В·П·КУЗНЕЦОВ

# ИНТЕРВАЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

«РАДИО И СВЯЗЬ»

УДК 621.391

**Кузнецов В. П.** Интервальные статистические модели. — М.: Радио и связь, 1991. — 352 с.: ил. **ISBN 5-256-00726-2**.

На базе новой аксиоматики развивается аппарат размытых математических моделей случайных явлений. Эти модели охватывают множественные, интервальные, нечеткие, и вообще любые неполные и отрывочные статистические описания характеристик явления, подходя к распределениям вероятностей как пределу изобилия данных. Сфера действия моделей простирается от неустойчивых, уникальных явлений до статистически устойчивых к повторам. В этих широких пределах освещаются и интерпретируются понятия интервальной вероятности и среднего, анализируются причинные связи, случайные преобразования, отношения зависимости и независимости, исследуются предельные законы, описываются случайные процессы и прочее другое.

Применительно к новым моделям вводятся критерии и разрабатываются универсальные методы синтеза оптимальных решающих правил (оценок, различения гипотез). Реализующие их устройства просты по структуре и способны эффективно работать в изменяющихся окружающих условиях, основанием для чего служит выбор надежных моделей. Доверие к моделям завоевывается вовлечением в них небольшого числа исходных вероятностей и средних, представленных в интервальном виде, отражающем нестабильность реальных явлений и дефицит исходных данных о нем. Рассматривается совместный синтез надежных моделей и решающих правил.

Для научных работников в области связи и управления; может быть полезна всем, кто интересуется математическими методами описания случайных явлений и задачами принятия решений при неопределенности.

Табл. 1. Ил. 37. Библиогр. 25 назв.

Рецензент: проф., докт. техн. наук Ф. П. ТАРАСЕНКО

**Редакция литературы по радиотехнике и электросвязи**

К $\frac{2303020000\text{-}040}{046(01)\text{-}91}$ 96-90

**ISBN 5-256-00726-2**

*Памяти матери*
*Кузнецовой Екатерины Ивановны*
*посвящается*

## ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей есть не что иное, как математический язык описания случайных явлений. Привычка, навык к этому языку мешают задуматься над существованием других, быть может более удобных форм и описаний, не входящих в словарь общеупотребительного языка, но делающих простыми ситуации, столь трудные в современном «произношении». Разработка нового математического языка шире общепризнанного и его использование составляет суть предлагаемой книги.

Символьный язык — средство описания и способ общения, но в то же время это инструмент, с помощью которого можно что-то исследовать, создавать, обрабатывать, конструировать, а для вероятностно-статистических методов — получать решающие правила, алгоритмы, оценки. Последние реализуются работающими устройствами. Критерием жизненности, приемлемости нового символьного аппарата служит его надежность, адекватность, способность делать то, чего ранее не было, обрабатывать то, что не обрабатывалось, упрощать то, что было сложным. Именно эта цель преследовалась при введении интервальных моделей и старательно претворялась при разработке методов.

Базу книги закладывают интервальные вероятностно-статистические категории, дающие универсальный способ описания как имеющихся знаний, так и их отсутствия, т. е. незнания; под эти категории подводится аксиоматика. Получается новая теория, непривычная, наверно, с первого взгляда, но охватывающая огромное разнообразие явлений как устойчивых, определяемых вероятностями, так и неустойчивых, невероятностных, с небольшим числом неполно исследованных закономерностей, наконец и вовсе с неизвестными свойствами.

Покажем, что зерно интервального подхода уже скрыто лежит в недрах современных вероятностных построений, задача — взрастить его (первая часть книги) и «собрать урожай» (вторая часть).

П р и м е р 1. Пусть модель случайной величины с исходами на числовой прямой $\mathscr{X}$ описывается плотностью распределения вероятностей. Интегрирование по ней дает вероятности $P(A)$ отрезков $A\in\mathscr{X}$ и их объединений (сумм) вплоть до счетных, составляющих набор $\mathscr{A}$ измеримых событий. В $\mathscr{A}$ не могут войти все события, как бы не размельчалось оно до борелевских и далее лебеговских множеств [1]. Всегда останутся так называемые неизмеримые события $B\notin\mathscr{A}$, для которых вероятности уже будут интервальные $\underline{P}(B)$, $\overline{P}(B)$, определенные как внутренняя и внешняя меры формулами: $\underline{P}(B)=\sup_{A:\,B\supset A\in\mathscr{A}} P(A)$, $\bar{P}(B)=\inf_{A:\,B\subset A\in\mathscr{A}} P(A)$. Точно так же и с математическими ожиданиями (средними статистическими) от случайных величин — функций $g(x)$, $x\in\mathscr{X}$. Они оказываются точными $Mg$ на классе $\mathscr{L}\mathscr{A}$ измеримых (интегрируемых) функций и станут интервальными, определенными формулами $\underline{M}f=\sup_{g:\,f\geqslant g\in\mathscr{L}\mathscr{A}} Mg$, $\bar{M}f=\inf_{g:\,f\leqslant g\in\mathscr{L}\mathscr{A}} Mg$ для остальных, неизмеримых $f$, которых, в общем, великое множество.

Пример позволяет раскрыть следующую конструкцию современных вероятностных построений. На ядре $\mathscr{A}$, представляющем набор событий пространства исходов $\mathscr{X}$, первичными заданы точные вероятности, образующие распределение вероятностей. Стремятся закладывать в $\mathscr{A}$ как можно большее число событий, чтобы при продолжении вероятностей, а оно осуществляется интегрированием по вероятностному распределению, получались точные математические ожидания (средние) $Mg$ у всех обозримых случайных величин. Последние определяются как измеримые функции $g(x)$, $x\in\mathscr{X}$ (обычно кусочно-непрерывные с возможными скачками первого рода) на исходах явления. Но вопреки стараниями сделать точными вероятности и средние для абсолютно всех событий и функций $f(x)$ не удается (кроме явлений с конечным и счетным числом исходов), так как все равно остаются называемые неизмеримыми события и функции, их много и из-за них при продолжении возникают интервальные вероятности и интервальные средние $\underline{M}f$, $\bar{M}f$. Это первое. А второе, что интервалы $\underline{M}f$, $\bar{M}f$ определены формально на всех $\forall f$, а точные значения $Mg$ есть частный случай интервальных при $\underline{M}g=\bar{M}g$ и их часть.

Можно возразить, зачем затрагивать практически бессмысленные неизмеримые функции? Ответ тот, что сужение ядра $\mathscr{A}$, вынуждаемое физической невозможностью измерять, да и вообще знать много вероятностей, существенно расширяет класс неизмеримых функций, делая средние неточными. А если допустить, что в ядре $\mathscr{A}$ вообще событий может быть мало, да еще первичные вероятности на $\mathscr{A}$ неточные, т. е. интервальные, то всюду как вероятности, так и средние станут интервальными. Проиллюстрируем их на примере семейства вероятностных распределений.

Пример 2. Пусть задано параметрическое семейство распределений вероятностей $P_\theta$, $\theta\in\Theta$. Тогда средние всех измеримых функций будут интервальными, определенными как нижняя и верхняя грани

$$\underline{M}g=\inf_{\theta\in\Theta} M_\theta g,\quad \bar{M}g=\sup_{\theta\in\Theta} M_\theta g.$$

Подстановка на место $g(x)$ индикаторных функций событий $A$ (равных 1, если аргумент $x$ принадлежит $A$, и 0, если не принадлежит) ведет к интервальным вероятностям $\underline{P}(A)$, $\bar{P}(A)$ как составной части средних.

В связи со вторым примером напрашивается другой резонный вопрос: а разве семейства распределений вероятностей не служат уже универсальной формой отражения любых неточных знаний о явлении? Так вот, оказывается, что интервально-статистический подход дает более удобную форму для этих целей, в которую вписываются, как частный случай, и распределения вероятностей, и их семейства со всем богатством возможностей, а также многое-многое другое.

Интервальная модель на пространстве исходов $\mathscr{X}$ определяется формально совокупностью интервалов средних $\underline{M}f$, $\overline{M}f$, $\mathbf{V}f$, связанных между собой аксиомами. Далее функции $f(x)$, $x \in \mathscr{X}$ называются признаками. Любую нашу модель можно задавать по стандартной схеме рис. В.1. Ядро модели формируется набором $\mathscr{G}$ признаков $g \in \mathscr{G}$, именуемых первичными, и указанием границ средних на них. Вероятности рассматриваются как составная часть средних. С $\mathscr{G}$ средние продолжаются на $\mathbf{V}f$, образуя собой модель.

Отличительными для новой теории являются четыре ключевые момента.

1. Лишение вероятностей привилегий для задания модели и уравнивание в правах с более емким понятием среднего статистического числовых признаков[1]. Это означает отказ от распределений вероятностей как необходимой части модели и от алгебры событий как обязательной атрибутики ядра. Это раскрепощает ядро $\mathscr{G}$ и саму модель.

2. Почему обязательно вероятности и средние должны быть точными? Это всегда идеальный случай. Реальный подход — считать их интервальными — мгновенно «развязывает руки». В самом деле, отрезок [0, 1] в качестве вероятности некоторого события означает полное отсутствие знания этой вероятности. И здесь не надо, что самое замечательное, задумываться о существовании точной вероятности, обязанной абсолютной статистической устойчивости явления. Пусть имеет место неустойчивость, характерная для многих приложений! Если неустойчивость не полная, а частичная, то приходим к интервальным вероятностям внутри [0, 1]. Наконец, если концы интервалов смыкаются, то получаются точные вероятности. Все сказанное переносится на средние, только областью их значений будут уже интервалы на всей оси чисел.


Рис. В.1. Структура интервальных моделей

[1] Попытка такого рода делалась в [2], но свелась лишь к другой расстановке акцентов в прежнем вероятностном языке.

3. Необычайная гибкость ядра $\mathcal{G}$ по форме и числу элементов и вольность задания на нем средних как в виде точных значений, так и интервальных или только одной из границ. Это «размораживает» структуру модели, позволяя в рамках единой конструкции с одной стороны универсально, а с другой (манипулируя составом $\mathcal{G}$) — крайне экономно вкладывать в модель лишь имеющиеся знания о явлении с поправками на их точность и с прицелом на простоту.

4. Средние с первичного ядра $\mathcal{G}$ продолжаются на все признаки $\forall f$ с помощью алгоритмических формул двойственности. Если изображать модель как тело, то формулы двойственности работают с его оболочкой, обходя множественное представление в виде семейств точек (распределений вероятностей, требующих громоздких формул интегрирования), «запрягая» в статистические проблемы дуальный подход.

Универсальность интервально-статистических моделей обеспечивается возможностью заключать в ядро почти любые по объему и форме знания о явлении. Взять процесс: если нет никаких данных о нем, то ядро пустое, а модель голая. Если стало известно среднее процесса, то это соответствует определенным признакам модели, формирующим грани ее тела. Если дополнительно дана средняя мощность, то это дополняет ядро еще одним признаком, дает ему еще одну грань. Если сюда добавить знания о вероятностях превышений, то состав ядра усложняется, модель усечется новыми гранями, сделается более точной; а если к тому же пополнить сведениями о корреляциях, то тем более, и т. д. Пределом знаний будет точка, т. е. вероятностная модель (число граней которой равно числу элементарных исходов). Возникает естественная иерархия от простого к сложному, как в живой природе при ее сотворении и эволюции. Сначала нет ничего, нет никаких знаний, и это соответствует самой простой модели. Любые сведения, какой бы размытый вид они ни обретали, формируют уже готовую худо-бедно работающую модель. По мере накопления сведений модель совершенствуется, усложняется. Наконец, если имеются точные данные о вероятностях событий, то получается вероятностная модель.

Связь моделей иллюстрируется рис. В.2, где стрелки указывают уровни совершенствования и усложнения моделей. Черные стрелки относятся к классическим моделям, где путь к приложениям повел от распределений вероятностей к их семействам все более сложного вида. Белые стрелки — к интервальным моделям, иерархическая система которых располагается вдоль дороги, тянущейся от нуля знаний к бесконечности ... навстречу классическому движению.

Двум гносеологически противоположным направлениям движения свойственны разные проблемы. В классическом подходе основная проблема — априорное незнание, неопределенность, вынуждающая усложнять модель переходом к семейству с целью облегчить «воз» из огромного числа вероятностей, нагружающий

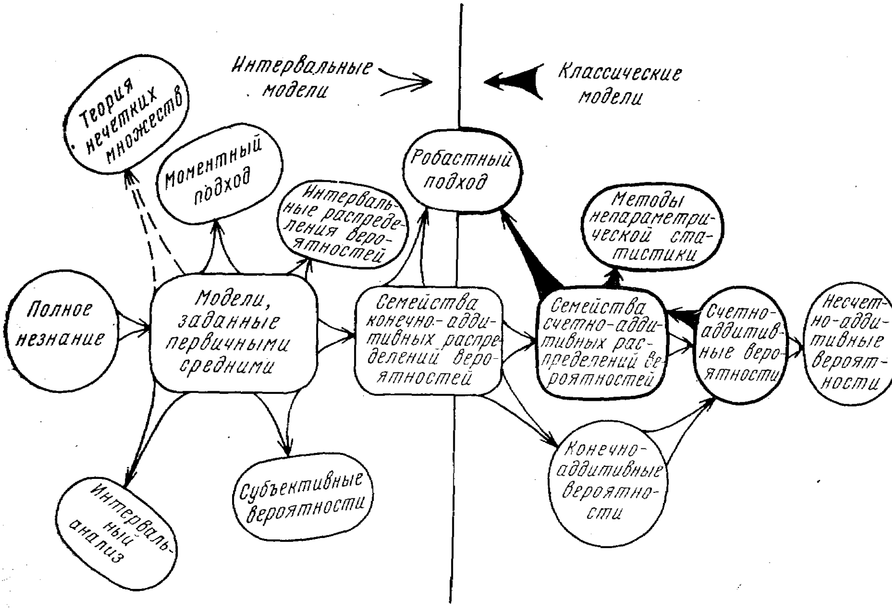


Рис. В.2. Иерархия моделей

современную модель. В нашем подходе «воз» заполняет постепенно: модели будут тем сложнее и точнее, чем больше знаний, и проблемы состоят в экономном их представлении, заключении в ядро, а если требуют упрощения, то отбрасывании всего несущественного, второстепенного.

Итак, в отличие от теории вероятностей, освещающей поточечную структуру моделей, исключающую иерархию по знаниям, мы будем мыслить модель ее внешними атрибутами, оболочкой. Знания вкладываем в грани, формируемые первичными средними, по их числу и составу модели усложняются, образуя иерархию.

Иерархия интервальных моделей переносится на получаемые из них оптимальные решающие правила. При малом числе исходных данных правила будут иметь плохие качественные характеристики, но зато устойчивы к внешним аномалиям, нестабильностям. При накоплении знаний о явлении качество повышается, правила, в общем, усложняются, становятся более избирательными к ситуации, так как настраиваются на одну или несколько из них. Здесь вроде бы качественным привилегиями обладают классические вероятностные модели, и только ими, казалось бы, надо пользоваться. Но увы, это самообман, так как необходимого для таких моделей багажа знаний почти всегда нет, а их весьма «вольный выбор» (тяготеющий к нормальному распределению в силу его относительной простоты) носит декларативный характер. Адекватные модели не должны вовлекать никаких других, кроме имеющихся проверенных знаний, всегда конечных, для надежности представленных в интервальной (размытой) доверительной форме. Это как раз та часть интервальных моделей, которая располагается на рис. В.2 слева от вертикальной линии. От них правилам будет передана по наследству надежность и простота.

Упорядоченность интервальных моделей по числу и составу данных позволяет помечтать о сводной библиотеке правил, в которой исследователь по имеющимся реальным данным о явлении смог бы отыскать модель и соответствующее ей оптимальное правило и по тому, устраивает его качество или нет, уже решал бы, нужно ли уточнять имеющиеся или собирать дополнительные сведения (экспериментом, более скурпулезным анализом физической структуры явления и т. д.), тем самым усложняя модель. Помыслы о библиотеке ограничиваются, увы, пока результатами этой монографии, а их желается много больше, для чего потребуются усилия всех, кто заинтересуется нашим подходом. Почва подготовлена, и методы теории, алгоритмические по своей сути, допускают привлечение ЭВМ.

История этой теории такова. Ее источником стала неудовлетворенность, развившаяся у автора от попыток использования для инженерно-исследовательских задач сначала инвариантных и непараметрических методов [3—10], затем робастных [11—13] ([12] содержит обзор, включающий некоторые работы автора), и вытекающее отсюда естественное желание искать что-то новое. «Забуксовал», так и не раскрывшись в полной мере, моментный подход; причину мы видим в близости его (см. рис. В.2) к предлагаемым здесь неклассическим интервально-статистическим методам. Не очень вписалась в классические методы и потому не получила должного распространения также теория субъективных вероятностей [14]. В отход вообще от вероятностей двинулась теория нечетких множеств Заде [15, 18]. Где-то стороной развивался интервальный анализ [16]. Не обрела заслуженную автономию теория обобщенных чебышевских неравенств [17]. На подготовленной этими исследованиями почве родилась идея, послужившая стержнем монографии: так выбрать фундамент, чтобы с единой платформы охватить все перечисленные нами направления с целью не только увидеть их в новом свете, но и значительно расширить возможности для приложений (распространение новой идеологии на интеграл можно найти в [19]).

Чтение настоящей книги, наверно, потребует от читателя большого терпения из-за отсутствия классических аналогов. Помощь могут оказать заключения, раскрывающие краткое содержание глав, связывающие их идейной канвой.

Книга писалась на кафедре вычислительной математики МЭИС. Рассчитана на инженеров-исследователей, аспирантов и студентов с соответствующей теоретической подготовкой.

Автор считает приятным долгом выразить глубокое признание всем тем, кто так или иначе способствовал становлению данной теории и выходу в свет книги. Ввиду новизны материала не исключаются огрехи, вину за которые автор берет на себя.

# Глава 1.
# ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

## 1.1. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И СРЕДНИЕ

**Пространство исходов.** Мы живем в мире случайностей, в окружении непредвиденных действий и непредсказуемых до конца фактов. Корни случайностей разнообразны, они берут начало и от физических эффектов типа дробового шума, и от невозможности абсолютного предугадания течения процесса или поведения живого организма (в частности, индивида), и от нашего незнания (или нежелания знать) результата предстоящего (прошедшего) эксперимента и т. д. И как следствие, оказывается, что что-то может произойти, а может и нет, случиться или не случиться, быть или не быть. Эта неясность охватывается категорией случайности. Наша цель — ее описать.

Формально под *случайным явлением* понимается совокупность взаимно исключающих друг друга исходов, называемых *элементарными*, один из которых обязан произойти, но неизвестно какой.

Например, если бросается монета один раз, результатом будет герб Г (орел) или решка Р; если два раза, то элементарных исходов будет либо три (два герба ГГ, две решки РР и разной значимости), либо четыре (при разной значимости учитывается порядок следования ГР или РГ), как мы этого захотим. При бросании точки на числовую прямую $\mathscr{R}$ результатом будет число (случайная величина), а для случайного процесса, пусть шума, — реализация $x(t)$ как функция времени $t$.

Совокупность всех элементарных исходов формально есть некоторое абстрактное множество $\mathscr{X}$, называемое *пространством элементарных исходов*, тогда как любой из элементарных исходов — это точка $x$ этого пространства, т. е. $x \in \mathscr{X}$. Вообще подмножество $\mathscr{X}$, обозначаемое заглавной буквой $A \subset \mathscr{X}$, называется *случайным событием*; оно произойдет, если выпадет любой входящий в него элементарный исход $x$.

Замечания. 1. Данное нами определение совпадает с классическим в плане введения пространства элементарных исходов $\mathscr{X}$, но не связывает случайность с вероятностями, и в этом смысле шире.

2. Может показаться, что введением пространства $\mathscr{X}$ и привязкой к нему мы как-то сузили класс охватываемых случайностей. На самом деле, пространство $\mathscr{X}$ есть элемент создаваемой нами математической модели, находится в наших руках и его можно делать сколь хотим широким, включая мыслимые и даже немыслимые исходы, если только это представляется удобным. Например (как это часто предлагают студенты), при бросании

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Лоэв М.** Теория вероятностей/Пер. с англ. под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: ИЛ, 1962. — 719 с.
2. **Уиттл П.** Вероятность/Пер. с англ. под ред. В. В. Сазонова. — М.: Наука, 1982. — 287 с.
3. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез/Пер. с англ. под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Наука, 1964. — 498 с.
4. **Закс Ш.** Теория статистических выводов/Пер. с англ. под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Мир, 1975. — 776 с.
5. **Wald A.** Statistical Decision Functions — N. Y.: Wily, 1950.
6. **Тарасенко Ф. П.** Непараметрическая статистика. — Томск: Изд-во Томского университета, 1976. — 291 с.
7. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев/Пер. с англ. под ред. Л. И. Большева. — М.: ФМЛ, 1971. — 375 с.
8. **Кузнецов В. П.** Некоторые обобщения ранговых критериев//Мат. статистика и ее прилож.: Труды СФТИ. — Томск. 1974. — Вып. 6. — С. 70—108.
9. **Кузнецов В. П.** Инвариантность решений по отношению к мешающим параметрам//Проблемы передачи информации. — 1971. — № 4. — С. 36—44.
10. **Кузнецов В. П.** Инвариантность решений по методу максимального правдоподобия по отношению к мешающим параметрам//Проблемы передачи информации. — 1972. — № 3. — С. 38—47.
11. **Хьюбер П.** Робастность в статистике/Пер. с англ. под ред. И. Г. Журбенко. — М.: Мир, 1984. — 303 с.
12. **Кассам С., Пур Г.** Робастные методы обработки сигналов//ТИИЭР. — 1985. — Т. 73. — № 3. — С. 54—110.
13. **Кузнецов В. П.** Минимаксные критерии при ограниченных семействах плотностей распределения//Теория вероятностей и ее применения. — 1982. — Вып. 2. — С. 286—295.
14. **Де Гроот М.** Оптимальные статистические решения/Пер. с англ. под ред. Ю. В. Линника. — М.: Мир, 1974. — 491 с.
15. **Заде Л.** Понятие лингвистической переменной и его применения. — М.: Мир, 1976. — 168 с.
16. **Шокин Ю. И.** Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
17. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике/Пер. с англ. под ред. С. М. Ермакова. — М.: Наука, 1976. — 567 с.
18. **Обработка** нечеткой информации в системах принятия решений/А. Н. Борисов, А. В. Алексеев и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.
19. **Кузнецов В. П.** Интервальная мера и интеграл//Численный анализ и задачи интерпретации экспериментов: Межвузов. сборник. — Красноярск, 1987. — С. 75—95.
20. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
21. **Кузнецов В. П.** Интервальные модели вероятностей //Мат. статист. и ее прилож.: Труды СФТИ. — Томск. — 1986. — Вып. 10. — С. 128—151.
22. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 399 с.
23. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
24. **Кульбак С.** Теория информации и статистика/Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Наука, 1967. — 408 с.
25. **Ван дер Варден Б.** Математическая статистика. — М.: ИЛ, 1960. — 518 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# РЕКЛАМА