Томский государственный университет

На правах рукописи

Чаусова Елена Владимировна

Динамические модели систем управления запасами с интервальной неопределенностью в данных

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель,
д.т.н., проф. В.В. Домбровский

Томск, 2003

Оглавление

Введение

Проблема управления запасами (inventory control problem) является одной из наиболее важных в организационном управлении. Запасы разного рода материальных ценностей возникают почти во всех звеньях системы производства - распределения - потребления. Под запасом подразумевается не только наличие некоторого товара или продукции на складе [14], но и производственные, транспортные, трудовые, информационные, водные ресурсы, финансовый капитал и т.д. Поэтому модели управления запасами описывают широкий круг задач оптимального планирования производственных, транспортных, информационных, финансовых, водохозяйственных, энергетических и других систем.

При дефиците запасов нарушается нормальный ход производства, срывается снабжение потребителей, что приводит к потере прибыли и репутации компании - штрафу за неудовлетворенный или отложенный спрос. При неоправданно высоком уровне запасов компания несет потери от омертвления капитала в запасах и замедления его оборачиваемости. В таких случаях "нет ничего лучше хорошей теории"(Л. Больцман), которая определяла бы оптимальные в определенном смысле уровни запасов, предлагала эффективные методы их создания и поддержания.

Возникновение теории управления запасами принято связывать с появившимися в конце XIX - начале XX века работами Ф. Эджуорта, Ф. Харриса и Р. Уилсона, в которых исследовалась простая оптимизационная модель для определения экономичного размера партии поставки (the economic lot size models) для складской системы с детерминированным стационарным спросом. Из ранних работ в этой области следует отметить книги Ю.И. Рыжикова [49], Г. Вагнера [8], Дж. Букана и Э. Кенигсберга, [7], Дж. Хедли и Т. Уайтина [52], Ф. Хэнссменна [54].

В них описаны подходы и методы оптимального управления запасами, которые приобрели характер классических результатов: формулы Уилсона для детерминированных моделей размера партии и их обобщения; управление запасами при случайном спросе с непрерывном и периодическим контролем уровня запасов; принцип оптимальности Р. Беллмана [6] в динамических моделях управления запасами; управление запасами при случайной задержке поставок и т.д.

В наиболее общем виде объектом исследования теории управления запасами можно считать изображенную на Рисунке 1 складскую систему [37], где штриховыми линиями обозначены информационные, а сплошными - материальные потоки.

Рисунок 1: Структура системы управления запасами

Системы управления запасами можно классифицировать по многим признакам:

- вид запасов (сырье, полуфабрикаты, готовая продукция);
- место хранения (производитель, потребитель, база снабжения);
- структура системы (изолированный склад, последовательная или иерархическая система складов, разомкнутая или замкнутая по спросу система);
- способ контроля уровня запасов (непрерывный, периодический);
- цели системы (стоимостные и надежностные критерии, многокритериальность);
- структура запасов (одно- или многономенклатурные запасы, взаимозаменяемость и дополняемость, изменения количества и качества запасов при хранении);

- характеристики спроса и поставок (стационарность, коррелированность, управляемость, устойчивость, случайность поставок);
- ограничения (на объем и номенклатуру запасов, на размеры партий поставок, пропускную способность склада, на надежность и экономические характеристики процесса снабжения);
- информационные характеристики (периодичность сбора данных, наблюдаемость спроса, полнота знаний о (стоимостных) коэффициентах потерь) и т.д.

Различные сочетания этих признаков определяют реальное наполнение блоков на Рисунке 1 и многообразие моделей управления запасами.

Модели управления запасами подразделяют на статические и динамические, одно- и многономенклатурные, с периодическим и непрерывным контролем уровня запасов, конечным и бесконечным периодом планирования, детерминированные и стохастические, стационарные и нестационарные, замкнутые и разомкнутые по спросу, со случайными поставками и временем поставок и другие [50].

Широкий класс систем управления запасами описывается динамическими сетевыми моделями. В качестве примера можно привести системы снабжения, производства-распределения, транспортные, информационные, водохозяйственные и энергетические системы, системы управления инвестициями и денежными потоками и т.д. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, возможно перерабатывая их, и планируют поставки извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы в узлах сети, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения. Проблеме оптимизации динамических потоков в сети посвящено большое количество работ (см., к примеру, [35, 88] и обширную библиографию к этим статьям).

В настоящее время в области методологии, аппарата и развития моделей теории управления запасами можно указать следующие основные тенденции:

- преимущественное развитие стохастических моделей и статистических методов управления запасами [17, 18, 37, 46, 47, 70, 72, 83];

- распространение адаптивного подхода и методов управления по неполным данным [12, 37, 71, 98–100];

- исследование игровых постановок задач управления запасами [117, 121];

- исследование многономенклатурных систем управления запасами с коррелированным спросом [36–38, 85, 87, 116];

- исследование систем управления запасами с частично наблюдаемым спросом и замкнутых по спросу систем [37],

- исследование иерархических систем управления запасами [82, 90, 91, 102, 118, 120].

Ю.И. Рыжиков в книге [48] отмечает, что "управление запасами, с одной стороны, имеет наибольшие возможности для практического применения и с другой - наиболее развитую теорию". Наряду с вероятностными методами и методами линейного программирования теория управления запасами активно использует аппарат теории автоматического управления [37, 42, 43]. Предлагаются алгоритмы управления запасами, разработанные на основе современных методов теории адаптации, идентификации, стохастической оптимизации, принципа максимума, динамического программирования, марковских процессов с доходами и т.д. Различные математические модели и методы теории управления запасами рассматриваются также в [41, 44, 92, 101, 112, 113].

Таким образом, современная теория позволяет оптимально (например, с точки зрения минимума затрат) управлять как детерминированными, так и стохастическими системами управления запасами. Однако, детерминированные модели не учитывают априорную неопределенность (в спросе, поставках, времени задержек и т.д.), свойственную реальным системам управления запасами. Вероятностные – требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы (факторов неопределенности). При этом, во многих случаях нет основания или недостаточно информации, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные (то есть адекватно описываемыми теоретико-вероятностными моделями), что делает неэффективным применение таких моделей при решении практических задач. Сложность получения численных результатов при работе со случайными величинами также снижает практическую ценность стохастических моделей управления запасами. Это приводит к необходимости учета неопределенности нестохастической (или, в общем случае, неизвестной) природы.

Интересный подход для динамических сетевых моделей, основанный на концепции "неизвестных, но ограниченных" воздействий [107] (unknown-but-bounded inputs), предлагается в работах Ф. Бланчини, Ф. Ринальди и В. Уковича [73–78]. В них рассматриваются динамические сетевые модели систем управления запасами в предположении, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству. Такой подход приводит к минимаксным игровым постановкам и решениям, обеспечивающим некоторый гарантированный результат в смысле заданного критерия. Авторы [73–78] используют аппарат теории множеств. Однако, теоретико-множественное представление результатов приводит к трудностям при проверке условий существования оптимальных стратегий управления и вычисления их параметров. Кроме того, предложенные в данных работах модели не учитывают возможное устаревание запаса в узлах сети (порча, естественная убыль, моральный износ и т.д.) и нестационарность спроса во времени, например, когда спрос имеет сезонный характер.

Проведенный анализ литературы и потребности практики подтверждают актуальность построения и исследования моделей с нестохастической неопределенностью в данных. Это, в свою очередь, обуславливает **актуальность** настоящей диссертационной работы, **целью** которой является:

1) построение и исследование моделей размера партии систем с непрерывным контролем в условиях нестохастической неопределенности спроса и поставок;

2) построение и исследование моделей размера партии систем с периодическим контролем в условиях нестохастической неопределенности спроса;

3) исследование динамических сетевых моделей систем управления запасами с нестохастической неопределенностью спроса, когда спрос имеет стационарный характер, с учетом устаревания запаса в узлах сети и задержек в поставках;

4) исследование динамических сетевых моделей систем управления запасами с нестохастической неопределенностью спроса, когда спрос имеет нестационарный характер, с учетом устаревания запаса в узлах сети.

В данной работе, для моделирования и оптимизации систем управления запасами с неопределенностью в данных предлагается использовать аппарат *интервального анализа*. Неопределенности в системе задаются интервалами, в границах которых неизвестные параметры произвольным образом принимают свои значения. Эти границы всегда можно оценить с достаточной степенью достоверности по статистическим данным и/или руководствуясь накопленным опытом и интуитивными предположениями.

Исторически интервальный анализ возник как средство учета ошибок вычислений и задач чувствительности. Среди работ в направлении доказательных, надежных вычислений (reliable, validated computing) можно назвать книги Р.Е. Мура [103], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1], С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [25] и другие. Однако идеи, положенные в основу интервального анализа, оказались гораздо шире. Выяснилось, что интервальный анализ позволяет эффективно решать задачи с интервальными неопределенностями в данных. В тех случаях, когда относительно факторов неопределенности неизвестно ничего, кроме их свойства быть ограниченными, интервальные подходы и модели более полно отражают характер неопределенности и отвечают широкому классу задач теории автоматического управления, исследования операций, теории принятия решений, теории идентификации и оценивания параметров и ряда смежных дисциплин.

Большой устойчивый спрос на решение подобных задач со стороны практиков привел к интенсивному развитию, как самой теории интервального анализа, так и ее приложений к прикладным практическим задачам. Ю.И. Шокин в книге [68] пишет, что "в последнее время наметились пути использования интервальных методов в задачах управления и экономики". А.П. Вощинин и Г.Р. Сотиров [11] отмечают, что интервальное представление факторов неопределенности "привлекает все большее внимание практиков". В этом же смысле высказываются и другие авторы [13, 27].

Современное состояние теории интервального анализа можно оценить по работам С.П. Шарого [60–64,67,108,111], А.В Лакеева [28,29,97], Е. Каухера [93], А. Ноймайера [104], и другим [26, 32–34, 40, 45, 59, 84, 95, 96, 114]. Предлагаемые интервальные подходы и методы нашли применение в области слежения, управления и стабилизации систем [15, 22, 24, 51, 53, 65, 66, 69, 109], транспортных задачах [5, 23] и финансовом анализе [2–4, 16], эконометрике [106] и других [30, 31, 39].

Таким образом, в тех случаях, когда невозможно вероятностное задание характеристик системы, интервальный анализ позволяет довольно просто описывать неопределенности в системе – в виде интервалов, и представляет богатый, достаточно удобный и адекватный математический аппарат для исследования таких систем.

Методы исследования

При выполнении диссертационной работы использовались понятия и методы теории интервального анализа, теории множеств, теории управления запасами, методы линейного и динамического программирования, имитационного моделирования.

Основные результаты, полученные в данной работе, следующие.

1) Разработан метод определения оптимальной стратегии управления для интервальной модели размера партии с непрерывным контролем. Показано, что в условиях неопределенного спроса при отсутствии дефицита нельзя применять периодическую стратегию управ-

ления. Обнаружено, что интервальные модели размера партии при пороговой стратегии управления позволяют избежать непрерывного контроля и отслеживать систему только в определенные периоды времени. Предложен вычислительный алгоритм определения оптимального управления системой.

2) Для интервальной модели размера партии с периодическим контролем получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления и оптимальной допустимой стратегии управления. Разработан вычислительный алгоритм построения оптимальной допустимой стратегии. Результаты обобщены на случай нестационарной интервальной неопределенности спроса, когда интервал возможных значений спроса меняется во времени.

3) Для динамической сетевой модели системы управления запасами с интервально заданным *стационарным* спросом получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, а также достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления.

4) Результаты обобщены на случаи динамических сетевых моделей с интервально заданным стационарным спросом при устаревании запаса в узлах сети и задержках в поставках.

5) Предложена динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным *нестационарным* спросом. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Результаты обобщены на случай устаревания запаса в узлах сети.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими аналитическими выкладками и результатами численных расчетов. Для интервальных моделей размера партии, в вырожденном случае (когда нижние и верхние границы интервалов неопределенности равны) получаются известные формулы для детерминированных моделей размера партии классической теории управления запасами.

Теоретическая и практическая ценность

Впервые предложено использовать методы интервального анализа для моделирования систем управления запасами с неопределенностью в данных. Исследованы и обоснованы математические модели динамических систем управления запасами с интервальной неопределенностью. Разработаны методы и алгоритмы управления такими системами.

Практическая ценность данной работы состоит в возможности применения полученных результатов для оптимизации реальных систем управления запасами различного вида.

Результаты диссертационной работы внедрены ООО "Международный центр технологии и торговли" и используются в учебном процессе на факультете прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета (акты о внедрении прилагаются).

Структура и объем работы

Настоящая диссертационная работа состоит из введения, основного текста, заключения и списка литературы. Основной текст разбит на 5 глав и содержит 3 таблицы и 15 рисунков. Список литературы включает 121 наименование. Общий объем работы – 145 страниц.

Содержание работы

Первая глава диссертации носит вспомогательный характер. В ней приведены основные сведения о классической интервальной арифметике и обобщенной интервальной арифметике Каухера.

Во **второй главе** рассматриваются модели однономенклатурных систем управления запасами с непрерывным контролем уровня запасов при интервальной неопределенности в спросе и поставках. С использованием аппарата интервальной арифметики Каухера предлагается метод расчета оптимальных параметров стратегии управления для интервальных моделей размера партии:

a) с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок и возможностью дефицита;

b) с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок при отсутствии дефицита;

c) с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками и возможностью дефицита;

d) с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками при отсутствии дефицита.

Рассматривается два вида стратегий:

- пороговая стратегия (s, Q), где заказ размера Q подается всякий раз, когда уровень запаса достигает порогового значения s;
- и периодическая стратегия (T, S), где пополнение запаса происходит через равные периоды времени T до предельного уровня запаса S.

Важным результатом является вывод о том, что интервальные модели размера партии с пороговой стратегией позволяют избежать непрерывного контроля и отслеживать систему только в определенные периоды времени. Показано также, что в условиях неопределенности при отсутствии дефицита нельзя применять периодическую стратегию управления. Полученные теоретические результаты подкреплены численными примерами.

В **третьей главе** рассматривается модель Однономенклатурной системы управления запасами с периодическим контролем уровня запасов, неопределенным интервально заданным спросом, мгновенными поставками, ограничениями на уровень запаса и величину заказана, и конечным периодом планирования. С привлечением интервальной арифметики Каухера определяются необходимые и достаточные условия существования допустимого управления и оптимальной допустимой стратегии управления. Разрабатывается вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии. Полученные результаты обобщаются на случай нестационарной интервальной неопределенности спроса, когда интервал возможных значений спроса меняется во времени. Приводятся численные расчеты.

Четвертая глава посвящена динамическим сетевым моделям систем управления запасами с интервально заданным стационарным спросом. С использованием аппарата интервальной арифметики Каухера определяются необходимые и достаточные условия существования допустимого управления. Доказывается теорема о виде оптимального допустимого уровня запаса. Определяются достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Оценивается скорость сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разрабатывается алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Кроме того, рассматриваются обобщения модели: модель с устареванием запаса в узлах сети и задержками в поставках. Приводятся результаты численных расчетов.

Предмет заключительной **пятой главы** диссертации – динамические сетевые модели систем управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом. В этой главе обобщаются результаты, полученные в Главе 4, на случай нестационарного спроса. Предполагается, что интервал возможных значений спроса меняется во времени (например, когда спрос имеет сезонные колебания). Показано, что учет нестационарности спроса приводит к уменьшению уровня запаса в системе и, следовательно, уменьшению затрат на его хранение. Численные расчеты подтверждают полученные теоретические результаты.

Таким образом, на защиту выносятся:

1) Метод определения оптимальных параметров стратегии управления для интервальных моделей размера партии с непрерывным контролем.

2) Необходимые и достаточные условия существования допустимого

управления и оптимальной допустимой стратегии управления для интервальной модели размера партии с периодическим контролем. Вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления.

3) Необходимые и достаточные условия существования допустимого управления для динамической сетевой модели управления запасами с интервально заданным стационарным спросом. Достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии.

4) Необходимые и достаточные условия существования допустимого управления для динамической сетевой модели управления запасами при интервально заданном стационарном спросе с устареванием запаса в узлах сети. Достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления.

5) Обобщение динамической сетевой модели с интервально заданным стационарным спросом при устаревании запаса на случай задержек в поставках.

6) Необходимые и достаточные условия существования допустимого управления для динамической сетевой модели управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом. Достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии.

7) Необходимые и достаточные условия существования допустимого управления для динамической сетевой модели управления запасами

с интервально заданным нестационарным спросом при устаревании запаса. Достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: XV конференции по интервальной математике в рамках программы научных мероприятий "Вычислительные Технологии - 2000"(Новосибирск, 2000), XVI конференции по интервальной математике в рамках международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика"(Новосибирск, 2001), 5-ом Корейско-Российском международном симпозиуме по науке и технологии (Томск, 2001), 8-ой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастической методам совместно со вторым Всероссийским симпозиумом по прикладной и промышленной математике (Йошкар-Ола, 2001), Всероссийской научно-практической конференции "Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство"(Анжеро-Судженск, 2001), 6-ом Корейско-Российском международном симпозиуме по науке и технологии (Новосибирск, 2002), Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций"(Новосибирск, 2002), IV Всероссийской конференции с международным участием "Новые информационные технологии и исследование сложных структур"(Томск, 2002), 10-ом GAMM - IMACS международном симпозиуме по научным вычислениям, компьютерной арифметике и гарантированным численным решениям SCAN' 2002 (Париж, Франция, 2002).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ [19–21, 55–58, 79–81].

Глава 1

Элементы интервального анализа

В данной главе приводятся сведения о классической интервальной арифметике (см., например, [1, 25, 68, 103]) и обобщенной интервальной арифметике Каухера [60, 64, 93], необходимые для целостного изложения всего материала настоящей диссертационной работы. Здесь и далее в работе используется стандартная система обозначений [94]. Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы) выделяются жирным шрифтом. Арифметические операции с интервальными величинами рассматриваются как операции соответствующих интервальных арифметик: классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$, либо полной интервальной арифметики Каухера $\mathbb{KR}$. Под векторами (точечными или интервальными) всюду понимаются вектор-столбцы.

1.1 Классическая интервальная арифметика

Интервальные числа. Под правильным интервалом $\mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}]$, $\underline{\mathrm{x}} \le \overline{\mathrm{x}}$, понимается замкнутое ограниченное подмножество вещественных чисел вида

$$\mathbf{x} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \underline{\mathrm{x}} \le x \le \overline{\mathrm{x}}\},$$

где $\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}$ – левый и правый концы (нижняя и верхняя границы) интервала $\mathbf{x}$ соответственно. Множество всех правильных интервалов обозначается через $\mathbb{IR}$ [94]. (Элементы множества $\mathbb{IR}$ называются также интервальными числами.)

Два интервала (интервальных числа) считаются равными, если их одноименные концы совпадают, то есть

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\mathrm{x}} = \underline{\mathrm{y}}, \;\; \overline{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{y}}.$$

Отношения порядков на множестве $\mathbb{IR}$ определяются следующем образом

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \underline{\mathrm{x}} \geq \underline{\mathrm{y}}, \;\; \overline{\mathrm{x}} \leq \overline{\mathrm{y}}, \\ \mathbf{x} < \mathbf{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{\mathrm{x}} < \underline{\mathrm{y}}, \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \underline{\mathrm{x}} \leq \underline{\mathrm{y}}, \;\; \overline{\mathrm{x}} \leq \overline{\mathrm{y}}. \end{aligned}$$

Пересечение двух интервалов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пусто, $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = \varnothing$, если $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ или $\mathbf{y} < \mathbf{x}$. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ – интервалы с непустым пересечением, то

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cap \mathbf{y} &= \left[\max\{\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\},\, \min\{\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}\}\right], \\ \mathbf{x} \cup \mathbf{y} &= \left[\min\{\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\},\, \max\{\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}\}\right]. \end{aligned}$$

Операции взятия точной нижней ($\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \inf_{\subseteq} \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$) и точной верхней ($\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \sup_{\subseteq} \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$) граней по включению определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= \left[\max\{\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\},\, \min\{\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}\}\right], \\ \mathbf{x} \vee \mathbf{y} &= \left[\min\{\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\},\, \max\{\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}\}\right]. \end{aligned}$$

Замечание 1.1. *Если $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ есть одномерные интервалы с непустым пересечением, то $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$ совпадают с $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ соответственно. Однако, в общем случае это не так.*

Симметричным называется интервал $\mathbf{x}$, у которого $-\underline{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{x}}$.

Шириной интервала $\mathbf{x}$ называется величина

$$\operatorname{wid} \mathbf{x} = \overline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{x}}.$$

Середина интервала $\mathbf{x}$ есть полусумма его концов

$$\operatorname{mid} \mathbf{x} = \frac{\underline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{x}}}{2}.$$

Расстояние между интервалами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ на $\mathbb{IR}$ вводится равенством

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{\left|\underline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{y}}\right|, \, |\overline{\mathrm{x}} - \overline{\mathrm{y}}|\}.$$

Знак интервала $\mathbf{x}$ определяется как

$$\operatorname{sgn}\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} > 0, \\ -1, & \mathbf{x} < 0, \\ \text{не определен}, & 0 \in \mathbf{x}. \end{cases}$$

Вещественные числа $x \in \mathbb{R}$ отождествляются с интервалами нулевой ширины (вырожденными интервалами) $\mathbf{x} = [x, x]$. Вырожденные интервалы, в отличие от вещественных чисел, обозначаются жирным шрифтом, например, $\mathbf{0} = [0, 0],\ 0 \in \mathbf{0}$.

Интервальная арифметика. Классическая интервальная арифметика является алгебраической системой $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$, носитель которой есть множество правильных интервалов $\mathbb{IR} = \{\mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \mid \underline{\mathrm{x}} \le \overline{\mathrm{x}},\ \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\}$, а бинарные операции: сложение, вычитание, умножение, деление, определены следующим образом

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{x \star y |\ x \in \mathbf{x},\ y \in \mathbf{y}\},$$

где $\star = \{+, -, \cdot, /\}$. Развернутое определение интервальных арифметических операций имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{x} + \mathbf{y} = \left[\underline{\mathrm{x}} + \underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{y}}\right], \\
\mathbf{x} - \mathbf{y} = \left[\underline{\mathrm{x}} - \overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{y}}\right], \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \left[\min\{\underline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}\mathrm{y}}\},\ \max\{\underline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}\mathrm{y}}\}\right], \\
c \cdot \mathbf{x} = \begin{cases} [c\underline{\mathrm{x}}, c\overline{\mathrm{x}}], & \text{если } c \ge 0, \\ [c\overline{\mathrm{x}}, c\underline{\mathrm{x}}], & \text{если } c < 0, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}, \\
\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \left[1/\overline{\mathrm{y}},\ 1/\underline{\mathrm{y}}\right], \quad 0 \notin \mathbf{y}.
\end{gathered}$$

При этом через интервал $(-\mathbf{x})$ обозначается интервал $(-1)\cdot\mathbf{x}$, точка для обозначения умножения, как правило, опускается.

Свойства интервально-арифметических операций. Перечислим основные алгебраические свойства классической интервальной арифметики:

1) *Ассоциативность и коммутативность.* Для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{IR}$ имеют место равенства

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$$
$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Нулем сложения является число 0, а единицей умножения – число 1 (которые, как отмечалось, отождествляются с вырожденными интервалами $[0, 0]$, $[1, 1]$). Другими словами,

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x},$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

2) Если один из операндов является невырожденным интервалом, то и результат арифметической операции также невырожденный интервал. Исключение составляет умножение на $\mathbf{0} = [0, 0]$. Следовательно, для невырожденного интервала $\mathbf{x}$ не существует обратных по сложению и умножению элементов (так как, если $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{1}$, то интервалы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ должны быть вырожденными). Таким образом, вычитание не обратно сложению, деление не обратно умножению, то есть $\mathbf{x} - \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}/\mathbf{x} \neq \mathbf{1}$ при $\operatorname{wid} \mathbf{x} > 0$. Однако, всегда выполняются включения $0 \in \mathbf{x} - \mathbf{x}$, $1 \in \mathbf{x}/\mathbf{x}$.

3) *Субдистрибутивность.* Для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{IR}$ выполнено включение

$$\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}.$$

Дистрибутивность (когда включение обращается в точное равенство)

$$\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}$$

имеет место в некоторых частных случаях, например, если

- $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$ (интервал $\mathbf{x}$ – вырожденный),
- $\mathbf{y}\mathbf{z} \geq 0$ (знаки интервалов $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ совпадают),
- $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ – симметричные интервалы.

4) *Монотонность по включению.* Если $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}'$, $\mathbf{y} \subseteq \mathbf{y}'$, то

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}' \star \mathbf{y}',$$

где $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{x}_i \subseteq \mathbf{y}_i$, $i = \overline{1, n}$ *и* $F(\cdot)$ *есть рациональное интервальное выражение. Тогда*

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) \subseteq F(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_n).$$

(Теорему 1.1 иногда называют основной теоремой интервальной арифметики.)

Интервальные векторы и матрицы. Интервальными векторами и матрицами называются соответственно элементы множеств $\mathbb{IR}^n$ и $\mathbb{IR}^{n \times m}$. Интервальный объект (вектор, матрица) называется правильным, если все его компоненты есть правильные интервалы.

Геометрически, интервальный вектор размера n представляет собой прямоугольный параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям (брус [63]). На Рисунке 1.1 (из работы [103]) представлен интервальный вектор $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^2$ вида

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = [\underline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_1], \ \mathbf{x}_2 = [\underline{\mathrm{x}}_2, \overline{\mathrm{x}}_2].$$

Рисунок 1.1: Геометрическое представление интервального вектора $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^2$

Операции $\vee, \wedge, +, -$ и отношения $\subseteq, \leq$ на интервальных объектах из одного пространства определяются покомпонентно для векторов и поэлементно для матриц. Например, точной верхней гранью по включению для интервальных векторов $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{IR}^n$ будет интервальный вектор $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \in \mathbb{IR}^n$, в котором $(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})_i = \mathbf{x}_i \vee \mathbf{y}_i,\ i = \overline{1,n}$.

Произведение вещественной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ на интервальный вектор $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^m$ определяется правилом

$$(\mathbf{cx})_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\mathbf{x}_j, \quad i = \overline{1,n}.$$

Произведение двух матриц $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n\times k}$ и $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{k\times m}$ определяется следующим образом

$$(\mathbf{xy})_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{x}_{il}\mathbf{y}_{lj}, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

Определение 1.1. *Интервал (интервальный вектор, матрица) называется формальным решением интервального уравнения (системы уравнений), если подстановка этого интервала в рассматриваемое уравнение и выполнение всех интервально-арифметических операций приводят к равенству [64].*

Проблемы классической интервальной арифметики. Классическая интервальная математика охватывает довольно широкий круг задач [1, 25, 68, 103]. Однако, существуют задачи, которые неразрешимы (или не всегда разрешимы) в терминах классического аппарата вследствие слабых алгебраических свойств классической интервальной арифметики:

- все интервалы с ненулевой шириной, то есть большинство элементов $\mathbb{IR}$, не имеют ни противоположных, ни обратных элементов,
- арифметические операции связаны друг с другом довольно слабыми соотношениями (например, субдистрибутивности), а полноценная дистрибутивность умножения и деления относительно сложения и вычитания не имеет места.

Как следствие, во-первых, в $\mathbb{IR}$ элементарные уравнения

$$\mathbf{a} + x = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$$

и им подобные не всегда имеют формального решения. Во-вторых, техника символьных преобразований в классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ довольно бедна: нет возможности переносить члены из одной части уравнения в другую и приводить подобные.

Кроме того, порядковые свойства классической интервальной арифметики также неудовлетворительны. Из операций взятия точной нижней и точной верхней грани относительно включения первая не всегда выполнима.

"Неполнота" как алгебраических, так и порядковых структур $\mathbb{IR}$ стимулировали попытки "достроить" классическую интервальную арифметику и создать на ее основе "более совершенную" интервальную арифметику. Такая "достройка" была выполнена в работах Э. Каухера (см. [93] и имеющиеся там ссылки), который назвал получившийся алгебраический аппарат "расширенной интервальной арифметикой". В целом, расширенная интервальная арифметика Каухера представляет нетривиально устроенную алгебраическую систему, имеющую ряд интересных свойств и приложений [86, 89]. В следующем параграфе приведены только те свойства, которые используются в данной работе.

1.2 Полная интервальная арифметика Каухера

Полная интервальная арифметика Каухера является алгебраической системой $\langle\mathbb{KR}, \mathrm{dual}, \mathrm{pro}, +, -, \cdot, /\rangle$, носитель которой - множество всех вещественных интервалов $\mathbb{KR} = \{\mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \,|\, \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, $\mathbb{KR}$ получается присоединением неправильных интервалов $\mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}]$, $\underline{\mathrm{x}} > \overline{\mathrm{x}}$, ко множеству правильных интервалов $\mathbb{IR} = \{\mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] | \,\underline{\mathrm{x}} \leq \overline{\mathrm{x}},\ \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\}$ и вещественных чисел $\mathbb{R}$ – вырожденных интервалов $\mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}]$, $\underline{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{x}}$.

Правильный и неправильный интервалы меняются местами в результате операции дуализации

$$\mathrm{dual}\,\mathbf{x} = [\overline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{x}}].$$

Рисунок 1.2: Множество $\mathbb{KR}$ [59]

Правильной проекцией интервала $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}$ называется величина

$$\operatorname{pro}\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный}, \\ \operatorname{dual}\mathbf{x} = [\overline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный}. \end{cases}$$

Аналогично классической интервальной арифметике, отношения включения одного интервала в другой определяются на $\mathbb{KR}$ следующим образом

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\mathrm{x}} \geq \underline{\mathrm{y}}, \;\; \overline{\mathrm{x}} \leq \overline{\mathrm{y}}.$$

Например, запись $\mathbf{0} \subseteq \mathbf{x}$ означает, что $\underline{\mathrm{x}} \leq 0 \leq \overline{\mathrm{x}}$, а запись $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{0}$ эквивалентна $\overline{\mathrm{x}} \leq 0 \leq \underline{\mathrm{x}}$.

При сравнении двух интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}$ имеет место соотношение

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\mathrm{x}} \leq \underline{\mathrm{y}}, \;\; \overline{\mathrm{x}} \leq \overline{\mathrm{y}}.$$

Рисунок 1.3: Отношения частичного порядка на $\mathbb{KR}$ [59]

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на $\mathbb{KR}$ так же, как и для обычной интервальной арифметики

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{\mathrm{x}} + \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{y}}],$$
$$c \cdot \mathbf{x} = \begin{cases} [c\underline{\mathrm{x}}, c\overline{\mathrm{x}}], & \text{если } c \geq 0, \\ [c\overline{\mathrm{x}}, c\underline{\mathrm{x}}], & \text{если } c < 0, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Каждый элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}$ имеет единственный обратный по сложению элемент $\operatorname{opp}\mathbf{x}$, который определяется следующим образом

$$\operatorname{opp}\mathbf{x} = [-\underline{\mathrm{x}}, -\overline{\mathrm{x}}].$$

Этот факт делает возможным, в отличие от классической интервальной арифметики, переносить члены из одной части уравнения в другую "с противоположным знаком". Операция, обратная для сложения, называется операцией внутреннего вычитания и имеет вид

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \operatorname{opp}\mathbf{y} = [\underline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} - \overline{\mathrm{y}}].$$

Для того, чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в $\mathbb{KR}$ следующие подмножества:

$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{KR} : \quad \underline{\mathrm{x}} > 0, \overline{\mathrm{x}} > 0\}$	- неотрицательные интервалы,
$Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{KR} : \quad \underline{\mathrm{x}} \leq 0 \leq \overline{\mathrm{x}}\}$	- нульсодержащие интервалы,
$-P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{KR} : \quad -\mathbf{x} \in P\}$	- неположительные интервалы,
$\operatorname{dual} Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{KR} : \quad \operatorname{dual}\mathbf{x} \in Z\}$	- интервалы, содержащиеся в нуле.

В целом $\mathbb{KR} = P \cup Z \cup (-P) \cup \operatorname{dual} Z$. Тогда умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано Таблицей 1.1.

Явные формулы для умножения из Таблицы 1.1 являются довольно громоздкими и имеют кусочный характер. Поэтому в ряде случаев используют формулу для интервального умножения, предложенную А.В. Лакеевым [28]

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \Big[(\underline{\mathrm{x}}^+ \underline{\mathrm{y}}^+) \vee (\overline{\mathrm{x}}^- \overline{\mathrm{y}}^-) - (\overline{\mathrm{x}}^+ \underline{\mathrm{y}}^-) \vee (\underline{\mathrm{x}}^- \overline{\mathrm{y}}^+),$$
$$(\overline{\mathrm{x}}^+ \overline{\mathrm{y}}^+) \vee (\underline{\mathrm{x}}^- \underline{\mathrm{y}}^-) - (\underline{\mathrm{x}}^+ \overline{\mathrm{y}}^-) \vee (\overline{\mathrm{x}}^- \underline{\mathrm{y}}^+) \Big],$$

Таблица 1.1: Умножение интервалов на $\mathbb{KR}$ (таблица Кэли)

	$\mathbf{y} \in P$	$\mathbf{y} \in Z$	$\mathbf{y} \in -P$	$\mathbf{y} \in \operatorname{dual} Z$
$\mathbf{x} \in P$	$[\underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}]$	$[\overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}]$	$[\overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}]$	$[\underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}]$
$\mathbf{x} \in Z$	$[\underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}]$	$[\min(\underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}),$ $\max(\underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}})]$	$[\overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$	0
$\mathbf{x} \in -P$	$[\underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$	$[\underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$	$[\overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$	$[\overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$
$\mathbf{x} \in \operatorname{dual} Z$	$[\underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}}]$	0	$[\overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}]$	$[\max(\underline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}),$ $\min(\underline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}\,\underline{\mathrm{y}})]$

где $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$ есть положительная и отрицательная части вещественного числа x; $x \vee y = \max\{x, y\}$ – точная верхняя грань x, y.

Заметим, что, операции сложения и умножения на $\mathbb{KR}$ обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, так же как и в классической интервальной арифметике.

Операции вычитания и деления в арифметике Каухера определяются подобно классической интервальной арифметике

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y} = [\underline{\mathrm{x}} - \overline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{y}}],$$
$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \left[\underline{\mathrm{x}}/\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}/\underline{\mathrm{y}}\right], \quad 0 \notin \operatorname{pro}\mathbf{y}.$$

Алгебраическое деление (операция, обратная умножению) имеет вид

$$\mathbf{x} \oslash \mathbf{y} = \left[\underline{\mathrm{x}}/\underline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}}/\overline{\mathrm{y}}\right], \quad 0 \notin \operatorname{pro}\mathbf{y}.$$

Замечание 1.2. *Формальное решение уравнения*

$$\mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{KR},\ 0 \notin \operatorname{pro}\mathbf{a},$$

имеет вид

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c} \ominus \mathbf{b}) \oslash \mathbf{a} = \left[\frac{\underline{\mathrm{c}} - \underline{\mathrm{b}}}{\underline{\mathrm{a}}}, \frac{\overline{\mathrm{c}} - \overline{\mathrm{b}}}{\overline{\mathrm{a}}}\right].$$

Стоит отметить, что в арифметике Каухера сохраняется монотонность интервальных операций по включению

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}',\ \mathbf{y} \subseteq \mathbf{y}' \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} \star \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}' \star \mathbf{y}'$$

для $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ и любых $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{'}, \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{KR}$.

Связь сложения и умножения в арифметике Каухера описывается следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \subseteq \mathbf{xy}+\mathbf{xz}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный (субдистрибутивность),} \\ \mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \supseteq \mathbf{xy}+\mathbf{xz}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный (супердистрибутивность).} \end{cases}$$

Эти включения обращаются в равенства в некоторых частных случаях [105], но в целом свойство дистрибутивности по сложению не выполняется.

Интервальные векторы и матрицы в интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$ являются элементами множеств $\mathbb{KR}^n$ и $\mathbb{KR}^{n\times m}$. Операции над векторами и матрицами в $\mathbb{KR}$ определяются аналогично соответствующим операциям в классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$. Также, покомпонентным образом, понимается действие на интервальные векторы и матрицы операций дуализации $\operatorname{dual}\mathbf{x}$, взятия правильной проекции $\operatorname{pro}\mathbf{x}$ и обратного интервала $\operatorname{opp}\mathbf{x}$.

Глава 2

Интервальные модели размера партии с непрерывным контролем

В данной главе рассматриваются модели однономенклатурных систем управления запасами с непрерывным контролем уровня запасов при условии, что неизвестные интенсивности спроса и поставок произвольным образом принимают свои значения в границах заданных интервалов. Для определения оптимальных параметров стратегии управления (точки заказа и размера партии) используются методы интервального анализа. С привлечением аппарата интервальной арифметики Каухера предлагается метод расчета оптимальных параметров стратегии управления для интервальных моделей размера партии:

a) с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок и возможностью дефицита;

b) с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок при отсутствии дефицита;

c) с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками и возможностью дефицита;

d) с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками при отсутствии дефицита.

В дальнейшем на модели, представленные в пунктах a, b, c, d, будем ссылаться как на модели A, B, C и D соответственно.

Рассматривается два вида стратегий:

- пороговая стратегия (s, Q), где заказ размера Q подается всякий раз, когда уровень запаса достигает порогового значения s;
- периодическая стратегия (T, S), где пополнение запаса происходит через равные периоды времени T до предельного уровня запаса S.

Результаты данной главы опубликованы в работах [19, 21, 79].

2.1 Модель управления запасами с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок и возможностью дефицита: пороговая стратегия

Рассмотрим одиономенклатурную систему управления запасами с непрерывным контролем уровня запасов при интервально заданных интенсивностях спроса

$$\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}],\ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR},$$

и поставок

$$\boldsymbol{\lambda} = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}],\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{IR}.$$

Ясно, что система может работать только, если

$$0 < \boldsymbol{\mu} < \boldsymbol{\lambda}. \tag{2.1}$$

Предполагается, что система допускает некоторый дефицит запаса, когда неудовлетворенный спрос откладывается до очередной поставки и удовлетворяется по мере поступления товара на склад. Необходимо принять решение о том, когда должен быть подан заказ на пополнение запаса и каков должен быть его размер, то есть найти оптимальное, с точки зрения некоторого критерия оптимальности, управление (s^*, Q^*), где s^* – оптимальный уровень дефицита запаса в системе (точка заказа), Q^* – оптимальный размер заказываемой партии (оптимальная величина заказа). В качестве критерия оптимальности выберем минимум средних затрат в единицу времени.

Если интервалы изменения неизвестных интенсивностей спроса и поставок $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ есть вырожденные интервалы, $\mu = \underline{\mu} = \overline{\mu},\ \lambda = \underline{\lambda} = \overline{\lambda}$, то рассматриваемая модель принадлежит классу детерминированных моделей экономически выгодных размеров партий классической теории управления запасами (см, например, [43, 48, 49, 52]). График изменения уровня запаса для этого случая показан на Рисунке 2.1.

Рисунок 2.1: Динамика запаса при детерминированном спросе и поставках

Здесь T – полный цикл работы системы, S – уровень предельного запаса, s – уровень предельного дефицита. Считая расходы на хранение и штрафы за отложенный спрос пропорциональными среднему запасу (дефициту) и времени их существования соответственно, получаем для функции затрат за цикл выражение

$$L_T = g + h \int\limits_0^{t_1+t_2} x(t)dt - p \int\limits_{t_1+t_2}^{T} x(t)dt,$$

где g – фиксированные расходы, связанные с организацией поставки, h – затраты на хранение запаса, p – штраф за отложенный спрос. Очевидно, что

$$x(t) = \begin{cases} (\lambda - \mu)\, t, & \text{при } 0 \le t \le t_1, \\ S - \mu\,(t - t_1), & \text{при } t_1 \le t \le t_1 + t_2 + t_3, \\ -s + (\lambda - \mu)(t - t_1 - t_2 - t_3), & \text{при } t_1 + t_2 + t_3 \le t \le T. \end{cases}$$

Перепишем функцию затрат с учетом линейности изменения уровня запаса

$$L_T = g + \frac{1}{2}hS(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}ps(T - t1 - t2).$$

Здесь $t_1 = \dfrac{S}{\lambda - \mu}$, $t_2 = \dfrac{S}{\mu}$. Уровень предельного запаса S выражается через s и Q как

$$S = -s + \frac{Q}{\lambda}(\lambda - \mu),$$

откуда длина цикла T имеет вид

$$T = \frac{S}{\mu} + \frac{S}{\lambda - \mu} + \frac{s}{\mu} + \frac{s}{\lambda - \mu} = \frac{Q}{\lambda\mu}(\lambda - \mu) + \frac{Q}{\lambda} = \frac{Q}{\mu}.$$

В развернутом виде

$$L_T = g + \frac{(h+p)s^2\lambda}{2\mu(\lambda - \mu)} + \frac{hQ^2(\lambda - \mu)}{2\mu\lambda} - \frac{hsQ}{\mu},$$

откуда затраты в единицу времени

$$L(\mu, \lambda, s, Q) = \frac{1}{Q}\left(g\mu + \frac{(h+p)s^2\lambda}{2(\lambda - \mu)}\right) + \frac{hQ(\lambda - \mu)}{2\lambda} - hs. \qquad (2.2)$$

Оптимальное управление (s^*, Q^*), минимизирующие функцию (2.2), определяется соотношениями

$$s^* = \sqrt{\frac{2gh\,\mu(\lambda - \mu)}{p(h+p)\,\lambda}}, \qquad (2.3)$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2g(h+p)\,\mu\lambda}{hp\,(\lambda - \mu)}}, \qquad (2.4)$$

при этом достигается минимум средних затрат в единицу времени

$$L^* = \sqrt{\frac{2ghp\,\mu(\lambda - \mu)}{(h+p)\,\lambda}}. \qquad (2.5)$$

В случае невырожденных интервалов $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, когда $\underline{\mu} \leq \overline{\mu}$ и $\underline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$, определим интервалы $\mathbf{s}^* = [\underline{\mathrm{s}}^*, \overline{\mathrm{s}}^*]$, $\mathbf{Q}^* = [\underline{\mathrm{Q}}^*, \overline{\mathrm{Q}}^*]$ и $\mathbf{L}^* = [\underline{\mathrm{L}}^*, \overline{\mathrm{L}}^*]$ такие, что для любых фиксированных значений $\mu \in \boldsymbol{\mu}$ и $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ соответствующие им оптимальные значения s^* и Q^*, принадлежат интервалам $\mathbf{s}^*$ и $\mathbf{Q}^*$, а затраты в единицу времени L^* – интервалу $\mathbf{L}^*$.

Представим функцию затрат интервальной модели в виде естественного интервального расширения [1,25,68,103] соответствующей функции средних затрат в единицу времени (2.2)

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, s, Q) = \frac{1}{Q}\left(g\boldsymbol{\mu} + \frac{(h+p)s^2\boldsymbol{\lambda}}{2(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}\right) + \frac{hQ(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}{2\boldsymbol{\lambda}} - hs. \tag{2.6}$$

Легко показать, что функция (2.6) имеет смысл для любых интервалов $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющих условию (2.1).

Рассмотрим производную интервальной функции [1, 25, 68, 103] вида $\dfrac{1}{x}[a, b]$, $x > 0$, по x

$$\left(\frac{1}{x}[a,b]\right)'_x = \left[\left(\frac{a}{x}\right)'_x, \left(\frac{b}{x}\right)'_x\right] =$$
$$= \left[-\frac{a}{x^2}, -\frac{b}{x^2}\right] = \frac{1}{x^2}[-a,-b] = \frac{1}{x^2}\operatorname{opp}[a,b]. \tag{2.7}$$

Используя формулу (2.7), найдем частные производные функции $\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, s, Q)$ по Q, s и приравняем их нулю

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, s, Q)}{\partial Q} = \frac{1}{Q^2}\operatorname{opp}\left(g\,\boldsymbol{\mu} + \frac{(h+p)s^2\boldsymbol{\lambda}}{2\,(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}\right) + \frac{h(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}{2\,\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0},$$
$$\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, s, Q)}{\partial s} = \frac{(h+p)s\,\boldsymbol{\lambda}}{Q\,(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})} - h = \mathbf{0}.$$

Получаем интервальную систему нелинейных уравнений относительно параметров s и Q. Заметим, что строгое равенство нулю (интервальному нулю, $\mathbf{0} = [0,\ 0]$) выполнено только в случае интервальных значений параметров s и Q. Поэтому будем рассматривать эти параметры как соответствующие интервалы $\mathbf{s}$, $\mathbf{Q}$. С учетом сделанного замечания полученную систему перепишем в виде

$$\frac{1}{\mathbf{Q}^2}\operatorname{opp}\left(g\,\boldsymbol{\mu} + \frac{(h+p)\mathbf{s}^2\boldsymbol{\lambda}}{2\,(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}\right) + \frac{h\,(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}{2\,\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \tag{2.8}$$
$$\frac{(h+p)\,\mathbf{s}\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})} - h = \mathbf{0}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}$.

Найдем формальное решение [64] системы (2.8), (2.9), которое позволит затем определить интервалы для оптимального управления (s^*, Q^*). Из уравнения (2.9) выразим интервал $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s} = \frac{h}{h+p} \operatorname{dual} \left(\frac{\mathbf{Q}\,(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} \right) \tag{2.10}$$

и подставим его выражение в (2.8). С учетом свойств операции дуализации

$$\operatorname{dual} \mathbf{xy} = \operatorname{dual} \mathbf{x} \cdot \operatorname{dual} \mathbf{y}, \quad \operatorname{dual} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \frac{\operatorname{dual} \mathbf{x}}{\operatorname{dual} \mathbf{y}}, \quad (\operatorname{dual} \mathbf{x})^2 = \operatorname{dual} \mathbf{x} \cdot \operatorname{dual} \mathbf{x},$$

после некоторых преобразований получаем

$$\frac{1}{\mathbf{Q}^2} \operatorname{opp} \left(g\,\boldsymbol{\mu} + \frac{h^2}{2(h+p)} \operatorname{dual} \frac{\mathbf{Q}^2(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} \right) + \frac{h(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{2\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}.$$

Домножив обе части этого интервального уравнения на интервал $\operatorname{dual} \mathbf{Q}^2$, имеем

$$\operatorname{opp} \left(g\,\boldsymbol{\mu} + \frac{h^2}{2(h+p)} \operatorname{dual} \frac{\mathbf{Q}^2(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} \right) + \frac{h(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{2\boldsymbol{\lambda}} \operatorname{dual} \mathbf{Q}^2 = \mathbf{0},$$

и в силу того, что

$$\operatorname{opp}(\operatorname{dual} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}$$

для любого интервала $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}$, получаем

$$g \, \operatorname{opp} \boldsymbol{\mu} - \frac{h^2(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{2(h+p)\,\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{Q}^2 + \frac{h(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{2\boldsymbol{\lambda}} \operatorname{dual} \mathbf{Q}^2 = \mathbf{0}, \tag{2.11}$$

Далее, рассмотрим интервальное выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \operatorname{dual} \mathbf{x} - \mathbf{bx} &= [\underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{x}}] - [\underline{\mathrm{bx}},\ \overline{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{x}}] = \\ &= [\underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{x}} - \overline{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{bx}}] = [(\underline{\mathrm{a}} - \overline{\mathrm{b}})\overline{\mathrm{x}},\ (\overline{\mathrm{a}} - \underline{\mathrm{b}})\underline{\mathrm{x}}], \end{aligned}$$

следовательно, справедливо соотношение

$$\mathbf{a} \operatorname{dual} \mathbf{x} - \mathbf{bx} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \operatorname{dual} \mathbf{x}$$

для любых интервалов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{KR}$ таких, что $\mathbf{x} > 0$, $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) > 0$.

Тогда (2.11) эквивалентно уравнению

$$g\ \mathrm{opp}\,\boldsymbol{\mu} + \left(\frac{h(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}{2\boldsymbol{\lambda}} - \frac{h^2(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})}{2(h+p)\,\boldsymbol{\lambda}}\right)\mathrm{dual}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{0}$$

или

$$g\ \mathrm{opp}\,\boldsymbol{\mu} + \frac{h}{2(h+p)}\left((h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}\right)\mathrm{dual}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{0}, \qquad (2.12)$$

если выполнено условие

$$(h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} > 0. \qquad (2.13)$$

Таким образом, из (2.12) можно записать

$$\frac{h}{2(h+p)}\left((h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}\right)\mathrm{dual}\,\mathbf{Q}^2 = g\,\boldsymbol{\mu},$$

откуда, так как в силу условия (2.13)

$$0 \notin (h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}},$$

получаем

$$\mathrm{dual}\,\mathbf{Q}^2 = \frac{2g\,(h+p)\,\boldsymbol{\mu}}{h} \oslash \left((h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}\right).$$

Следовательно

$$\mathbf{Q} = \mathrm{dual}\left(\frac{2g\,(h+p)\,\boldsymbol{\mu}}{h} \oslash \left((h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.14)$$

Подставив выражение для $\mathbf{Q}$ из (2.14) в (2.10), получаем

$$\mathbf{s} = \left(\frac{2g\,h\,\boldsymbol{\mu}}{h+p} \oslash \left((h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dual}\,\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}. \qquad (2.15)$$

И, наконец, выполнив соответствующие интервально-арифметические операции, будем иметь

$$\mathbf{s} = \sqrt{\frac{2g\,h}{h+p}} \cdot \left[\frac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}}\sqrt{\frac{\underline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} - h\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}}}},\ \frac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}\sqrt{\frac{\overline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}} - h\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}}}\right],$$

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2g\,(h+p)}{h}} \cdot \left[\sqrt{\frac{\overline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}} - h\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}}},\ \sqrt{\frac{\underline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} - h\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}}}}\right].$$

Таким образом, интервалы для оптимального управления $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$ в системе с интервально заданными интенсивностями спроса $\boldsymbol{\mu}$ и поставок $\boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющими условиям (2.1), (2.13), и возможностью дефицита имеют следующий вид:

$$\mathbf{s}^* = \sqrt{\frac{2g\,h}{h+p}} \cdot \mathrm{pro}\left[\frac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}}\sqrt{\frac{\underline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} - h\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}}}},\ \frac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}\sqrt{\frac{\overline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}} - h\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}}}\right], \tag{2.16}$$

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2g\,(h+p)}{h}} \cdot \mathrm{pro}\left[\sqrt{\frac{\overline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}} - h\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}}},\ \sqrt{\frac{\underline{\mu}}{(h+p)\dfrac{\underline{\lambda}-\overline{\mu}}{\overline{\lambda}} - h\dfrac{\overline{\lambda}-\underline{\mu}}{\underline{\lambda}}}}\right]. \tag{2.17}$$

Интервал для средних затрат в единицу времени $\mathbf{L}^*$ при оптимальном управлении (s^*, Q^*) таком, что $s^* \in \mathbf{s}^*$, $Q^* \in \mathbf{Q}^*$, получается естественным интервальным расширением функции затрат (2.6) по s и Q (заменой вещественных переменных s и Q соответствующими интервалами (2.16), (2.17), а вещественных арифметических операций – интервально - арифметическими). Выполнив необходимые интервально-арифметические операции, получаем

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^*, \mathbf{Q}^*) = \left[\frac{1}{\overline{\mathrm{Q}}^*}\left(g\underline{\mu} + \frac{(h+p)\underline{\mathrm{s}}^{*2}\underline{\lambda}}{2(\overline{\lambda}-\underline{\mu})}\right) + \frac{h\underline{\mathrm{Q}}^*(\underline{\lambda}-\overline{\mu})}{2\overline{\lambda}} - h\overline{\mathrm{s}}^*,\right.$$
$$\left.\frac{1}{\underline{\mathrm{Q}}^*}\left(g\overline{\mu} + \frac{(h+p)\overline{\mathrm{s}}^{*2}\overline{\lambda}}{2(\underline{\lambda}-\overline{\mu})}\right) + \frac{h\overline{\mathrm{Q}}^*(\overline{\lambda}-\underline{\mu})}{2\underline{\lambda}} - h\underline{\mathrm{s}}^*\right]. \tag{2.18}$$

При небольшой ширине интервала затрат $\mathbf{L}^*$ точку заказа s^* и размер партии Q^* можно выбирать из интервалов $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$, не опасаясь существенных отклонений от оптимальной стратегии при любых значениях интенсивностей спроса и поставок из заданных интервалов $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$.

Интересно также найти, каким будет уровень предельного запаса S^* в системе при оптимальном управлении (s^*, Q^*), точнее сказать, в каком интервале он будет находится. Получаем $S^* \in \mathbf{S}^*$, где интервал $\mathbf{S}^*$

определяется как

$$\mathbf{S}^* = -s^* + \frac{Q^*(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{2.19}$$

Заметим, что если интервалы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ вырожденные, то есть $\mu = \underline{\mu} = \overline{\mu}$, $\lambda = \underline{\lambda} = \overline{\lambda}$, то полученные формулы для оптимального управления (2.16), (2.17) и средних затрат в единицу времени (2.18) преобразуются в формулы (2.3), (2.4), (2.5) соответствующей детерминированной модели.

2.2 Частные случаи

2.2.1 Модель с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок при отсутствии дефицита

Очевидно, что если бы дефицит в системе не приводил к дополнительным затратам, то оптимально было бы вообще не иметь наличного запаса. С другой стороны, при высоком штрафе за отложенный спрос вообще не следует допускать дефицита. Рассмотрим однономенклатурную систему управления запасами с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок при отсутствии дефицита. В этом случае можно считать

$$\frac{h}{p} \approx 0. \tag{2.20}$$

Тогда условие (2.13) примет вид

$$\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0},$$

и справедливо для любых $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющих (2.1).

Выполним предельный переход при $p \longrightarrow \infty$ в формулах (2.16), (2.17), (2.18), будем иметь

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{0}, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot \mathrm{pro}\left[\sqrt{\frac{\overline{\mu}\underline{\lambda}}{\overline{\lambda} - \underline{\mu}}},\ \sqrt{\frac{\underline{\mu}\overline{\lambda}}{\underline{\lambda} - \overline{\mu}}}\right], \tag{2.22}$$

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Q}^*) = \frac{g\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{Q}^*} + \frac{h\mathbf{Q}^*(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{2\boldsymbol{\lambda}} =$$
$$= \left[\frac{g\underline{\mu}}{\overline{Q}^*} + \frac{h\underline{Q}^*(\underline{\lambda} - \overline{\mu})}{2\overline{\lambda}}, \; \frac{g\overline{\mu}}{\underline{Q}^*} + \frac{h\overline{Q}^*(\overline{\lambda} - \underline{\mu})}{2\underline{\lambda}} \right]. \quad (2.23)$$

Из (2.21) видно, что недостачи полностью исключаются, что соответствует требованию модели об отсутствии дефицита в системе.

Таким образом, при отсутствии дефицита в системе с интервально заданными интенсивностями спроса $\boldsymbol{\mu}$ и поставок $\boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющими (2.1), заказ на поставку подается всякий раз, когда уровень запаса становится равным нулю, а интервал для оптимального размера партии определяется формулой (2.22). При этом интервал для затрат задается формулой (2.23), то есть оптимальное управление $(0, Q^*)$, $Q^* \in \mathbf{Q}^*$, гарантирует, что средние затраты в единицу времени будут находятся в интервале $\mathbf{L}^*$.

Интервал для предельного запаса при оптимальном управлении $(0, Q^*)$ в этом случае примет вид

$$\mathbf{S}^* = Q^* \frac{(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (2.24)$$

Заметим, что в вырожденном случае формулы для оптимального размера партии (2.22) и средних затрат в единицу времени (2.23) преобразуются в формулы детерминированной модели с точно заданными интенсивностями спроса μ и поставок λ при отсутствии дефицита

$$Q^* = \sqrt{\frac{2g\mu\lambda}{h(\lambda - \mu)}},$$
$$L^* = \sqrt{\frac{2gh\mu(\lambda - \mu)}{\lambda}}.$$

2.2.2 Модель с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками и возможностью дефицита

Рассмотрим однономенклатурную систему управления запасами с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками и возможностью дефицита. При мгновенных поставках (например, когда весь объем заказанной партии отгружается разом с вышестоящего склада) можно считать, что

$$\frac{\mu}{\lambda} \approx 0. \tag{2.25}$$

В этом случае условие (2.1) примет вид: $\boldsymbol{\mu} > 0$, а (2.13) выполняется автоматически. Приравнивая $\underline{\lambda} = \overline{\lambda} = \lambda$ в формулах (2.16), (2.17), (2.18) и осуществляя предельный переход при $\lambda \longrightarrow \infty$, будем иметь

$$\mathbf{s}^* = \sqrt{\frac{2gh}{(h+p)p}} \cdot \left[\sqrt{\underline{\mu}},\ \sqrt{\overline{\mu}}\right], \tag{2.26}$$

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2g(h+p)}{hp}} \cdot \left[\sqrt{\underline{\mu}},\ \sqrt{\overline{\mu}}\right], \tag{2.27}$$

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}^*, \mathbf{s}^*) = \frac{1}{\mathbf{Q}^*}\left(g\,\boldsymbol{\mu} + \frac{(h+p)\mathbf{s}^{*2}}{2}\right) + \frac{h\mathbf{Q}^*}{2} - h\mathbf{s}^* =$$
$$= \left[\frac{1}{\overline{\mathrm{Q}}^*}\left(g\underline{\mu} + \frac{(h+p)\underline{\mathrm{s}}^{*2}}{2}\right) + \frac{h\underline{\mathrm{Q}}^*}{2} - h\overline{\mathrm{s}}^*,\ \frac{1}{\underline{\mathrm{Q}}^*}\left(g\overline{\mu} + \frac{(h+p)\overline{\mathrm{s}}^{*2}}{2}\right) + \frac{h\overline{\mathrm{Q}}^*}{2} - h\underline{\mathrm{s}}^*\right]. \tag{2.28}$$

Таким образом, интервалы для оптимального управления $\mathbf{s}^*, \mathbf{Q}^*$ в системе с интервально заданной интенсивностью спроса $\boldsymbol{\mu} > 0$, мгновенными поставками и возможностью дефицита определяются формулами (2.26), (2.27). Средние затраты в единицу времени при оптимальном управлении (s^*, Q^*), $s^* \in \mathbf{s}^*, Q^* \in \mathbf{Q}^*$, будут принадлежать интервалу $\mathbf{L}^*$, который вычисляется по формуле (2.28).

Интервал для предельного запаса при оптимальном управлении (s^*, Q^*) в этом случае примет вид

$$\mathbf{S}^* = -s^* + Q^*. \tag{2.29}$$

В вырожденном случае формулы для оптимального управления (2.26), (2.27) и средних затрат в единицу времени (2.28) преобразуются в формулы детерминированной модели с интенсивностью спроса μ, мгновенными поставками и возможностью дефицита

$$s^* = \sqrt{\frac{2gh\mu}{(h+p)p}},$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2g(h+p)\mu}{hp}},$$

$$L^* = \sqrt{\frac{2ghp\mu}{h+p}}.$$

2.2.3 Модель с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками при отсутствии дефицита

Случай с мгновенными поставками при отсутствии дефицита соответствует одновременному выполнению условий (2.20), (2.25). Условие (2.1) примет вид: $\boldsymbol{\mu} > 0$, а (2.13) выполняется автоматически. При предельных переходах при $p \longrightarrow \infty$, $\lambda \longrightarrow \infty$ в формулах (2.16), (2.17), (2.18) получаем

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{0}, \tag{2.30}$$

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot \left[\sqrt{\underline{\mu}},\ \sqrt{\overline{\mu}}\right], \tag{2.31}$$

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}^*) = \frac{g\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{Q}^*} + \frac{h\mathbf{Q}^*}{2} = \left[\frac{g\underline{\mu}}{\overline{\mathrm{Q}}^*} + \frac{h\underline{\mathrm{Q}}^*}{2},\ \frac{g\overline{\mu}}{\underline{\mathrm{Q}}^*} + \frac{h\overline{\mathrm{Q}}^*}{2}\right]. \tag{2.32}$$

Таким образом, при отсутствии дефицита в системе с интервально заданной интенсивностью спроса $\boldsymbol{\mu} > 0$, мгновенными поставками и отсутствием дефицита, заказ на поставку подается всякий раз, когда уровень запаса становится равным нулю, а интервал для оптимального размера партии определяется формулой (2.31). При этом интервал для затрат задается формулой (2.32), то есть оптимальное управление $(0, Q^*)$, $Q^* \in \mathbf{Q}^*$, гарантирует, что средние затраты в единицу времени будут находятся в интервале $\mathbf{L}^*$.

Интервал для предельного запаса при оптимальном управлении $(0, Q^*)$ в этом случае совпадает с интервалом $\mathbf{Q}^*$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{Q}^*. \tag{2.33}$$

В вырожденном случае формулы для оптимального размера партии (2.31) и средних затрат в единицу времени (2.32) вырождаются в классические формулы Уилсона [7, 8, 43, 48, 49]

$$Q^* = \sqrt{\frac{2g\mu}{h}},$$
$$L^* = \sqrt{2gh\mu}.$$

2.3 Модель управления запасами с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок и возможностью дефицита: периодическая стратегия

Рассмотрим однономенклатурную систему управления запасами в непрерывном времени с интервально заданными интенсивностями спроса $\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{IR}$, и поставок $\boldsymbol{\lambda} = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{IR}$, такими что

$$0 < \boldsymbol{\mu} < \boldsymbol{\lambda}. \tag{2.34}$$

Необходимо определить оптимальные параметры периодической стратегии управления (T^*, S^*), где T^* – оптимальный период времени между последовательными заказами (точка заказа), S^* – оптимальный предельный запас в системе. В качестве критерия оптимальности выберем минимум средних затрат в единицу времени.

Метод определения (T^*, S^*) во многом повторяет метод определения оптимальных параметров пороговой стратегии (s^*, Q^*). Рассмотрим основные этапы получения интервалов $\mathbf{T}^*, \mathbf{S}^*$ и $\mathbf{L}^*$, таких что для любых фиксированных значений $\mu \in \boldsymbol{\mu}$ и $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ соответствующие им оптимальные T^*, S^* удовлетворяли включениям $T^* \in \mathbf{T}^*$ и $S^* \in \mathbf{S}^*$, при этом затраты в единицу времени $L^* \in \mathbf{L}^*$. Подробный вывод оптимальной периодической стратегии (T^*, S^*) можно найти в работах автора [19, 79].

Функцию затрат интервальной периодической модели управления запасами имеет вид

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, T, S) = \frac{1}{T}\left(g + \frac{(h+p)\lambda S^2}{2\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}\right) + \frac{p\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})T}{2\boldsymbol{\lambda}} - pS, \tag{2.35}$$

где T - полный цикл работы системы, S - уровень предельного запаса, g - затраты на оформление заказа, h - затраты на хранение запаса, p - штрафные потери за отложенный спрос. Очевидно, что функция (2.35) имеет смысл для любых интервалов $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющих условию (2.34).

Выписывая частные производные функции $\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, T, S)$ по T, S и приравнивая их нулю, получаем интервальную систему нелинейных уравнений относительно параметров T и S

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, T, S)}{\partial T} = \frac{1}{T^2} \operatorname{opp}\left(g + \frac{(h+p)S^2}{2\boldsymbol{\eta}}\right) + \frac{p\boldsymbol{\eta}}{2} = \mathbf{0}, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, T, S)}{\partial S} = \frac{(h+p)S}{\boldsymbol{\eta}T} - p = \mathbf{0},$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{IR}.$$

Формальное решение этой системы существует, если и только если выполнено следующее условие

$$\boldsymbol{\eta} - \frac{p}{h+p}\boldsymbol{\eta} > 0,$$

то есть $\underline{\eta} - \dfrac{p}{h+p}\overline{\eta} > 0$ или $\dfrac{\overline{\eta}}{\underline{\eta}} < \dfrac{h+p}{p} = 1 + \dfrac{h}{p}$. Следовательно, чем больше штраф за отложенный спрос, тем меньше должна быть неопределенность в спросе и поставках.

Таким образом, интервалы для оптимального управления $\mathbf{T}^*, \mathbf{S}^*$ в системе с интервально заданными интенсивностями спроса $\boldsymbol{\mu}$ и поставок $\boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющими условиям (2.34) и

$$(h+p)\,\frac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} - p\,\frac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} > 0, \tag{2.37}$$

имеют вид

$$\mathbf{T}^* = \sqrt{\frac{2g(h+p)}{p}} \left[\frac{1}{\sqrt{(h+p)\overline{\eta} - p\underline{\eta}}}, \frac{1}{\sqrt{(h+p)\underline{\eta} - p\overline{\eta}}}\right], \tag{2.38}$$

$$\mathbf{S}^* = \sqrt{\frac{2gp}{h+p}} \left[\frac{\underline{\eta}}{\sqrt{(h+s)\overline{\eta} - p\underline{\eta}}}, \frac{\overline{\eta}}{\sqrt{(h+p)\underline{\eta} - p\overline{\eta}}}\right]. \tag{2.39}$$

Интервал для средних затрат в единицу времени $\mathbf{L}^*$ при оптимальном управлении (T^*, S^*) получается естественным интервальным расширением функции затрат (2.35) по T и S (заменой вещественных переменных T и S соответствующими интервалами (2.38), (2.39), а вещественных арифметических операций – интервально - арифметическими). Выполнив необходимые интервально-арифметические операции, получаем

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}^*) = \left[\frac{1}{\overline{\mathrm{T}}^*}\left(g + \frac{(h+p)\,\underline{\mathrm{S}}^{*2}}{2\overline{\eta}}\right) + \frac{p\,\underline{\eta}\underline{\mathrm{T}}^*}{2} - p\,\overline{\mathrm{S}}^*, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\underline{\mathrm{T}}^*}\left(g + \frac{(h+p)\,\overline{\mathrm{S}}^{*2}}{2\underline{\eta}}\right) + \frac{p\,\overline{\eta}\overline{\mathrm{T}}^*}{2} - p\,\underline{\mathrm{S}}^*\right]. \quad (2.40)$$

Заметим, что если интервалы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ – вырожденные, то формулы (2.38), (2.39), (2.40) преобразуются в формулы соответствующей детерминированной модели [48, 49]

$$T^* = \sqrt{\frac{2g(h+p)\lambda}{hp\,\mu(\lambda-\mu)}},$$
$$S^* = \sqrt{\frac{2gp\,\mu(\lambda-\mu)}{h(h+p)\,\lambda}},$$
$$L^* = \sqrt{\frac{2ghp\,\mu(\lambda-\mu)}{(h+p)\,\lambda}}.$$

Модель с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками и возможностью дефицита. При мгновенных поставках справедливо (2.25). В этом случае условия (2.34), (2.37) примут вид

$$\boldsymbol{\mu} > 0,$$
$$(h+p)\,\boldsymbol{\mu} - p\,\boldsymbol{\mu} > 0$$

соответственно. Выполняя далее предельный переход при $\lambda \longrightarrow \infty$ в формулах (2.38), (2.39), (2.40), получаем интервалы для оптимального управления и соответствующий интервал затрат

$$\mathbf{T}^* = \sqrt{\frac{2g(h+p)}{p}} \left[\frac{1}{\sqrt{(h+p)\overline{\mu} - p\underline{\mu}}}, \frac{1}{\sqrt{(h+p)\underline{\mu} - p\overline{\mu}}} \right], \tag{2.41}$$

$$\mathbf{S}^* = \sqrt{\frac{2gp}{h+p}} \left[\frac{\underline{\mu}}{\sqrt{(h+s)\overline{\mu} - p\underline{\mu}}}, \frac{\overline{\mu}}{\sqrt{(h+p)\underline{\mu} - p\overline{\mu}}} \right], \tag{2.42}$$

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}^*) = \left[\frac{1}{\overline{\mathrm{T}}^*} \left(g + \frac{(h+p)\,\underline{\mathrm{S}}^{*2}}{2\overline{\mu}} \right) + \frac{p\,\underline{\mu}\underline{\mathrm{T}}^*}{2} - p\,\overline{\mathrm{S}}^*, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\underline{\mathrm{T}}^*} \left(g + \frac{(h+p)\,\overline{\mathrm{S}}^{*2}}{2\underline{\mu}} \right) + \frac{p\,\overline{\mu}\overline{\mathrm{T}}^*}{2} - p\,\underline{\mathrm{S}}^* \right]. \tag{2.43}$$

Модель с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок при отсутствии дефицита. При отсутствии дефицита справедливо (2.20). В этом случае из (2.37) при $p \longrightarrow \infty$ имеем

$$\frac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}} > 0.$$

Это условие не может быть выполнено, так как по свойству интервального вычитания на $\mathbb{IR}$: $0 \in \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta} = \dfrac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\lambda}}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{IR}$. Следовательно, при $p \longrightarrow \infty$ не существует формального решения интервальной системы (2.36).

Таким образом, задача определения оптимальной периодической стратегии (T^*, S^*) для интервальной системы управления запасами при отсутствии дефицита не имеет смысла. Полученный вывод объясняется тем, что в условиях неопределенности уровень запаса в момент заказа T является переменной величиной, и вполне возможны случаи дефицита запаса в системе. Это противоречит условию о полном и своевременном удовлетворении спроса (отсутствии дефицита). Следовательно, при отсутствии дефицита нельзя применять периодическую стратегию управления.

2.4 Анализ результатов и численная реализация

В данном параграфе рассматривается одно интересное свойство представленных интервальных моделей размера партии, описан алгоритм определения оптимального управления (s^*, Q^*) и приведен численный пример, иллюстрирующий применение модели A при пороговой стратегии управления. Алгоритм определения оптимальной периодической стратегии управления (T^*, S^*) строится аналогичным образом, поэтому в данной работе не приводится.

Переход на периодический контроль уровня запасов. Как известно, непрерывный контроль уровня запасов требует дополнительных финансовых затрат и приводит к трудностям при практической реализации. Интервальные модели, рассмотренные в данной главе, позволяют избежать непрерывного контроля и отслеживать систему только в определенные периоды времени. Это свойство дает интервальным моделям управления запасами существенное преимущество перед классическими стохастическими моделями.

Для модели A определим временные интервалы, через которые следует отслеживать систему: интервал, содержащий момент заказа t_s (момент запуска производства для производственных систем), когда уровень запаса достигает точки заказа s, и интервал, содержащий момент прекращения поступления поставок по заказу t_S (момент остановки производства). При управлении (s, Q) имеем

$$t_s \in \frac{s+S}{\boldsymbol{\mu}} = \left[\frac{s+S}{\overline{\mu}}, \frac{s+S}{\underline{\mu}}\right], \tag{2.44}$$

$$t_S \in \frac{Q}{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\frac{Q}{\overline{\lambda}}, \frac{Q}{\underline{\lambda}}\right], \tag{2.45}$$

где

$$S = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ x(t_S), & \text{если } t > 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Для модели B, когда $s = 0$, из (2.44), (2.45) легко получить

$$t_s \in \frac{S}{\boldsymbol{\mu}} = \left[\frac{S}{\overline{\mu}}, \frac{S}{\underline{\mu}}\right],$$
$$t_S \in \frac{Q}{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\frac{Q}{\overline{\lambda}}, \frac{Q}{\underline{\lambda}}\right],$$

где S определяется (2.46), то есть $t_s = 0$ в момент времени $t = 0$.

При мгновенных поставках в моделях C и D необходимо определить только интервал для t_s

$$t_s \in \frac{Q}{\boldsymbol{\mu}} = \left[\frac{Q}{\overline{\mu}}, \frac{Q}{\underline{\mu}}\right].$$

Точность полученных результатов. В параграфе 2.1 для модели A были получены выражения для интервалов оптимального управления $(\mathbf{s}^*, \mathbf{Q}^*)$ и интервала затрат $\mathbf{L}^*$ таких, что для любого управления (s^*, Q^*), $s^* \in \mathbf{s}^*, Q^* \in \mathbf{Q}^*$, средние затраты системы в единицу времени L^* принадлежат интервалу $\mathbf{L}^*$ при любых значениях $\mu \in \boldsymbol{\mu}, \lambda \in \boldsymbol{\lambda}$. При небольшой ширине интервала затрат $\mathbf{L}^*$ точку заказа s^* и размер партии Q^* можно выбирать из интервалов $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$, не опасаясь существенных отклонений от оптимальной стратегии. Поэтому необходимо как можно более точно вычислить интервалы $\mathbf{s}^*, \mathbf{Q}^*, \mathbf{L}^*$.

Перепишем формулы (2.16), (2.17) в следующем виде

$$\mathbf{s}^* = \sqrt{\frac{2g\,h}{h+p}} \cdot \mathrm{pro}\left[\overline{\zeta}\sqrt{\frac{\underline{\mu}}{\underline{\eta}}},\ \underline{\zeta}\sqrt{\frac{\overline{\mu}}{\overline{\eta}}}\right], \tag{2.47}$$

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2g\,(h+p)}{h}} \cdot \mathrm{pro}\left[\sqrt{\frac{\overline{\mu}}{\overline{\eta}}},\ \sqrt{\frac{\underline{\mu}}{\underline{\eta}}}\right], \tag{2.48}$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = (h+p)\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} - h\frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{2.50}$$

Тогда условие (2.13) примет вид

$$\boldsymbol{\eta} > 0, \tag{2.51}$$

что равносильно условию $\underline{\eta} > 0$, так как интервал $\boldsymbol{\eta}$ – правильный. Наконец, формула (2.19) перепишется в виде

$$\mathbf{S}^* = -s^* + Q^*\boldsymbol{\zeta}. \tag{2.52}$$

Заметим, что в выражения для $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ интервальные переменные $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$ входят более одного раза. Поэтому [9] при вычислении нижних и верхних границ этих интервалов будем использовать метод Мура [1, 25, 68, 103], позволяющий более точно определить эти границы. Уточняя интервалы $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$, мы уточняем $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$, а следовательно, получаем более узкий интервал затрат $\mathbf{L}^*$. Подобные рассуждения можно провести и относительно выражения для функции затрат $\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^*, \mathbf{Q}^*)$, в которую интервальные переменные μ, λ, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$ входят более одного раза. Поэтому при вычислении интервала затрат $\mathbf{L}^*$ по формуле (2.18) будем использовать метод Мура, позволяющий более точно определить границы этого интервала.

Метод Мура. Идея метода Мура [1, 103] состоит в следующем. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n)$ – объединенное расширение [1, 25, 68, 103] функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) = \left\{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \, x_i \in \mathbf{x}_i, \ i = \overline{1, n} \right\},$$

а $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n)$ – естественное интервальное расширение [1, 25, 68, 103] функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n)$ получается, если вещественные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заменить соответствующими интервалами, а вещественные арифметические операции – интервально- арифметическими).

Разобьем каждый из интервалов $\mathbf{x}_i$, $i = \overline{1, n}$ на равные подынтервалы так, что

$$\mathbf{x}_i = \bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{x}_{ij}, \quad \operatorname{wid} \mathbf{x}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i}{m}.$$

Тогда,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) = \bigcup_{j_1, j_2, \ldots j_n} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{1j_1}, \mathbf{x}_{2j_2}, \ldots, \mathbf{x}_{nj_n}\right) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{j_1, j_2, \ldots j_n} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_{1j_1}, \mathbf{x}_{2j_2}, \ldots, \mathbf{x}_{nj_n}\right)$$

(объединение берется по $j_1, j_2, \dots j_n$, пробегающим независимо значения от 1 до m), причем при $m \to \infty$ расстояние

$$\operatorname{dist}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n), \bigcup_{j_1, j_2, \dots j_n} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_{1j_1}, \mathbf{x}_{2j_2}, \dots, \mathbf{x}_{nj_n}\right)\right) \longrightarrow 0.$$

Алгоритм. Алгоритм `IntervalControl` из Таблицы 2.1 вычисляет интервалы для оптимального управления $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$ и соответствующий им интервал затрат $\mathbf{L}^*$. Его основа – формулы (2.47), (2.48), (2.18) и метод Мура. Перед началом работы алгоритма необходимо проверить условие (2.1), задать количество подынтервалов m и положить

$$\underline{\eta}^* = +\infty,\ \overline{\eta}^* = -\infty,\ \underline{\zeta}^* = +\infty,\ \overline{\zeta}^* = -\infty,$$
$$\underline{\mathrm{Q}}^* = +\infty,\ \overline{\mathrm{Q}}^* = -\infty,\ \underline{\mathrm{s}}^* = +\infty,\ \overline{\mathrm{s}}^* = -\infty,\ \underline{\mathrm{L}}^* = +\infty,\ \overline{\mathrm{L}}^* = -\infty.$$

Для того чтобы оказаться в условиях моделей B, C или D достаточно принять штрафные потери $p = +\infty$ и/или интенсивность поставок $\lambda = \underline{\lambda} = \overline{\lambda} = +\infty$. Но стоит заметить, что в этих случаях алгоритм `IntervalControl` значительно упрощается. Если условно разделить его на три части: 1. вычисление интервалов $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ и проверка условия (2.51); 2. вычисление интервалов оптимального управления $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$; 3. вычисление интервала затрат $\mathbf{L}^*$, то получаем следующее. Первая часть алгоритма изменяется для модели B (здесь необходимо вычислить только интервал $\boldsymbol{\zeta}$), и совсем отсутствует для моделей C, D (так как здесь в выражения для интервалов оптимального управления интервальная переменная $\boldsymbol{\mu}$ входит только один раз); условие (2.51) для моделей B, C, D выполняется автоматически; третья часть алгоритма упрощается за счет сокращения количества переменных, от которых зависит функция затрат (в моделях B, C функция затрат зависит от трех переменных, в модели D – от двух).

В Таблице 2.2 приведены результаты численных расчетов по алгоритму `IntervalControl`.

Таблица 2.1: Алгоритм `IntervalControl`

полагаем $\boldsymbol{\mu}_{temp} = \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}_{temp} = \boldsymbol{\lambda}$, $\quad \lambda = \underline{\lambda}$, $\eta = \underline{\eta}^*$, $\zeta = \underline{\zeta}^*$;
`For i = 1 To m`
$\quad \overline{\mu} = \underline{\mu} + \dfrac{\operatorname{wid} \boldsymbol{\mu}_{temp}}{m}$, $\underline{\lambda} = \lambda$;
$\quad$ `For j = 1 To m`
$\quad \overline{\lambda} = \underline{\lambda} + \dfrac{\operatorname{wid} \boldsymbol{\lambda}_{temp}}{m}$;
$\qquad$ вычисляем интервалы η и ζ по формулам (2.49), (2.50);
$\qquad$ `If` $\underline{\eta} < \underline{\eta}^*$ `Then` $\underline{\eta}^* = \underline{\eta}$, `If` $\overline{\eta} > \overline{\eta}^*$ `Then` $\overline{\eta}^* = \overline{\eta}$;
$\qquad$ `If` $\underline{\zeta} < \underline{\zeta}^*$ `Then` $\underline{\zeta}^* = \underline{\zeta}$, `If` $\overline{\zeta} > \overline{\zeta}^*$ `Then` $\overline{\zeta}^* = \overline{\zeta}$;
$\qquad \underline{\lambda} = \overline{\lambda}$;
$\quad$ `Next j`
$\quad \underline{\mu} = \overline{\mu}$;
`Next i`
проверяем условие (2.51);
вычисляем интервалы $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{s}^*$ по формулам (2.47), (2.48) при $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$, $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^*$;
вычисляем интервал $\mathbf{S}^*$ по формуле (2.52);
полагаем $\mathbf{Q}_{temp} = \mathbf{Q}^*$, $\mathbf{s}_{temp} = \mathbf{s}^*$, $\quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{temp}$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_{temp}$;
`For i = 1 To m`
$\quad \overline{\mu} = \underline{\mu} + \dfrac{\operatorname{wid} \boldsymbol{\mu}_{temp}}{m}$, $\underline{\lambda} = \lambda$, $\underline{\mathrm{Q}}^* = Q$, $\underline{\mathrm{s}}^* = s$;
$\quad$ `For j = 1 To m`
$\qquad \overline{\lambda} = \underline{\lambda} + \dfrac{\operatorname{wid} \boldsymbol{\lambda}_{temp}}{m}$, $\underline{\mathrm{Q}}^* = Q$, $\underline{\mathrm{s}}^* = s$;
$\qquad$ `For k = 1 To m`
$\qquad\quad \overline{\mathrm{Q}}^* = \underline{\mathrm{Q}}^* + \dfrac{\operatorname{wid} \mathbf{Q}_{temp}}{m}$, $\underline{\mathrm{s}}^* = s$;
$\qquad\quad$ `For l = 1 To m`
$\qquad\qquad \overline{\mathrm{s}}^* = \underline{\mathrm{s}}^* + \dfrac{\operatorname{wid} \mathbf{s}_{temp}}{m}$;
$\qquad\qquad$ вычисляем интервал $\mathbf{L}$ по формуле (2.18);
$\qquad\qquad$ `If` $\underline{\mathrm{L}} < \underline{\mathrm{L}}^*$ `Then` $\underline{\mathrm{L}}^* = \underline{\mathrm{L}}$, `If` $\overline{\mathrm{L}} > \overline{\mathrm{L}}^*$ `Then` $\overline{\mathrm{L}}^* = \overline{\mathrm{L}}$;
$\qquad\qquad \underline{\mathrm{s}}^* = \overline{\mathrm{s}}^*$;
$\qquad\quad$ `Next l`
$\qquad\quad \underline{\mathrm{Q}}^* = \overline{\mathrm{Q}}^*$;
$\qquad$ `Next k`
$\qquad \underline{\lambda} = \overline{\lambda}$;
$\quad$ `Next j`
$\quad \underline{\mu} = \overline{\mu}$;
`Next i`
выводим интервалы $\mathbf{Q}^* = \left[\underline{\mathrm{Q}}^*, \overline{\mathrm{Q}}^*\right]$, $\mathbf{s}^* = [\underline{\mathrm{s}}^*, \overline{\mathrm{s}}^*]$ и $\mathbf{L}^* = \left[\underline{\mathrm{L}}^*, \overline{\mathrm{L}}^*\right]$.

Таблица 2.2: Результаты расчетов по алгоритму `IntervalControl` при g =50, h =0.2, p =0.5

$\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$	$\boldsymbol{\lambda} = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$	$\mathbf{s}^* = [\underline{s}^*, \overline{s}^*]$	$\mathbf{Q}^* = [\underline{Q}^*, \overline{Q}^*]$	$\mathbf{L}^* = [\underline{L}^*, \overline{L}^*]$	wid $\mathbf{L}^*$
[2500, 2500]	[6300, 6300]	[293.54, 293.54]	1703.32, 1703.32]	[146.77, 146.77]	0.00
[2400, 2600]	[6300, 6300]	[287.72, 299.15]	1691.32, 1714.63]	[145.56, 148.08]	2.52
[2500, 2500]	[6200, 6400]	[288.93, 298.17]	1694.57, 1712.49]	[145.84, 147.71]	1.88
[2450, 2550]	[6250, 6350]	[288.34, 298.69]	1702.11, 1704.76]	[145.74, 147.83]	2.09
[2400, 2600]	[6200, 6400]	[283.08, 303.77]	1701.04, 1706.37]	[144.72, 148.94]	4.22
[2350, 2650]	[6150, 6450]	[277.74, 308.81]	1700.28, 1708.19]	[143.70, 150.10]	6.40
[2300, 2700]	[6100, 6500]	[272.33, 313.81]	1699.70, 1710.13]	[142.69, 151.30]	8.61

Из таблицы видно, что в случае точно заданных интенсивностей спроса и поставок (вырожденных интервалов μ и λ) интервалы для оптимальной стратегии $(s^*,\ Q^*)$ и интервал затрат $\mathbf{L}^*$ также получаются вырожденными. При появлении неопределенности в данных (хотя бы один из интервалов μ и λ – невырожденный), интервалы $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$ и $\mathbf{L}^*$ получаются невырожденными. Причем, чем больше неопределенность, тем больше ширина интервалов $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{Q}^*$, что, очевидно, сказывается на ширине интервала затрат $\mathbf{L}^*$.

Пример. Рассмотрим систему управления запасами со следующими характеристиками. Пусть завод производит некоторую продукцию. Будем предполагать, что продукция производится партиями и поступает с завода непосредственно на склад. Об интенсивностях производства λ и спроса на продукцию μ известно лишь то, что они могут принимать значения в интервалах $\boldsymbol{\lambda} = [6000, 6500]$ и $\boldsymbol{\mu} = [2500, 2800]$ единиц продукции в неделю. Требуется найти точку заказа s^* и оптимальный размер партии Q^*, исходя из того, что система допускает некоторый дефицит запаса. В этом случае формируется портфель невыполненных заказов, которые удовлетворяются по мере поступления продукции на склад. Предполагается, что фиксированные расходы, связанные с запуском производства, g $=$ 50 у.е., затраты на содержание продукции на складе h $=0.2$ у.е. на единицу продукции в неделю, штрафные потери p $=$ 0.5 у.е. на единицу продукции в неделю.

Используя алгоритм `IntervalControl` получаем интервалы для оптимального управления

$$\mathbf{s}^* = [271.90, 318.55], \tag{2.53}$$

$$\mathbf{Q}^* = [1784.49, 1811.63], \tag{2.54}$$

средние затраты системы за неделю будут находиться в интервале

$$\mathbf{L}^* = [143.75, 151.92].$$

Предельный уровень запаса будет принадлежать интервалу

$$\mathbf{S}^* = [662.64, 809.85].$$

На Рисунке 2.2 показана динамика изменения уровня запаса на складе при управлении (300, 1800), то есть всякий раз, когда уровень дефицит в системе достигает 300 единиц подается заказ на производство 1800 единиц продукции. Здесь жирным маркером выделены периоды отслеживания системы, рассчитанные по формулам (2.44), (2.45) (результаты расчетов представлены в Таблице 2.3). Динамика изменения интенсивностей спроса и поставок показана на Рисунке 2.3. Средние затраты в неделю составили 147,84 у.е.

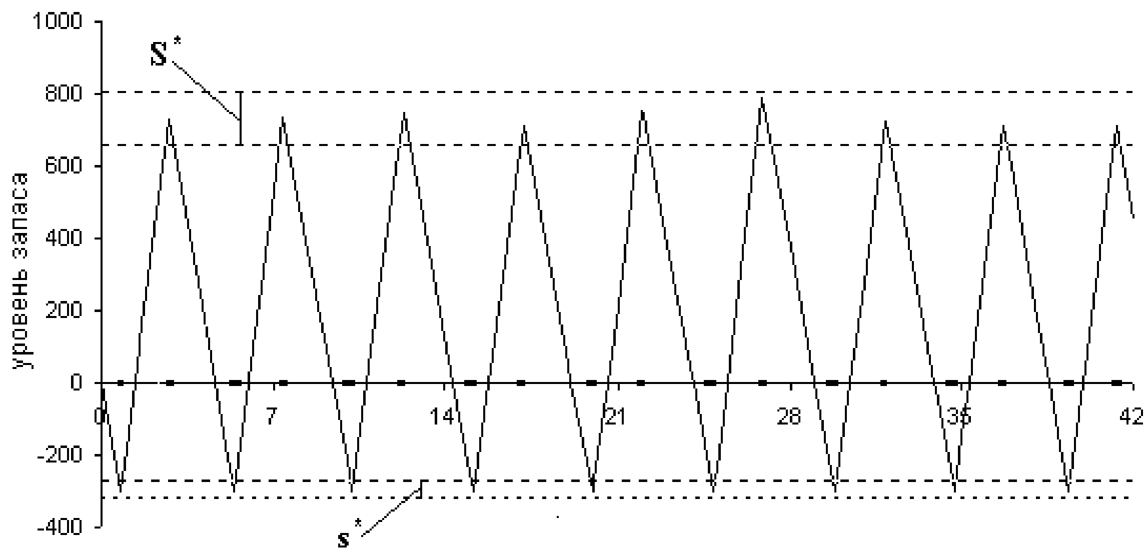


Рисунок 2.2: Динамика изменения запаса при управлении (300, 1800)

Таблица 2.3: График отслеживания системы

	через сколько дней отслеживать систему $\underline{t}$	$\overline{t}$	интервал отслеж. системы (время текущее)		t	$x(t)$
t_S	0,750	0,840	0,750	0,840	0,772	-299,976
$t_{S'}$	1,938	2,100	2,710	2,872	2,753	730,147
t_S	2,575	2,884	5,328	5,637	5,404	-299,947
$t_{S'}$	1,938	2,100	7,342	7,504	7,402	733,030
t_S	2,583	2,892	9,985	10,294	10,236	-299,776
$t_{S'}$	1,938	2,100	12,174	12,336	12,305	745,366
t_S	2,613	2,927	14,918	15,232	15,141	-299,906
$t_{S'}$	1,938	2,100	17,079	17,241	17,238	713,537
t_S	2,534	2,838	19,772	20,076	19,942	-299,687
$t_{S'}$	1,938	2,099	21,880	22,041	21,977	750,383
t_S	2,626	2,941	24,603	24,918	24,887	-299,709
$t_{S'}$	1,937	2,099	26,824	26,986	26,858	787,162
t_S	2,718	3,044	29,576	29,902	29,823	-299,703
$t_{S'}$	1,937	2,098	31,760	31,921	31,918	723,249
t_S	2,558	2,865	34,476	34,783	34,682	-299,818
$t_{S'}$	1,937	2,098	36,619	36,780	36,713	713,665
t_S	2,534	2,838	39,247	39,551	39,315	-299,624
$t_{S'}$	1,936	2,098	41,251	41,413	41,334	711,893

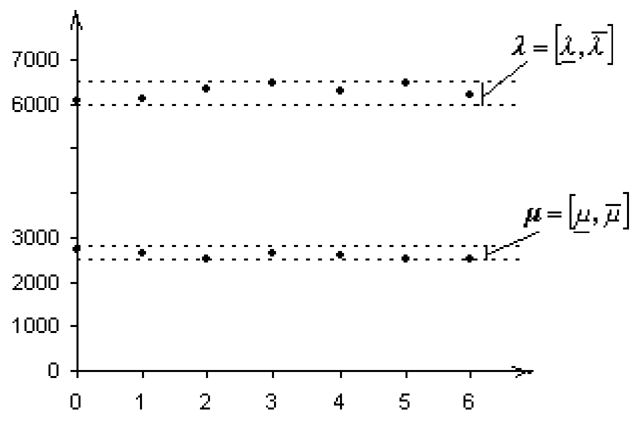


Рисунок 2.3: Динамика изменения интенсивностей спроса и поставок

2.5 Выводы

В данной главе были рассмотрены модели однономенклатурных систем управления запасами с непрерывным контролем при неопределенности в спросе и поставках. Неизвестные интенсивности спроса и поставок моделировались в виде интервалов. Для определения оптимальных параметров стратегий управления (пороговой и периодической) использовались методы интервального анализа. Получены следующие результаты:

1) Разработан метод определения оптимальной стратегии управления для модели с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок и возможностью дефицита (модель A). Получены аналитические выражения интервальных величин оптимальных параметров пороговой (формулы (2.16), (2.17)) и периодической (формулы (2.38), (2.39)) стратегий управления. Найдены выражения для соответствующего интервала затрат (формулы (2.18) и (2.40));

2) Рассмотрены частные случаи модели A: модель B с интервально заданными интенсивностями спроса и поставок при отсутствии дефицита (формулы (2.21), (2.22), (2.23): пороговая стратегия), модель C с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками и возможностью дефицита (формулы (2.26), (2.27), (2.28): пороговая стратегия и формулы (2.41), (2.42), (2.43): периодическая стратегия), и модель D с интервально заданной интенсивностью спроса, мгновенными поставками при отсутствии дефицита (формулы (2.30), (2.31), (2.32): пороговая стратегия). Показано, что при отсутствии дефицита (модели B и D) нельзя применять периодическую стратегию управления.

3) Показано, что интервальные модели размера партии при пороговой стратегии управления позволяют избежать непрерывного контроля и отслеживать систему только в определенные периоды времени (формулы (2.44), (2.45));

4) Предложен вычислительный алгоритм определения оптимального управления (таблица 2.1);

5) Приведены результаты численных расчетов (таблицы 2.2,2.3, рисунки 2.2, 2.3).

Глава 3

Интервальные модели размера партии с периодическим контролем уровня запасов

Системы с периодическим контролем уровня запасов имеют ряд преимуществ перед системами с непрерывным контролем, рассмотренными в Главе 2. Во-первых, при практической реализации последние требуют сложной системы обработки данных и, как следствие, дополнительных финансовых затрат. Во-вторых, такие системы предполагают стационарность коэффициентов затрат на бесконечном периоде планирования. Системы с периодическим контролем допускают нестационарность экономических параметров, что отражает динамичный характер реальных систем управления запасами. Бесконечность же планового периода несущественна, так как в большинстве случаев отдаленное будущее почти не влияет на решения, которые принимаются в настоящем.

В данной главе рассматривается модель однономенклатурной системы управления запасами с периодическим контролем при неопределенном интервально заданном спросе, мгновенных поставках, ограничениях на уровень запаса и величину заказана, и конечном периоде планирования запасов. В терминах полной интервальной арифметики Каухера определяются необходимые и достаточные условия существования допустимого управления и оптимальной допустимой стратегии управления. Предлагается алгоритм построения оптимальной допустимой стратегии, которая обеспечивает гарантированный результат при любом значении спроса из заданного интервала. Результаты обобщаются на случай нестационарной интервальной неопределенности спроса, когда интервал возможных значений спроса меняется во времени. Приводится численный пример.

Результаты данной главы опубликованы в работе [56].

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим однономенклатурную систему управления запасами с периодическим контролем уровня запасов при интервально заданном спросе, мгновенных поставках и конечном периоде планирования запасов. Динамика системы описывается следующим разностным уравнением

$$x(t+1) = x(t) + u(t) - d(t), \quad t = \overline{0, T-1}, \tag{3.1}$$

где $x(t)$ – состояние системы (уровень запаса) в момент времени t; $u(t)$ – управление (величина заказа на восполнение запаса) в момент времени t; $d(t)$ – спрос на отрезке $[t, t+1)$; T – плановый период.

Относительно спроса $d(t)$ известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения в заданном интервале

$$d(t) \in \mathbf{D}, \quad t = \overline{0, T-1}, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{D} = \left[\underline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{D}}\right]$, $\mathbf{D} \geq 0$.

На состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$ в момент времени t накладываются ограничения, которые обусловлены возможностями системы,

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad t = \overline{0, T}, \tag{3.3}$$

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t = \overline{0, T-1}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{X} = \left[0, \overline{\mathrm{X}}\right]$; $\mathbf{U} \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{U} = \left[0, \overline{\mathrm{U}}\right]$.

Кроме того, предполагается полное и своевременное удовлетворение спроса в пределах каждого отрезка $[t, t+1)$, $t = \overline{0, T-1}$, то есть дефицит запаса в системе не допускается.

Определение 3.1. *Будем называть функцию* $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, *допустимым на интервале* $\mathbf{X}$ *управлением для состояния* $x(t)$ *в момент времени* t, $t = \overline{0, T-1}$, *если для любого значения спроса* $d(t) \in \mathbf{D}$ *выполнено включение* $x(t+1) \in \mathbf{X}$, *где* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (3.1).

Определение 3.2. *Будем называть стратегию*

$$\Phi = \{u(0), u(1), \ldots, u(T-1)\}, \ u(t) \in \mathbf{U}, \ t = \overline{0, T-1},$$

допустимой на интервале $\mathbf{X}$ *стратегией управления для начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$*, если для любого значения* $d(t) \in \mathbf{D}$ *выполнено включение* $x(t+1) \in \mathbf{X}$*, где* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (3.1).

Пусть затраты системы на формирование и поддержание запаса определяются состоянием системы на конец каждого отрезка $[t, t+1)$, $t = \overline{0, T-1}$. Тогда для любого фиксированного значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}$ затраты системы на отрезке $[t, t+1)$ при уровне запаса $x(t)$ и величине заказа $u(t)$ описываются функцией

$$C\left(x(t), u(t), d(t), t\right) = g(t) + c(t)u(t) + h(t)\left(x(t) + u(t) - d(t)\right), \quad t = \overline{0, T-1}, \qquad (3.5)$$

где $g(t)$ – фиксированная составляющая транспортных затрат и затрат на размещение заказа в момент времени t (затраты на запуск производства для производственных систем); $c(t)$ – затраты на поставку единицы запаса в момент времени t (затраты на производство единицы продукции); $h(t)$ – затраты на хранение единицы запаса на отрезке $[t, t+1)$.

Учитывая интервальную неопределенность спроса (3.2), представим функцию затрат системы в виде естественного интервального расширения [1, 25, 68, 103] функции (3.5)

$$\mathbf{C}\left(x(t), u(t), \mathbf{D}, t\right) = g(t) + c(t)u(t) + h(t)(x(t) + u(t) - \mathbf{D}), \quad t = \overline{0, T-1}.$$

Тогда, для любого значения $d(t) \in \mathbf{D}$ справедливо включение

$$C\left(x(t), u(t), d(t), t\right) \in \mathbf{C}\left(x(t), u(t), \mathbf{D}, t\right), \quad t = \overline{0, T-1}.$$

Необходимо определить оптимальную допустимую на интервале $\mathbf{X}$ стратегию управления $\Phi^* = \{u^*(0), u^*(1), \ldots, u^*(T-1)\}$, минимизирующую суммарные расходы системы в плановом периоде. Кроме того, потребуем, чтобы запас на конец периода планирования $x(T)$ не превосходил заданного уровня $\overline{\mathrm{X}}_T$, $\overline{\mathrm{X}}_T \in \mathbf{X}$. Таким образом, имеем следующую оптимизационную задачу

$$\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}\left(x(t), u(t), \mathbf{D}, t\right) \Rightarrow \min_{\Phi \in \Phi\left(x(0)\right)} \tag{3.6}$$

при ограничении

$$x(T) \leq \overline{\mathrm{X}}_T, \tag{3.7}$$

где $\overline{\mathrm{X}}_T \in \mathbf{X}$; $\Phi\left(x(0)\right)$ – множество стратегий, допустимых при начальном запасе $x(0) \in \mathbf{X}$ ($x(0)$ предполагается известным).

3.2 Условия существования оптимального решения

Теорема 3.1 (о существовании допустимого управления)**.** *Для любого состояния системы* $x(t) \in \mathbf{X}$ *допустимое на интервале* $\mathbf{X}$ *управление с обратной связью* $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, *в момент времени* t, $t = \overline{0, T-1}$, *существует и определяется из включения*

$$x(t) + u(t) \in \mathbf{X} + \operatorname{dual}\mathbf{D}, \tag{3.8}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathbf{X} + \operatorname{dual}\mathbf{D} \in \mathbb{IR}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{D} \subseteq \mathbf{U}. \tag{3.10}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для любого $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t = \overline{0, T-1}$, существует допустимое на интервале $\mathbf{X}$ управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, удовлетворяющее (3.8). Включение (3.8) имеет смысл, если и только если выполнено условие (3.9). Из (3.8) получаем, что для любого $x(t) \in \mathbf{X}$ существует допустимое управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$ такое, что

$$x(t) \subseteq \mathbf{X} + \operatorname{dual}\mathbf{D} - u(t).$$

Следовательно, для любого $x(t) \in \mathbf{X}$ справедливо включение

$$x(t) \subseteq \mathbf{X} + \operatorname{dual}\mathbf{D} - \mathbf{U},$$

что эквивалентно

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{X} + \operatorname{dual} \mathbf{D} - \mathbf{U},$$

откуда имеем

$$\mathbf{0} \subseteq \operatorname{dual} \mathbf{D} - \mathbf{U}.$$

Добавляя к обеим частям включения $\operatorname{opp}(-\mathbf{U}) = \operatorname{dual} \mathbf{U}$, получаем

$$\operatorname{dual} \mathbf{U} \subseteq \operatorname{dual} \mathbf{D},$$

следовательно, $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{U}$, что доказывает условие (3.10).

Достаточность. Пусть выполнены условия (3.9), (3.10). Построим управление $u(t)$ в момент времени $t, t = \overline{0, T-1}$ в виде (3.8) (в силу (3.9) включение (3.8) имеет смысл). Покажем сначала, что такое управление существует для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}$. Действительно, из (3.8) имеем

$$x(t) \in \mathbf{X} + \operatorname{dual} \mathbf{D} - u(t),$$

откуда получаем интервал значений $x(t)$, для которых существует управление $u(t) \in \mathbf{U}$, удовлетворяющее (3.8),

$$x(t) \in \mathbf{X} + \operatorname{dual} \mathbf{D} - \mathbf{U}. \tag{3.11}$$

С другой стороны, в силу (3.10) получаем

$$x(t) \in \mathbf{X} = \mathbf{X} + \operatorname{dual} \mathbf{D} - \mathbf{D} \subseteq \mathbf{X} + \operatorname{dual} \mathbf{D} - \mathbf{U},$$

следовательно, управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, которое гарантирует (3.8), существует для любого $x(t) \in \mathbf{X}$. Покажем далее, что такое управление является допустимым на интервале $\mathbf{X}$. Добавляя к обеим частям включения (3.8) интервал $\operatorname{opp}(\operatorname{dual} \mathbf{D}) = -\mathbf{D}$, получаем включение

$$x(t) + u(t) - \mathbf{D} \subseteq \mathbf{X},$$

которое гарантирует, что

$$x(t) + u(t) - d(t) \subseteq \mathbf{X}$$

для любого значения $d(t) \in \mathbf{D}$. Тогда, по Определению 3.1 $u(t)$ является допустимым управлением для состояния $x(t)$. □

Следствие 3.1. *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$ существует, если и только если выполнены условия* (3.9), (3.10). (Доказательство легко получить с учетом Определения 3.2.)

Введем интервальнозначную функцию [1, 25, 68, 103] $\mathbf{X}(a, b) = [a, b]$, которая определена для любых $a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{X} = \mathbf{X}(0, \overline{\mathrm{X}})$). Тогда ограничение (3.7), учитывая (3.3), эквивалентно включению

$$x(T) \in \mathbf{X}_T, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{X}_T = \mathbf{X}(0, \overline{\mathrm{X}}_T),\ \mathbf{X}_T \subseteq \mathbf{X}$, есть интервал допустимых состояний системы в момент времени T.

Теорема 3.2. *Для любого начального состояния системы $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая гарантирует включение* (3.12), *если и только если выполнены условия* (3.9), (3.10), *интервал допустимых начальных состояний имеет вид*

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}, \tag{3.13}$$

а предельный запас на конец периода планирования удовлетворяет условию

$$\overline{\mathrm{X}}_T \in \mathbf{X}(\overline{\mathrm{D}} - \underline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{X}}). \tag{3.14}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для любого $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что справедливо (3.12). В силу Следствия 3.1 выполнены условия (3.9), (3.10). Так как допустимая стратегия управления существует для любого $x(0) \in \mathbf{X}$, справедливо (3.13).

Согласно (3.12) управление $u(T-1)$ удовлетворяет включению

$$x(T-1) + u(T-1) - d(T-1) \in \mathbf{X}_T$$

для любого значения $d(T-1) \in \mathbf{D}$, что равносильно

$$x(T-1) + u(T-1) - \mathbf{D} \in \mathbf{X}_T,$$

откуда, добавляя к обеим частям включения $\operatorname{opp}(-\mathbf{D}) = \operatorname{dual}\mathbf{D}$, получаем

$$x(T-1) + u(T-1) \in \mathbf{X}_T + \operatorname{dual}\mathbf{D}.$$

Последнее включение имеет смысл, если и только если

$$\mathbf{X}_T + \operatorname{dual}\mathbf{D} \in \mathbb{IR},$$

то есть

$$\underline{\mathbf{X}_\mathrm{T} + \operatorname{dual}\mathbf{D}} \leq \overline{\mathbf{X}_\mathrm{T} + \operatorname{dual}\mathbf{D}},$$

откуда имеем

$$\overline{\mathrm{D}} \leq \overline{\mathrm{X}}_T + \underline{\mathrm{D}},$$

и, следовательно, $\overline{\mathrm{D}} - \underline{\mathrm{D}} \leq \overline{\mathrm{X}}_T$. С другой стороны $\overline{\mathrm{X}}_T \in \mathbf{X}(0, \overline{\mathrm{X}})$. Тогда, так как $\overline{\mathrm{D}} - \underline{\mathrm{D}} \geq 0$ (в силу того, что $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}$) и $\overline{\mathrm{D}} - \underline{\mathrm{D}} \leq \overline{\mathrm{X}}$ (в силу условия (3.9)), получаем $\overline{\mathrm{X}}_T \in \mathbf{X}(\overline{\mathrm{D}} - \underline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{X}})$, что доказывает (3.14).

Достаточность. Покажем сначала по индукции, что

$$\mathbf{X}_t + \operatorname{dual}\mathbf{D} \in \mathbb{IR}, \quad t = \overline{T, 0}, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{X}_t$ определяется интервальным рекуррентным соотношением

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_{t+1} + \operatorname{dual}\mathbf{D} - \mathbf{U}) \bigcap \mathbf{X}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \tag{3.16}$$
$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}(0, \overline{\mathrm{X}}_T),$$

($\bigcap$ – операция пересечения двух интервалов). В силу (3.14), утверждение (3.15) верно для $t = T$. Предполагая, что (3.15) справедливо для произвольного t, покажем, что оно справедливо и для $t-1$. Так как $\mathbf{X}_t \subseteq \mathbf{X}$ и с учетом (3.10)

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_t + \operatorname{dual}\mathbf{D} - \mathbf{D} \subseteq \mathbf{X}_t + \operatorname{dual}\mathbf{D} - \mathbf{U},$$

то выполнено включение $\mathbf{X}_t \subseteq \mathbf{X}_{t-1}$. Тогда

$$\mathbf{X}_t + \operatorname{dual}\mathbf{D} \subseteq \mathbf{X}_{t-1} + \operatorname{dual}\mathbf{D},$$

и, следовательно, $\mathbf{X}_{t-1} + \operatorname{dual}\mathbf{D} \in \mathbb{IR}$, что и доказывает (3.15).

Далее, так как в момент времени $T-1$ выполнены условия (3.15), (3.10), то по Теореме 3.1 для любого состояния $x(T-1) \in \mathbf{X}_T$ существует допустимое на интервале $\mathbf{X}_T$ управление $u(T-1)$, которое определяется из включения

$$x(T-1) + u(T-1) \in \mathbf{X}_T + \operatorname{dual}\mathbf{D}. \tag{3.17}$$

Кроме того, аналогично (3.11) получаем, что управление, гарантирующее (3.17), существует для любого

$$x(T-1) \in \mathbf{X}_T + \operatorname{dual}\mathbf{D} - \mathbf{U}.$$

Тогда, с учетом (3.3) получаем интервал допустимых состояний в момент $T-1$

$$\mathbf{X}_{T-1} = (\mathbf{X}_T + \operatorname{dual}\mathbf{D} - \mathbf{U}) \bigcap \mathbf{X},$$

для которых существует допустимое на интервале $\mathbf{X}_T$ управление $u(T-1)$, гарантирующее (3.12). По индукции нетрудно показать, что в момент $t, t = \overline{T-1, 0}$, для любого $x(t) \in \mathbf{X}_t$ допустимое на интервале $\mathbf{X}_{t+1}$ управление $u(t) \in \mathbf{U}$ существует и определяется из включения

$$x(t) + u(t) \in \mathbf{X}_{t+1} + \operatorname{dual}\mathbf{D}, \tag{3.18}$$

где $\mathbf{X}_t$ – интервал допустимых состояний в момент времени t.

Таким образом, для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}_0$ можно построить стратегию $\Phi = \{u(0), u(1), \ldots, u(T-1)\}$ такую, что

$$x(t) \in \mathbf{X}_t, \quad t = \overline{0, T}, \tag{3.19}$$

то есть гарантирующую (3.12). Стратегия Φ является допустимой на интервале $\mathbf{X}$ стратегией управления по Определению 3.2, так как $\mathbf{X}_t \subseteq \mathbf{X}$. В силу (3.13) такая стратегия существует для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$. $\square$

Следствие 3.2. *Минимальное значение предельного запаса на конец периода планирования имеет вид*

$$\overline{\mathrm{X}}_T^{min} = \overline{\mathrm{D}} - \underline{\mathrm{D}}.$$

Следствие 3.3. *Для любого начального состояния системы оптимальная допустимая на интервале* $\mathbf{X}$ *стратегия управления существует, если и только если выполнены условия* (3.9), (3.10), (3.13), (3.14).

Замечание 3.1. *Включения* (3.19) *гарантируют, что запас в системе поддерживается на уровне, необходимом для удовлетворения спроса на каждом отрезке, и не превышает суммарную величину спроса за оставшееся до конца периода планирования время.*

3.3 Определение оптимальной стратегии

Для определения оптимальной в смысле критерия (3.6) стратегии управления воспользуемся методом динамического программирования. Согласно принципу оптимальности Беллмана [6] для функции затрат решения на все оставшиеся отрезки должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения, независимо от ранее принятых решений и начального состояния. Определим последовательность функций

$$\mathbf{f}_k(x) = \min_{u(k),\ldots,u(T-1)} \sum_{t=k}^{T-1} \mathbf{C}(x(t), u(t), \mathbf{D}, t), \quad k = \overline{0, T-1},$$

где $\mathbf{f}_k(x)$ – минимальные затраты за оставшиеся до конца периода планирования $T-k$ отрезков при уровне запаса x; $u(t)$ – допустимое управление для состояния $x(t)$ в момент времени $t, t = \overline{k, T-1}$; $x(k) = x$, а $x(t),\ t = \overline{k+1, T-1}$, определяется рекуррентным соотношением (3.1). Согласно утверждению (3.18), в момент времени t для состояния $x \in \mathbf{X}_t$ управление u должно удовлетворять включениям

$$u \in \mathbf{U},$$
$$x + u \in \mathbf{X}_{t+1} + \operatorname{dual}\mathbf{D},$$

что эквивалентно

$$u \in \mathbf{U}_t,$$

где

$$\mathbf{U}_t = (\mathbf{X}_{t+1} + \operatorname{dual}\mathbf{D} - x) \bigcap \mathbf{U}. \qquad (3.20)$$

Тогда для любого $x \in \mathbf{X}_t$ рекуррентное соотношение динамического программирования имеет вид

$$\mathbf{f}_t(x) = \min_{u \in \mathbf{U}_t} \left\{ \mathbf{C}(x, u, \mathbf{D}, t) + \mathbf{f}_{t+1}(x + u - \mathbf{D}) \right\}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \qquad (3.21)$$
$$\mathbf{f}_T(x) = 0,$$

где $\mathbf{X}_t$ и $\mathbf{U}_t$ определяются соотношениями (3.16), (3.20).

Таким образом, получаем задачу интервального динамического программирования. Для ее решения можно использовать подход, предложенный в [10,11] для оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности. Согласно [10, 11], максиминная модель обеспечивает гарантированный результат при любом значении неизвестного интервально заданного параметра системы. Тогда для любого $x \in \mathbf{X}_t$ из (3.21) будем иметь

$$f_t(x) = \max_{d \in \mathbf{D}} \min_{u \in \mathbf{U}_t} \left\{ C(x, u, d, t) + f_{t+1}(x + u - d) \right\}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \qquad (3.22)$$
$$f_T(x) = 0,$$

где $\mathbf{X}_t$ и $\mathbf{U}_t$ определяются соотношениями (3.16), (3.20).

Полученные соотношения (3.22) позволяют построить алгоритм численного решения задачи (3.6). На первом шаге ($t = T - 1$) для всех допустимых $x(T-1) \in \mathbf{X}_{T-1}$ вычисляются $f_{T-1}(x)$ и определяются соответствующие оптимальные управления $u^*(T-1)$. Затем для всех допустимых $x(t) \in \mathbf{X}_t$, $t = \overline{T-2, 1}$, по соотношению (3.22) рекуррентно вычисляются $f_t(x)$ и определяются оптимальные $u^*(t)$. На последнем шаге ($t = 0$) вычисляется только $f_0(x(0))$ и соответствующее $u^*(0)$ для заданного начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$. В результате, для начального состояния $x(0)$ получаем оптимальную в смысле критерия (3.6) стратегию управления $\Phi^* = \{u^*(0), u^*(1), \ldots, u^*(T-1)\}$.

Замечание 3.2. *Динамическое программирование непосредственно ориентировано на решение дискретных задач, однако, его можно использовать и для задач, в которых все переменные непрерывны. В этом случае непрерывные интервалы допустимых значений состояний* $\mathbf{X}_t$

и управлений $\mathbf{U}_t$ дискретизируются. Для конечного числа состояний $x \in \mathbf{X}_t$ на конечном множестве решений $\mathbf{U}_t$ определяется локальный минимум $u^*(t) \in \mathbf{U}_t$ (или минимумы). Затем в окрестности найденного минимума (или минимумов) используется более мелкая сетка, пока не будет получена достаточная точность (доказанная выпуклость или вогнутость функции затрат существенно ограничивает перебор). При этом непрерывные функции заменяются аппроксимациями по ряду дискретных точек.

3.4 Пример

Пусть фирме необходимо разработать календарную программу планирования запасов на пол года вперед ($T = 6$). Допустим, что спрос, величина заказа и размер запаса могут принимать только целые значения. Тогда на каждом шаге оптимальное управление, удовлетворяющее (3.22), можно определить обычным перебором (в непрерывном случае используются численные методы). Пусть

$$\mathbf{D} = [2, 3], \mathbf{X} = [0, 4], \mathbf{U} = [0, 5].$$

Предположим также, что коэффициенты затрат в течение всего периода планирования постоянны и для любого $t, t = \overline{0, 5}$ имеют вид

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } u(t) = 0, \\ 13, & \text{при } u(t) > 0. \end{cases}$$
$$c(t) = 2,$$
$$h(t) = 1,$$

Кроме того, потребуем, чтобы предельный уровень запаса на конец планового периода был минимальным, следовательно,

$$\overline{\mathrm{X}}_T = 1.$$

Для данной системы условия теорем 3.1, 3.2 выполнены. Интервалы допустимых состояний системы имеют следующий вид

$$\mathbf{X}_6 = [0, 1];\ \mathbf{X}_5 = [0, 3];\ \mathbf{X}_t = \mathbf{X}, t = \overline{4, 0}.$$

Результаты расчета оптимальной стратегии по формуле (3.22) представлены в Таблице 3.1. Отметим, что оптимальное решение не единственно: на первом и втором временном промежутке ($t = 0, 1$) при отсутствии запаса ($x = 0$) оптимальными являются два значения величины заказа ($u(x) = 3, u(x) = 4$). С точки зрения построенного критерия оптимальности (3.6) эти решения равнозначны (эквивалентны), однако, выбор того или иного управления определяет соответствующее распределение затрат во времени. Кроме того, при $t = 5$ уровень запаса $x = 4$ не допустим.

Таблица 3.1: Результаты расчета оптимальной стратегии

x	$t=5$		$t=4$		$t=3$		$t=2$		$t=1$		$t=0$	
	$u(x)$	$f(x)$	$u(x)$	$f(x)$	$u(x)$	$f(x)$	$u(x)$	$f(x)$	$u(x)$	$f(x)$	$u(x)$	$f(x)$
0	3	20	3	39	3	58	4	68	3; 4	87	3; 4	106
1	2	18	2	37	5	46	5	65	5	84	5	94
2	1	16	1	35	4	44	4	63	4	82	4	92
3	0	1	0	20	0	39	0	58	0	68	0	87
4			0	19	0	38	0	47	0	66	0	85

Пусть начальный уровень запаса в системе $x(0) = 2$ и спрос в течение периода планирования принимал следующие значения $d = (2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3)$. Тогда оптимальная стратегия управления имеет вид $\Phi^* = \{4,\ 0,\ 4,\ 0,\ 1,\ 3\}$, уровень запаса на конец периода планирования $x(6) = 0$, суммарные затраты системы за период планирования при оптимальном управлении Φ^* составляют 88 у.е. (максимально возможные суммарные затраты $f_0(2) = 92$). Для сравнения рассмотрим случай с другой реализацией спроса $d = (3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2)$, тогда оптимальная стратегия управления $\Phi^* = \{4,\ 0,\ 4,\ 5,\ 0,\ 2\}$, $x(6) = 1$, а суммарные затраты системы равны максимально возможным 92 у.е.

На Рисунке 3.1 показана динамика изменения запаса при оптимальной стратегии управления из Таблицы 3.1 для различных уровней начального запаса x(0). Из Рисунка 3.1 видно, что уровень запаса в течение всего периода планирования находится в пределах допустимого интервала $\mathbf{X} = [0, 4]$, а запас на конец периода планирования не превосходит заданного уровня $\overline{\mathrm{X}}_T = 1$.

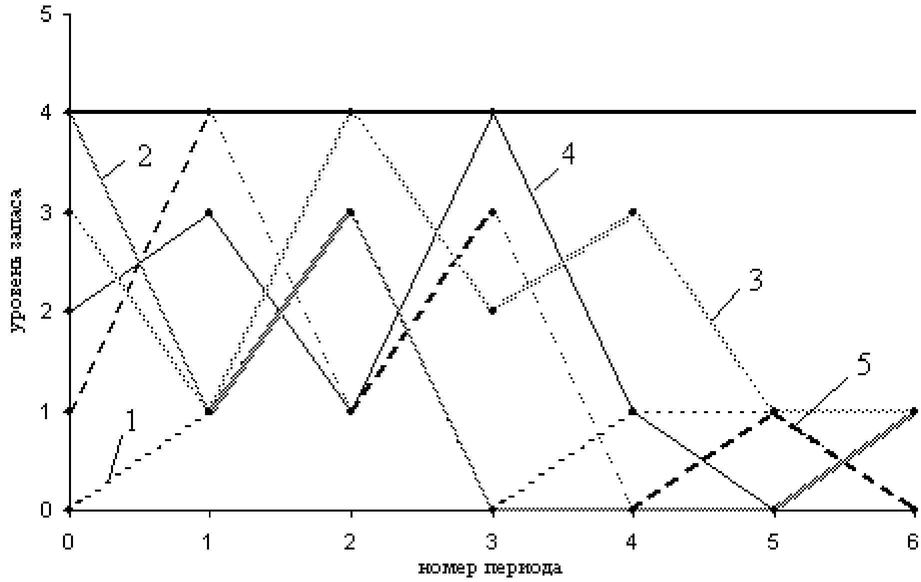


Рисунок 3.1: Динамика изменения уровня запаса при оптимальной стратегии управления (линия 1: $x(0) = 0$, $\Phi^* = \{3,\ 5,\ 0,\ 3,\ 2,\ 2\}$, $d = (2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 3)$); линия 2: $x(0) = 4$, $\Phi^* = \{0,\ 5,\ 0,\ 3,\ 3,\ 3\}$, $d = (3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2)$; линия 3: $x(0) = 3$, $\Phi^* = \{0,\ 5,\ 0,\ 4,\ 0,\ 2\}$, $d = (2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2)$; линия 4: $x(0) = 2$, $\Phi^* = \{4,\ 0,\ 5,\ 0,\ 2,\ 3\}$, $d = (3,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2)$; линия 5: $x(0) = 1$, $\Phi^* = \{5,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3,\ 2\}$, $d = (2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3)$)

3.5 Нестационарная неопределенность спроса

Рассмотрим случай нестационарной интервальной неопределенности спроса, когда интервал возможных значений спроса меняется во времени. В этом случае ограничение (3.2) примет вид

$$d(t) \in \mathbf{D}_t, \quad t = \overline{0, T-1},$$

где $\mathbf{D}_t \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{D}_t = \left[\underline{\mathrm{D}}_t, \overline{\mathrm{D}}_t\right]$, $\mathbf{D}_t \geq 0$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.3. *Для любого состояния системы $x(t) \in \mathbf{X}$ допустимое на интервале $\mathbf{X}$ управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, в момент времени $t, t = \overline{0, T-1}$, существует и определяется из включения*

$$x(t) + u(t) \in \mathbf{X} + dual\,\mathbf{D}_t,$$

если и только если выполнены условия

$$\mathbf{X} + dual\,\mathbf{D}_t \in \mathbb{IR}, \tag{3.23}$$

$$\mathbf{D}_t \subseteq \mathbf{U}. \tag{3.24}$$

Теорема 3.4. *Для любого начального состояния системы $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая гарантирует включение* (3.12), *если и только если выполнены условия* (3.23), (3.24), *интервал допустимых начальных состояний имеет вид*

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X},$$

предельный запас на конец периода планирования удовлетворяет условию

$$\overline{\mathrm{X}}_T \in \mathbf{X}(\overline{\mathrm{D}}_{T-1} - \underline{\mathrm{D}}_{T-1}, \overline{\mathrm{X}}),$$

и справедливы включения

$$\mathbf{X}_t + dual\,\mathbf{D}_{t-1} \in \mathbb{IR}, \quad t = \overline{T, 1},$$

где $\mathbf{X}_t$ определяется интервальным рекуррентным соотношением

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_{t+1} + dual\,\mathbf{D}_t - \mathbf{U}) \bigcap \mathbf{X}, \quad t = \overline{T-1, 0}, \tag{3.25}$$
$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}(0, \overline{\mathrm{X}}_T).$$

Доказательства Теорем 3.3, 3.4 повторяют доказательства Теорем 3.1, 3.2, поэтому в данной работе не приводятся.

Рекуррентное соотношение (3.22) для определения оптимальной стратегии примет вид

$$f_t(x) = \max_{d \in \mathbf{D}_t} \min_{u \in \mathbf{U}_t} \left\{ C(x,u,d,t) + f_{t+1}(x+u-d) \right\}, \quad t = \overline{T-1, 0},$$
$$\mathbf{f}_T(x) = 0.$$

Здесь $\mathbf{U}_t = (\mathbf{X}_{t+1} + \mathrm{dual}\,\mathbf{D}_t - x) \bigcap \mathbf{U}$; $x \in \mathbf{X}_t$, $\mathbf{X}_t$ определяется соотношением (3.25).

3.6 Выводы

В данной главе была рассмотрена модель однономенклатурной системы управления запасами с периодическим контролем при неопределенном интервально заданном спросе, мгновенных поставках, ограничениях на уровень запаса и величину заказана, и конечном периоде планирования. Для определения оптимальной стратегии управления использовались методы интервального анализа. Получены следующие основные результаты:

1) В терминах интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления (теорема 3.1);

2) Получены необходимые и достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления (теорема 3.2);

3) Разработан вычислительный алгоритм построения оптимальной допустимой стратегии (рекуррентное соотношение (3.22));

4) Результаты обобщены на случай нестационарной интервальной неопределенности спроса, когда интервал возможных значений спроса меняется во времени (параграф 3.5);

5) Приведены результаты численных расчетов (таблица 3.1, рисунок 3.1).

Глава 4

Динамические сетевые модели управления запасами с интервально заданным стационарным спросом

В настоящей главе рассматриваются динамические сетевые модели управления запасами с неопределенным спросом. В работах [73–78] неизвестный, но ограниченный спрос в сети описывается множеством и для анализа такой сети используется аппарат теории множеств. Однако, теоретико-множественное представление результатов приводит к трудностям при проверке условий существования оптимальных стратегий управления и вычисления их параметров. Кроме того, предложенные в данных работах модели не учитывают возможное устаревание запаса в узлах сети и нестационарность спроса во времени, например, когда спрос имеет сезонный характер.

В отличие от [73–78], в данной работе для анализа динамических сетевых моделей систем управления запасами с неопределенным спросом предлагается использовать аппарат интервальной математики. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера определяются необходимые и достаточные условия существования допустимого управления с обратной связью, а также достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Оценивается скорость сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разрабатывается алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Кроме того, рассматриваются обобщения модели: модель с устареванием запаса в узлах сети и задержками в поставках. Модели с нестационарным спросом рассматриваются в следующей главе. Проведены численные расчеты.

Результаты данной главы опубликованы в работах $[20, 55, 58, 81]$.

4.1 Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим динамическую сетевую модель системы управления запасами в дискретном времени (с периодическим контролем уровня запасов) с интервально заданным спросом. Динамика сети описывается следующим разностным уравнением

$$x(t+1) = x(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний системы, i-ая компонента которого описывает уровень запаса в i-ом узле сети (на i-ом складе) в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t; структура сети определяется структурой матриц $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Относительно спроса $d(t)$ известно лишь то, что он принимает значения в заданном интервале

$$d(t) \in \mathbf{D}, \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{D} = \left[\underline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{D}}\right]$, $\mathbf{D} \geq 0$.

На состояния запаса $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, которые обусловлены возможностями системы,

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad t \geq 0, \tag{4.3}$$

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{X} = \left[0, \overline{\mathrm{X}}\right]$; $\mathbf{U} \in \mathbb{IR}^q$, $\mathbf{U} = \left[0, \overline{\mathrm{U}}\right]$.

Пример динамической сети. Рассмотрим систему производства- распределения, которая описывается динамической сетью, представленной на Рисунке 4.1 (пример взят из работы [78]). Сеть состоит из трех узлов: узлы 1, 2 производят продукцию A и B, которая используется для производства продукции AB в 3-ем узле. Управляемые потоки u_1, u_2

определяют интенсивность производства продукции A и B соответственно; u_4 перераспределяет дополнительные производственные возможности системы между производственными линиями A и B (если $u_4 = 0$, то все дополнительные возможности системы направлены на производство продукции A); u_3 описывает производственную линию, которая из A и B производит продукцию AB. Неуправляемые потоки d_1, d_2, d_3 определяют спрос в узлах сети на продукцию A, B и AB соответственно; d_4, d_5 представляют спрос в 3-ем узле на продукцию A и B.

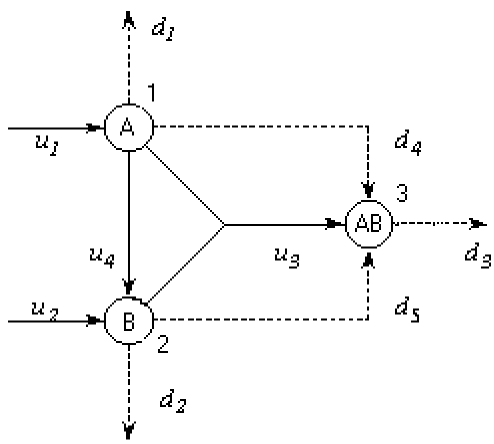


Рисунок 4.1: Структура сети

Структурные матрицы B и E для этой сети имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Для такой системы необходимо найти оптимальную (с точки зрения минимума затрат) стратегию управления, гарантирующую полное и своевременное удовлетворение спроса (4.2) на бесконечном периоде планирования при ограниченных возможностях системы (4.3), (4.4).

Определение 4.1. *Будем называть функцию* $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, *допустимым на интервале* $\mathbf{X}$ *управлением для состояния* $x(t)$ *в момент времени* t, $t \geq 0$, *если для любого значения спроса* $d(t) \in \mathbf{D}$ *выполнено включение* $x(t{+}1) \in \mathbf{X}$, *где* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (4.1).

Определение 4.2. *Будем называть стратегию* $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$, $u(t) \in U$, *допустимой на интервале* $\mathbf{X}$ *стратегией управления для начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$, *если* $u(t)$ *является допустимым на интервале* $\mathbf{X}$ *управлением для состояния* $x(t)$ *в момент времени* $t, t \geq 0$, *где* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (4.1).

Определение 4.3. *Будем называть* $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in \mathbf{X}$, *допустимым уровнем запаса в сети, если для любого начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$ *существует допустимая стратегия* $\Phi \in \Phi(x(0))$ *такая, что*

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}), \quad t \geq \tau \geq 0,$$

где интервальнозначная [1, 25, 68, 103] функция $\mathbf{X}(a, b) = [a, b]$ *определена для* $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$; $\Phi(x(0))$ – *множество стратегий, допустимых на интервале* $\mathbf{X}$ *при начальном состоянии* $x(0) \in \mathbf{X}$, *а* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (4.1).

Очевидно, что, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, то $\overline{\mathrm{X}}$ является допустимым уровнем запаса. Однако, как известно, при неоправданно высоком уровне запаса система несет потери от омертвления капитала в запасах и замедления его оборачиваемости. Поэтому необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\widehat{x}^*$, минимизирующий расходы системы на хранение запаса (максимальные возможные расходы за один период)

$$C(\widehat{x}) = h^{'} \widehat{x}, \tag{4.6}$$

и стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую включение

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq \tau^* \geq 0. \tag{4.7}$$

Здесь $h \in \mathbb{R}^n$ – вектор затрат, $h \geq 0$, $h \neq 0$, i-ая компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i-ом узле сети; символ $'$ (штрих сверху) означает транспонирование. Тогда, начиная с некоторого момента времени τ^*, затраты системы будут не больше значения $C(\widehat{x}^*) = h^{'}\widehat{x}^*$ для *любого* значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}$, $t \geq \tau^*$.

Стратегию управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}^*$ (гарантирует включение (4.7)), будем называть *оптимальной допустимой стратегией управления* для начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$, а время τ^* – *скоростью сходимости системы* к оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}^*$.

4.2 Определение оптимального допустимого уровня запаса в сети

Теорема 4.1 (о существовании допустимого управления)**.** *Для любого состояния системы $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t \geq 0$, допустимое на интервале $\mathbf{X}$ управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, существует и определяется из включения*

$$x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}, \tag{4.8}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \in \mathbb{IR}, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{ED} \subseteq \{-BU\}, \tag{4.10}$$

где $\mathbf{ED}$ – интервал, полученный умножением вещественной матрицы E на интервальный вектор $\mathbf{D}$; $\ominus$ – операция внутреннего вычитания на $\mathbb{KR}$; множество $\{-BU\} = \{x \in \mathbb{R} |\, x = -Bu,\ u \in \mathbf{U}\}$.

Доказательство. Построим управление $u(t)$ в момент времени t в виде (4.8). Заметим, что включение (4.8) имеет смысл, если и только если выполнено условие (4.9). Покажем сначала, что такое управление существует для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \Longleftrightarrow \\
&\quad \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ x(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - Bu(t) \Longleftrightarrow \\
&\quad \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}|\ x(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} + \{-BU\} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}|\ x(t) \in \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\} \Longleftrightarrow \mathbf{X} \subseteq \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\},
\end{aligned}$$

где $\{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\} = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x = x_d - Bu,\ x_d \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}, u \in \mathbf{U}\}$. Заметим, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} + \mathbf{ED} \subseteq \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} + \{-BU\} = \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\},$$

если и только если выполнено условие (4.10). Следовательно, управление $u(t) = U(x(t), t)\ u(t) \in \mathbf{U}$, гарантирующее (4.8), существует для любого $x(t) \in \mathbf{X}$. Покажем далее, что такое управление является допустимым на интервале $\mathbf{X}$. Добавляя к обеим частям включения (4.8) интервал $\mathbf{ED}$, имеем

$$\forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ x(t) + Bu(t) + \mathbf{ED} \subseteq \mathbf{X} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}\ \forall d(t)\mathbf{D}|\ x(t) + Bu(t) + Ed(t) \subseteq \mathbf{X}.$$

Согласно Определению 4.1 $u(t)$ является допустимым на интервале $\mathbf{X}$ управлением для состояния $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t \geq 0$. □

Замечание 4.1. *Интервал* $\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}$ *определяет уровень запаса, необходимого и достаточного для полного и своевременного удовлетворения спроса при выполнении ограничения* (4.3). *Логично предположить, что* $\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \geq 0$. *Это условие выполняется, если и только если* $\underline{\mathrm{ED}} \leq 0$.

Следствие 4.1. *Для любого начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$ *допустимая на интервале* $\mathbf{X}$ *стратегия управления* $\Phi \in \Phi(x(0))$ *существует, если и только если выполнены условия* (4.9), (4.10). (Доказательство легко получить с учетом Определения 4.2.)

Теорема 4.2 (о виде оптимального допустимого уровня запаса)**.** *Оптимальный допустимый уровень запаса в сети* $\widehat{x}^*$*, минимизирующий функцию затрат* (4.6)*, имеет вид*

$$\widehat{x}^* = \overline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия существования допустимой на интервале $\mathbf{X}$ стратегии управления (4.9), (4.10) и $\widehat{x} \in \mathbf{X}$ – допустимый уровень запаса. Тогда по Определению 4.3 для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$x(t+1) = x(t) + Bu(t) + Ed(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}), \quad t \geq \tau - 1 \geq 0,$$

для любого $d(t) \in \mathbf{D}$, что эквивалентно

$$x(t) + Bu(t) + \mathbf{ED} \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}), \quad t \geq \tau - 1 \geq 0,$$

откуда, добавляя к обеим частям включения интервал opp $\mathbf{ED}$, получаем

$$x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}) \ominus \mathbf{ED}, \quad t \geq \tau - 1 \geq 0.$$

(Заметим, что в отличие от Определения 4.3 здесь $\tau \geq 1$. Однако, если $x(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x})$, то получаем $\tau \geq 0$.) Последнее соотношение имеет смысл, если и только если

$$\mathbf{X}(0, \widehat{x}) \ominus \mathbf{ED} \in \mathbb{IR},$$

то есть

$$\underline{\mathbf{X}(0, \widehat{\mathrm{x}}) \ominus \mathbf{ED}} \leq \overline{\mathbf{X}(0, \widehat{\mathrm{x}}) \ominus \mathbf{ED}},$$

откуда имеем

$$-\underline{\mathrm{ED}} \leq \widehat{x} - \overline{\mathrm{ED}},$$

или $\widehat{x} \geq \overline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}$. С другой стороны $\widehat{x} \in \mathbf{X}$, следовательно,

$$\widehat{x} \in \left[\overline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}}\right]$$

(в силу условия (4.9) этот интервал – правильный).

Далее, так как функция затрат (4.6) монотонно возрастает по $\widehat{x}$, то для любого вектора $h \geq 0$, $h \neq 0$, минимум функции (4.6) доставляет

$$\widehat{x}^* = \overline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 4.2. *Для оптимального допустимого уровня запаса* $\widehat{x}^*$ *вида* (4.11) *справедливо включение*

$$\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED} \in \mathbb{IR}. \tag{4.12}$$

Допустим, что в некоторый момент времени τ^* состояние системы попало в интервал $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$. Учитывая (4.12), можно применить Теорему 4.1 для $\mathbf{X} = \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$. Согласно Теореме 4.1: для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ допустимое на интервале $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ управление в момент времени t, $t \geq \tau^*$, существует и определяется из включения

$$x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}. \tag{4.13}$$

С учетом того, что

$$\mathbf{X}(0,\widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED} = \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}}\right] = \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ -\overline{\mathrm{ED}}\right],$$

из (4.13) получаем матричное уравнение

$$x(t) + Bu(t) = -\underline{\mathrm{ED}}(t). \tag{4.14}$$

Управления, удовлетворяющие (4.14), гарантируют включения $x(t) \in \mathbf{X}(0,\widehat{x}^*)$ для $t \geq \tau^*$, и составляют оптимальную стратегию управления (поэтому будем называть их *оптимальными управлениями*).

Замечание 4.3. *Величина* $-\underline{\mathrm{ED}}$ *определяет оптимальный уровень предельного запаса [48, 49] в системе для* $t \geq \tau^*$. *Причем любое управление, удовлетворяющее* (4.14), *является оптимальным в смысле* (4.7). *В этом случае, для* $t \geq \tau^*$ *управления логично выбирать, минимизируя затраты на управления (транспортные расходы, затраты на производство и т.д.) при условиях* (4.4) *и* (4.14).

4.3 Определение оптимальной допустимой стратегии управления

Пусть для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления. Для существования оптимальной в смысле (4.7) допустимой стратегии управления этого достаточно в двух случаях:

- Когда оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^* = \overline{\mathrm{X}}$. Тогда любая допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления будет оптимальной;

- Когда оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^* \leq \overline{\mathrm{X}}$, $\widehat{x}^* \neq \overline{\mathrm{X}}$, и начальный уровень запаса $x(0) \in \mathbf{X}(0,\widehat{x}^*)$. Тогда любая допустимая на интервале $\mathbf{X}(0,\widehat{x}^*)$ стратегия управления будет оптимальной.

Таким образом, в этих случаях проблема существования оптимальной допустимой стратегии управления не возникает и скорость сходимости

$\tau^* = 0$. Оптимальные управления, составляющие оптимальную стратегию, являются решениями матричного уравнения (4.14) в каждый момент времени $t \geq 0$.

Рассмотрим далее случай, когда начальный запас превосходит оптимальный допустимый уровень запаса $x(0) \in \mathbf{X}(\widehat{x}^*, \overline{\mathrm{X}})$ ($\widehat{x}^* \leq \overline{\mathrm{X}}$, $\widehat{x}^* \neq \overline{\mathrm{X}}$). Определим для этого случая условия существования оптимальной допустимой стратегии $\Phi^* \in \Phi(x(0))$ и скорость сходимости τ^* к оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}^*$.

Теорема 4.3 (о существовании оптимальной допустимой стратегии). *Для любого начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$ *существует оптимальная допустимая на интервале* $\mathbf{X}$ *стратегия управления* $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, *если выполнены условия* (4.9), (4.10) *и существует* $\epsilon > 0$ *такое, что*

$$\mathbf{ED} + \epsilon\mathbf{X}(0, \theta) \subseteq \{-BU\}, \tag{4.15}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\theta = \overline{\mathrm{X}} - \widehat{x}^*$. *Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса достигается не более, чем за конечное число шагов*

$$T = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1. \tag{4.16}$$

Доказательство. (Схема доказательства аналогична [78] с учетом интервальной постановки задачи.) Введем вектор

$$\widetilde{x}(t+1) = x(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

который определяет уровень запаса в сети после поставки в момент времени t, но до очередного предъявления спроса. Тогда

$$x(t+1) = \widetilde{x}(t+1) + Ed(t), \quad t \geq 0.$$

Покажем, что $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}$, если и только если $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}$. Действительно,

$$\forall d(t) \in \mathbf{D} | \ \widetilde{x}(t+1) + Ed(t) \in \mathbf{X} \Longleftrightarrow \widetilde{x}(t+1) + \mathbf{ED} \in \mathbf{X} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \widetilde{x}(t+1) + \mathbf{ED} + \operatorname{opp}\mathbf{ED} \in \mathbf{X} + \operatorname{opp}\mathbf{ED} \Longleftrightarrow \widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}.$$

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$\widetilde{x}(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}} - (t-1)\epsilon\theta\right\}\right], \quad t \geq 1. \tag{4.17}$$

Так как выполнены условия (4.9), (4.10), то по Теореме 4.1 для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимое управление такое, что

$$\widetilde{x}(1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} = \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}\right].$$

С учетом соотношения

$$-\underline{\mathrm{ED}} = \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}} \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}},$$

ясно, что для $t = 1$ включение (4.17) справедливо. Далее, пусть (4.17) справедливо для произвольного $t, t \geq 2$. Покажем, что оно справедливо для $t+1$. Рассмотрим

$$\widetilde{x}(t+1) = x(t) + Bu(t) = \widetilde{x}(t) + Ed(t-1) + Bu(t) \pm \epsilon\theta(t).$$

Согласно условию (4.15) существует управление $u(t) \in \mathbf{U}$, такое что

$$Ed(t-1) + \epsilon\theta(t) + Bu(t) = 0$$

для любого $d(t-1) \in \mathbf{D}$ и любого $\theta(t) \in \mathbf{X}(0, \theta)$. Тогда

$$\widetilde{x}(t+1) = \widetilde{x}(t) - \epsilon\theta(t), \tag{4.18}$$

где

$$\theta(t) \in \mathbf{X}(0, \theta). \tag{4.19}$$

Определим вектор $\theta(t)$ с компонентами

$$\theta_i(t) = \begin{cases} \theta_i, & \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ \dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i}{\epsilon}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.20}$$

Нетрудно показать, что $\theta(t)$ вида (4.20) удовлетворяет условию (4.19). Рассмотрим случай, когда $\theta_i(t) = \dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i}{\epsilon}$. С одной стороны,

$\theta_i(t) \geq 0$ в силу того, что $\widetilde{x}_i(t) \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i$ по предположению индукции (4.17). С другой, из условия $\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i < -\underline{\mathrm{ED}}_i$ имеем $\dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i}{\epsilon} < \theta_i$. Тогда согласно (4.20): $\theta_i(t)$ либо принимает значение θ_i (верхней границы i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо равна нулю (нижней границе i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо находится внутри интервала $\mathbf{X}(0,\theta_i)$. Таким образом, из (4.18) получаем

$$\widetilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i, & \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ -\underline{\mathrm{ED}}_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

откуда с учетом предположения индукции (4.17) имеем

$$\widetilde{x}_i(t+1) \in \begin{cases} \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i - t\epsilon\theta_i\right], & \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ = -\underline{\mathrm{ED}}_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

или

$$\widetilde{x}(t+1) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\{-\underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}} - t\epsilon\theta\}\right]. \tag{4.21}$$

Кроме того, учитывая соотношения

$$\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}} - t\epsilon\theta \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}},$$
$$-\underline{\mathrm{ED}} = \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}} \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}},$$

получаем включение

$$\left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\{-\underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}} - t\epsilon\theta\}\right] \subseteq \left[-\underline{\mathrm{ED}}, \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}\right].$$

Таким образом, $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}$, и $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого значения $d(t) \in \mathbf{D}$. По Определению 4.1 управление $u(t)$, удовлетворяющее (4.21), является допустимым на интервале $\mathbf{X}$ в момент времени t. Следовательно, утверждение (4.17) имеет силу для любого $t \geq 1$.

Далее, покажем, что стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющая (4.17), является оптимальной, то есть, начиная с некоторого момента времени τ^*, выполнено включение (4.7). Рассмотрим случай, когда $\theta_i = 0$ ($\widehat{x}_i^* = \overline{\mathrm{X}}_i$). При этом включение (4.17) примет вид

$$\widetilde{x}_i(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i\right\}\right], \quad t \geq 1.$$

Заметим, что $\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i = -\underline{\mathrm{ED}}_i$, следовательно,

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i, -\underline{\mathrm{ED}}_i] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}, \quad t \geq 1,$$

что гарантирует включение $x_i(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$, $t \geq 0$ (с учетом того, что $x_i(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$).

Для случая, когда $\theta_i > 0$, найдем момент времени τ^*, начиная с которого

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ -\underline{\mathrm{ED}}_i], \quad t \geq \tau^*.$$

Рассмотрим функцию

$$f_i(t) = \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i - (t-1)\epsilon\theta_i = \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i - (t-1)\epsilon\theta_i \pm \underline{\mathrm{ED}}_i = \\ = -\underline{\mathrm{ED}}_i + \underbrace{\overline{\mathrm{X}}_i - (\overline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i)}_{=\theta_i} - (t-1)\epsilon\theta_i = -\underline{\mathrm{ED}}_i + \theta_i - (t-1)\epsilon\theta_i.$$

Нетрудно показать, что

$$\theta_i - (t-1)\epsilon\theta_i \leq 0 \quad \text{для} \quad t \geq \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1,$$

следовательно из (4.17) будем иметь

$$\widetilde{x}(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}},\ -\underline{\mathrm{ED}}] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}, \quad t \geq \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1,$$

откуда получаем

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq \underbrace{\left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1}_{=T}.$$

Таким образом, стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет (4.17), является оптимальной, а скорость сходимости к оптимальному допустимому уровню $\tau^* = T$, где T определяется соотношением (4.16). $\square$

Из доказательства Теоремы 4.3 следует, что если выбирать управление $u(t) \in \mathbf{U}$ в момент времени t так, чтобы

$$x(t) + Bu(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}} - t\epsilon\theta\right\}\right] = \\ = [-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\{-\underline{\mathrm{ED}},\ -\underline{\mathrm{ED}} + (1 - t\epsilon)\theta\}],$$

то, начиная с момента времени $T-1$, будем иметь

$$x(t) + Bu(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}, -\underline{\mathrm{ED}}] = -\underline{\mathrm{ED}}, \quad t \geq T-1,$$

что гарантирует

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq T.$$

Следовательно, построенная стратегия $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$, является оптимальной в смысле (4.7).

Для того чтобы увеличить скорость сходимости системы, будем определять управления, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$, из решения следующей оптимизационной задачи

$$\lambda \Rightarrow \min_{u(t),\ \lambda} \tag{4.22}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} -\underline{\mathrm{ED}} \leq x(t) + Bu(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}} + \lambda\theta, \\ u(t) \in \mathbf{U}, \\ \lambda \geq 0, \end{gathered}$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (4.1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\lambda \in \mathbb{R}$ – вспомогательный параметр. Момент времени τ^*, $\tau^* \leq T$, начиная с которого $\lambda = 0$, определяет скорость сходимости системы.

Замечание 4.4. *Сходимостью в узлах сети, например, когда требуется прежде всего достигнуть сходимости в заданном приоритетном узле, можно управлять. В этом случае каждому узлу сети назначается определенный вес (чем скорее требуется сходимость в узле, тем больше вес). Тогда задача* (4.22) *примет вид*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t),\ \lambda_1, \ldots \lambda_n} \tag{4.23}$$

при ограничениях

$$
\begin{gathered}
-\underline{\mathrm{ED}} \leq x(t) + Bu(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}} + \Lambda\theta, \\
-\underline{\mathrm{ED}} + \Lambda\theta \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}, \\
u(t) \in \mathbf{U}, \\
\lambda_i, \dots \lambda_n \geq 0,
\end{gathered}
$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (4.1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\Lambda = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$-матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ – вспомогательные параметры, ω_i – весовой коэффициент i-ого узла, $i = \overline{1, n}$. Момент времени τ^*, $\tau^* \leq T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

4.4 Численная реализация

Проверка условий Теоремы 4.3. Прежде чем приступить к решению задачи (4.22) необходимо проверить условия существования оптимальной стратегии (4.9), (4.10), (4.15) и определить максимальную скорость сходимости (4.16). В Таблице 4.1 приведен алгоритм `ConditionTest` проверки условий (4.10), (4.15).

Таблица 4.1: Алгоритм `ConditionTest`

```
полагаем eps = +∞;
For i = 0 To 2^n − 1
    For j = 0 To 2^n − 1
        вычисляем ε* как решение оптимизационной задачи (*):
            ε ⟶ max    по    ε, u       (*)
        при ограничениях:
            v_i(ED) + ε v_j (X(0, θ)) = −B u
                       u ∈ U
                       ε ≥ 0;
        Если решение задачи (*) не найдено,
            то условия (4.10), (4.15) не выполнены, End;
        полагаем eps = min{eps, ε*};
    Next j
Next i
присваиваем ε = eps;
Если ε = 0, то условие (4.10) выполнено, но не выполнено (4.15);
Если ε > 0, то условие (4.10), (4.15) выполнены,
    максимальная скорость сходимости T вычисляется по формуле (4.16);
End
```

Алгоритм `ConditionTest` построен на следующих фактах:

- правильный интервальный n-вектор представляет собой прямоугольный параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям [63, 103] – брус с 2^n вершинами, $v(\mathbf{x}) = \{v_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \ i = \overline{0, 2^n - 1}\}$ – множество вершин бруса, представленного интервальным вектором $\mathbf{x}$. Следовательно, интервальный вектор $\mathbf{x}$ (брус) принадлежит некоторому заданному множеству, если и только если все его вершины принадлежат этому множеству;

- если выполнено условие (4.15), то, имеет место (4.10).

Пример. Рассмотрим систему производства-распределения, которая описывается динамической сетевой моделью (4.1) со структурными матрицами (4.5) (см. Рисунок 4.1). Известно, что спрос принимает значения в интервале

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} [5,\ 25] \\ [20,\ 30] \\ [60,\ 80] \\ [0,\ 20] \\ [0,\ 30] \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Ограничения на состояния системы и управления зададим в виде интервалов

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0{,}130] \\ [0{,}120] \\ [0{,}150] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} [0,\ 190] \\ [0,\ 55] \\ [0,\ 100] \\ [0,\ 70] \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Для данной сети оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^*$, рассчитанный по формуле (4.11), имеет вид

$$\widehat{x}^* = (40 \ \ 20 \ \ 50)^{'}, \tag{4.26}$$

условия Теоремы 4.3 выполнены ($\epsilon = 0.218$), максимальная скорость сходимости $T = 6$ (формула (4.16)).

В каждый момент времени t, $t \geq 0$, решая задачу (4.22), получаем оптимальное управление $u^*(t)$. Рисунок 4.2 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^*(x(0))$ для начального состояния запаса $x(0) = (130\ \ 120\ \ 150)'$. Видно, что скорость сходимости $\tau^* = 3$, так как

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq 3.$$

Таким образом, результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенного алгоритма.

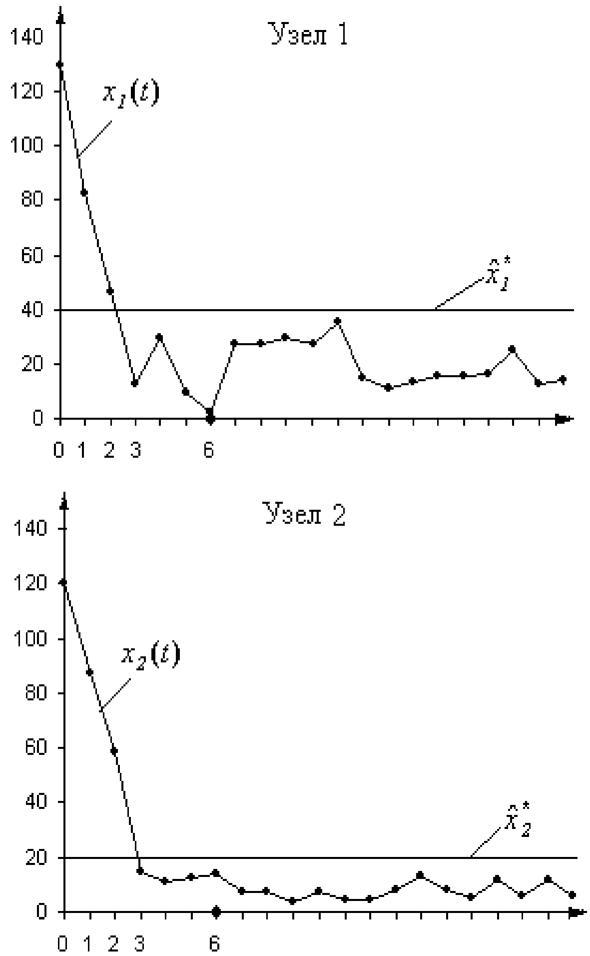


Рисунок 4.2: Динамика изменения запаса в узлах сети

4.5 Модель с устареванием запаса в узлах сети

Модель (4.1) предполагает, что ни количество, ни свойства запасов, хранимых в узлах сети, естественным изменениям не подвержены. Однако, на практике могут быть случаи устаревания запаса (порча, естественная убыль, моральный износ и т.д.). Введем в модель (4.1) диагональную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = Diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ 0 < \alpha_i \leq 1,\ i = \overline{1, n},$$

которая учитывает устаревание запаса в узлах сети. Тогда рекуррентное соотношение (4.1) примет вид

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0. \tag{4.27}$$

Теорема 4.4 (о существовании допустимого управления)**.** *Для любого состояния системы $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t \geq 0$, допустимое на интервале $\mathbf{X}$ управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, существует и определяется из включения*

$$Ax(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}, \tag{4.28}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \in \mathbb{IR}, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{ED} \subseteq \{-BU\}. \tag{4.30}$$

Доказательство. теоремы в основном повторяет доказательство Теоремы 4.1. Рассмотрим основные этапы доказательства. Включение (4.28) имеет смысл, если и только если выполнено условие (4.29). Аналогично Теореме 4.1 имеем

$$\begin{gathered}\forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - Bu(t) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}|\ Ax(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} + \{-BU\} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}|\ Ax(t) \in \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\} \Longleftrightarrow \mathbf{AX} \subseteq \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\}.\end{gathered}$$

Отметим, что $\mathbf{AX} \subseteq \mathbf{X}$, где $\mathbf{AX}$ есть интервал, полученный умножением диагональной матрицы $A = Diag\{\alpha_i\}$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1,n}$, на интервальный вектор $\mathbf{X} = [0, \overline{\mathrm{X}}]$, $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда

$$\mathbf{AX} = \mathbf{AX} \ominus \mathbf{ED} + \mathbf{ED} \subseteq \mathbf{AX} \ominus \mathbf{ED} + \{-BU\} = \\ = \{\mathbf{AX} \ominus \mathbf{ED} - BU\} \subseteq \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} - BU\},$$

если и только если выполнено условие (4.30). Следовательно, управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, гарантирующее (4.28), существует для любого $x(t) \in \mathbf{X}$. Допустимость $u(t)$ на интервале $\mathbf{X}$ следует из цепочки соотношений

$$\forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) + Bu(t) + \mathbf{ED} \subseteq \mathbf{X} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}\ \forall d(t)\mathbf{D}|\ Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \subseteq \mathbf{X}.$$

□

Следствие 4.2. *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$ существует, если и только если выполнены условия* (4.29), (4.30).

Теорема 4.2 сохраняет свой смысл (при доказательстве в уравнение динамики сети добавляем матрицу A). Таким образом, учет матрицы A не влияет на вид оптимального допустимого уровня запаса в сети.

Далее, аналогично утверждению (4.14) получаем, что для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ оптимальные управления, составляющие оптимальную стратегию управления, являются решениями матричного уравнения

$$Ax(t) + Bu(t) = -\underline{\mathrm{ED}}, \tag{4.31}$$

начиная с некоторого момента времени τ^*.

Теорема 4.5 (о существовании оптимальной допустимой стратегии)**.** *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует оптимальная допустимая стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, если выполнены условия* (4.29), (4.30) *и существует $\epsilon > 0$ такое, что*

$$\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}, A\overline{\mathrm{ED}}) + \epsilon\mathbf{X}(0, \theta) \subseteq \{-BU\}, \tag{4.32}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\theta = \overline{\mathrm{X}} - \widehat{x}^*$. *Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса достигается не более, чем за конечное число шагов*

$$T = \max_{i=\overline{1,n}} \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon}{1-\alpha_i+\epsilon}\right)}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1. \tag{4.33}$$

Доказательство. Введем вектор

$$\widetilde{x}(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

который определяет уровень запаса в сети после поставки в момент времени t, но до очередного предъявления спроса. Тогда

$$x(t+1) = \widetilde{x}(t+1) + Ed(t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}$, если и только если $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}$.

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$\widetilde{x}(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}},\ A^{t-1}(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}) - \epsilon\,\underbrace{(I + A + \ldots + A^{t-2})}_{t-1 \text{ штук}}\,\theta\Big\}\Big], \quad t \geq 1, \tag{4.34}$$

где $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица. Так как выполнены условия (4.29), (4.30), то по Теореме 4.4 для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимое управление такое, что

$$\widetilde{x}(1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} = \left[-\underline{\mathrm{ED}},\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}\right].$$

С учетом соотношения

$$-\underline{\mathrm{ED}} = \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}} \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}},$$

ясно, что для $t = 1$ включение (4.34) справедливо. Далее, пусть (4.34) справедливо для произвольного $t, t \geq 2$. Покажем, что оно справедливо для $t+1$. Заметим, что условие (4.31) можно представить в виде

$$\mathbf{X}(A\underline{\mathrm{ED}}, A\overline{\mathrm{ED}}) + \epsilon\mathbf{X}(0,\theta) + \mathbf{X}((I-A)\underline{\mathrm{ED}}, 0) \subseteq \{-BU\}, \tag{4.35}$$

Рассмотрим

$$\widetilde{x}(t+1) = Ax(t) + Bu(t) = A(\widetilde{x}(t) + Ed(t-1)) + Bu(t) \pm \epsilon\theta(t) \pm \widetilde{\theta}(t),$$

Согласно условию (4.35) существует управление $u(t) \in \mathbf{U}$, такое что

$$AEd(t-1) + \epsilon\theta(t) + \widetilde{\theta}(t) + Bu(t) = 0$$

для любого $d(t-1) \in \mathbf{D}$ и любых $\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta)$, $\widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}((I-A)\underline{\mathrm{ED}}, 0)$. Тогда

$$\widetilde{x}(t+1) = A\widetilde{x}(t) - \epsilon\theta(t) - \widetilde{\theta}(t), \tag{4.36}$$

где

$$\begin{gathered} \theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta), \\ \widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}((I-A)\underline{\mathrm{ED}}, 0). \end{gathered} \tag{4.37}$$

Определим вектора $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= \begin{cases} \theta_i, & \text{если } \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ \max\left(0, \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i}{\epsilon}\right), & \text{иначе}, \end{cases} \\ \widetilde{\theta}_i(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ \min\left(0, \alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i\right), & \text{иначе}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Покажем, что $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ вида (4.38) удовлетворяют условию (4.37). Согласно (4.38): $\theta_i(t)$ либо принимает значение θ_i (верхней границы i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо равна нулю (нижней границе i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$), либо $\theta_i(t) = \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i}{\epsilon} > 0$, причем из условия $\alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i < -\underline{\mathrm{ED}}_i$ следует, что $\theta_i(t) = \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i}{\epsilon} < \theta_i$, откуда получаем включение $\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta)$. Далее, $\widetilde{\theta}_i(t)$ либо равна нулю (верхней границе i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}((I-A)\underline{\mathrm{ED}}, 0)$); либо $\widetilde{\theta}_i(t) = \alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i < 0$, причем в силу предположения индукции (4.34) имеем $\widetilde{x}_i(t) \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i$, откуда $\widetilde{\theta}_i(t) \geq (1-\alpha_i)\underline{\mathrm{ED}}_i$, что и доказывает включение $\widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}((I-A)\underline{\mathrm{ED}}, 0)$.

Таким образом, из (4.36) получаем

$$\widetilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \alpha_i \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i, & \text{если } \alpha_i \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ -\underline{\mathrm{ED}}_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

откуда, с учетом предположения индукции (4.34)

$$\widetilde{x}_i(t+1) \in \begin{cases} \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i) - \epsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})\theta_i\Big], \\ \qquad\qquad \text{если } \alpha_i \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i, \\ -\underline{\mathrm{ED}}_i, \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

или

$$\widetilde{x}_i(t+1) \in \\ \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}},\ \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\underbrace{(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})}_{t \text{ штук}}\theta_i\Big\}\Big]. \quad (4.39)$$

Кроме того, учитывая соотношения

$$\alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i) - \epsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})\theta_i \leq \Big\langle 0 < \alpha_i \leq 1 \Big\rangle \leq \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(t),$$
$$-\underline{\mathrm{ED}}_i = \widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i \leq \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i,$$

получаем включение

$$\Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}},\ \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{t-1})\theta_i\Big\}\Big] \subseteq \\ \subseteq \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i, \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i\right].$$

Таким образом, $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}$, и $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого $d(t) \in \mathbf{D}$. По Определению 4.1 управление $u(t)$, удовлетворяющее (4.39), является допустимым на интервале $\mathbf{X}$ в момент времени t. Следовательно, утверждение (4.34) имеет силу для любого $t \geq 1$.

Далее, покажем, что стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющая (4.34), является оптимальной, то есть, начиная с некоторого момента времени τ^*, выполнено включение (4.7). Рассмотрим случай, когда $\theta_i = 0$ ($\widehat{x}_i^* = \overline{\mathrm{X}}_i$). При этом включение (4.34) примет вид

$$\widetilde{x}_i(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \alpha_i^{t-1}(\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i)\right\}\right], \quad t \geq 1.$$

Заметим, что

$$\alpha_i^{t-1}(\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i) = \alpha_i^{t-1}(-\underline{\mathrm{ED}}_i) \leq \Big\langle 0 < \alpha_i \leq 1,\ -\underline{\mathrm{ED}}_i \geq 0 \Big\rangle \leq -\underline{\mathrm{ED}}_i,$$

следовательно,

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i, -\underline{\mathrm{ED}}_i] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}_i, \quad t \geq 1,$$

что гарантирует включение $x_i(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$, $t \geq 0$, (с учетом того, что $x_i(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$).

Для случая, когда $\theta_i > 0$, получаем

$$\widetilde{x}_i(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i) - \epsilon\,(1 + \alpha_i + \ldots + \alpha_i^{t-2})\,\theta_i\Big\}\Big].$$

Найдем момент времени τ^*, начиная с которого

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ -\underline{\mathrm{ED}}_i], \quad t \geq \tau^*.$$

Рассмотрим функцию

$$f_i(t) = \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i) - \epsilon(1 + \alpha_i + \ldots + \alpha_i^{t-2})\,\theta_i = \\ = \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i) - \epsilon\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i}\,\theta_i. \quad (4.40)$$

Производная функции $f_i(t)$ по t имеет вид

$$[f_i(t)]_t^{'} = \underbrace{\alpha_i^{t-1}}_{>0}\,\underbrace{\ln\alpha_i}_{\leq 0}\,\underbrace{\left(\underbrace{\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i}_{\geq -\underline{\mathrm{ED}}_i \geq 0} + \frac{\epsilon\,\theta_i}{\underbrace{1 - \alpha_i}_{>0}}\right)}_{>0} \leq 0,$$

следовательно, функция (4.40) убывает по t. Кроме того,

$$f_i(t) = \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i \pm \underline{\mathrm{ED}}_i) - \epsilon\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i}\,\theta_i = \\ = \alpha_i^{t-1}\Big(-\underline{\mathrm{ED}}_i + \underbrace{\overline{\mathrm{X}}_i - (\overline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i)}_{=\theta_i}\Big) - \epsilon\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i}\,\theta_i = \\ = \alpha_i^{t-1}(-\underline{\mathrm{ED}}_i) + \alpha_i^{t-1}\theta_i - \epsilon\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i}\,\theta_i \leq -\underline{\mathrm{ED}}_i + \alpha_i^{t-1}\theta_i - \epsilon\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i}\,\theta_i.$$

Нетрудно показать, что

$$\alpha_i^{t-1}\theta_i - \epsilon\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i}\,\theta_i \leq 0 \quad \text{для} \quad t \geq \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon}{1 - \alpha_i + \epsilon}\right)}{\ln\alpha_i} \right\rceil + 1,$$

следовательно,

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i,\ -\underline{\mathrm{ED}}_i] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}_i, \quad t \geq \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon}{1-\alpha_i+\epsilon}\right)}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1.$$

Таким образом, для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}$

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq \underbrace{\max_{i=\overline{1,n}} \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon}{1-\alpha_i+\epsilon}\right)}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1}_{=T}.$$

Стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет (4.34), является оптимальной, а скорость сходимости к оптимальному допустимому уровню $\tau^* \leq T$, где T определяется соотношением (4.33). $\square$

Замечание 4.5. *В формуле* (4.33) *при* $\alpha_i = 1$ *имеем*

$$\lim_{\alpha_i \to 1} \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon}{1-\alpha_i+\epsilon}\right)}{\ln \alpha_i} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle =$$

$$= \lim_{\alpha_i \to 1} \frac{\left[\ln\left(\dfrac{\epsilon}{1-\alpha_i+\epsilon}\right)\right]'_{\alpha_i}}{\left[\ln \alpha_i\right]'_{\alpha_i}} = \lim_{\alpha_i \to 1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i+\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}.$$

Из доказательства Теоремы 4.5 следует, что если выбирать управление $u(t) \in \mathbf{U}$ в момент времени t так, чтобы

$$Ax(t)+Bu(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}},\ A^t(\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{ED}})-\epsilon(I-A)^{-1}(I-A^t)\,\theta\Big\}\Big] \subseteq$$

$$\subseteq \Big[-\underline{\mathrm{ED}},\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}},\ -\underline{\mathrm{ED}} + \big(A^t - \epsilon(I-A)^{-1}(I-A^t)\big)\ \theta\Big\}\Big],$$

то, начиная с момента времени $T-1$, будем иметь

$$Ax(t) + Bu(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}, -\underline{\mathrm{ED}}] = -\underline{\mathrm{ED}}, \quad \text{для} \quad t \geq T-1,$$

что гарантирует

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq T,$$

следовательно, стратегия $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$ является оптимальной в смысле (4.7).

Для того чтобы увеличить скорость сходимости системы, будем определять управления, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$, из решения следующей оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t),\ \lambda_1, \dots, \lambda_n} \tag{4.41}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} -\underline{\mathrm{ED}} \leq Ax(t) + Bu(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}} + \Lambda\,\theta, \\ -\underline{\mathrm{ED}} + \Lambda\,\theta \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}, \\ u(t) \in \mathbf{U}, \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \end{gathered}$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (4.27) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\Lambda = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$-матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ – вспомогательные параметры. Момент времени τ^*, $\tau^* \leq T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

Замечание 4.6. *Условие* (4.32) *проверяется аналогично* (4.15). *Однако, из справедливости условия* (4.32) *не всегда следует выполнение* (4.30). *Следствие сохраняется в тех случаях, когда* $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}, A\overline{\mathrm{ED}}) \supseteq \mathbf{ED}$, *то есть* $\overline{\mathrm{ED}} \leq 0$. *Стоит отметить, что таких случаев – большинство, так как интервал* **ED** *описывает действие спроса в узлах сети (выбытие ресурсов, хранимых в узлах сети, из системы). В остальных случаях условие* (4.30) *проверяется по следующей схеме*

Таблица 4.2: Алгоритм проверки условия (4.30)

```
i=0;
While i < 2^n
    If ∃u ∈ U| v_i(ED) = −Bu, Then i=i+1
    Else Print Условие (4.30) не выполнено, End;
Wend
Print Условие (4.30) выполнено;
End
```

Замечание 4.7. *В случае единичной матрицы* $A = Diag(1, 1, \dots, 1)$, *когда* $\alpha_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, *получаем модель* (4.1). *При этом уравнение динамики сети* (4.27) *эквивалентно* (4.1), *условия* (4.28), (4.32) *примут вид* (4.8), (4.15) *соответственно, формула* (4.16) *получается из* (4.33) *предельным переходом при* $\alpha \to 1$, *где* $\alpha = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$; *задача* (4.41) *примет вид* (4.23).

Пример. Рассмотрим пример из параграфа 4.4 с учетом устаревания запаса в узлах сети. Динамика сети описывается моделью (4.27) со структурными матрицами (4.5). Пусть матрица A имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Неизвестный спрос определятся интервалом (4.24). Ограничения на состояния системы и управления заданы интервалами (4.25).

Для данной сети, оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^* = (40\ \ 20\ \ 50)^{'}$ (формула (4.11)), условия Теоремы 4.5 выполнены ($\epsilon = 0.158$), максимальная скорость сходимости $T = 5$ (формула (4.33)).

В каждый момент времени t, $t \geq 0$, решая задачу (4.41), получаем оптимальное управление $u^*(t)$. Рисунок 4.3 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^*(x(0))$ для начального состояния запаса $x(0) = (130\ \ 120\ \ 150)^{'}$. Видно, что скорость сходимости $\tau^* = 2$, так как

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq 2.$$

Таким образом, при устаревании запаса система сходится к оптимальному допустимому уровню запаса быстрее (не более, чем за 5 шагов). Напомним, что в примере параграфа 4.4 скорость сходимости системы $\tau^* = 3$ (максимальная скорость сходимости $T = 6$).

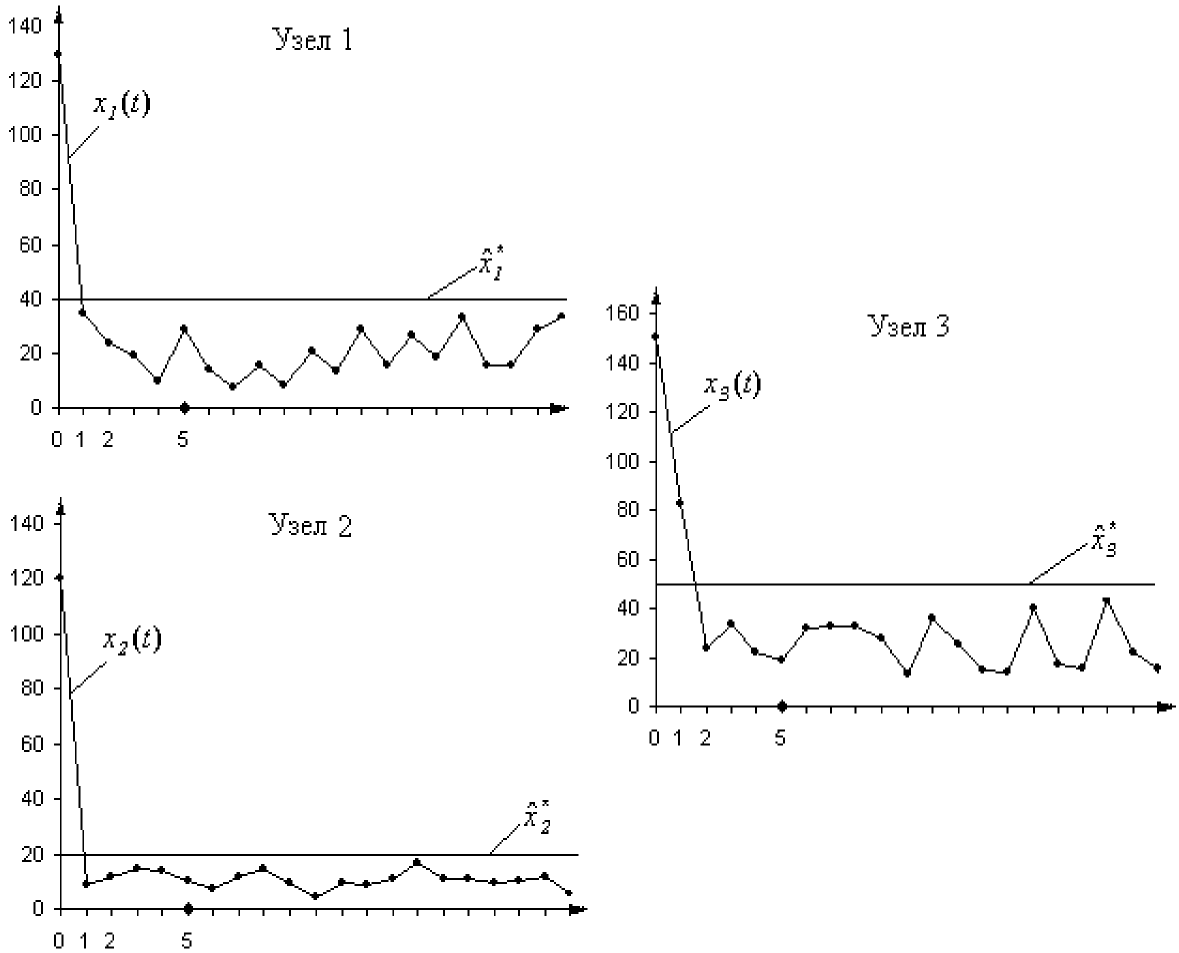


Рисунок 4.3: Динамика изменения запаса в узлах сети при устаревании запаса

4.6 Модель с задержками поставок

В реальных системах управления запасами всегда существует ненулевой интервал времени между моментом заказа и поставкой. Длина этого интервала определяется географическими факторами и видом деятельности системы. Поэтому принятие допущения о том, что поставки (управления) осуществляются мгновенно (как это предполагалось в ранее рассмотренных моделях) не всегда обоснованно.

Пусть целочисленная величина s, $s = \overline{0, \triangle t}$, определяет период запаздывания управляемых потоков в сети. Например, заказ на поставку, размещенный в момент времени t, поступает в момент времени $t+s$, при этом значение $s = 0$ соответствует немедленной поставке, а $\triangle t$ задает максимальный период задержки поставки.

Динамика сети с устареванием запаса и запаздыванием управлений описывается следующим рекуррентным соотношением

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{s=0}^{\triangle t} B_s u(t-s)u(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \tag{4.42}$$

где вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$ представляет уровень запаса в сети в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ – управление в момент времени t; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ – спрос в момент времени t; структура сети определяется структурой матриц $B_s \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $s = \overline{0, \triangle t}$ и матрицей $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$, диагональная матрица $A = Diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$, учитывает устаревание ресурсов в узлах сети.

Необходимо найти оптимальную в смысле (4.7) стратегию управления, гарантирующую полное и своевременное удовлетворение спроса (4.2) при ограниченных возможностях системы (4.3), (4.4).

Поставленная задача решается приведением системы (4.42) к виду (4.1). Введем расширенный вектор состояний системы (4.42)

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} Ax(t) \\ u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(t-\triangle t) \end{pmatrix}.$$

Тогда из (4.42) получаем

$$\xi(t+1) = \Phi\xi(t) + Hu(t) + Gd(t), \quad t \geq 0, \tag{4.43}$$

где блочные матрица Φ и вектора H и G имеют вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} I & B_1 & B_2 & \dots & B_{\triangle t-1} & B_{\triangle t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} B_0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(здесь I – единичная матрица соответствующей размерности).

Ведем новую переменную состояния

$$y(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j u(t-j), \tag{4.44}$$

где

$$\widehat{B}_j = \sum_{s=j}^{\triangle t} B_s.$$

Вектор $y(t) \in \mathbb{R}^n$ представляет собой сумму наличного запаса и объема заказов на момент времени t (будем называть $y(t)$ фиктивным уровнем запаса в сети [52]). Очевидно, что

$$y(t) = F\xi(t), \tag{4.45}$$

где $F = (I \ \widehat{B}_1 \ \widehat{B}_2 \dots \widehat{B}_{\triangle t-1} \ \widehat{B}_{\triangle t})$. Тогда расширенный вектор состояний

$$\widetilde{\xi}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(t-\triangle t) \end{pmatrix} = \widetilde{R}\,\xi(t), \tag{4.46}$$

где блочная матрица $\widetilde{R}$ такая, что

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} I & \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 & \dots & \widehat{B}_{\triangle t-1} & \widehat{B}_{\triangle t} \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что обратное преобразование имеет следующий вид

$$\xi(t) = R\,\widetilde{\xi}(t), \tag{4.47}$$

где

$$R = \begin{pmatrix} I & -\widehat{B}_1 & -\widehat{B}_2 & \dots & -\widehat{B}_{\triangle t-1} & -\widehat{B}_{\triangle t} \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix},$$

Кроме того,

$$R\,\widetilde{R} = \widetilde{R}\,R = I. \tag{4.48}$$

Домножая уравнение (4.43) на матрицу $\widetilde{R}$, получаем

$$\widetilde{R}\,\xi(t+1) = \widetilde{R}\,\Phi\xi(t) + \widetilde{R}\,Hu(t) + \widetilde{R}\,Gd(t), \quad t \geq 0,$$

откуда в силу (4.48),

$$\widetilde{R}\,\xi(t+1) = \widetilde{R}\,\Phi\,R\,\widetilde{R}\xi(t) + \widetilde{R}\,Hu(t) + \widetilde{R}\,Gd(t), \quad t \geq 0,$$

и, применив преобразование (4.46), имеем

$$\widetilde{\xi}(t+1) = \widetilde{\Phi}\,\widetilde{\xi}(t) + \widetilde{H}u(t) + \widetilde{G}d(t), \quad t \geq 0, \tag{4.49}$$

где $\widetilde{\Phi} = \widetilde{R}\,\Phi\,R$, $\widetilde{H} = \widetilde{R}\,H$, $\widetilde{G} = \widetilde{R}\,G$,

$$\widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}, \; \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{\triangle t} B_s \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \widetilde{G} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определим смысл $\sum_{s=0}^{\triangle t} B_s$. Пусть u_j описывает j-ый управляемый поток в сети, который действует с задержкой на s периодов. Тогда вектор $B_{0j}\,u_j(t)$ определяет действие u_j на состояние системы в момент времени t, а вектор $B_{sj}\,u_j(t)$ – в момент времени $t+s$, где B_{sj} – j-ый столбец матрицы B_s. Например, пусть u_j описывает производственную линию, которая, начиная производство в момент времени t, из $u_j(t)$ единиц ресурсов A и B производит $2u_j(t)$ единицы продукта C в момент времени $t+1$ и $3u_j(t)$ единицы продукта D в момент времени $t+2$. Графически описанная ситуация представлена на Рисунке 4.4.

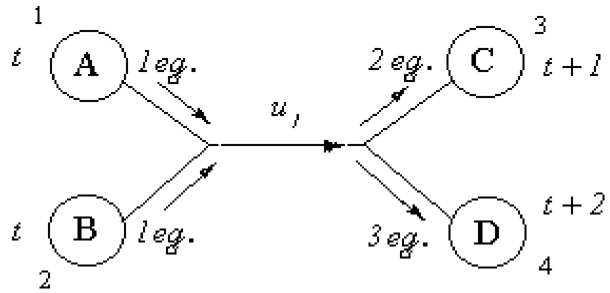


Рисунок 4.4: Пример

В этом случае

$$B_{0j} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{1j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \left(\sum_{s=0}^{\triangle t} B_s \right)_j = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что сумма матриц $\sum_{s=0}^{\triangle t} B_s$ в модели с запаздыванием поставок (4.42) соответствует матрице B в модели с мгновенными поставками (4.1).

Замечание 4.8. *Если все управляемые потоки в сети действуют с запаздыванием, то для любого j существует $k > 0$ такое, что $B_{kj} \geq 0, B_{kj} \neq 0$. И, наоборот, если в сети существует "мгновенный" управляемый поток, то соответствующий столбец матриц B_s, $s > 0$, будет нулевым.*

Заметим далее, что с учетом (4.48) из (4.45) имеем

$$y(t) = F\,R\,\widetilde{R}\xi(t) = \widetilde{F}\widetilde{\xi}(t),$$

где $\widetilde{F} = F\,R$, $\widetilde{F} = (I\ \ 0\ \ 0 \ldots 0\ \ 0)$. Тогда из (4.49) получаем

$$y(t+1) = y(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \tag{4.50}$$

где $B = \sum_{s=0}^{\triangle t} B_s$.

Определим интервал допустимых значений фиктивного запаса $\mathbf{Y} = [\underline{\mathrm{Y}}, \overline{\mathrm{Y}}]$ так, чтобы для любого значения $y(t) \in \mathbf{Y}$ значения $x(t)$ удовлетворяли ограничению (4.4). Из (4.44) имеем

$$Ax(t) = y(t) - \sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j u(t-j),$$

следовательно, должно быть справедливо включение

$$y(t) - \sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j \mathbf{U} \subseteq A\mathbf{X},$$

откуда получаем

$$y(t) \in A\mathbf{X} + \mathrm{dual} \sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j \mathbf{U},$$

то есть

$$y(t) \in \left[\sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j \, \overline{\mathrm{U}}, A\overline{\mathrm{X}} \right] = \mathbf{Y}. \tag{4.51}$$

Замечание 4.9. *Нижняя граница интервала допустимых значений фиктивного запаса $y(t)$ зависит от возможностей управления. Чем больше $\overline{\mathrm{U}}$, тем выше должен быть уровень фиктивного запаса в сети. Объясняется это следующим. Чем больше спрос в системе, тем больше требуется ресурсов на его удовлетворение. Если уровень фиктивного запаса опустится ниже $\underline{\mathrm{Y}}$, то за время поставки в системе может возникнуть дефицит. Для того, что уменьшить $\underline{\mathrm{Y}}$, необходимо ограничить возможности управления на уровне, достаточном для полного и своевременного удовлетворения неопределенного спроса*

$$\overline{\mathrm{U}}^* = \underset{\substack{\overline{\mathrm{U}} \in \mathbf{U}, \\ \mathbf{ED} \subseteq \{-B\overline{U}\}}}{\arg\min} \left(c^{'} \cdot \sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j \, \overline{\mathrm{U}} \right),$$

где $c \in \mathbb{R}^n, c \geq 0, c \neq 0$*;* $\{-B\overline{U}\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x = -Bu, \; u \in [0, \overline{\mathrm{U}}]\}$*. Тогда необходимый уровень фиктивного запаса* $\underline{\mathrm{Y}}$ *уменьшится до величины* $\sum_{j=1}^{\triangle t} \widehat{B}_j \, \overline{\mathrm{U}}^*$*.*

Так как матрицы $\widehat{B}_i,\ i = \overline{1, \triangle t}$ – неотрицательные по построению, то $\underline{\mathrm{Y}} \geq 0$. Сделав замену $\widetilde{y}(t) = y(t) - \underline{\mathrm{Y}}$, из (4.50), с учетом (4.51), получаем

$$\widetilde{y}(t+1) = \widetilde{y}(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \tag{4.52}$$

где $\widetilde{y}(t) \in [0, \overline{\mathrm{Y}} - \underline{\mathrm{Y}}]$ (стоит отметить, что это ограничение имеет смысл тогда и только тогда, когда $\overline{\mathrm{Y}} - \underline{\mathrm{Y}} \geq 0$).

Модели (4.1) и (4.52) эквивалентны. Следовательно, условия существования и алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии для системы (4.52) известны. Оптимальное управление системой (4.52) в свою очередь дает оптимальное управление для системы (4.42) с запаздыванием управлений.

4.7 Выводы

В данной главе были рассмотрены динамические сетевые модели управления запасами с интервально заданным стационарным спросом. Предполагалось, что неизвестный спрос произвольным образом принимает значения в заданном интервале. Для определения оптимальной стратегии управления использовался аппарат интервального анализа. Получены следующие результаты:

1) В терминах полной интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления с обратной связью по состоянию (теорема 4.1);

2) Доказана теорема о виде оптимального допустимого уровня запаса в сети (теорема 4.2);

3) Получены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами с обратной связью (теорема 4.3);

4) Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса (формула (4.16));

5) Предложен алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления (формула (4.22));

6) Рассмотрена модель, учитывающая устаревание запаса в узлах сети (модель (4.27));

7) Предложено обобщение модели (4.27) на случай задержек в поставках (модель (4.42)). Обобщенная модель с задержками поставок была сведена к модели (4.52) без задержек. При этом в модель была введена новая переменная состояния (формула (4.44)) – фиктивный уровень запаса, который представляет собой сумму наличного запаса и объема заказов;

8) Приведены результаты численных расчетов (рисунки 4.1, 4.2).

Глава 5

Динамические сетевые модели управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом

Как известно, спрос на многие виды ресурсов имеет сезонный характер. При ярко выраженной сезонности интервал с постоянными границами довольно грубо описывает поведение реального спроса. Это приводит к неоправданному завышению уровня запасов в системе и, как следствие, затрат на его хранение.

В настоящей главе обобщается результат, полученный в Главе 4, на случай нестационарного спроса, когда интервал возможных значений спроса зависит от времени. Получены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами с обратной связью и разработан алгоритм ее определения. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Рассмотрен случай с устареванием запаса в узлах сети. Приведены результаты численных расчетов.

Результаты данной главы опубликованы в работах [57, 80].

5.1 Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим динамическую сетевую модель управления запасами в дискретном времени с интервально заданным нестационарным спросом. Динамика сети описывается следующим разностным уравнением

$$x(t+1) = x(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \tag{5.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний системы, i-ая компонента которого описывает уровень запаса в i-ом узле сети (на i-ом складе) в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t; структура сети определяется структурой матриц $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Относительно спроса $d(t)$ известно лишь то, что он принимает значения в заданном интервале, границы которого изменяются во времени

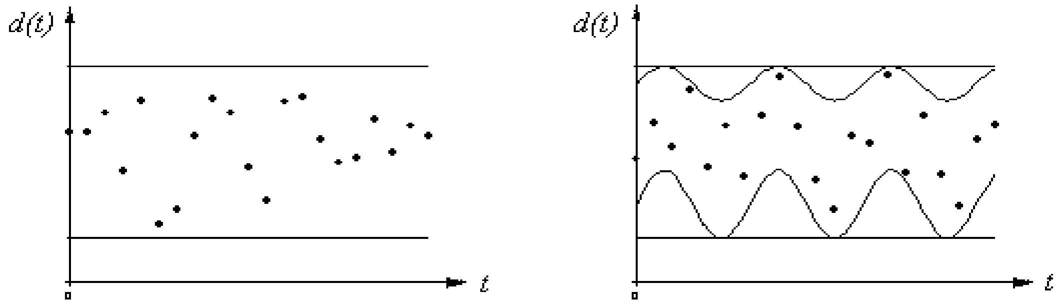
$$d(t) \in \mathbf{D}(t), \quad t \geq 0,$$

где $\mathbf{D}(t) \in \mathbb{IR}^m$ – интервальный вектор, $\mathbf{D}(t) = \left[\underline{\mathrm{D}}(t), \overline{\mathrm{D}}(t)\right]$, $\underline{\mathrm{D}}(t)$, $\overline{\mathrm{D}}(t)$ – вещественные вектор-функции, такие что

$$\mathbf{D}(t) \subseteq \mathbf{D}, \quad t \geq 0, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}^m$, $\mathbf{D} \geq 0$.

Здесь, в отличие от моделей Главы 4, предполагается, что неизвестный спрос имеет нестационарный характер (см. Рисунок 5.1). В этом случае, интервал возможных значений спроса можно уточнить и представить его границы в виде некоторых функций времени. Далее будет показано, что такое представление интервала неопределенности спроса позволяет уменьшить уровень запаса в системе, а, следовательно, затраты на его хранение.



а) Случай интервально заданного стационарного спроса

b) Случай интервально заданного нестационарного спроса

Рисунок 5.1: Интервально заданный стационарный и нестационарный спрос

На состояние запаса $x(t)$ и управление $u(t)$ накладываются ограничения, которые обусловлены возможностями системы,

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad t \geq 0,$$
$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t \geq 0,$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{X} = \left[0, \overline{\mathrm{X}}\right];\ \mathbf{U} \in \mathbb{R}^q,\ \mathbf{U} = \left[0, \overline{\mathrm{U}}\right]$.

Определение 5.1. *Будем называть функцию* $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, *допустимым на интервале* $\mathbf{X}$ *управлением для состояния* $x(t)$ *в момент времени* t, $t \geq 0$, *если для любого значения спроса* $d(t) \in \mathbf{D}(t)$ *выполнено включение* $x(t+1) \in \mathbf{X}$, *где* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (5.1).

Определение 5.2. *Будем называть стратегию* $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$, $u(t) \in U$, *допустимой на интервале* $\mathbf{X}$ *стратегией управления для начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$, *если* $u(t)$ *является допустимым на интервале* $\mathbf{X}$ *управлением для состояния* $x(t)$ *в момент времени* $t, t \geq 0$, *где* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (5.1).

Определение 5.3. *Будем называть* $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in \mathbf{X}$, *допустимым уровнем запаса в сети, если для любого начального состояния* $x(0) \in \mathbf{X}$ *существует допустимая стратегия* $\Phi \in \Phi(x(0))$ *такая, что*

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}), \quad t \geq \tau \geq 0,$$

где интервальнозначная функция $\mathbf{X}(a, b) = [a, b]$ *определена для* $a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}^n$*;* $\Phi(x(0))$ *– множество стратегий, допустимых на интервале* $\mathbf{X}$ *при начальном состоянии* $x(0) \in \mathbf{X}$*, а* $x(t)$ *определяется рекуррентным соотношением* (5.1).

Очевидно, что, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, то $\overline{\mathrm{X}}$ является допустимым уровнем запаса. Однако, как известно, при неоправданно высоком уровне запаса система несет потери от омертвления капитала в запасах и замедления его оборачиваемости. Поэтому необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\widehat{x}^*$, минимизирующий расходы системы на хранение запаса (максимальные возможные расходы за один период)

$$C(\widehat{x}) = h^{'}\,\widehat{x}, \tag{5.3}$$

и стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую включение

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq \tau^* \geq 0. \tag{5.4}$$

Здесь $h \in \mathbb{R}^n$ – вектор затрат, $h \geq 0$, $h \neq 0$, i-ая компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i-ом узле сети; символ $'$ (штрих сверху) означает транспонирование. Тогда, начиная с некоторого момента времени τ^*, затраты системы не будут превышать $C(\widehat{x}^*) = h'\widehat{x}^*$ для *любого* значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}(t)$, $t \geq \tau^*$.

Стратегию управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}^*$ (гарантирует включение (5.4)), будем называть *оптимальной допустимой стратегией управления* для начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$, а время τ^* – *скоростью сходимости системы* к оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}^*$.

5.2 Определение оптимального допустимого уровня запаса в сети

Теорема 5.1 (о существовании допустимого управления). *Для любого состояния системы $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t \geq 0$, допустимое на интервале $\mathbf{X}$ управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, существует и определяется из включения*

$$x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t), \tag{5.5}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \in \mathbb{IR}, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{ED} \subseteq \{-BU\}, \tag{5.7}$$

где $\mathbf{ED}(t)$ и $\mathbf{ED}$ есть интервалы, полученные умножением вещественной матрицы E на интервальные вектора $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{D}$ соответственно;

множество $\{-BU\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x = -Bu, \ u \in \mathbf{U}\}$; $\ominus$ – *операция внутреннего вычитания на* $\mathbb{KR}$.

Доказательство. Построим управление $u(t)$ в момент времени t в виде (5.5). Заметим, что включение (5.5) имеет смысл, если и только если выполнено условие (5.6). Покажем сначала, что такое управление существует для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}$. Действительно,

$$\forall x(t) \in \mathbf{X} \ \exists u(t) \in \mathbf{U} | \ x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X} \ \exists u(t) \in \mathbf{U} | \ x(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) - Bu(t) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X} | \ x(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) + \{-BU\} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X} | \ x(t) \in \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) - BU\} \Longleftrightarrow \mathbf{X} \subseteq \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) - BU\},$$

где $\{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) - BU\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, x = x_d - Bu, \ x_d \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t), u \in \mathbf{U}\}$. Учитывая (5.2), имеем

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) + \mathbf{ED}(t) \subseteq \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) + \mathbf{ED} \subseteq$$
$$\subseteq \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) + \{-BU\} = \{\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) - BU\},$$

если и только если выполнено условие (5.7). Следовательно, управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, гарантирующее (5.5), существует для любого $x(t) \in \mathbf{X}$.

Покажем далее, что такое управление является допустимым на интервале $\mathbf{X}$. Добавляя к обеим частям включения (5.5) интервал $\mathbf{ED}(t)$, имеем

$$\forall x(t) \in \mathbf{X} \ \exists u(t) \in \mathbf{U} | \ x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X} \ \exists u(t) \in \mathbf{U} | \ x(t) + Bu(t) + \mathbf{ED}(t) \subseteq \mathbf{X} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X} \ \exists u(t) \in \mathbf{U} \ \forall d(t) \mathbf{D}(t) | \ x(t) + Bu(t) + Ed(t) \subseteq \mathbf{X}.$$

По Определению 5.1 управление $u(t)$ является допустимым на интервале $\mathbf{X}$ для состояния $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t \geq 0$. □

Замечание 5.1. *Интервал* $\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t)$ *определяет уровень запаса, необходимого и достаточного для полного удовлетворения спроса в момент времени* t *при выполнении ограничения* (4.3). *Логично предположить, что* $\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \geq 0$. *Это условие выполняется, если и только если* $\underline{\mathrm{ED}}(t) \leq 0$.

Следствие 5.1. *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$ существует, если и только если выполнены условия* (5.6) *для любого $t \geq 0$ и* (5.7). (Доказательство легко получить с учетом Определения 5.2.)

Теорема 5.2 (о виде оптимального допустимого уровня запаса). *Оптимальный допустимый уровень запаса в сети $\widehat{x}^*$, минимизирующий функцию затрат* (5.3), *имеет вид*

$$\widehat{x}^* = \max_{t \geq 0} \left\{ \overline{\mathrm{ED}}(t) - \underline{\mathrm{ED}}(t) \right\}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия существования допустимой на интервале $\mathbf{X}$ стратегии управления:

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \in \mathbb{IR}, \quad t \geq 0, \tag{5.9}$$

и (5.7), и $\widehat{x} \in \mathbf{X}$ – допустимый уровень запаса. Тогда по Определению 5.3 для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$x(t+1) = x(t) + Bu(t) + Ed(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}), \quad t \geq \tau - 1 \geq 0,$$

для любого $d(t) \in \mathbf{D}(t)$, что эквивалентно

$$x(t) + Bu(t) + \mathbf{ED}(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}), \quad t \geq \tau - 1 \geq 0,$$

откуда, добавляя к обеим частям включения интервал $\operatorname{opp} \mathbf{ED}(t)$, получаем

$$x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}) \ominus \mathbf{ED}(\mathrm{t}), \quad t \geq \tau - 1 \geq 0. \tag{5.10}$$

Заметим, что здесь (в отличие от Определения 5.3) $\tau \geq 1$. Однако, если $x(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x})$, то получаем $\tau \geq 0$. Соотношение (5.10) имеет смысл, если и только если

$$\mathbf{X}(0, \widehat{x}) \ominus \mathbf{ED}(t) \in \mathbb{IR}, \quad t \geq \tau - 1 \geq 0,$$

то есть

$$\underline{\mathbf{X}(0, \widehat{\mathrm{x}}) \ominus \mathbf{ED}(\mathrm{t})} \leq \overline{\mathbf{X}(0, \widehat{\mathrm{x}}) \ominus \mathbf{ED}(\mathrm{t})}, \quad t \geq \tau - 1 \geq 0.$$

Это условие выполняется для любого

$$\widehat{x} \geq \overline{\mathrm{ED}}(t) - \underline{\mathrm{ED}}(t), \quad t \geq \tau - 1 \geq 0,$$

откуда имеем

$$\widehat{x} \geq \max_{t \geq 0} \left\{ \overline{\mathrm{ED}}(t) - \underline{\mathrm{ED}}(t) \right\}.$$

С другой стороны, $\widehat{x} \in \mathbf{X}$, следовательно,

$$\widehat{x} \in \left[\max_{t \geq 0} \left\{ \overline{\mathrm{ED}}(t) - \underline{\mathrm{ED}}(t) \right\}, \ \overline{\mathrm{X}} \right]$$

(в силу условия (5.9) этот интервал – правильный).

Далее, так как функция затрат (5.3) монотонно возрастает по $\widehat{x}$, то для любого вектора $h \geq 0$, $h \neq 0$, минимум функции (5.3) доставляет

$$\widehat{x}^* = \max_{t \geq 0} \left\{ \overline{\mathrm{ED}}(t) - \underline{\mathrm{ED}}(t) \right\},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 5.2. *Для оптимального допустимого уровня запаса* $\widehat{x}^*$ *вида* (5.8) *справедливы включения*

$$\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}(t) \in \mathbb{IR}, \quad t \geq 0. \tag{5.11}$$

Допустим, что в некоторый момент времени τ^* состояние системы попало в интервал $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$. Учитывая (5.11), можно применить Теорему 5.1 для $\mathbf{X} = \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$. Согласно Теореме 5.1: для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ допустимое на интервале $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ управление в момент времени t, $t \geq \tau^*$, существует и определяется из включения

$$x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}(t). \tag{5.12}$$

Представим интервал $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}(t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}(t) &= \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \ \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}}(t) \right] = \\ &= \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \ \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}}(t) \pm \underline{\mathrm{ED}}(t) \right] = \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \ -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) \right],\end{aligned}$$

где $r(t) = \widehat{x}^* - \left(\overline{\mathrm{ED}}(t) - \underline{\mathrm{ED}}(t)\right)$, $r(t) \geq 0$. Тогда включение (5.12) примет вид

$$x(t) + Bu(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t),\ -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t)\right]. \qquad (5.13)$$

Управления, удовлетворяющие (5.13), гарантируют включения $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ для $t \geq \tau^*$, и составляют оптимальную стратегию управления (поэтому будем называть их *оптимальными управлениями*).

Заметим, что если ширина интервала возможных значений неизвестного спроса не изменяется во времени, то есть

$$\operatorname{wid} \mathbf{D}(t) = const \quad \text{для любого} \quad t \geq 0,$$

то $r(t) = 0$. Тогда для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ оптимальное управление в момент времени t, $t \geq \tau^*$, является решением матричного уравнения

$$x(t) + Bu(t) = -\underline{\mathrm{ED}}(t).$$

Замечание 5.3. *Интервал $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}(t)$ определяет уровень предельного запаса [48,49] в системе для $t \geq \tau^*$, причем любое значение из данного интервала является оптимальным уровнем предельного запаса в смысле критерия* (5.3). *Кроме того, любое управление, удовлетворяющее* (5.13), *является оптимальным в смысле* (5.4). *В этом случае, для $t \geq \tau^*$ управление логично выбирать, минимизируя затраты на управление (транспортные расходы, затраты на производство и т.д.) при условиях $u(t) \in \mathbf{U}$ и* (5.13).

5.3 Определение оптимальной допустимой стратегии управления

Пусть для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления. Аналогично моделям при интервально заданном стационарном спросе, рассмотренным в Главе 4, для существования оптимальной в смысле (5.4) допустимой стратегии управления этого достаточно в двух случаях:

- Когда оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^* = \overline{\mathrm{X}}$. Тогда любая допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления будет оптимальной;

- Когда оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^* \leq \overline{\mathrm{X}}$, $\widehat{x}^* \neq \overline{\mathrm{X}}$, и начальный уровень запаса $x(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$. Тогда любая допустимая на интервале $\mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ стратегия управления будет оптимальной.

Таким образом, в этих случаях проблема существования оптимальной допустимой стратегии управления не возникает и скорость сходимости $\tau^* = 0$. Оптимальные управления, составляющие оптимальную стратегию, определяются из включения (5.13) в каждый момент времени $t \geq 0$.

Рассмотрим далее случай, когда начальный запас превосходит оптимальный допустимый уровень запаса $x(0) \in \mathbf{X}(\widehat{x}^*, \overline{\mathrm{X}})$ ($\widehat{x}^* \leq \overline{\mathrm{X}}$, $\widehat{x}^* \neq \overline{\mathrm{X}}$). Определим для этого случая условия существования оптимальной допустимой стратегии $\Phi^* \in \Phi(x(0))$ и скорость сходимости τ^* к оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}^*$.

Теорема 5.3 (о существовании оптимальной допустимой стратегии). *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует оптимальная допустимая стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, если выполнены условия (5.6) для $t \geq 0$, (5.7) и существует $\epsilon > 0$ такое, что*

$$\mathbf{ED} + \epsilon \mathbf{X}(0, \theta) \subseteq \{-BU\}, \tag{5.14}$$

$$\overline{\mathrm{ED}}(t) - \overline{\mathrm{ED}}(t-1) \leq \epsilon\theta, \quad t \geq 1, \tag{5.15}$$

$$\overline{\mathrm{ED}}(t) - \overline{\mathrm{ED}}(0) \leq t\epsilon\theta, \quad t \geq 1, \tag{5.16}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\theta = \overline{\mathrm{X}} - \widehat{x}^*$. Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса достигается не более, чем за конечное число шагов

$$T = \max_{i=\overline{1,n}} \left\lceil \frac{\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)}{\epsilon\theta_i} + \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1. \tag{5.17}$$

Замечание 5.4. *В данной теореме, появляются дополнительные условия* (5.15), (5.16), *которых нет в теореме 4.3 о существовании оптимальной допустимой стратегии в динамической сети с интервально заданным стационарным спросом. Действительно, если* $\overline{\mathrm{ED}}(t) = \overline{\mathrm{ED}}$, $t \geq 0$, *то условия* (5.15), (5.16) *выполняются автоматически.*

Доказательство. Введем вектор

$$\widetilde{x}(t+1) = x(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

который определяет уровень запаса в сети после поставки в момент времени t, но до очередного предъявления спроса. Тогда

$$x(t+1) = \widetilde{x}(t+1) + Ed(t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}(t)$, если и только если $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t)$.

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$\widetilde{x}(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t-1), \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}}(t-1) + r(t-1), \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0) - (t-1)\epsilon\theta\right\}\right], \quad t \geq 1. \quad (5.18)$$

Так как выполнены условия (5.6) для $t = 0$, (5.7), то по Теореме 5.1 для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимое управление такое, что

$$\widetilde{x}(1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(0) = \left[-\underline{\mathrm{ED}}(0),\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0)\right].$$

Учитывая соотношение

$$-\underline{\mathrm{ED}}(0) + r(0) = \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}}(0) \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0),$$

ясно, что для $t = 1$ включение (5.18) справедливо. Далее, пусть (5.18) справедливо для некоторого $t, t \geq 2$. Покажем, что оно справедливо для $t + 1$. Заметим, что включение (5.14) равносильно условию

$$\mathbf{ED}(t) + \epsilon\mathbf{X}(0,\theta) + \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}(t), 0) + \mathbf{X}(0, \overline{\mathrm{ED}} - \overline{\mathrm{ED}}(t)) \subseteq \{-BU\}, \quad t \geq 0. \quad (5.19)$$

Рассмотрим

$$\widetilde{x}(t+1) = x(t) + Bu(t) = \widetilde{x}(t) + Ed(t-1) + Bu(t) \pm \epsilon\theta(t) \pm \widetilde{\theta}(t).$$

Согласно условию (5.19) существует управление $u(t) \in \mathbf{U}$, такое что

$$Ed(t-1) + \epsilon\theta(t) + \widetilde{\theta}(t) + Bu(t) = 0$$

для любого $d(t-1) \in \mathbf{D}(\mathrm{t}-1)$ и любых $\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta)$, $\widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}(t-1), 0)$. Тогда

$$\widetilde{x}(t+1) = \widetilde{x}(t) - \epsilon\theta(t) - \widetilde{\theta}(t), \tag{5.20}$$

где

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in \mathbf{X}(0,\theta), \\ \widetilde{\theta}(t) &\in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}(t-1), 0). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Определим вектора $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= \begin{cases} \theta_i, & \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ \max\left(0, \dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon}\right), & \text{иначе,} \end{cases} \\ \widetilde{\theta}_i(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ (^*), & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.22}$$

$(*)$: любое значение из интервала $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$, гарантирующее включение

$$\widetilde{x}_i(t+1) = \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)]. \tag{5.23}$$

Покажем, что $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ вида (5.22) удовлетворяют условию (5.21). Согласно (5.22): $\theta_i(t)$ либо принимает значение θ_i (верхней границы i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо равна нулю (нижней границе i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо $\theta_i(t) = \dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon} > 0$, причем из условия $\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i < -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)$ следует, что $\theta_i(t) = \dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon} < \theta_i$, откуда получаем включение $\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta)$. Рассмотрим далее утверждение $(*)$. Здесь, если $\theta_i(t) = \dfrac{\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon} > 0$, то включение (5.23) примет вид

$$\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) = -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)]$$

и, следовательно, $\widetilde{\theta}_i(t) = 0$. Напротив, если $\theta_i(t) = 0$, при этом $\widetilde{x}_i(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)$, то получаем

$$\widetilde{x}_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)], \tag{5.24}$$

где $\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t)+r_i(t)]$ (с учетом предположения индукции (5.18)). Покажем, что для любого значения $\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)]$ существует такое $\widetilde{\theta}_i(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$, что выполнено (5.24). Известно, что

$$\forall\, x \in \mathbf{x}\; \exists\, b \in \mathbf{b} \,|\;\; x - b \in \mathbf{a} \iff \mathbf{x} \subseteq \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Тогда согласно включению

$$\begin{aligned}
&[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)] \subseteq \\
&\qquad\qquad \subseteq [\underbrace{\underline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i(t)}_{\leq 0 \text{ в силу } (5.2)} - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)] = \\
&\qquad\qquad\quad = [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)] + \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0),
\end{aligned}$$

утверждение $(*)$ имеет смысл. Следовательно, $\widetilde{\theta}_i(t)$ либо равна нулю (верхней границе i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}(t-1), 0)$), либо принимает значения из этого интервала $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$, что и доказывает включение $\widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}(t-1), 0)$.

Таким образом, из (5.20) получаем

$$\widetilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i, & \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)], & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.25}$$

В силу условия (5.15) неравенство $\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)$ справедливо для $\widetilde{x}_i(t) \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)$. Следовательно, из (5.25) с учетом предположения индукции (5.18) имеем

$$\widetilde{x}_i(t+1) \in \begin{cases} \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t),\; \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) - t\epsilon\theta_i\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)\right], \text{иначе,} \end{cases}$$

откуда получаем

$$\widetilde{x}(t+1) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \max\{-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t),\; \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0) - t\epsilon\theta\}\right]. \tag{5.26}$$

Кроме того, в силу (5.16), справедливо соотношение

$$\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0) - t\epsilon\theta = \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(t) + (\overline{\mathrm{ED}}(t) - \overline{\mathrm{ED}}(0)) - t\epsilon\theta \le \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(t)$$

и, учитывая то, что

$$-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) = \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}}(t) \le \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(t),$$

получаем включение

$$\left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \max\{-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t), \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0) - t\epsilon\theta\}\right] \subseteq \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(t)\right],$$

следовательно, $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t)$, и $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого $d(t) \in \mathbf{D}(t)$. По Определению 5.1 управление $u(t)$, гарантирующее (5.26), является допустимым на интервале $\mathbf{X}$ в момент времени t. Следовательно, утверждение (5.18) имеет силу для любого $t \ge 1$.

Далее, покажем, что стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет (5.18), является оптимальной, то есть, начиная с некоторого момента времени τ^*, выполнено включение (5.4). Рассмотрим случай, когда $\theta_i = 0$ ($\widehat{x}_i^* = \overline{\mathrm{X}}_i$). При этом включение (5.18) примет вид

$$\widetilde{x}_i(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1), \widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)\right\}\right],\ t \ge 1.$$

Заметим, что в этом случае условие (5.16) имеет вид

$$\overline{\mathrm{ED}}_i(t) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) \le 0, \quad t \ge 1,$$

поэтому справедливо соотношение

$$\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) \le \widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) \pm \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) = -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1), \quad t \ge 1.$$

Следовательно,

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}_i(t-1), \quad t \ge 1,$$

что гарантирует включение $x_i(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$, $t \ge 0$, (с учетом того, что $x_i(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$).

Для случая, когда $\theta_i > 0$ найдем момент времени τ^*, начиная с которого

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1),\ -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)], \quad t \ge \tau^*.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
f_i(t) = \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) - (t-1)\epsilon\theta_i = \\
= \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) - (t-1)\epsilon\theta_i \pm \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) \pm \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) \pm \widehat{x}_i^* = \\
= -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + \underbrace{\overline{\mathrm{X}}_i - \widehat{x}_i^*}_{=\theta_i} + \underbrace{\widehat{x}_i^* - (\overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1))}_{=r_i(t-1)} + \\
+ (\overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - (t-1)\epsilon\theta_i \le \\
\le -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1) + (\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \theta_i - (t-1)\epsilon\theta_i
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\big(\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)\big) + \theta_i - (t-1)\epsilon\theta_i \le 0 \quad \text{для} \quad t \ge \left\lceil \frac{\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) + \theta_i}{\epsilon\theta_i} \right\rceil + 1.$$

Следовательно из (5.18) будем иметь

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1),\ -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}_i(t-1),$$
$$t \ge \left\lceil \frac{\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) + \theta_i}{\epsilon\theta_i} \right\rceil + 1,$$

откуда получаем

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \ge \underbrace{\max_{i=\overline{1,n}} \left\lceil \frac{\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)}{\epsilon\theta_i} + \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1}_{=T}.$$

Таким образом, стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет (5.18), является оптимальной, а скорость сходимости к оптимальному допустимому уровню $\tau^* = T$, где T определяется соотношением (5.17). □

Из доказательства Теоремы 5.3 следует, что если выбирать управление $u(t) \in \mathbf{U}$ в момент времени t так, чтобы

$$\begin{aligned}
x(t) + Bu(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \max\big\{-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t), \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0) - t\epsilon\theta\big\}\Big] = \\
= \Big[-\underline{\mathrm{ED}}(t), \max\big\{-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t), -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + (\overline{\mathrm{ED}}(t) - \overline{\mathrm{ED}}(0)) + (1 - t\epsilon)\,\theta\big\}\Big],
\end{aligned}$$

то, начиная с момента времени $T-1$, будем иметь

$$x(t) + Bu(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}(t), -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t)], \quad \text{для} \quad t \ge T-1,$$

что гарантирует

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq T.$$

Следовательно, стратегия $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$ является оптимальной в смысле (5.4).

Для того чтобы увеличить скорость сходимости системы, будем определять управления, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$, из решения следующей оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t),\, \lambda_1, \dots, \lambda_n} \tag{5.27}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} -\underline{\mathrm{ED}}(t) \leq x(t) + Bu(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + \Lambda\,\theta, \\ -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + \Lambda\,\theta \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}, \\ u(t) \in \mathbf{U}, \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \end{gathered}$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (5.1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\Lambda = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$-матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ – вспомогательные параметры. Момент времени τ^*, $\tau^* \leq T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

5.4 Численная реализация

Проверка условий Теоремы 5.3. Прежде чем приступить к решению задачи (5.27) необходимо проверить условия существования оптимальной стратегии. Ниже приведены некоторые полезные рекомендации, которые следует учитывать при проверке этих условий.

- Проверяя выполнение условия (5.6) для любого $t \geq 0$, достаточно показать, что $\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \in \mathbb{IR}$. Действительно, учитывая (5.3), получаем соотношение

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \subseteq \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t), \quad t \geq 0,$$

тогда, в силу того, что $\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \in \mathbb{IR}$, справедливо (5.6).

- Условия (5.7), (5.14) проверяются по алгоритму `ConditionTest`, который приведен в Таблице 4.1 Главы 4.

- Условия (5.15), (5.16) нетрудно проверить, используя информацию о виде функции $\overline{\mathrm{ED}}(t)$. Заметим, что если $\overline{\mathrm{ED}}(0) = \overline{\mathrm{ED}}$, то условие (5.16) выполняется автоматически для любого $t \geq 1$. Иначе, следует учесть тот факт, что правая часть условия (5.16) возрастает по t и влияние $\overline{\mathrm{ED}}(0)$ со временем исчезает.

Пример. Рассмотрим пример из Главы 4 (параграф 4.4) с учетом того, что спрос принимает значения в интервале $\mathbf{D}(t) = \left[\underline{\mathrm{D}}(t), \overline{\mathrm{D}}(t)\right]$, таком что

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{D}}(t) &= \underline{\mathrm{D}} + 4(1 + sin(t))\, I, \\ \overline{\mathrm{D}}(t) &= \overline{\mathrm{D}} - 2(1 - sin(t))\, I, \end{aligned} \tag{5.28}$$

где $I = (1\ 1 ... 1)^{'}$ есть единичный вектор размера m, $\underline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{D}}$ – нижняя и верхняя границы интервала $\mathbf{D}$ соответственно.

В этом случае оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^*$, рассчитанный по формуле (5.8), имеет вид

$$\widehat{x}^* = (32\ \ 12\ \ 38)^{'}.$$

условия теоремы 5.3 выполнены ($\epsilon = 0.198$), максимальная скорость сходимости $T = 7$ (формула (5.17)).

В каждый момент времени $t, t \geq 0$, решая задачу (5.27), получаем оптимальное управление $u^*(t)$. Рисунок 5.2 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^*(x(0))$ для начального состояния запаса $x(0) = (130\ \ 120\ \ 150)^{'}$. Видно, что скорость сходимости $\tau^* = 4$, так как $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*),\ t \geq 4$.

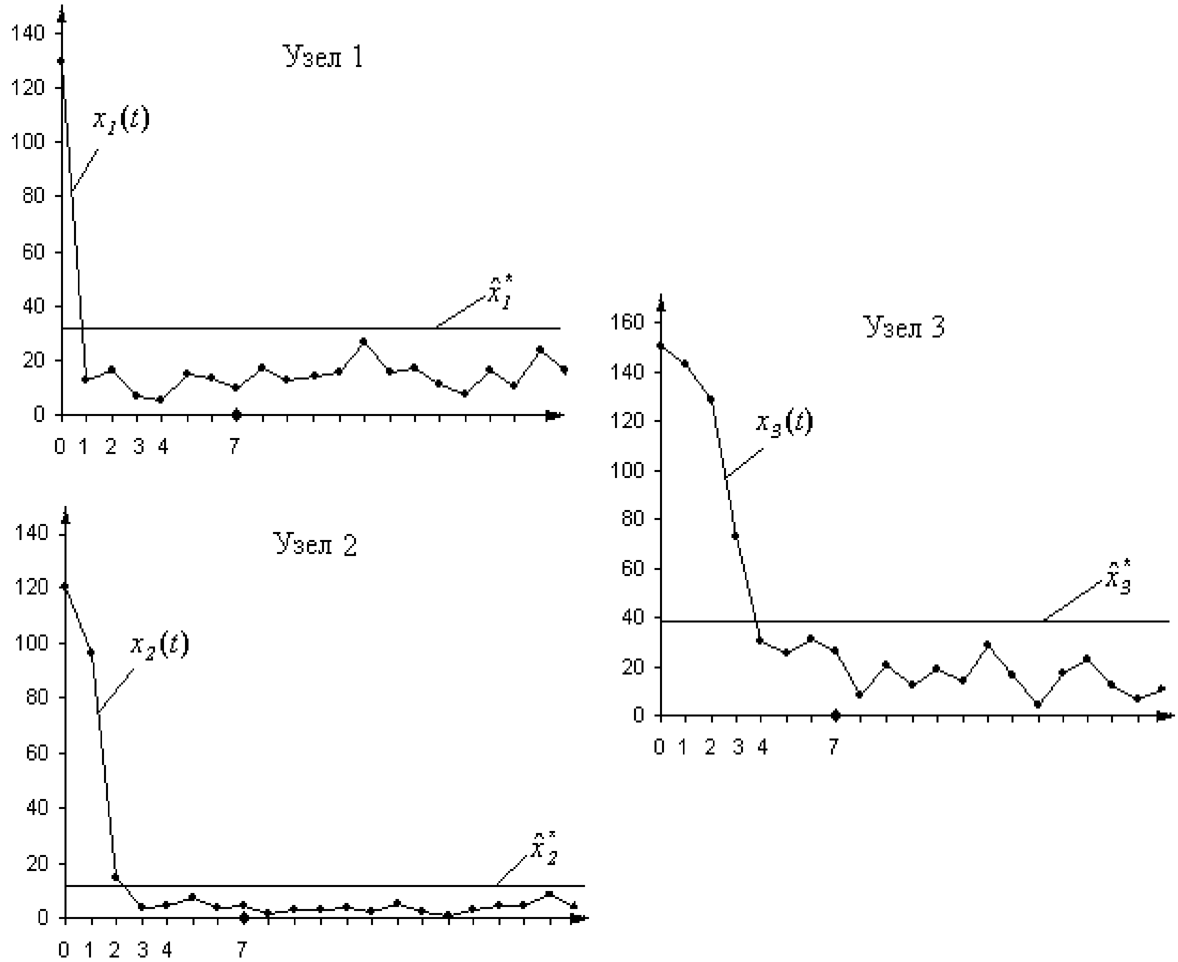


Рисунок 5.2: Динамика изменения запаса в узлах сети

Особенно следует отметить, что учет нестационарности спроса (5.28) позволяет существенно уменьшить уровень запаса в системе (напомним, что оптимальный допустимый уровень запаса для стационарного случая $\widehat{x}^* = (40\ \ 20\ \ 50)^{'}$).

Заметим, что в 1-ом узле сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса $\widehat{x}_1^*$ выполняется за один шаг, тогда как в 3-ем – за четыре шага. Ситуацию можно изменить, если в целевую функцию (5.27) ввести весовые коэффициенты ω_i. В этом случае задача (5.27) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \ldots, \lambda_n}$$

при ограничениях

$$
\begin{gathered}
-\underline{\mathrm{ED}}(t) \leq x(t) + Bu(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + \Lambda\,\theta, \\
-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + \Lambda\,\theta \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}, \\
u(t) \in \mathbf{U}, \\
\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0.
\end{gathered}
$$

Рисунок 5.3 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^*(x(0))$, $x(0) = (130\ \ 120\ \ 150)'$, с учетом весовых коэффициентов $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 5$, $\omega_3 = 10$. Теперь сходимость достигается во всех узлах одновременно на 3-ем шаге.

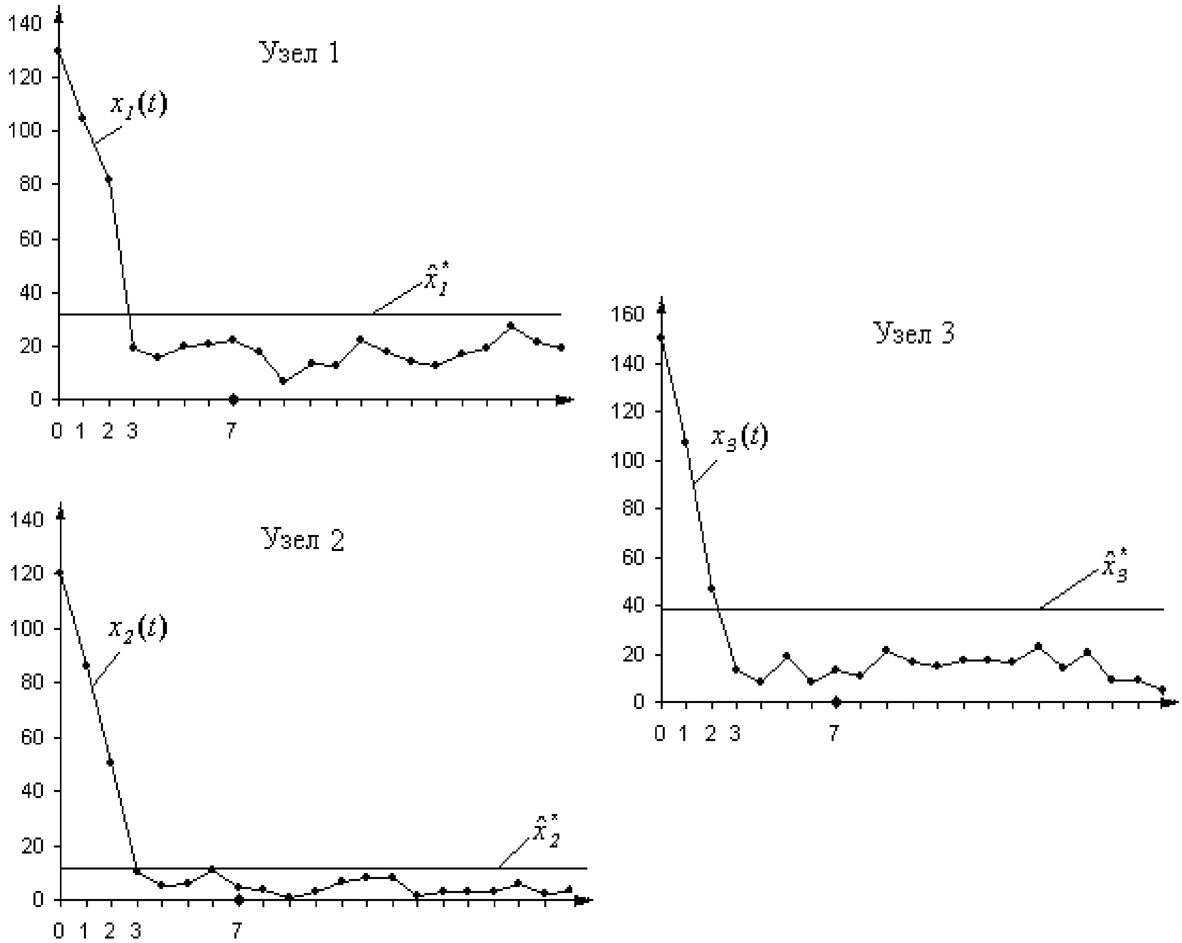


Рисунок 5.3: Динамика изменения запаса в узлах сети при весах (1,5,10)

5.5 Модель с устареванием запаса в узлах сети

Введем в модель (5.1) диагональную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = Diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ 0 < \alpha_i \leq 1,\ i = \overline{1,n},$$

которая учитывает устаревание запаса в узлах сети. Тогда рекуррентное соотношение (5.1) примет вид

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0. \tag{5.29}$$

Теорема 5.4 (о существовании допустимого управления)**.** *Для любого состояния системы* $x(t) \in \mathbf{X}$ *допустимое на интервале* $\mathbf{X}$ *управление с обратной связью* $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, *в момент времени* t, $t \geq 0$, *существует и определяется из включения*

$$Ax(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t), \tag{5.30}$$

если и только если выполнены условия

$$\mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \in \mathbb{IR}, \tag{5.31}$$

$$\mathbf{ED} \subseteq \{-BU\}. \tag{5.32}$$

Доказательство. теоремы в основном повторяет доказательство Теоремы 5.1. Рассмотрим основные этапы доказательства. Включение (5.30) имеет смысл, если и только если выполнено условие (5.31). Аналогично Теореме 5.1 имеем

$$\begin{gathered}
\forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) - Bu(t) \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}|\ Ax(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t) + \{-BU\} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}|\ Ax(t) \in \{\mathbf{X}\ominus\mathbf{ED}(t) - BU\} \Longleftrightarrow \mathbf{AX} \subseteq \{\mathbf{X}\ominus\mathbf{ED}(t) - BU\}.
\end{gathered}$$

Отметим, что $\mathbf{AX} \subseteq \mathbf{X}$, где $\mathbf{AX}$ есть интервал, полученный умножением диагональной матрицы $A = Diag\{\alpha_i\}$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1,n}$, на интервальный вектор $\mathbf{X} = [0, \overline{\mathrm{X}}]$, $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда, учитывая (5.2), имеем

$$\begin{gathered}
\mathbf{AX} = \mathbf{AX} \ominus \mathbf{ED}(t) + \mathbf{ED}(t) \subseteq \mathbf{AX} \ominus \mathbf{ED}(t) + \mathbf{ED} \subseteq \\
\subseteq \mathbf{AX}\ominus\mathbf{ED}(t) + \{-BU\} = \{\mathbf{AX}\ominus\mathbf{ED}(t) - BU\} \subseteq \{\mathbf{X}\ominus\mathbf{ED}(t) - BU\},
\end{gathered}$$

если и только если выполнено условие (5.32). Следовательно, управление $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, гарантирующее (5.30), существует для любого $x(t) \in \mathbf{X}$. Допустимость $u(t)$ на интервале $\mathbf{X}$ следует из следующей цепочки соотношений

$$\begin{aligned}
&\forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) + Bu(t) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED} \Longleftrightarrow \\
&\quad \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}|\ Ax(t) + Bu(t) + \mathbf{ED} \subseteq \mathbf{X} \Longleftrightarrow \\
&\quad \Longleftrightarrow \forall x(t) \in \mathbf{X}\ \exists u(t) \in \mathbf{U}\ \forall d(t)\mathbf{D}|\ Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \subseteq \mathbf{X}.
\end{aligned}$$

□

Следствие 5.2. *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$ существует, если и только если выполнены условия* (5.31) *для любого* $t \geq 0$ *и* (5.32).

Теорема 5.2 сохраняет свой смысл (при доказательстве в уравнение динамики сети добавляем матрицу A). Таким образом, учет матрицы A не влияет на вид оптимального допустимого уровня запаса в сети.

Далее, аналогично утверждению (5.13) получаем, что для любого состояния $x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*)$ оптимальные управления, составляющие оптимальную стратегию управления, определяется из включения

$$Ax(t) + Bu(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t),\ -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t)\right],$$

начиная с некоторого момента времени τ^*. Причем, если ширина интервала неопределенности спроса не изменяется во времени, то оптимальное управление в момент времени t, $t \geq \tau^*$, является решением матричного уравнения

$$Ax(t) + Bu(t) = -\underline{\mathrm{ED}}(t).$$

Теорема 5.5 (о существовании оптимальной допустимой стратегии). *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует оптимальная допустимая стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, если выполнены условия* (5.31) *для* $t \geq 0$, (5.32) *и существует* $\epsilon > 0$ *такое, что*

$$\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}, A\overline{\mathrm{ED}}) + \epsilon\mathbf{X}(0, \theta) \subseteq \{-BU\}, \tag{5.33}$$

$$\overline{\mathrm{ED}}_i(t) - \alpha_i \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) \leq \epsilon\theta_i + (1 - \alpha_i)\widehat{x}_i^*, \quad t \geq 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.34}$$

$$\overline{\mathrm{ED}}_i(t) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) \leq \epsilon\,\frac{1 - \alpha_i^t}{\alpha_i(1 - \alpha_i)}\,\theta_i, \quad t \geq 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.35}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\theta = \overline{\mathrm{X}} - \widehat{x}^*$. Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса достигается не более, чем за конечное число шагов

$$T = \max_{i=\overline{1,n}} \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon\theta_i}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i}\right)}{\ln \alpha_i} \right\rceil + 1. \qquad (5.36)$$

Доказательство. Введем вектор

$$\widetilde{x}(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0,$$

который определяет уровень запаса в сети после поставки в момент времени t, но до очередного предъявления спроса. Тогда

$$x(t+1) = \widetilde{x}(t+1) + Ed(t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что $x(t+1) \in \mathbf{X}$ для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}(t)$, если и только если $\widetilde{x}(t+1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(t)$.

Покажем по индукции, что для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая на интервале $\mathbf{X}$ стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$\widetilde{x}(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}}(t-1),\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}(t-1) + r(t-1), \\ A^{t-1}(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0)) - \epsilon\,\underbrace{(I + A + \ldots + A^{t-2})}_{t-1 \text{ штук}}\,\theta\Big\}\Big], \quad t \geq 1, \quad (5.37)$$

где $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица. Так как выполнены условия (5.31) для $t = 0$, (5.35), то по Теореме 5.4 для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимое управление такое, что

$$\widetilde{x}(1) \in \mathbf{X} \ominus \mathbf{ED}(0) = \left[-\underline{\mathrm{ED}}(0),\ \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0)\right].$$

С учетом соотношения

$$-\underline{\mathrm{ED}}(0) + r(0) = \widehat{x}^* - \overline{\mathrm{ED}}(0) \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(0),$$

ясно, что для $t = 1$ включение (5.37) справедливо. Далее, пусть (5.37) справедливо для произвольного $t, t \geq 2$. Покажем, что оно справедливо для $t+1$. Заметим, что условие (5.33) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}\left(A\underline{\mathrm{ED}}(t), A\overline{\mathrm{ED}}(t)\right) + \epsilon\mathbf{X}(0,\theta) + \\ &\quad + \mathbf{X}\left(\underline{\mathrm{ED}} - A\underline{\mathrm{ED}}(t), 0\right) + \mathbf{X}\left(0, A\overline{\mathrm{ED}} - A\overline{\mathrm{ED}}(t)\right) \subseteq \{-BU\}, \quad t \geq 0.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Рассмотрим

$$\widetilde{x}(t+1) = Ax(t) + Bu(t) = A(\widetilde{x}(t) + Ed(t-1)) + Bu(t) \pm \epsilon\theta(t) \pm \widetilde{\theta}(t).$$

Согласно условию (5.38) существует управление $u(t) \in \mathbf{U}$, такое что

$$AEd(t-1) + \epsilon\theta(t) + \widetilde{\theta}(t) + Bu(t) = 0$$

для любого $d(t-1) \in \mathbf{D}$ и любых значений $\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta)$, $\widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - A\underline{\mathrm{ED}}(t), 0)$. Тогда

$$\widetilde{x}(t+1) = A\widetilde{x}(t) - \epsilon\theta(t) - \widetilde{\theta}(t), \tag{5.39}$$

где

$$\begin{gathered}\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta), \\ \widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - A\underline{\mathrm{ED}}(t), 0).\end{gathered} \tag{5.40}$$

Определим вектора $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ с компонентами

$$\begin{aligned}\theta_i(t) &= \begin{cases} \theta_i, & \text{если } \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ \max\left(0, \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon}\right), & \text{иначе,}\end{cases} \\ \widetilde{\theta}_i(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ (*), & \text{иначе,}\end{cases}\end{aligned} \tag{5.41}$$

$(*)$: любое значение из интервала $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \alpha_i\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$, гарантирующее включение

$$\widetilde{x}_i(t+1) = \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)]. \tag{5.42}$$

Покажем, что $\theta(t)$ и $\widetilde{\theta}(t)$ вида (5.41) удовлетворяют условию (5.40). Согласно (5.41): $\theta_i(t)$ либо принимает значение θ_i (верхней границы i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо равна нулю (нижней границе

i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(0,\theta)$); либо $\theta_i(t) = \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon}$ > 0, причем из условия $\alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i < -\underline{\mathrm{ED}}_i + r_i(t)$ следует, что $\theta_i(t) = \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon} < \theta_i$, откуда получаем включение $\theta(t) \in \mathbf{X}(0,\theta)$. Рассмотрим далее утверждение $(*)$. Здесь, если $\theta_i(t) = \dfrac{\alpha_i\widetilde{x}_i(t) + \underline{\mathrm{ED}}_i(t) - r_i(t)}{\epsilon} > 0$, то включение (5.42) примет вид

$$\alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) = -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) \in \\ \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)]$$

и, следовательно, $\widetilde{\theta}_i(t) = 0$. Напротив, если $\theta_i(t) = 0$ (при этом $\widetilde{x}_i(t) \le \dfrac{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)}{\alpha_i}$), то получаем

$$\alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \widetilde{\theta}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)], \tag{5.43}$$

где $\widetilde{x}_i(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), \dfrac{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)}{\alpha_i}\right]$ (с учетом предположения (5.37)). Покажем, что для любого значения $\widetilde{x}_i(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), \dfrac{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)}{\alpha_i}\right]$ существует $\widetilde{\theta}_i(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \alpha_i\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$, гарантирующее включение (5.43). Известно, что

$$\forall\, x \in \mathbf{x}\; \exists\, b \in \mathbf{b} \,|\;\; x - b \in \mathbf{a} \iff \mathbf{x} \subseteq \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Тогда согласно включению

$$[-\alpha_i\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)] \subseteq \\ \subseteq [\underbrace{\underline{\mathrm{ED}} - \underline{\mathrm{ED}}_i(t)}_{\le 0 \text{ в силу } (5.2)} - \underline{\mathrm{ED}}(t-1), -\alpha_i\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)] = \\ = [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)] + \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - \alpha_i\underline{\mathrm{ED}}(t-1), 0),$$

утверждение $(*)$ имеет смысл. Следовательно, $\widetilde{\theta}_i(t)$ либо равна нулю (верхней границе i-ой компоненты интервала $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \alpha_i\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$), либо принимает значения из интервала $\mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}}_i - \alpha_i\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), 0)$, что и доказывает включение $\widetilde{\theta}(t) \in \mathbf{X}(\underline{\mathrm{ED}} - A\underline{\mathrm{ED}}(t), 0)$.

Таким образом, из (5.39) получаем

$$\widetilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i, & \text{если } \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)], \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.44}$$

В силу условия (5.34) неравенство $\alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)$ справедливо для $\widetilde{x}_i(t) \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)$. Следовательно, из (5.44), с учетом предположения индукции (5.37), имеем

$$\widetilde{x}_i(t+1) \in \begin{cases} \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t),\ \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon(1 + \alpha_i + \ldots + \alpha_i^{t-1})\theta_i\Big], \\ \qquad\qquad \text{если } \alpha_i\widetilde{x}_i(t) - \epsilon\theta_i \geq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t), \\ \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t)\Big], \text{иначе,} \end{cases}$$

откуда получаем

$$\widetilde{x}_i(t+1) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t),$$
$$\max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t),\ \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\,\underbrace{(1 + \alpha_i + \ldots + \alpha_i^{t-1})}_{t \text{ штук}}\,\theta_i\Big\}\Big]. \tag{5.45}$$

Кроме того, в силу (5.35), справедливо соотношение

$$\alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon(1 + \alpha_i + \ldots + \alpha_i^{t-1})\theta_i = \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^t}{1-\alpha_i}\,\theta_i =$$
$$= \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(t)) + \alpha_i^t(\overline{\mathrm{ED}}_i(t) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^t}{1-\alpha_i}\,\theta_i \leq$$
$$\leq \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(t)) \leq \Big\langle 0 < \alpha_i \leq 1 \Big\rangle \leq \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(t),$$

и, учитывая то, что

$$-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t) = \widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(t) \leq \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(t),$$

получаем включение

$$\Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t),\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t) + r_i(t),\ \alpha_i^t(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^t}{1-\alpha_i}\,\theta_i\Big\}\Big] \subseteq$$
$$\subseteq \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i, \overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i\right],$$

следовательно, $\widetilde{x}_i(t+1) \in \mathbf{X}_i \ominus \mathbf{ED}_i(t)$, и $x_i(t+1) \in \mathbf{X}_i$ для любого $d(t) \in \mathbf{D}(t)$. По Определению 5.1 управление $u(t)$, удовлетворяющее (5.45), является допустимым в момент времени t. Следовательно, утверждение (5.37) имеет силу для любого $t \geq 1$.

Далее, покажем, что стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, удовлетворяющая (5.37), является оптимальной, то есть, начиная с некоторого момента времени τ^*, выполнено включение (5.4). Рассмотрим случай, когда $\theta_i = 0$ ($\widehat{x}_i^* = \overline{\mathrm{X}}_i$). При этом включение (5.37) примет вид

$$\widetilde{x}_i(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1),\ \max\left\{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r(t-1),\ \alpha_i^{t-1}(\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(0))\right\}\right], \qquad t \geq 1.$$

Заметим, что в этом случае условие (5.35) имеет вид

$$\overline{\mathrm{ED}}_i(t) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) \leq 0, \quad t \geq 1,$$

поэтому справедливо соотношение

$$\alpha_i^{t-1}(\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) \leq \alpha_i^{t-1}(\widehat{x}_i^* - \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1)) = \alpha_i^{t-1}(-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)) \leq$$
$$\leq \left\langle 0 < \alpha_i \leq 1,\ -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1) \geq 0 \right\rangle \leq -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1), \quad t \geq 1.$$

Следовательно,

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1), -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*) \ominus \mathbf{ED}(t-1), \qquad t \geq 1,$$

что гарантирует включение $x_i(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*),\ t \geq 0$. (с учетом того, что $x_i(0) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*)$).

Для случая, когда $\theta_i > 0$, получаем

$$\widetilde{x}_i(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1),$$
$$\max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1),\ \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\theta_i\Big\}\Big].$$

Найдем момент времени τ^*, начиная с которого

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1),\ -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)], \quad t \geq \tau^*.$$

Рассмотрим функцию

$$f_i(t) = \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\,\theta_i. \tag{5.46}$$

Производная функции (5.46) по t имеет вид

$$[f_i(t)]_t^{'} = \underbrace{\alpha_i^{t-1}}_{>0}\,\underbrace{\ln\alpha_i}_{\le 0}\,\underbrace{\left(\underbrace{\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)}_{\ge -\underline{\mathrm{ED}}_i(0)\ge 0} + \frac{\epsilon\,\theta_i}{\underbrace{1-\alpha_i}_{>0}}\right)}_{>0} \le 0,$$

следовательно, функция (5.46) убывает по t. Кроме того,

$$f_i(t) = \alpha_i^{t-1}(\overline{\mathrm{X}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) \pm \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) \pm \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) \pm \widehat{x}_i^*) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\,\theta_i =$$

$$= \alpha_i^{t-1}\Big(-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + \underbrace{\widehat{x}_i^* - (\overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) - \underline{\mathrm{ED}}_i(t-1))}_{=r_i(t-1)} + \underbrace{\overline{\mathrm{X}}_i - \widehat{x}_i^*}_{=\theta_i} +$$

$$+ \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)\Big) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\,\theta_i =$$

$$= \alpha_i^{t-1}(-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)) + \alpha_i^{t-1}(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i(t-1) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\,\theta_i \le$$

$$\le -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1) + \alpha_i^{t-1}(\theta_i + (\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i}\,\theta_i.$$

Нетрудно показать, что

$$\alpha_i^{t-1}(\theta_i + (\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) - \epsilon\,\theta_i\frac{1-\alpha_i^{t-1}}{1-\alpha_i} \le 0$$

$$\text{для}\quad t \ge \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon\theta_i}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i}\right)}{\ln\alpha_i} \right\rceil + 1,$$

следовательно,

$$\widetilde{x}_i(t) \in [-\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1),\ -\underline{\mathrm{ED}}_i(t-1) + r_i(t-1)] = \mathbf{X}(0, \widehat{x}_i^*) \ominus \mathbf{ED}_i(t),$$

$$t \ge \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon\theta_i}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i}\right)}{\ln\alpha_i} \right\rceil + 1,$$

откуда для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}(t)$ получаем

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq \max_{i=\overline{1,n}} \left\lceil \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon\theta_i}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i}\right)}{\ln\alpha_i} \right\rceil + 1.$$

Таким образом, стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет (5.37), является оптимальной, а скорость сходимости к оптимальному допустимому уровню $\tau^* \leq T$, где T определяется соотношением (5.36). $\square$

Замечание 5.5. *В условии* (5.35) *при* $\alpha_i = 1$ *имеем*

$$\lim_{\alpha_i\to 1} \frac{1-\alpha_i^t}{\alpha_i(1-\alpha_i)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{\alpha_i\to 1} \frac{\left[1-\alpha_i^t\right]'_{\alpha_i}}{\left[\alpha_i(1-\alpha_i)\right]'_{\alpha_i}} = \lim_{\alpha_i\to 1} \frac{-t\alpha_i^{t-1}}{1-2\alpha_i} = t,$$

следовательно (5.35) *при* $\alpha_i = 1$ *примет вид*

$$\overline{\mathrm{ED}}_i(t) - \overline{\mathrm{ED}}_i(0) \leq t\epsilon\theta_i, \quad t \geq 1.$$

Кроме того, в формуле (5.36) *при* $\alpha_i = 1$ *имеем*

$$\lim_{\alpha_i\to 1} \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon\theta_i}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i}\right)}{\ln\alpha_i} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle =$$

$$= \lim_{\alpha_i\to 1} \frac{\left[\ln\left(\dfrac{\epsilon\theta_i}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i}\right)\right]'_{\alpha_i}}{\left[\ln\alpha_i\right]'_{\alpha_i}} =$$

$$= \lim_{\alpha_i\to 1} \frac{\alpha_i(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0))}{(1-\alpha_i)(\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)) + \epsilon\theta_i} =$$

$$= \frac{\theta_i + \overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)}{\epsilon\theta_i} = \frac{\overline{\mathrm{ED}}_i - \overline{\mathrm{ED}}_i(0)}{\epsilon\theta_i} + \frac{1}{\epsilon}.$$

Из доказательства Теоремы 5.5 следует, что если выбирать управление $u(t) \in \mathbf{U}$ в момент времени t так, чтобы

$$Ax(t)+Bu(t) \in \Big[-\underline{\mathrm{ED}}(t),\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}(t)+r(t),\ A^t(\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{ED}}(0))-\epsilon(I-A)^{-1}(I-A^t)\,\theta\Big\}\Big] \subseteq$$
$$\subseteq \Big[-\underline{\mathrm{ED}}(t),\ \max\Big\{-\underline{\mathrm{ED}}(t)+r(t),$$
$$-\underline{\mathrm{ED}}(t)+r(t)+A^t(\overline{\mathrm{ED}}(t)-\overline{\mathrm{ED}}(0))+\left(A^t-\epsilon(I-A)^{-1}(I-A^t)\right)\theta\Big\}\Big],$$

то, начиная с момента времени $T-1$, будем иметь

$$Ax(t) + Bu(t) \in \left[-\underline{\mathrm{ED}}(t), -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t)\right], \quad \text{для} \quad t \geq T-1,$$

что гарантирует

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \widehat{x}^*), \quad t \geq T.$$

Следовательно, стратегия $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}$ является оптимальной в смысле (5.4).

Для того чтобы увеличить скорость сходимости системы, будем определять управления, составляющие оптимальную стратегию $\Phi^* = \{u^*(t),\, t \geq 0\}$, из решения следующей оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t),\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n} \tag{5.47}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
-\underline{\mathrm{ED}}(t) \leq Ax(t) + Bu(t) \leq -\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + \Lambda\,\theta, \\
-\underline{\mathrm{ED}}(t) + r(t) + \Lambda\,\theta \leq \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{ED}}(t), \\
u(t) \in \mathbf{U}, \\
\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0,
\end{gathered}$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (5.29) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\Lambda = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$-матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ – вспомогательные параметры. Момент времени τ^*, $\tau^* \leq T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

Замечание 5.6. *В случае единичной матрицы* $A = Diag(1, 1, \ldots, 1)$, *когда* $\alpha_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, *получаем модель без учета матрицы A. При этом уравнение динамики сети* (5.29) *эквивалентно* (5.1)*; условия* (5.30), (5.33), (5.34) *примут вид* (5.5), (5.14), (5.15) *соответственно; условие* (5.16) *и формула* (5.17) *получаются из* (5.35), (5.36) *предельным переходом при* $\alpha \to 1$, *где* $\alpha = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$*; задача* (5.47) *примет вид* (5.27).

5.6 Выводы

В данной главе были рассмотрены динамические сетевые модели управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом. Предполагалось, что неизвестный спрос произвольным образом принимает значения в заданном интервале, границы которого меняются во времени. Получены следующие результаты:

1) В терминах полной интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления с обратной связью по состоянию (теорема 5.1);

2) Доказана теорема о виде оптимального допустимого уровня запаса в сети (теорема (5.2));

3) Получены достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами с обратной связью (теорема 5.3);

4) Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса (формула (5.17));

5) Предложен алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления (формула (5.27));

6) Показано, что учет нестационарности спроса позволяет существенно уменьшить уровень запаса в системе и, как следствие, затраты на его хранение;

7) Рассмотрена модель, учитывающая устаревание запаса в узлах сети (модель (5.29));

8) Приведены результаты численных расчетов (рисунки 5.2, 5.3).

Заключение

В данной диссертационной работе предложено использовать аппарат интервального анализа для моделирования и оптимизации систем управления запасами с неопределенностью в данных. Получены следующие основные результаты:

1) Разработан метод определения оптимальной стратегии управления для интервальной модели размера партии с непрерывным контролем. Показано, что в условиях неопределенного спроса при отсутствии дефицита нельзя применять периодическую стратегию управления. Обнаружено, что интервальные модели размера партии при пороговой стратегии управления позволяют избежать непрерывного контроля и отслеживать систему только в определенные периоды времени. Предложен вычислительный алгоритм определения оптимального управления системой.

2) Для интервальной модели размера партии с периодическим контролем получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления и оптимальной допустимой стратегии управления. Разработан вычислительный алгоритм построения оптимальной допустимой стратегии. Результаты обобщены на случай нестационарной интервальной неопределенности спроса, когда интервал возможных значений спроса меняется во времени.

3) Для динамической сетевой модели системы управления запасами с интервально заданным *стационарным* спросом получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, а также достаточные условия существования оптимальной

допустимой стратегии управления запасами. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления.

4) Результаты обобщены на случаи динамических сетевых моделей с интервально заданным стационарным спросом при устаревании запаса в узлах сети и задержках в поставках.

5) Предложена динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным *нестационарным* спросом. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления запасами. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Результаты обобщены на случай устаревания запаса в узлах сети.

Библиография

[1] **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[2] **Авдеенко С.Н., Домбровский В.В.** Анализ инвестиционных проектов в условиях интервальной неопределенности // Вестник Томского государственного университета, 2000, № 271, с. 125-126.

[3] **Авдеенко С.Н. , Домбровский В.В.** Расчет индивидуального пенсионного фонда в условиях интервальной неопределенности // Вычислительные технологии, 2001, т. 6, ч. 2 (спец.выпуск, CD).

[4] **Авдеенко С.Н., Домбровский В.В.** Применение обобщенной интервальной арифметики для анализа финансовых операций // Вычислительные Технологии, 2002, т. 7, № 1, с. 3-14.

[5] **Алтунин А.Е., Семухин М.В.** Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: монография. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000 (`http://www.plink.ru/tnm`).

[6] **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.

[7] **Букан Дж., Кенигсберг Э.** Научное управление запасами. М.: Наука, 1967.

[8] **Вагнер Г.** Основы исследования операций. М.: Мир, 1973.

[9] **Вербицкий В.И., Горбань А.Н., Утюбаев Г.Ш., Шокин Ю.И.** Эффект Мура в интервальных пространствах // Доклады АН СССР, 1989, т. 304, № 1, с. 17-22.

[10] **Вощинин А.П.** Метод оптимизации объектов по интервальным моделям целевой функции. М.: МЭИ, 1987.

[11] **Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.** Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ; Техника, 1989.

[12] **Гордиенко Е.И.** Адаптивное управление запасами при неизвестном распределении спроса // Известия АН СССР. Техн. кибернетика, 1982, № 1, с. 56-60.

[13] **Грановский В.Г., Сирая Т.Н.** Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Ленинград: Энергоатомиздат, 1990.

[14] **Громенко В.М.** Применение методов теории управления запасами в экономических задачах. М.: Московский институт управления, 1981.

[15] **Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. и др.** Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов // Известия РАН. Техническая кибернетика, 1991, № 2, с. 3-30.

[16] **Домбровский В.В.** Интервальные методы в управлении финансами // Труды международной конференции по проблемам управления. Москва, ИПУ РАН, 1999, т. 1, с. 202-209.

[17] **Домбровский В.В., Чаусова Е.В.** Математическая модель управления запасами при случайном сезонном спросе и ненадежных поставщиках // Вестник Томского государственного университета, 2000, т. 271, с. 141-146.

[18] **Домбровский В.В., Чаусова Е.В.** Управление запасами при случайном сезонном спросе и ненадежных поставщиках // Дискретный анализ и исследование операций: Материалы международной конференции. Новосибирск: Издательство института математики, 2000, с. 209.

[19] **Домбровский В.В., Чаусова Е.В.** Применение интервальных методов в управлении запасами // Вычислительные Технологии, 2002, т. 7, № 2, с. 50-58.

[20] **Домбровский В.В., Чаусова Е.В.** Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вычислительные Технологии, 2001, т. 6, ч. 2, с. 271-274 (спец. выпуск, CD).

[21] **Домбровский В.В., Чаусова Е.В.** Управление запасами в условиях интервальной неопределенности // Труды XV конференции по интервальной математике. Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2000 (`http://www.ict.ru/ws/show_abstract.dhtml! ru+8+418`).

[22] **Захаров А.В., Шокин Ю.И.** Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Доклады АН СССР, 1988, т. 299, № 2 , с. 292-295.

[23] **Земцова Н.К., Пильщикова Е.А., Немкова Е.А.** Интервальное решение транспортной задачи открытого типа // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сборник материалов международной научно-технической конференции. Пенза, ПТИ, 2001, ч. 1, с. 120-122.

[24] **Ивлев Р.С., Соколова С.П.** Построение векторного управления многомерным интервально заданным объектом // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 4, с. 3-13.

[25] **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

[26] **Карлюк А.Ю.** Численный метод нахождения алгебраического решения ИСЛАУ основанный на треугольном расщеплении // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 4, с. 14-23.

[27] **Куржанский А.Б.** Задача идентификации - теория гарантированных оценок // Автоматика и Телемеханика, 1991, № 4, с. 3-26.

[28] **Лакеев А.В.** Существование и единственность алгебраических решений интервальных линейных систем в полной арифметике Каухера // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 4, с. 33-44.

[29] **Лакеев А.В., Носков С.И.** О множестве решений линейного уравнения с интервально заданным оператором и правой частью // Доклады РАН, 1993, т. 330, № 4, с. 430-433.

[30] **Левин В.И.** Comparison of interval quantities and its use in optimization of economical systems with indeterminacy // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сборник материалов международной научно-технической конференции. Пенза, ПТИ, 2001, ч. 1, с. 111-116.

[31] **Левин В.И.** Основная теорема о существовании решения для антагонистических игр с интервальными параметрами // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сборник материалов международной научно-технической конференции. Пенза, ПТИ, 2001, ч. 1, с. 154-155.

[32] **Левин В.И.** Решение общей задачи линейного программирования в условиях интервальной неопределенности // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сборник материалов международной научно-технической конференции. Пенза, ПТИ, 2001, ч. 1, с. 136-138.

[33] **Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Соболевский А.Н.** Идемпотентная математика и интервальный анализ // Вычислительные Технологии, 2001, т. 6, № 6, с. 47-70.

[34] **Литвинов Г.Л., Соболевский А.Н.** Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и сложность задач интервальной линейной алгебры // Доклады РАН, 2002, т. 374, № 3, с. 304-306.

[35] **Ловецкий С.Е., Меламед И.И.** Динамические потоки в сетях // Автоматика и Телемеханика, 1987, № 11, с. 7-29.

[36] **Лотоцкий В.А.** Модели управления запасами при зависимом случайном спросе // Экономика и мат. методы, 1975, т. 11, № 4, с. 789-792.

[37] **Лотоцкий В.А., Мандель А.С.** Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991.

[38] **Лотоцкий В.А., Мандель А.С.** Модели и методы управления многономенклатурными запасами // Автоматика и Телемеханика, 1979, № 6, с. 134-144.

[39] **Манусов В.З., Моисеев С.М., Перков С.Д.** Интервальный анализ в задачах расчета токов короткого замыкания // Техническая Электродинамика, 1987, № 5, с. 13-18.

[40] **Мартынов А.П., Салимоненко Е.А., Федорова Н.И.** Интервальная устойчивость оптимального решения задачи линейного программирования при параметрическом анализе // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 4, с. 45-50.

[41] **Микитьянц С.Р., Голдобина Н.Н.** Применение математических методов в управлении запасами. Л.: ЛФЭИ, 1982.

[42] **Первозванская Т.Н., Первозванский А.А.** Элементы теории управления запасами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

[43] **Первозванский А.А.** Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975.

[44] **Плоткин Б.К.** Экономико-математические методы и модели в управлении материальными ресурсами: учеб. пособие. СПб.: Университет экономики и финансов, 1992.

[45] **Рогалев А.Н., Шокин Ю.И.** Исследование и оценка решений обыкновенных дифференциальных уравнений интервально-символьными методами // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 4, с. 51-75.

[46] **Рубальский Г.Б.** Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами. М.: Знание, 1987.

[47] **Рубальский Г.Б.** Управление запасами при случайном спросе. М.: Сов. Радио, 1977.

[48] **Рыжиков Ю.И.** Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001.

[49] **Рыжиков Ю.И.** Управление запасами. М.: Наука, 1969.

[50] **Сакович В.А.** Модели управления запасами. Минск, Наука и техника, 1986.

[51] **Смагина Е.М., Моисеев. А.Н.** Слежение за полиномиальным сигналом в интервальной динамической системе // Вычислительные Технологии, 1998, т. 3, № 1, с. 67-74.

[52] **Хедли Дж., Уайтин Т.** Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.

[53] **Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И.** Интервальный вариант метода модального управления // Доклады РАН, 1991, т. 316, № 4, с. 846-850.

[54] **Хэнссменн Ф.** Применение математических методов в управлении производством и запасами. М.: Прогресс, 1966.

[55] **Чаусова Е.В.** Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и задержками в поставках // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2001, т. 8, № 2, с. 719-720.

[56] **Чаусова Е.В.** Динамическая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Вестник Томского государственного университета, 2002, № 1(I), с. 195-200.

[57] **Чаусова Е.В.** Динамическая сетевая модель с интервально заданным нестационарным спросом // Дискретный анализ и исследование операций. Материалы Российской конференции. Новосибирск: Издательство института математики, 2002. с. 248.

[58] **Чаусова Е.В.** Динамическая сетевая модель управления запасами с нестохастической неопределенностью спроса и задержками в поставках // Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство. Материалы Всероссийской научно-практической конференции (Анжеро-Судженск, 2001). Часть II (Математика). Анжеро-Судженск, КемГУ, 2001, с. 72-74.

[59] **Шарая И.А.** О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных систем // Вычислительные Технологии, 1998, т. 3, № 2, с. 55-66.

[60] **Шарый С.П.** Алгебраический подход во "внешней задаче"для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии, 1998, т. 3, № 2, с. 67-114.

[61] **Шарый С.П.** Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Известия РАН. Теория и системы управления, 1997, № 3, с. 51-61.

[62] **Шарый С.П.** Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 4, с. 82-110.

[63] **Шарый С.П.** Еще раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем. Препринт. Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2001.

[64] **Шарый С.П.** Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: Диссертация...докт. ф. м. наук, Новосибирск, 2000.

[65] **Шарый С.П.** Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации. Препринт, Красноярск, ВЦ СО РАН, с. 64-80.

[66] **Шарый С.П.** Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных // Вычислительные Технологии, 1997, т. 2, № 1, с. 84-102.

[67] **Шарый С.П.** Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии, 1999, т. 4, № 3, с. 85-102.

[68] **Шокин Ю.И.** Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981.

[69] Applications of Interval Analysis to Systems and Control. Proceedings of MISC'99 edited by Vehi J., Sainz M.A., Girona, Universitat de Girona, 1999.

[70] **Aviv Y., Federgruen A.** Capacitated multi-item inventory systems with random and seasonally fluctuating demands: implications for postponement strategies // Management Science, 2001, vol. 47, n. 4, p. 512-531.

[71] **Azoury K.** Bayes solution to dynamic inventory models under unknown demand distribution // Management Science, 1985, vol. 31, n. 9, p. 1150-1160.

[72] **Bashyam S., Fu M.C.** Optimization of (s,S) inventory systems with random lead times and service level constraint. Management Science, 1998, vol. 44, n. 12, p. 243-255.

[73] **Blanchini F., Miani S.** A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems // IEEE Transaction on Automatic Control, 1999, vol. 44, p. 641-647.

[74] **Blanchini F., Miani S., Pesenti R.** Control policies for multi-inventory systems with uncertain demand and setups // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, Florida USA, 2001, p. 1941-1946.

[75] **Blanchini F., Miani S., Ukovich W.** Control of production-distribution systems with unknown inputs and system failures // IEEE Transaction on Automatic Control, 2000, vol. 45, n. 6, p. 1072-1081.

[76] **Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W.** Feedback control on production-distribution systems with unknown demand and delays // IEEE Transaction on Robots and Automation, 2000, vol. 16, n. 3, p. 313-317.

[77] **Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W.** A Network design problem for a distribution system with uncertain demands // SIAM Journal on Optimization, 1997, vol. 7, n. 2, p. 560-578.

[78] **Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W.** Least Inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown demand // IEEE Transaction on Robots and Automation, 1997, vol. 13, n. 5, p. 633-645.

[79] **Chausova E.V.** Optimization of inventory control system with interval uncertainty of demand and deliveries // The 6-th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology (Novosibirsk, 2002). Proceedings. Novosibirsk, NSTU, 2002, vol. 2, p. 103-107.

[80] **Chausova E.V.** Dynamic network inventory control model with interval nonstationary demand uncertainty // GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (Paris, France, 2002). Book of Abstracts. Paris, University Pierre and Marie Curie, Laboratory LIP6, 2002, p. 101.

[81] **Chausova E.V.** Inventory Control Systems with Interval Uncertain Demand // The 5-th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology (Tomsk, 2001). Book of Submitted Abstracts. Tomsk, TPU, 2001, p. 441 (`http://www.isrd.tpu.ru_KORUS/korus2001.html`).

[82] **Chen F., Federgruen A., Zheng Y.-S.** Coordination mechanisms for a distribution system with one supplier and multiple retailers // Management Science, 2001, vol. 47, n. 5, p. 693-708.

[83] **Cohen M.A., Kleindorfer P.R., Lee H.L.** Service constrained (s,S) inventory systems with priority demand classes and lost sales // Management Science, 1988, vol. 34, n. 4, p. 482-499.

[84] **Coxson G.E.** Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // Reliable Computing, 1999, vol. 5, n. 2, p. 137-142.

[85] **DeCroix G.A., Arreola-Risa A.** Optimal production and inventory policy for multiple products under resource constraints // Management Science, 1998, vol. 44, n. 7, p. 950-961.

[86] **Dimitrova N.S., Markov S.M., Popova E.D.** Extended interval arithmetics: new results and applications // Computer Arithmetic and Enclosure Methods. Amsterdam: Elsevier, 1992, p. 225-232.

[87] **Downs B., Metters R., Semple J.** Managing inventory with multiple products, lags in delivery, resource constraints, and lost sales: a mathematical programming approach // Management Science, 2001, vol. 47, n. 3, p. 464-479.

[88] **Glover F., Klingman D., Phillips N.V.** Network models in optimization and their applications in practice. NY.: Wiley, 1992.

[89] **Gardenes T., Trepat A.** Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing, 1980, vol. 24, p. 161-179.

[90] **Grahovac J., Chakravarty A.** Sharing and lateral transshipment of inventory in a supply chain with expensive low-demand items // Management Science, 2001, vol. 47, n. 4, p. 579-594.

[91] **Graves S.C.** A multi-echelon inventory model for a repairable item with one-for-one replenishment // Management Science, 1985, vol. 31, n. 9, p. 1247-1256.

[92] **Hax A.C., Candez D.** Production and inventory management. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall, 1984.

[93] **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // Computing Supplement, 1980, vol. 2, p. 33-49.

[94] **Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis // Reliable Computing, to appear.

[95] **Kulisch U.W.** Advanced arithmetic for the digital computer-interval arithmetic revisited, 2000 (`ftp://ftp.iam.uni-karlsruhe.de/pub/documents/kulisch/advarith.ps.gz`).

[96] **Kupriyanova L.V.** Linear estimation of united solution set of interval linear algebraic system // Reliable Computing, 1995, vol. 1, p. 15-31.

[97] **Lakeyev A.V., Kreinovich V.** NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties // Reliable Computing, 1997, vol. 3, n. 1, p. 51-81.

[98] **Lariviere M.A., Porteus E.L.** Stalking information: Bayesian inventory management with unobserved lost sales // Management Science, 1999, vol. 45, n. 3, p. 346-363.

[99] **Lovejoy W.** Myopic policies for some inventory models with uncertain demand distributions // Management Science, 1990, vol. 36, n. 6, p. 724-738.

[100] **Lovejoy W.** Suboptimal policies, with bounds, for parameter adaptive decision processes // Operations Research, 1993, vol. 41. p. 583-599.

[101] **McLevy D.W., Narasimhan S.L.** Production planning and inventory control. Boston: Allyn and Bacon, 1985.

[102] **Moinzadeh K., Aggarwal P.K.** An information based multiecelon inventory system with emergency orders // Operations Research, 1997, vol. 45. p. 694-701.

[103] **Moore R.E.** Methods and applications of interval analysis. Philadelphia: SIAM, 1979.

[104] **Neumaier A.** Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[105] **Popova E.D** Generalized interval distributive relations and their applications // Proceedings of MISC'99. Applications of Interval Analysis to Systems and Control, Girona, Universitat de Girona, 1999, p. 13-23.

[106] **Rohn J.** Input-output planning with interval date // Econometrica, 1980, vol. 48, p. 767-769.

[107] **Schweppe F.C.** Uncertain Dynamic Systems. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall, 1973.

[108] **Shary S.P.** Algebraic approach in the "outer problem"for interval linear equations // Reliable Computing, 1997, vol. 3, n. 2, p. 103-135.

[109] **Shary S.P.** Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance, and control problems, or one more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing, 1996, vol. 2, n. 1, p. 3-33.

[110] **Shary S.P.** Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing, 2001, vol. 7, n. 2, p. 141-155.

[111] **Shary S.P.** Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing, 1999, vol. 5, p. 323-335.

[112] **Silver E.A.** Operations research in inventory management: a review and critics // Operations Research, 1981, vol. 29, p. 628-645.

[113] **Silver E.A., Peterson R.** Decision systems for inventory management and production planning. N.Y.: Wiley, 1985.

[114] **Smagina E.M.** General problem of asymptotic steady-output tracking for plant with interval parameters // Interval Computations, 1992, vol. 4, n. 6, p. 94-99.

[115] **Smagina E.M.** A new approach to the modal regulator synthesis for interval plant with scalar input // Reliable Computing, 1997, vol. 3, p. 401-410.

[116] **Smith S.A., Agrawal N.** Management of multi-item retail inventory systems with demand substitution // Operations Research, 2000, vol. 48, p. 50-64.

[117] **Sobel M.** Myopic solutions of markov decision processes and stochastic games // Operations Research, 1981, vol. 29, p. 995-1009.

[118] **Svoronos A.,Zipkin P.** Evaluation of one-for-one replenishment policies for multi-eshelon inventory systems // Management Science, 1991, vol. 37, n. 1, p. 68-83.

[119] **Wagner H., Whitin T.** Dynamic version of the economic lot size model // Management Science, 1958, vol. 5, n. 1, p. 89-96.

[120] **Weng K.** Channel coordination and quantity discount // Management Science, 1995, vol. 41, n. 9, p. 1509-1522.

[121] **Zipkin P.** Models for design and control of stochastic, multi-item batch production systems // Operations Research, 1986, vol. 34, p. 91-104.