вероятностями, так и неустойчивых, невероятных, с небольшим числом неполно исследованных закономерностей, наконец и вовсе с неизвестными свойствами.

Покажем, что зерно интервального подхода уже скрыто лежит в недрах современных вероятностных построений, задача — взрастить его (первая часть книги) и «собрать урожай» (вторая часть).

Пример 1. Пусть модель случайной величины с исходами на числовой прямой \mathcal{X} описывается плотностью распределения вероятностей. Интегрирование по ней дает вероятности $P(A)$ отрезков $A \in \mathcal{X}$ и их объединений (сумм) вплоть до счетных, составляющих набор \mathcal{A} измеримых событий. В \mathcal{A} не могут войти все события, как бы не размельчалось оно до борелевских и далее лебеговских множеств [1]. Всегда останутся так называемые неизмеримые события $B \notin \mathcal{A}$, для которых вероятности уже будут интервальные $\underline{P}(B)$, $\overline{P}(B)$, оп-

ределенные как внутренняя и внешняя меры формулами: $\underline{P}(B) = \sup_{A: B \supset A \in \mathcal{A}} P(A)$, $\overline{P}(B) = \inf_{A: B \subset A \in \mathcal{A}} P(A)$. Точно так же и с математическими ожиданиями (средними статистическими) от случайных величин — функций $g(x)$, $x \in \mathcal{X}$. Они оказываются точными Mg на классе $\mathcal{L}\mathcal{A}$ измеримых (интегрируемых) функций и станут интервальными, определенными формулами $\underline{M}f = \sup_{g: f \geq g \in \mathcal{L}\mathcal{A}} Mg$, $\overline{M}f = \inf_{g: f \leq g \in \mathcal{L}\mathcal{A}} Mg$ для остальных, неизмеримых f , которых, в общем, великое множество.

Пример позволяет раскрыть следующую конструкцию современных вероятностных построений. На ядре \mathcal{A} , представляющем набор событий пространства исходов \mathcal{X} , первичными заданы точные вероятности, образующие распределение вероятностей. Стремятся закладывать в \mathcal{A} как можно большее число событий, чтобы при продолжении вероятностей, а оно осуществляется интегрированием по вероятностному распределению, получались точные математические ожидания (средние) Mg у всех обозримых случайных величин. Последние определяются как измеримые функции $g(x)$, $x \in \mathcal{X}$ (обычно кусочно-непрерывные с возможными скачками первого рода) на исходах явления. Но вопреки стараниям сделать точными вероятности и средние для абсолютно всех событий и функций $f(x)$ не удастся (кроме явлений с конечным и счетным числом исходов), так как все равно остаются называемые неизмеримыми события и функции, их много и из-за них при продолжении возникают интервальные вероятности и интервальные средние $\underline{M}f$, $\overline{M}f$. Это первое. А второе, что интервалы $\underline{M}f$, $\overline{M}f$ определены формально на всех $\forall f$, а точные значения $\underline{M}g$ есть частный случай интервальных при $\underline{M}g = \overline{M}g$ и их часть.

Можно возразить, зачем затрагивать практически бессмысленные неизмеримые функции? Ответ тот, что сужение ядра \mathcal{A} , вынуждаемое физической невозможностью измерять, да и вообще знать много вероятностей, существенно расширяет класс неизмеримых функций, делая средние неточными. А если допустить, что в ядре \mathcal{A} вообще событий может быть мало, да еще первичные вероятности на \mathcal{A} неточные, т. е. интервальные, то всюду как вероятности, так и средние станут интервальными. Проиллюстрируем их на примере семейства вероятностных распределений.

Пример 2. Пусть задано параметрическое семейство распределений вероятностей P_θ , $\theta \in \Theta$. Тогда средние всех измеримых функций будут интервальными, определенными как нижняя и верхняя грани

$$\underline{M}g = \inf_{\theta \in \Theta} M_\theta g, \quad \overline{M}g = \sup_{\theta \in \Theta} M_\theta g.$$

Подстановка на место $g(x)$ индикаторных функций событий A (равных 1, если аргумент x принадлежит A , и 0, если не принадлежит) ведет к интервальным вероятностям $\underline{P}(A)$, $\overline{P}(A)$ как составной части средних.

В связи со вторым примером напрашивается другой резонный вопрос: а разве семейства распределений вероятностей не служат уже универсальной формой отражения любых неточных знаний о явлении? Так вот, оказывается, что интервально-статистический подход дает более удобную форму для этих целей, в которую вписываются, как частный случай, и распределения вероятностей, и их семейства со всем богатством возможностей, а также многое-многое другое.

Интервальная модель на пространстве исходов \mathcal{X} определяется формально совокупностью интервалов средних \overline{Mf} , \overline{Mf} , \overline{Vf} , связанных между собой аксиомами. Далее функции $f(x)$, $x \in \mathcal{X}$ называются признаками. Любую нашу модель можно задавать по стандартной схеме рис. В.1. Ядро модели формируется набором \mathcal{S} признаков $g \in \mathcal{S}$, именуемых первичными, и указанием границ средних на них. Вероятности рассматриваются как составная часть средних. С \mathcal{S} средние продолжают на \overline{Vf} , образуя собой модель.

Отличительными для новой теории являются четыре ключевые момента.

1. Лишение вероятностей привилегий для задания модели и уравнивание в правах с более емким понятием среднего статистического числовых признаков¹. Это означает отказ от распределений вероятностей как необходимой части модели и от алгебры событий как обязательной атрибутики ядра. Это раскрепощает ядро \mathcal{S} и саму модель.

2. Почему обязательно вероятности и средние должны быть точными? Это всегда идеальный случай. Реальный подход — считать их интервальными — мгновенно «развязывает руки». В самом деле, отрезок $[0, 1]$ в качестве вероятности некоторого события означает полное отсутствие знания этой вероятности. И здесь не надо, что самое замечательное, задумываться о существовании точной вероятности, обязанной абсолютной статистической устойчивости явления. Пусть имеет место неустойчивость, характерная для многих приложений! Если неустойчивость не полная, а частичная, то приходим к интервальным вероятностям внутри $[0, 1]$. Наконец, если концы интервалов смыкаются, то получаются точные вероятности. Все сказанное переносится на средние, только областью их значений будут уже интервалы на всей оси чисел.



Рис. В.1. Структура интервальных моделей

¹ Попытка такого рода делалась в [2], но свелась лишь к другой расстановке акцентов в прежнем вероятностном языке.

3. Необычайная гибкость ядра \mathcal{S} по форме и числу элементов и вольность задания на нем средних как в виде точных значений, так и интервальных или только одной из границ. Это «размораживает» структуру модели, позволяя в рамках единой конструкции с одной стороны универсально, а с другой (манипулируя составом \mathcal{S}) — крайне экономно вкладывать в модель лишь имеющиеся знания о явлении с поправками на их точность и с прицелом на простоту.

4. Средние с первичного ядра \mathcal{S} продолжают на все признаки V_f с помощью алгоритмических формул двойственности. Если изображать модель как тело, то формулы двойственности работают с его оболочкой, обходя множественное представление в виде семейств точек (распределений вероятностей, требующих громоздких формул интегрирования), «запрягая» в статистические проблемы дуальный подход.

Универсальность интервально-статистических моделей обеспечивается возможностью заключать в ядро почти любые по объему и форме знания о явлении. Взять процесс: если нет никаких данных о нем, то ядро пустое, а модель голая. Если стало известно среднее процесса, то это соответствует определенным признакам модели, формирующим грани ее тела. Если дополнительно дана средняя мощность, то это дополняет ядро еще одним признаком, дает ему еще одну грань. Если сюда добавить знания о вероятностях превышений, то состав ядра усложняется, модель усечется новыми гранями, сделается более точной; а если к тому же пополнить сведениями о корреляциях, то тем более, и т. д. Пределом знаний будет точка, т. е. вероятностная модель (число граней которой равно числу элементарных исходов). Возникает естественная иерархия от простого к сложному, как в живой природе при ее сотворении и эволюции. Сначала нет ничего, нет никаких знаний, и это соответствует самой простой модели. Любые сведения, какой бы размытый вид они ни обретали, формируют уже готовую худо-бедно работающую модель. По мере накопления сведений модель совершенствуется, усложняется. Наконец, если имеются точные данные о вероятностях событий, то получается вероятностная модель.

Связь моделей иллюстрируется рис. В.2, где стрелки указывают уровни совершенствования и усложнения моделей. Черные стрелки относятся к классическим моделям, где путь к приложениям повел от распределений вероятностей к их семействам все более сложного вида. Белые стрелки — к интервальным моделям, иерархическая система которых располагается вдоль дороги, тянущейся от нуля знаний к бесконечности ... навстречу классическому движению.

Двум гносеологически противоположным направлениям движения свойственны разные проблемы. В классическом подходе основная проблема — априорное незнание, неопределенность, вынуждающая усложнять модель переходом к семейству с целью облегчить «воз» из огромного числа вероятностей, нагружающий

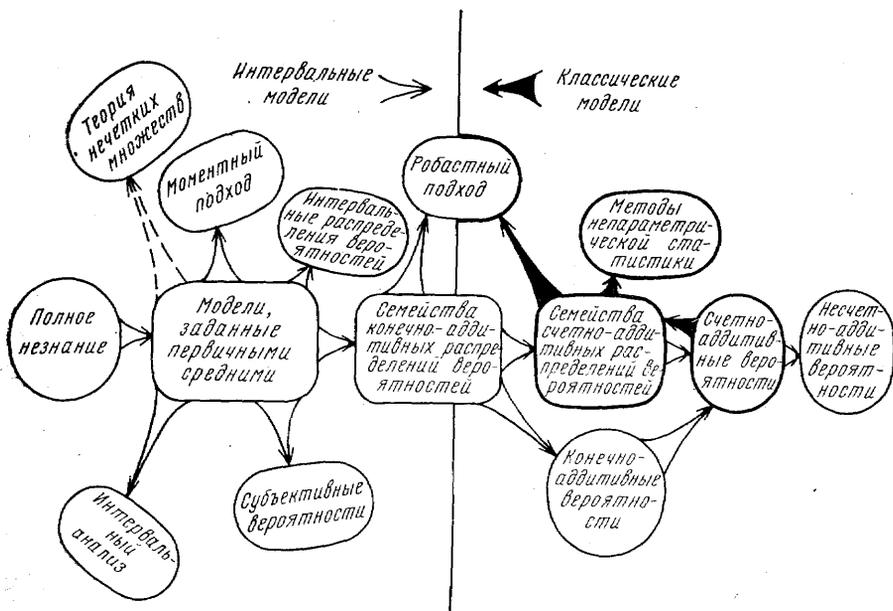


Рис. В.2. Иерархия моделей

современную модель. В нашем подходе «воз» заполняет постепенно: модели будут тем сложнее и точнее, чем больше знаний, и проблемы состоят в экономном их представлении, заключении в ядро, а если требуют упрощения, то отбрасывании всего несущественного, второстепенного.

Итак, в отличие от теории вероятностей, освещающей поточечную структуру моделей, исключающую иерархию по знаниям, мы будем мыслить модель ее внешними атрибутами, оболочкой. Знания вкладываем в грани, формируемые первичными средними, по их числу и составу модели усложняются, образуют иерархию.

Иерархия интервальных моделей переносится на получаемые из них оптимальные решающие правила. При малом числе исходных данных правила будут иметь плохие качественные характеристики, но зато устойчивы к внешним аномалиям, нестабильностям. При накоплении знаний о явлении качество повышается, правила, в общем, усложняются, становятся более избирательными к ситуации, так как настраиваются на одну или несколько из них. Здесь вроде бы качественными привилегиями обладают классические вероятностные модели, и только ими, казалось бы, надо пользоваться. Но увы, это самообман, так как необходимого для таких моделей багажа знаний почти всегда нет, а их весьма «вольный выбор» (тяготеющий к нормальному распределению в силу его относительной простоты) носит декларативный характер. Адекватные модели не должны вовлекать никаких других, кроме имеющихся проверенных знаний, всегда конечных, для надеж-

ности представленных в интервальной (размытой) доверительной форме. Это как раз та часть интервальных моделей, которая располагается на рис. В.2 слева от вертикальной линии. От них правилам будет передана по наследству надежность и простота.

Упорядоченность интервальных моделей по числу и составу данных позволяет помечать о сводной библиотеке правил, в которой исследователь по имеющимся реальным данным о явлении смог бы отыскать модель и соответствующее ей оптимальное правило и по тому, устраивает его качество или нет, уже решал бы, нужно ли уточнять имеющиеся или собирать дополнительные сведения (экспериментом, более скрупулезным анализом физической структуры явления и т. д.), тем самым усложняя модель. Помыслы о библиотеке ограничиваются, увы, пока результатами этой монографии, а их желается много больше, для чего потребуются усилия всех, кто заинтересуется нашим подходом. Почва подготовлена, и методы теории, алгоритмические по своей сути, допускают привлечение ЭВМ.

История этой теории такова. Ее источником стала неудовлетворенность, развившаяся у автора от попыток использования для инженерно-исследовательских задач сначала инвариантных и непараметрических методов [3—10], затем робастных [11—13] ([12] содержит обзор, включающий некоторые работы автора), и вытекающее отсюда естественное желание искать что-то новое. «Забуксовал», так и не раскрывшись в полной мере, моментный подход; причину мы видим в близости его (см. рис. В.2) к предлагаемым здесь неклассическим интервально-статистическим методам. Не очень вписалась в классические методы и потому не получила должного распространения также теория субъективных вероятностей [14]. В отход вообще от вероятностей двинулась теория нечетких множеств Заде [15, 18]. Где-то стороной развивался интервальный анализ [16]. Не обрела заслуженную автономию теория обобщенных чебышевских неравенств [17]. На подготовленной этими исследованиями почве родилась идея, послужившая стержнем монографии: так выбрать фундамент, чтобы с единой платформы охватить все перечисленные нами направления с целью не только увидеть их в новом свете, но и значительно расширить возможности для приложений (распространение новой идеологии на интеграл можно найти в [19]).

Чтение настоящей книги, наверно, потребует от читателя большого терпения из-за отсутствия классических аналогов. Помощь могут оказать заключения, раскрывающие краткое содержание глав, связывающие их идейной канвой.

Книга писалась на кафедре вычислительной математики МЭИС. Рассчитана на инженеров-исследователей, аспирантов и студентов с соответствующей теоретической подготовкой.

Автор считает приятным долгом выразить глубокое признание всем тем, кто так или иначе способствовал становлению данной теории и выходу в свет книги. Ввиду новизны материала не исключаются огрехи, вину за которые автор берет на себя.

Глава 1.

ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

1.1. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И СРЕДНИЕ

Пространство исходов. Мы живем в мире случайностей, в окружении непредвиденных действий и непредсказуемых до конца фактов. Корни случайностей разнообразны, они берут начало и от физических эффектов типа дробового шума, и от невозможности абсолютного предугадания течения процесса или поведения живого организма (в частности, индивида), и от нашего незнания (или нежелания знать) результата предстоящего (прошедшего) эксперимента и т. д. И как следствие, оказывается, что что-то может произойти, а может и нет, случиться или не случиться, быть или не быть. Эта неясность охватывается категорией случайности. Наша цель — ее описать.

Формально под *случайным явлением* понимается совокупность взаимно исключающих друг друга исходов, называемых *элементарными*, один из которых обязан произойти, но неизвестно какой.

Например, если бросается монета один раз, результатом будет герб Γ (орел) или решка P ; если два раза, то элементарных исходов будет либо три (два герба $\Gamma\Gamma$, две решки PP и разной значимости), либо четыре (при разной значимости учитывается порядок следования ΓP или $P\Gamma$), как мы этого захотим. При бросании точки на числовую прямую \mathcal{X} результатом будет число (случайная величина), а для случайного процесса, пусть шума, — реализация $x(t)$ как функция времени t .

Совокупность всех элементарных исходов формально есть некоторое абстрактное множество \mathcal{X} , называемое *пространством элементарных исходов*, тогда как любой из элементарных исходов — это точка x этого пространства, т. е. $x \in \mathcal{X}$. Вообще подмножество \mathcal{X} , обозначаемое заглавной буквой $A \subset \mathcal{X}$, называется *случайным событием*; оно произойдет, если выпадет любой входящий в него элементарный исход x .

Замечания. 1. Данное нами определение совпадает с классическим в плане введения пространства элементарных исходов \mathcal{X} , но не связывает случайность с вероятностями, и в этом смысле шире.

2. Может показаться, что введением пространства \mathcal{X} и привязкой к нему мы как-то сузили класс охватываемых случайностей. На самом деле, пространство \mathcal{X} есть элемент создаваемой нами математической модели, находится в наших руках и его можно делать сколь хотим широким, включая мыслимые и даже немислимые исходы, если только это представляется удобным. Например (как это часто предлагают студенты), при бросании

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозв М. Теория вероятностей/Пер. с англ. под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: ИЛ, 1962. — 719 с.
2. Уиттл П. Вероятность/Пер. с англ. под ред. В. В. Сазонова. — М.: Наука, 1982. — 287 с.
3. Леман Э. Проверка статистических гипотез/Пер. с англ. под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Наука, 1964. — 498 с.
4. Закс Ш. Теория статистических выводов/Пер. с англ. под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Мир, 1975. — 776 с.
5. Wald A. Statistical Decision Functions — N. Y.: Wily, 1950.
6. Тарасенко Ф. П. Непараметрическая статистика. — Томск: Изд-во Томского университета, 1976. — 291 с.
7. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев/Пер. с англ. под ред. Л. И. Большева. — М.: ФМЛ, 1971. — 375 с.
8. Кузнецов В. П. Некоторые обобщения ранговых критериев//Мат. статистика и ее прилож.: Труды СФТИ. — Томск, 1974. — Вып. 6. — С. 70—108.
9. Кузнецов В. П. Инвариантность решений по отношению к мешающим параметрам//Проблемы передачи информации. — 1971. — № 4. — С. 36—44.
10. Кузнецов В. П. Инвариантность решений по методу максимального правдоподобия по отношению к мешающим параметрам//Проблемы передачи информации. — 1972. — № 3. — С. 38—47.
11. Хьюбер П. Робастность в статистике/Пер. с англ. под ред. И. Г. Журбенко. — М.: Мир, 1984. — 303 с.
12. Кассам С., Пур Г. Робастные методы обработки сигналов//ТИИЭР. — 1985. — Т. 73. — № 3. — С. 54—110.
13. Кузнецов В. П. Минимаксные критерии при ограниченных семействах плотностей распределения//Теория вероятностей и ее применения. — 1982. — Вып. 2. — С. 286—295.
14. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения/Пер. с англ. под ред. Ю. В. Линника. — М.: Мир, 1974. — 491 с.
15. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применения. — М.: Мир, 1976. — 168 с.
16. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
17. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике/Пер. с англ. под ред. С. М. Ермакова. — М.: Наука, 1976. — 567 с.
18. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений/А. Н. Борисов, А. В. Алексеев и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.
19. Кузнецов В. П. Интервальная мера и интеграл//Численный анализ и задачи интерпретации экспериментов: Межвузов. сборник. — Красноярск, 1987. — С. 75—95.
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
21. Кузнецов В. П. Интервальные модели вероятностей //Мат. статист. и ее прилож.: Труды СФТИ. — Томск. — 1986. — Вып. 10. — С. 128—151.
22. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 399 с.
23. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
24. Кульбак С. Теория информации и статистика/Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Наука, 1967. — 408 с.
25. Ван дер Варден Б. Математическая статистика. — М.: ИЛ, 1960. — 518 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адаптация 335
Аксиомы 15
— интервальных вероятностей 49, 50
— обращения 16
— переноса 15
— полуаддитивности 16
— сохранения порядка 15
— средних 15
Алгебры событий 44
— — изоморфные 74
— — счетные (сигма-алгебры) 45, 46, 51, 55
Арифметика интервальная 82
— размытая 91
Белый шум 188, 192
Вероятности 12
— интервальные 13
— относительные 49
— ошибок 204, 205
— — весовые суммы 276
— — интегральные 305
— — истинные 332
— — первого и второго рода 276
— — прикидочные 293
— — расчетные 332
— — совокупные 307
— первичные 35, 38, 40, 45, 109, 124
— правильных решений 307
— превышений (выбросов) 22, 163, 282
— размытые 90
— согласованные 34
— точные 12, 43
— условные 64, 65
Вершины модели 32, 56, 66, 81
Гипотеза нулевая 275
— альтернативная 275
Группы преобразований 214, 236, 281
Дискретизация 164
Дисперсия с. в. 58, 123, 266, 335
Доверительные модели *см.* СИМ
— интервалы 198, 227, 239, 247
Допредельная проблема 141
Допредельные неравенства 140, 147
Достаточность глобальная 207
— класса правил 207
— — — проверки гипотез 277
— — — различия гипотез 307
— — — расплывчатого оценивания 233
— множества решений 209
— набора признаков 211
— преобразований 210
— специальная 207, 232, 277
Задача надежностного синтеза 319
— проверки гипотез 276
— — — смежная 276
— различия гипотез 307
— расплывчатого оценивания 230
— статистическая 204
Закон больших чисел 132
— — — неустойчивый 135
— — — устойчивый 133
Измеримость 43
Изображения наблюдений 87
— признаков 84
— событий 73
— точек 73
ИМ (интервальные модели) *см.* модели интервальные
Инвариант к группе 214
— — — максимальный 215
Интервал корреляции процесса 165
ИРВ (интервальные распределения вероятностей) *см.* распределения вероятностей интервальные
Квантование 165
Кольцо событий 44
Ковариационные границы 173, 190
— функция 173
— — однородные 180
Корреляционная матрица
— — неточная 254, 291, 315
— — точная 221, 253, 289, 309
— функция 24, 163
— — наименее благоприятная 254, 255
Корреляционные свойства 170
Коэффициент пессимизма 204
Линдберга-Феллера условие 153
Мера 42
Мера-длина 45
Модели 14, 317
— интервальные (ИМ) 16
— — абстрактно-условные 69
— — включение 29, 68, 80, 94, 122
— — голье 24, 29, 32, 67, 80, 94, 104, 198, 199
— — индикаторные 24, 67, 69, 82, 85, 135

- — моментные 62
- — объединения 31, 56, 68, 80, 94, 110, 179, 182, 234, 319, 320
- — пересечения 31, 68, 81, 94, 179, 182
- — переходные 78, 170, 197
- — предельные 37, 45, 51
- — простые 52
- — процесса 162
- — пустые 30
- — разложимые 96
- — размытые 90
- — совместные 92
- — стандартные 58
- — условные 63
- — частные 93
- статистические интервальные *см.* СИМ
- Модифицированная формула продолжения 25
- Моменты начальные 27, 139, 163, 256, 268
- — абсолютные 27, 137
- — центральные 58, 124, 145
- Мощность случайной величины 21, 266
- процесса 24, 163
- средняя 244, 283
- Мультипликативность интервальная 82, 106
- Надежность доверительной модели 323
- — — оптимальная 332
- Надмодель 322
- Независимое произведение моделей *см.* произведение моделей
- Независимость последовательности с. в. 125
- явлений 106
- Нековариантность алгебр событий 116
- классов признаков 115
- признаков 108
- случайных величин 115
- элементарных исходов 113
- Некоррелированность 115, 126, 220, 249, 251, 268, 290
- Неравенства 129
- Нормальная с. в. *см.* случайная величина нормальная
- Область существования средних 14
- — — предельная 37
- Оболочка линейная 26
- полулинейная 18, 26
- Образ признака 75
- события 73
- Обучающие испытания 321
- Отображения *см.* преобразования
- Оценки
- детерминированные 217, 218
- расплывчатые (доверительные) 228, 292
- — амплитуды сигнала 253, 254
- — вероятностей 324
- — дисперсии нормального распределения 240
- — интервальные 198, 227, 247
- — контрастные 246
- — масштаба 264
- — мощности 267
- — оптимальные 230
- — регрессии 239, 247, 252
- — сдвига 244, 249, 251, 335
- — совместные 329
- — степенного типа 256
- Ошибки *см.* вероятности ошибок
- Параметры задающие 319
- мешающие 199
- нормировки 266
- подчиняющие 101
- стационарные 127
- Первичный набор 18
- Плотность вероятностей 60, 70, 123, 200, 239, 296
- — апостериорная 231
- — интервальная 207, 297, 304
- — наименее благоприятная 298
- — совместная 207, 231
- — переходная 85
- — частная 231
- формальная 61, 295, 296
- Подобие ИМ 77 (*см.* преобразования подобия)
- — случайное 86
- ИРВ 47
- Полуаддитивность 16, 34
- Последовательности *см.* случайные последовательности
- Потери
- дельта 202, 218
- квадратичные 202, 220
- составные 202
- Правила
- взвешенного правдоподобия 219
- детерминированные 217, 308
- квазиоптимальные 219
- контрастные 201, 276, 309
- минимаксные 205
- оптимальные 205
- — асимптотически 261
- — при оптимизме 234, 302
- — при полуоптимизме 206
- оценивания *см.* оценки
- проверки гипотез 277
- — — асимптотические 293
- — — контрастные 276, 288
- — — о значении параметра 301
- — — оптимальные 276
- — — равномерно оптимальные 276

- — рандомизированные 275
- — уровня α 303
- различения гипотез 306
- — — детерминированные 308
- — — оптимальные 277, 309
- раоплывчатые см. оценки доверительные
- решающие 202
- эквивариантные 237
- уровня α 228
- Предельные теоремы 145, 148, 150, 152, 153, 157
- Представление моделей 52
 - — объединениями 54, 199
 - — пересечениями 31
 - — функциональные 59, 199, 212, 234
 - — последовательности аддитивно-мультипликативные 154
 - — рекуррентные 128
 - — процесса аддитивные 167
 - — линейные 166
 - — мультипликативные 167
 - — подчиненно-аддитивные 168, 173
 - — расширенно-аддитивные 169, 174
 - — свободно-аддитивные 169
 - — функциональные 166
- Преобразования 72
 - детерминированные 73, 75, 76, 122
 - изоморфные 74, 86
 - индикаторные 82, 85
 - линейные 188
 - моделей 75
 - нелинейные безынерционные 24, 179
 - признаков 58, 74
 - подобия 77, 86, 164, 165, 210, 215
 - простые 83, 85
 - случайные 78
 - совместные 236
 - частные 236
 - числовые 211
 - Фурье 184
- Признаки 10
 - вторичные 18
 - гармонические 22, 123, 139, 162
 - гибридные 162
 - дельта 10, 96
 - измеримые 43, 55, 69, 117
 - инвариантные к группе преобразований 215
 - индикаторные 10, 22, 162
 - квадратичные 138, 161, 263
 - нековариированные 108
 - линейные 138, 161
 - определяющие модель 30
 - первичные 18
 - представимые 75
 - случайных величин 21
- — процессов 24, 160
- — совместные 92
- — стационарные 127
- — степенные 27, 139
- — центрированные 25
- — частные 92
- — экспоненциальные 139, 157
- Проверка гипотез см. правила проверки гипотез
- Полулинейность класса признаков 15
- Продолжение вероятностей 35
 - — средних 19
 - — модифицированная формула 25
 - — предельное 36
- Произведение моделей 95, 213
 - — независимое 109, 117, 199
 - — подчиненное 101
 - — свободное 102, 109
- Пространство предметное 87
 - — элементарных исходов 9
- Процессы 160
 - — белый шум 192
 - — второго порядка 171, 183
 - — непрерывные 160, 165
 - — ограниченные 160, 165
 - — сугубо 169
 - — однородные 178, 190
 - — в широком смысле 180
 - — частично 179
 - — первого порядка 180, 183
 - — скв-непрерывные 177, 186
 - — спектральные 187
 - — стационарные 181
 - — в широком смысле 184, 187, 191
 - — частично 181
 - — узкополосные 192
- Разложения процессов по базису 175
 - — спектральные (в ряды Фурье) 184
- Размах оценки 256
- Размерности моделей 21, 28
- Рандомизация 275
- Распределения вероятностей
 - — интервальные (ИРВ) 35
 - — — конечно-аддитивные 38, 77, 219
 - — — счетно-аддитивные 41
 - — — точные (классические) 43, 169
 - — — гибридные 51
 - — — конечно-аддитивные 38, 44, 50
 - — — Коши 51
 - — — наименее и наиболее благоприятные 296
 - — — равномерные 45, 51
 - — — совместные 111
 - — — счетно-аддитивные 45, 51, 55
 - — — условные 64

— — — хи-квадрат 240, 242, 328

— — — частные 111

Расширение моделей 30

Решающие правила *см.* правила

Решения 201

— индикаторные 201

— интервальные 201

— контрастные 201

— нейтральные 306

Риск 228

— истинный 333

— составной 230, 233

— средний 203

Свободное произведение моделей *см.*
произведение моделей

Свойства

— вероятностей интервальных 33

— — точных 44

— независимого произведения 110

— независимости 107

— средних 16, 17

— операций объединения и пересечения 32

— условных интервальных моделей
67

Семейства моделей 55, 212

— векторов вероятностей 27, 66, 111

— плотностей 200, 207, 297, 304

— распределений 48, 55, 81, 112, 198,
200, 220

— собственные *см.* собственные семейства

Сечения моделей 52, 69, 136

— — вероятностями 54, 64

— — задающие 56

СИМ (статистические интервальные
модели) 197

— доверительные 323

— инвариантные 215, 280

— неразложимые 197

— подобные 210

— разложимые 197, 217, 234

— размытые 333

— робастные 200, 297

— симметричные 215, 280

— эквивариантные 237

Случайные величины 21, 121

— — дескриптивные 130

— — дискретные 21, 121

— — непрерывные 121

— — нормальные 123, 145, 153, 240,
259

— — с интервальными средним и
дисперсией 124, 154

— — стандартные 123

— — ограниченные 121

— — симметричные 122, 143, 158,
258, 293

— — центрированные 58, 133

— — последовательности 125

— — дескриптивные 131

— — зависимые 128

— — независимые 125, 137, 141, 147,
262, 264, 322

— — нековариационные 126

— — некоррелированные 126, 248,
249, 251, 258, 268

— — однородные 126, 141, 249, 258

— — свободные 126

— — стационарные 127, 322, 324

Смежная задача проверки гипотез
276

Собственные семейства ковариаций
172, 189, 223

— — средних 168, 172, 189

События 9

— вторичные 38

— нечеткие 10, 87

— первичные 35

— элементарные 9

Спектры энергетические 186, 191, 225,
290

Спектральные коэффициенты 184

— двойники 186, 290

— процессы 187

Среднее арифметическое 133

Среднеквадратическое *см.* мощность

Средние (статистические) 13

— абсолютные 139

— верхние 13

— гармонические 22, 124, 140, 261

— — абсолютные 140

— интервальные 13

— несогласованные 20

— нижние 13

— первичные 18

— — непротиворечивые 18

— признаков 12

— процессов 163

— размытые 89

— случайных величин 21, 22, 58, 122

— согласованные 16, 19, 20

— точные 12, 13

— условные 65, 104

Срезы 89, 334

Статистические интервальные моде-
ли *см.* СИМ

Стационарность 127, 128, 181

Суждения нечеткие 88

Сходимость ИМ 130

— — случайных величин 131

— — в среднеквадратическом 131

— — в среднем 137

— — по вероятности 137

— — почти всюду 137

Теоремы

— о представлении ИМ 54

— продолжения 19

— разложимости 97

— факторизации 213
— характеристики нормальной с. в.
124
Универсальный класс признаков 139
Уровень 228, 276
Фильтр однородный 190
Фильтрация линейная 220
Функция
— Лапласа 123, 240, 259, 329
— инвариантная 214
— распределения интервальная 46
— — доверительная 330
Фурье ряды и преобразования 184
Цена задачи 205

Шкалы расплывчатости оценок 229
— — — взвешенная 229, 231
— — — интегральная 229
— — — обобщенная 229, 232
Штраф за расплывчатость 230
Энергетические спектры см. спектры энергетические
Явления случайные 9
— — — независимые 106, 115
— — — подчиненно 112
— — — свободные 115
— — — статистически неустойчивые 12
— — — статистически устойчивые 12

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Введение</i>	3
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ	9
Глава 1. Описание случайных явлений	9
1.1. Интервальные вероятности и средние	9
Пространство исходов (9). Признаки явления (10). Средние значения признаков (11). Интервальные средние и вероятности (13). Математическая модель явления (14). Аксиоматика (15). Определение интервальной модели средних, основные свойства (16)	
1.2. Продолжение первичных средних	17
Вступление (17). Первичные признаки и средние (18). Теорема продолжения и согласования средних (19). Согласованные первичные средние (20). Признаки случайных величин (21). Признаки случайных процессов (24). Голая модель (24). Модифицированная формула продолжения (24). Дополнения (25)	
1.3. Отношения между интервальными моделями	27
Геометрическая иллюстрация ИМ (27). Обсуждение (29). Иерархия моделей (29). Пересечение ИМ (31). Объединение ИМ (31). Свойства операций (32). Дополнения (33)	
1.4. Интервальные распределения вероятностей	33
Свойства интервальных вероятностей (33). Продолжение первичных вероятностей (35). Предельное продолжение средних (36). Иллюстрация ИРВ (37). Конечно-аддитивные ИРВ (38). Счетно-аддитивные ИРВ (40). Обобщения (42). Точные распределения вероятностей (43). Интервальные функции распределения (46). Подобие ИРВ (47). Семейства распределений (48). Относительные вероятности и средние (49). Дополнения (49)	
1.5. Представления моделей	52
Предисловие (52). Сечения модели (52). Свойства сечений (53). Теорема о представлении ИМ (54). Определение ИМ задающими сечениями (56). Представление через стандартную ИМ (58). Функциональные представления (59). Плотность (59). Дополнения (62)	
1.6. Условные интервальные модели	63
Постановка проблемы (63). Определение условной интервальной модели (64). Расчет условных моделей через вершины (66). Некоторые свойства условных интервальных моделей (67). О восстановлении безусловной модели по условным (68). Абстрактно-условные модели (69)	
1.7. Заключение	71
Глава 2. Совместный анализ	72
2.1. Детерминированные преобразования исходов	72
Отображения (72). Преобразования признаков (74). Расчет средних (75). Подобие моделей (77)	
2.2. Случайные преобразования	78
Переходные модели (78). Преобразования моделей (78). Свойства преобразований модели (80). Индикаторные преобразования, интервальная арифметика (82). Простые преобразования (83). Дополнения (85)	
2.3. Нечеткие события и размытые вероятности	87
Наблюдения и их изображения (87). Размытые вероятности и средние (88). Размытые действия (91)	

2.4. Совместные интервальные модели	91
Совместные и частные интервальные модели (91). Представление совместных моделей случайными преобразованиями (95). Восстановление сомножителей разложимой модели (96). Разложимость совместной модели (97). Первичные средние разложимых ИМ (98). Подчиненные произведения (101). Свободные произведения (102). Дополнения (104).	
2.5. Независимость	105
Определение независимости (105). Свойства независимости (107). Независимое произведение (108). Независимые произведения на дискретных пространствах исходов (111). Геометрическая иллюстрация независимости (113). Нековариированность случайных величин (114). Независимость, свобода, нековариированность (115). Дополнения (117)	
2.6. Заключение	119
Глава 3. Случайные величины, последовательности, суммы	121
3.1. Случайные величины, последовательности	121
Определения (121). Детерминированные преобразования (122). Нормальная случайная величина (123). Случайные последовательности (125). Однородность и стационарность последовательности (126). Зависимые последовательности (128)	
3.2. Сходимости	129
Неравенства для случайных величин (129). Сходимость моделей (130). Сходимость случайных величин и сходимость их моделей (131). Сходимость среднего арифметического, закон больших чисел (132). Закон больших чисел для неустойчивых последовательностей (135). Дополнения (136)	
3.3. Допредельная и предельная проблемы	137
Аппроксимация модели суммы независимых с.в. (137). Гармоническая аппроксимация (139). Допредельная проблема, однородный случай (141). Введение в предельную проблему (144). Дополнение (146)	
3.4. Предельные модели сумм общего вида	147
Центральные допредельные неравенства (147). Первая ослабленная предельная теорема (148). Вторая ослабленная предельная теорема (149). Третья ослабленная предельная теорема (152). Центральная теорема нормальной сходимости (152). Интервальная нормальная сходимость (154). Дополнения (156)	
3.5. Заключение	158
Глава 4. Случайные процессы	159
4.1. Описания случайных процессов	159
Принципы описаний (159). Реализации и признаки (160). Модель процесса (162). Характерные черты процессов (165). Дробление процесса на составляющие (166). Функциональные представления (166). Различные аддитивные представления (167). Дополнения (169)	
4.2. Корреляционные свойства	170
Процессы второго порядка (170). Представление процессов второго порядка семействами средних и ковариационных функций (172). Интервальные ковариации и корреляции (173). Разложение процесса по базису (175)	
4.3. Однородные и стационарные процессы	178
Однородные процессы (178). Стационарные процессы (181). Спектральные двойники процессов (184). Спектральные процессы (186)	
4.4. Линейные преобразования процесса	188
Гладкость преобразований и непрерывность процессов (188). Расчет выхода фильтра (188). Линейное преобразование и представление стационарного процесса (190). Узкополосные процессы (192)	

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ	195
Глава 5. Теория принятия решений	195
5.1. Статистические модели	195
Что такое математическая статистика? (195). Статистические интервальные модели (197). Функциональные представления наблюдений (199). Модели с мешающими параметрами (199). Робастные модели (199)	
5.2. Оптимальные правила	200
Расплывчатые решения и решающие правила (200). Потери (202). Риск (203). Статистическая задача (204). Оптимальность и пессимизм (205). Проблема достаточности (207). Достаточность и функция потерь (208)	
5.3. Достаточная редукция наблюдений	209
Теорема о представимости (209). Первичные признаки и достаточность (211). Достаточные преобразования и факторизация (212)	
5.4. Редукция наблюдений и инвариантность	214
Инвариантные модели (214). Симметрия, инвариантность и достаточность (215)	
5.5. Детерминированные решения и фильтрация	217
Общие соображения (217). Оптимальные решения при дельта-потерях (218). Постановка задачи линейной фильтрации сигнала при квадратичных потерях (220). Фильтрация сигнала с известными корреляционными свойствами из шума ограниченной мощности (221). Фильтрация при некоррелированном шуме (222). Корреляции задачи с погрешностями (223)	
5.6. Заключение	225
Глава 6. Расплывчатое оценивание	227
6.1. Общие вопросы	227
Ошибки правил (227). Расплывчатость, риск (228). Оптимальные расплывчатые правила при заданных совместных плотностях вероятностей (230). Достаточные классы расплывчатых правил (232). Оптимизм и достаточность (235). Симметрия статистических моделей и эквивариантность расплывчатых правил (236)	
6.2. Доверительное оценивание при заданных распределениях вероятностей флуктуаций	238
Предисловие (238). Оценка регрессии при известной плотности вероятностей (239). Доверительное оценивание дисперсии (241)	
6.3. Оценка параметров регрессии по энергетическим и корреляционным данным о флуктуациях	243
Обоснование (243). Оценка параметров сдвига при заданной мощности флуктуаций (244). Развитие энергетического типа оценивания (246). Оптимальная оценка параметра сдвига при однородных некоррелированных флуктуациях (249). Оценивание сдвига при неоднородных некоррелированных флуктуациях (251). Обобщения оценок (252). Оценка амплитуды сигнала при колебаниях его формы и неточных корреляциях шума (254)	
6.4. Оценивание параметра сдвига по моментам и гармоническим средним	256
Оценивание по моментам (256). Асимптотическая подстройка оценки степенного типа (258). Использование допредельных и предельных результатов (259). Синтез квазиоптимальных оценок по гармоническим средним (261). Об оценивании параметра сдвига при неоднородных флуктуациях (264)	
6.5. Доверительное оценивание параметра масштаба	264
Общие соображения (264). Оценивание параметра масштаба по заданной мощности флуктуаций (266). Оценивание параметра масштаба по некоррелированной выборке (268). Развитие проблемы (270)	
6.6. Заключение	272
	347

Глава 7. Проверка гипотез	274
7.1. Общие положения	274
Введение (274). Математическое оформление задачи (275). Основная теорема о достаточности (277). Комментарии (279). Инвариантность и симметрия (280). Обнаружение сигнала по вероятностям превышений (282)	
7.2. Корреляционная теория проверки гипотез	283
Получение оптимального правила при заданной средней мощности наблюдений (283). Общая форма правила (286). Проверка гипотез по заданным корреляциям (289). Неточные корреляции (291)	
7.3. Использование доверительных оценок для проверки гипотез	292
Описание способа (292). Асимптотическое правило при симметричных ограниченных флуктуациях (293). Проверка гипотез по мощности флуктуаций (294)	
7.4. Специальные методы синтеза правил	295
Задана формальная плотность альтернативы по отношению к гипотезе (295). Точные плотности вероятностей (296). Робастные методы (296). Проверка гипотез по заданным интервальным вероятностям (297). Робастный алгоритм при независимых наблюдениях (299)	
7.5. Проверка гипотез о заданном значении параметра	301
Формулировка задачи (301). О правилах при оптимизме (302). Равномерно оптимальные правила (303). Введение защитного диапазона (304). Минимизация интегральной ошибки (304). Использование доверительных оценок (305)	
7.6. Различение нескольких гипотез	306
Общие положения (306). Различение гипотез по заданным корреляциям (308). Оптимальное правило различения двух гипотез (310). Более двух гипотез (311). Неточно известные корреляции (315)	
7.7. Заключение	315
Глава 8. Надежный синтез	317
8.1. Общие вопросы синтеза моделей	317
Методология синтеза моделей (317). Постановка задачи (319). Стационаризация статистических параметров (321). Понятие доверительной модели (322)	
8.2. Построение доверительной модели на заданном наборе событий	324
Исходные положения (324). Модель наибольшего правдоподобия (326). Использование критерия хи-квадрат (328). Информационный критерий построения доверительной модели (328). Доверительные совместные оценки (329). Доверительная функция распределения (330)	
8.3. Согласованный синтез моделей и правил	331
Надежность моделей и истинные ошибки правил (331). Размытые доверительные модели и решения (333). Адаптация, надежное оценивание среднего при неизвестной дисперсии (335)	
8.4. Заключение	336
Список литературы	339
Предметный указатель	340

РЕКЛАМА

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ЭКСПЕРТ ИНТЕКС

ИНТЭКС — обучаемая при настройке и самообучающаяся в процессе работы экспертная система, оперирующая с размытыми знаниями в виде интервальных вероятностей. Последние вводятся пользователями (экспертами), а также оцениваются по результатам предыдущей работы (базе данных).

ИНТЭКС использует методы настоящей книги, позволяющие:

настраивать экспертную систему исключительно на имеющийся набор знаний в виде необходимого числа интервальных вероятностей, ширина интервалов которых отражает сомнения эксперта и конечность текущей базы данных;

формировать в виде интервальных условных вероятностей нечеткие правила логического вывода, в которых посылками служат гипотезы, а следствиями — возможные ситуации;

вычислять правила обратного вывода и по текущим ситуациям принимать решения;

использовать и объединять знания нескольких экспертов с учетом степени доверия к ним (ранжировки экспертов);

иметь свою пополняемую в процессе работы базу данных и использовать ее для получения необходимых статистических оценок, объединяемых со знаниями экспертов;

указывать, каких знаний для четкой работы системы не хватает;

вести пользователя по дереву запросов для получения промежуточных и окончательных выводов.

ИНТЭКС представляется в виде программного модуля для ЭВМ типа IBM PC/AT. Имеет дружественный интерфейс с пользователем (в том числе графический ввод и вывод интервальных вероятностей), для чего используются возможности языка продукционного программирования ДЕКЛ и естественно-языковой оболочки ДИЕС. Последняя позволяет достаточно свободное общение на естественном языке для ввода экспертных знаний и данных, вывода запросов и ответов. Цена версии 1.0 1900 руб.