Бийский технологический институт (филиал)
Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова

На правах рукописи

Калинкина Светлана Юрьевна

МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Специальность 05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор технических наук Пушков С.Г.

Бийск, 2005 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве работ последних лет описание динамического поведения систем, анализ систем и расчет оптимального управления основываются на понятии пространства состояний. Классические методы, основанные на частотном анализе, алгебре передаточных функций, преобразовании Лапласа и z-преобразовании, сыграли значительную роль в развитии и применении теории управления и в родственных автоматизации областях. Вследствие их простоты и ясной связи с физической реальностью они сохранят свое место и среди более современных методов. Но значительно более абстрактная теория систем и методы анализа и синтеза позволяют решать более сложные задачи и облегчают формализацию результатов с целью получения численного решения на ЭВМ. Например, при решении задач многомерных систем и сложных замкнутых систем классические методы оказываются несостоятельными из-за вычислительных трудностей, тогда как методы пространства состояний позволяют осуществить четкую формализацию и механизацию вычислительных процедур.

Термин «методы пространства состояний» в действительности является новым названием различных методических процедур, которые ранее в течение долгого времени использовались в аналитической динамике, квантовой механике, теории устойчивости, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и других областях. Применение этих методов было стимулировано во второй половине 50-х годов в основном работой Л.С. Понтрягина и др. [67], методом динамического программирования Р. Беллмана [7], и общей теорией фильтрации и управления, разработанной Р. Калманом [121].

Модели, заданные в пространстве состояний, являются естественной формой представления динамических систем в теории управления, в особенности теории автоматического управления (П. Деруссо, Р. Рой и Ч. Клоуз [21], Г. Розенброк [142], В. Стрейц [84], Ф.Л. Черноусько [93] и др.).

Описание систем в пространстве состояний позволяет нам обнаружить и исследовать такие свойства, которые при использовании классических методов частотного анализа и описания в терминах «вход-выход» остались бы скрытыми. Как описание систем в пространстве состояний, так и методы анализа и синтеза, использующие пространство состояний, базируются на матричных и векторных представлениях. Матричная форма записи имеет неоспоримое преимущество при численном решении на ЭВМ, а ясность математических формулировок и самих решений не ухудшается даже для многомерных и сложных систем.

Центральным понятием при представлении поведения объекта управления в пространстве состояний является понятие динамической системы. Мы рассматриваем систему как структуру [37], в которую в определенные моменты времени вводится нечто (вещество, энергия или информация) и из которой в какие-то моменты времени выводится что-то. В каждый момент времени система получает некоторое входное воздействие и порождает некоторую выходную величину. В общем случае значение выходной величины зависит как от текущего значения входного воздействия, так и от предыстории этого воздействия. Иначе говоря, мы рассматриваем состояние системы как некую внутреннюю характеристику системы, значение которой в настоящий момент времени определяет текущее значение выходной величины и оказывает влияние на ее будущее. Таким образом, математическое понятие динамической системы служит для описания потока причинно-следственных связей из прошлого в будущее.

Эффективным методом исследования линейных систем управления являются алгебраические методы. Алгебраические методы для исследования различных проблем теории управления развивались Р. Калманом [37, 122, 123], Л. Заде [28], Р. Броккетом [106], Ю.И. Параевым [63], Е.М. Смагиной [80], Е.А. Перепелкиным [64], Б.Т. Поляком [65, 66] и др.

Развитие динамических процессов в материальных системах определяются внешними воздействиями. Внешние воздействия выступают в качестве причины, побуждающей динамическую систему к развитию. Этому причинно-следственному отношению «внешнее воздействие – динамический процесс» ставится в соответствие причинно-следственное описание динамических процессов в реальной системе, которое также называется описанием в терминах «вход-выход». Этот подход к описанию динамических систем активно используется в теории автоматического управления. Расширяется трактовка эволюционного описания физических систем, уходя от принципа детерминизма Ньютона. А именно, поведение динамических процессов связывают с их предысториями, а не только с начальными состояниями динамической системы. Процедура перехода от описания в терминах «вход-выход» к описанию в пространстве состояний для динамических систем с дискретным временем носит название «задача реализации». Решая задачу реализации, мы пытаемся определить, какую алгебраическую структуру представляет собой та или иная динамическая система?

Задача реализации является одной из основных задач не только теории управления, но и математической теории систем. Фундаментальные исследования проблемы реализации в теории систем связаны с именами М. Месаровича и Я. Тахакары [52], Р. Калмана [37, 120, 124, 125], Б.Л. Хо [119, 120], С. Эйленберга [108], Э. Зонтага [148-150], Дж. К. Виллемса [13, 152-154], П. Фурмана [112-115], Р. Айсинга [109-111], Дж. Риссанена [140], Н.И. Осетинского [55-57] и др.

Рассматривая реальные объекты управления, мы всегда сталкиваемся с различного рода неопределенностями в данных. Чаще всего, способом преодоления этих неопределенностей становится применение неких экспертных оценок и приближенных значений. В настоящее время существуют и другие походы к учету неопределенности в поведении объекта.

Неопределенность имеет место, когда универсальное множество состоит более чем из одной точки. Если для элементов множества заданы соответствующие вероятности или другие вероятностные характеристики, то имеет место вероятностная неопределенность. Если известны только граничные элементы множества – интервальная неопределенность. При задании для каждого элемента множества соответствующей степени принадлежности – нечеткость. Последний вид неопределенности может быть описан с использованием теории нечетких множеств и нечеткой логики (Л. Заде [29, 155], И.З. Батыршин [1], С.Н. Васильев [11, 12] и др.). Например, в монографии А.Е. Алтунина и М.В. Семухина [3] на практических примерах показаны преимущества применения теории нечетких множеств и интервального анализа при решении задач контроля и управления процессами разработкой газовых месторождений и объектов системы газодобычи в условиях неопределенности.

Интервальный анализ предназначен для работы в условиях неопределенности с величинами, для которых задан интервал допустимых или возможных значений.

Интервальный анализ возник в 1962 г. благодаря работе Л.В. Канторовича [39] как средство учета ошибок округлений при расчетах на ЭВМ и стал одним из мощных инструментов для описания и исследования систем с неопределенностями и неоднозначностями в данных. Источниками интервальности могут быть неполнота знаний об объекте управления и вытекающие отсюда ошибки моделирования, естественная погрешность измерительных приборов, погрешности вычисления коэффициентов или последствия линеаризации нелинейных уравнений с неопределенными параметрами и т.д. Многие задачи математической теории управления допускают естественную «интервализацию» путем замены вещественных параметров и/или переменных на соответствующие интервальные. Большинство этих интервализованных задач оказываются адекватными и интерпретируемыми с точки зрения практических приложений.

Основополагающие результаты в области интервального анализа были получены в работах А.Б. Куржанского [43, 44], Ю.И. Шокина [38, 102, 145], С.П. Шарого [94-98, 144], А.В. Лакеева [45, 128-130], А.П. Вощинина [16], Г.Г. Меньшикова [50, 51], Р. Мура [133-135], Е. Хансена [116, 117], Г. Алефельда [2, 104], А. Неймайера [136, 137], Ю. Рона [141, 142], Г. Майера [104, 131, 132], В. Крейновича [128, 129], Р.Б. Кирфотта [127] и др.

Интервальные методы используются как для анализа статических систем [95, 97, 98], так и для решения задач анализа, синтеза динамических систем и проблем управления ими. Примером тому могут быть работы В.Л. Харитонова [87], Ю.И. Шокина [30, 91], Е.М. Смагиной [24, 81-83], В.В. Домбровского [22, 23], Н.А. Хлебалина [88-91], С.П. Соколовой [32], Л. Т. Ащепкова [4-6], Д.В. Сперанского [9, 10] и других авторов [18-20, 26, 31, 46-48, 53, 54, 85, 86, 92, 99-101, 103, 105].

С развитием интервальных методов появился интервальный нестатистический анализ и такие его методы, как метод центра неопределенности, применяемый при анализе интервальных систем (А.П. Вощинин и Г.Р. Сотиров [15, 16], Н.М. Оскорбин [60-62], В.М. Белов, В.А. Суханов и Ф.Г. Унгер [8] и др.).

Неполнота алгебраической и порядковой структур интервального пространства, и отсутствие полноценной дистрибутивности являются причинами, из-за которых существующие методы и алгоритмы теории систем не применимы к классу интервально-заданных объектов. Большинство задач интервального анализа являются NP-трудными [128-130].

Анализ литературы, посвященной динамическим системам с неопределенностью интервального типа, показал, что внимание исследователей, в основном, сосредоточено на анализе и синтезе систем рассматриваемого типа. Моделированию и тесно связанной с ним проблеме реализации не уделяется достаточного внимания. В настоящий момент не существует эффективных методов и алгоритмов для нахождения описания такой системы в пространстве состояний, а методы классической теории реализации неприменимы, так как классическая интервальная арифметика является только полугруппой.

Настоящая работа посвящена разработке методов решения задачи реализации для интервальных линейных динамических систем с дискретным временем, которая заключается в нахождении (по возможности минимального) описания пространства состояний интервальной динамической системы по известному описанию вход-выход, основанному на наблюдении во времени входных сигналов и соответствующей им реакции системы (выходных сигналов).

Целью настоящей **работы** является разработка методов и алгоритмов решения задачи реализации для интервальных линейных динамических систем с дискретным временем.

Поставленная цель достигается решением следующих **задач**:

1. Постановкой задачи реализации для исследуемого класса систем.
2. Получением критериев реализуемости.
3. Разработкой методов вычисления алгебраических реализаций.
4. Созданием на базе этих методов алгоритмов и программного обеспечения для решения задач реализации.

В качестве **методической основы** для разработки методов, предложенных в данной работе, выбран алгебраический подход к теории систем и методы интервального анализа.

Научная новизна результатов, полученных в настоящей работе, состоит в следующем:

1. Получен достаточный критерий алгебраической реализуемости для класса линейных интервальных динамических систем с дискретным временем.

2. Сформулированы и обоснованы два новых подхода к построению алгебраических реализаций – метод граничных реализаций и метод погружения в линейное пространство, позволяющие вычислять алгебраические реализации для полностью неотрицательных интервальных динамических систем.

3. Доказаны утверждения, позволяющие распространить разработанные методы реализации на интервальные динамические системы смешанного типа, и строить различные модификации алгоритмов вычисления алгебраических реализаций.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в том, что разработанные методы и алгоритмы представления интервальных динамических систем в пространстве состояний можно использовать при решении практических задач моделирования, прогнозирования и управления в технических, медико-технических, экологических, экономических и других системах для построения моделей объектов управления с неопределенностью интервального типа.

Положения, выносимые на защиту:

1. Достаточный критерий алгебраической реализуемости интервальных динамических систем с дискретным временем.
2. Метод граничных реализаций для полностью неотрицательных интервальных динамических систем.
3. Модификация метода граничных реализаций для интервальных импульсных последовательностей смешанного типа.
4. Метод реализации для неотрицательных интервальных динамических систем, основанный на погружении интервального пространства в линейное пространство удвоенной размерности.
5. Комплекс алгоритмов и программное обеспечение для решения задачи реализации для интервальных динамических систем.

Апробация работы. Основные выводы и теоретические положения диссертации докладывались на краевой конференции по математике «МАК-2003» и региональной конференции по математике «МАК-2005» (Барнаул), международной научно-технической конференции «Измерения, контроль, информатизация» (Барнаул, 2003), второй международной электронной научно-технической конференции «Технологическая системотехника» (Тула, 2003), на рабочих совещаниях по интервальной математике в рамках международной конференции «Перспективы систем информатики» (Новосибирск, 2003) и международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004 (Новосибирск, 2004), всероссийской научно-технической конференции «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (Бийск, 2004).

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Во введении обоснована актуальность выбранной темы, определены цель, задачи, объект и методы исследования, научная новизна, указаны положения, выносимые на защиту, дана общая характеристика работы.

В **первой главе** определены основные понятия теории линейных динамических систем; описаны методы и алгоритмы решения задачи реализации для таких систем; приведены различные определения динамических систем с неопределенностями; дан обзор работ в области исследования свойств и управления интервальными системами; предложено несколько определений интервальных динамических систем с дискретным временем и очерчен круг проблем, возникающих при исследовании подобных систем; а также введена в рассмотрение задача реализации для систем рассматриваемого типа.

Вторая глава посвящена разработке методов и алгоритмов точной реализации для полностью неотрицательных интервальных динамических систем с дискретным временем. Получен достаточный критерий реализуемости интервальных динамических систем. Разработан метод граничных реализаций и метод реализации, основанный на погружении интервального пространства в линейное пространство удвоенной размерности.

В **третьей главе** мы продолжим разработку методов точной реализации для интервальных динамических систем и представим модификацию метода граничных реализаций для интервальных импульсных последовательностей смешанного типа, а также несколько алгоритмов, основанных на декомпозиции исходной интервальной динамической системы в параллельное соединение.

В **заключении** изложены основные теоретические выводы настоящего исследования, подведены итоги и определены возможные направления дальнейшего изучения проблемы.

В Приложении А изложены основные сведения о классической и полной интервальных арифметиках. Приложение Б содержит описание программного обеспечения для решения задач точной (точечные и интервальные динамические системы) и приближенной реализации (точечные динамические системы).

Общий объем диссертации составляет 115 страниц. Список литературы включает 157 наименований. Приложения изложены на 7 страницах.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{Z}$	множество (кольцо) целых чисел
$\mathbb{R}$	множество (поле) вещественных чисел
$\mathbb{C}$	множество (поле) комплексных чисел
$\mathbb{Z}_+$	множество неотрицательных целых чисел
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных вещественных чисел
$\mathbb{IR}$	классическая интервальная арифметика
$\mathbb{KR}$	полная интервальная арифметика Каухера
$\prod_{i\in I} W_i = W_1 \times W_2 \times \dots$	декартово произведение множеств W_i, $i \in I$
K	произвольное поле
K^n	n-мерное векторное (линейное) пространство
$K^{n\times m}$	множество матриц размера $n\times m$ с элементами из K
$a, b, \dots, A, B, \dots$	векторы и матрицы с вещественными значениями
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	интервалы и векторы с интервальными элементами
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	матрицы с интервальными элементами
$\mathbf{A}_1^-, \mathbf{A}_2^-, \dots$	неположительная последовательность интервальных матриц, т.е. матриц, состоящих из интервалов, обе границы которых неположительны
$\mathbf{A}_1^+, \mathbf{A}_2^+, \dots$	соответственно неотрицательная последовательность интервальных матриц
$\underline{A}$	нижняя граница интервала $\mathbf{A}$
$\overline{A}$	верхняя граница интервала $\mathbf{A}$
$\dim X$	размерность пространства X
$\operatorname{rank} A$	ранг матрицы A
A^{-1}	матрица, обратная к матрице A
A^+	матрица, псевдообратная к матрице A

I	единичная матрица подходящих размеров
O	нулевая матрица подходящих размеров
σ	оператор сдвига влево, действующий на последовательностях и матрицах
$A=\{A_1, A_2, \ldots\}$	последовательность отображений (матриц)
$\mathcal{H}(f)$	ганкелева матрица отображения f
$\Sigma=(F,G,H)$	линейная динамическая система, определяемая отображениями (матрицами) F, G, H
$\mathbf{\Sigma}=(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$	интервальная линейная динамическая система, определяемая отображениями (матрицами) $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}$
$\dim\Sigma$	размерность системы Σ
X_Σ	пространство состояний системы Σ
f_Σ	отображение вход-выход системы Σ
$\to, \xrightarrow{f}, \xrightarrow[g]{}, \uparrow, \downarrow$	отображения в стрелочных диаграммах
$\circ$	знак композиции отображений
$\bigcup$	объединение множеств
$\bigcap$	пересечение множеств
$A\subset B$	множество B содержит множество A
$\cong$	знак изоморфизма
$\Rightarrow$	импликация
$\Leftrightarrow$	эквиваленция
$\square$	конец доказательства утверждения (теоремы, леммы, предложения)

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

При представлении поведения объекта управления в пространстве состояний не обойтись без понятия динамической системы и задачи реализации. В данной главе мы рассмотрим проблему реализации для различных классов линейных динамических систем.

Сначала мы дадим определение динамической системы с пространством состояний и перечислим ее основные свойства, а затем сформулируем саму проблему реализации. Всюду при рассмотрении точечных динамических систем, мы будем опираться на подход Р. Калмана [37].

Параграф 2 посвящен обзору методов нахождения точной реализации для динамических систем над полями. Подробно будут рассмотрены алгоритм Б.Л. Хо (и его численная реализация) и алгоритмы реализации, основанные на псевдообращении ганкелевых матриц.

Начиная с параграфа 3, мы перейдем к рассмотрению интервальных систем. В этом параграфе приведены различные определения динамических систем с интервальной неопределенностью и обзор работ в области исследования свойств и управления такими системами.

Далее мы введем в рассмотрение интервальные динамические системы с дискретным временем, предложим несколько определений таких систем и очертим круг проблем, возникающих при исследовании подобных систем.

Заключительный пятый параграф посвящен постановке проблемы реализации для интервальных динамических систем с дискретным временем.

1.1. Проблема реализации для систем над полями

Введем формальное определение динамической системы [37].

Определение 1.1. *Динамической системой* Σ называется сложное математическое понятие, определяемое следующими аксиомами.

1. Заданы множество моментов времени T, множество состояний X, множество мгновенных значений входных воздействий U, множество допустимых входных воздействий $\Omega = \{\omega : T \to U\}$, множество мгновенных значений выходных величин Y и множество выходных величин $\Gamma = \{\gamma : T \to Y\}$.

2. (Направление времени.) Множество T есть некоторое упорядоченное подмножество множества вещественных чисел.

3. Множество входных воздействий Ω удовлетворяет следующим условиям:

а) (Нетривиальность.) Множество Ω непусто.

б) (Сочленение входных воздействий.) Назовем отрезком входного воздействия $\omega_{(t_1,t_2]}$ для $\omega \in \Omega$ сужение ω на $(t_1, t_2] \cap T$. Тогда если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $t_1 < t_2 < t_3$, то найдется такое $\omega'' \in \Omega$, что

$$\omega''_{(t_1,t_2]} = \omega_{(t_1,t_2]} \text{ и } \omega''_{(t_1,t_2]} = \omega'_{(t_1,t_2]}.$$

4. Существует переходная функция состояния $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to X$, значениями которой служат состояния $x(t) = \varphi(t; \tau, x, \omega) \in X$, в которых оказывается система в момент времени $t \in T$, если в начальный момент времени $\tau \in T$ она была в начальном состоянии $x = x(\tau) \in X$ и если на нее действовало входное воздействие $\omega \in \Omega$. Функция φ обладает следующими свойствами:

а) (Направление времени.) Функция φ определена для всех $t \geq \tau$ и не обязательно определена для всех $t < \tau$.

б) (Согласованность.) Равенство $\varphi(t; t, x, \omega) = x$ выполняется при любых $t \in T$, любых $x \in X$ и любых $\omega \in \Omega$.

в) (Полугрупповое свойство.) Для любых $t_1 < t_2 < t_3$ и любых $x \in X$ и $\omega \in \Omega$ имеем $\varphi(t_3; t_1, x, \omega) = \varphi(t_3; t_2, \varphi(t_2; t_1, x, \omega), \omega)$.

г) (Причинность.) Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\omega_{(\tau,t]} = \omega'_{(\tau,t]}$, то $\varphi(t; \tau, x, \omega) = \varphi(t; \tau, x, \omega')$.

5. Задано выходное отображение $\eta : T \times X \to Y$, определяющее выходные величины $y(t) = \eta(t, x(t))$. Отображение $(\tau, t] \to Y$, задаваемое соотношением $\sigma \mapsto \eta(\sigma, \varphi(\sigma; \tau, x, \omega))$, $\sigma \in (\tau, t]$, называется отрезком выходной величины, т. е. сужением $\gamma_{(\tau,t]}$ некоторого $\gamma \in \Gamma$ на $(\tau, t]$.

Динамическая система называется *стационарной* (постоянной) если ее структура (основные соотношения) не меняется во времени.

Динамическая система Σ называется *системой с дискретным временем* тогда и только тогда, когда T есть множество целых чисел, и называется системой с непрерывным временем тогда и только тогда, когда T есть множество вещественных чисел.

Наиболее важной мерой сложности системы является структура ее пространства состояния. Динамическая система Σ называется *конечномерной* тогда и только тогда, когда X является конечномерным линейным пространством. При этом $\dim \Sigma = \dim X_\Sigma$. Система Σ называется конечной тогда и только тогда, когда множество X конечно. Система Σ называется конечным автоматом тогда и только тогда, когда все множества X, U и Y конечны и, кроме того, система стационарна и с дискретным временем.

Динамическая система Σ называется *линейной* тогда и только тогда, когда

1. пространства X, U, Ω, Y и Γ суть векторные пространства (над заданным произвольным полем K);

2. отображение $\varphi(t; \tau, \bullet, \bullet) : X \times \Omega \to X$, является K-линейным при всех t и τ;

3. отображение $\eta(t, \bullet) : X \to Y$ является K-линейным при любых t.

Динамическая система Σ называется *гладкой* тогда и только тогда, когда

1. $T = \mathbb{R}$ есть множество вещественных чисел (с обычной топологией);

2. X и Ω суть топологические пространства;

3. переходное отображение φ обладает тем свойством, что $(\tau,x,\omega)\mapsto\varphi(\bullet;\tau,x,\omega)$ определяет непрерывное отображение $T\times X\times\Omega\to C^1(T\times X)$, где $C^1(T\times X)$ обозначает семейство C^1 функций $T\times X$.

1.1.1. Определение динамической системы с пространством состояний

В данной работе мы будем рассматривать динамические системы с пространством состояний. Для краткости мы будем говорить просто «динамическая система» и под такой системой будем понимать линейную стационарную многомерную управляемую динамическую систему с дискретным временем. Дадим формальное определение для динамической системы с пространством состояний, исходящее от Р. Калмана [37].

Определение 1.2. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем* с m входами и p выходами *над полем* K называется сложный объект $\Sigma=(F,G,H,J)$, где

$$F:X\to X,$$
$$G:K^m\to X,$$
$$H:X\to K^p,$$
$$J:K^m\to K^p$$

есть K-линейные отображения (K-гомоморфизмы): K^m,K^p – пространства входных и выходных сигналов соответственно, X – некоторое абстрактное векторное пространство над K (пространство состояний).

Динамическое поведение системы Σ определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t+1)&=Fx(t)+Gu(t)\\ y(t)&=Hx(t)+Ju(t),\quad t=0,1,2,\ldots, \end{aligned}\tag{1.1}$$

где $t\in\mathbb{Z}$, $x(t),x(t+1)\in X$, $u(t)\in U=K^m$, $y(t)\in Y=K^p$. Размерность пространства X, $\dim X$, определяет размерность системы $\Sigma,\dim\Sigma$.

В большинстве случаев вместо модели (1.1) используется модель без учета связи в прямых каналах. В этом случае $J=0$ и модель приобретает вид

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t), \quad t=0,1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Такое представление часто оказывается более предпочтительным, поскольку, отображение J не влияет ни на решение задачи реализации, ни на свойства управляемости и наблюдаемости системы.

Отметим, что выбор U и Y в виде определенных векторных пространств над полем K выражает тот факт, что имеется определенный фиксированный характер взаимодействия системы с окружающей средой. Поэтому такое предположение вполне допустимо. С другой стороны, представление пространства состояний X в виде K^n – условность, позволяющая описывать внутреннее поведение системы численным образом с помощью матриц F,G,H.

1.1.2. Другие определения динамической системы

Одним из наиболее общих определений системы является следующее определение М. Месаровича и Я. Тахакары [52].

Определение 1.3. *Системой* (общей системой) называется отношение на непустых множествах

$$S \subset \prod_{i\in I} V_i\,, \qquad (1.3)$$

где $\prod$ – символ декартова произведения, I – множество индексов. Множество V_i называется объектом системы S.

Привычное понятие системы типа вход-выход является частным случаем системы типа (1.3).

Определение 1.4. Пусть множество индексов I допускает разбиение, т.е.

$$I = I_A \cup I_B,\; I_A \cap I_B = \varnothing.$$

Будем называть множество $A = \prod_{i \in I_A} V_i$ входным объектом, а множество $B = \prod_{i \in I_B} V_i$ выходным объектом системы S. Тогда система, определенная соотношением

$$S \subset A \times B,$$

называется *системой вход-выход*.

Другое определение системы, исходящее от Я.К. Виллемса [13], согласно которому под динамической системой понимается любой набор траекторий, также является общим и позволяет рассматривать большой класс систем.

Определение 1.5. *Динамической системой* называется тройка $\Sigma = (T,\ W,\ B)$, в которой T – множество моментов времени, W – алфавит сигналов, $B \subset W^T$ – поведение системы.

Другие определения динамических систем можно найти в монографии С.Г. Пушкова [77].

1.1.3. Свойства динамических систем

При решении задач управления методами теории пространства состояний учитываются некоторые фундаментальные свойства динамических систем, которые не встречаются в классической теории управления, оперирующей только входными и выходными сигналами системы. Этими свойствами являются достижимость, управляемость, наблюдаемость и др.

Определение 1.6. [37] Событие (τ, x) для линейной системы Σ называется *достижимым* (из начала координат) тогда и только тогда, когда найдется такое $s \le \tau$ и такое входное воздействие ω, что оно переводит систему из состояния $(s, 0)$ в состояние (τ, x).

Определение 1.7. [37] Событие (τ, x) для линейной системы Σ называется *управляемым* (относительно начала координат) тогда и только тогда, когда найдется такое $t \ge \tau$ и такое входное воздействие ω, что оно переводит систему из состояния (τ, x) в состояние $(t, 0)$.

Определение 1.8. [84] Состояние $x(t_0)$ системы *наблюдаемо*, если оно может быть определено по будущим значениям выходной переменной $y(t)$, $t > t_0$, и если интервал $t - t_0$ конечен.

Определение 1.9. [37] Система Σ называется *полностью достижимой* (или *полностью управляемой*) в момент времени τ тогда и только тогда, когда каждое событие (τ, x), где τ фиксировано, а $x \in X$, является достижимым (или управляемым). Если же момент времени τ не упоминается, то эти свойства должны выполняться для всех τ.

С другими свойствами динамических систем можно ознакомиться в [37, 77, 84].

Определение 1.10. [37] Реализация Σ отображения f называется *канонической* (или естественной) тогда и только тогда, когда она полностью достижима и полностью наблюдаема.

Размерность системы Σ, $\dim\Sigma$, является минимальной в классе всех реализаций отображения f тогда и только тогда, когда Σ есть каноническая реализация f.

1.1.4. Отображение вход-выход для линейной динамической системы

Отображения вход-выход предназначены для описания исходов экспериментов следующего типа [37]:

1. Подаем на вход системы последовательность входных воздействий конечной длительности. Подачу входных воздействий заканчиваем в момент времени $t = t_0$, т.е. при любых $t > t_0$ считаем, что входные воздействия равны нулю.

2. Наблюдаем выходные величины системы лишь после того, как подача входных воздействий закончилась, т.е. при $t > t_0$. При этом будем предполагать, что значения выходных величин известны при любых $t > t_0$, независимо от того, насколько они велики.

3. Так как мы рассматриваем стационарные системы, для обозначения момента времени в качестве $t = t_0$ можно выбрать любое целое, очевидно, что это будет $t_0 = 0$.

4. В силу линейности рассматриваемых систем предположения 1-3 не накладывают никаких ограничений на общность выводов.

Определение 1.11. [37] *Динамической системой* Σ (с точки зрения ее внешнего поведения) называется сложное математическое понятие, определяемое следующим образом:

1. Заданы множества T, U, Ω, Y и Γ, удовлетворяющие всем свойствам, перечисленным в определении 1.1.

2. Задано множество A, индексирующее семейство функций $\mathcal{F} = \left\{ f_\alpha : T \times \Omega \to Y, \alpha \in A \right\}$, где каждый элемент семейства $\mathcal{F}$ записывается в явном виде как $f_\alpha\left(t, \omega\right) = y\left(t\right)$, т. е. является выходной величиной для входного воздействия ω, полученной в эксперименте α. Каждое f_α называется отображением вход-выход и обладает следующими свойствами:

а) (Направление времени.) Существует такое отображение $\iota : A \to T$, что $f_\alpha\left(t, \omega\right)$ определено при всех $t \geq \iota\left(\alpha\right)$.

б) (Причинность.) Пусть $\tau, t \in T$ и $\tau < t$. Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\omega_{\left(\tau, t\right]} = \omega'_{\left(\tau, t\right]}$, то $f_\alpha\left(t, \omega\right) = f_\alpha\left(t, \omega'\right)$ при всех α, для которых $\tau = \iota\left(\alpha\right)$.

В соответствии с этим определением динамическую систему можно рассматривать как некоторый абстрактный набор экспериментальных данных, которые пронумерованы с помощью параметра α и состоят в том, что на вход системы подаются некоторые входные воздействия и наблюдаются соответствующие выходные величины.

Функция вход-выход f определяется следующим образом. Пусть Ω – пространство всевозможных входных функций с компактным носителем, которые обращаются тождественно в нуль при $t > 0$. Пусть Γ есть пространство всевозможных выходных функций, определенных лишь для $t > 0$.

Тогда отображение $f:\Omega\to\Gamma$ можно интерпретировать следующим образом: на вход системы подается входное воздействие ω, заканчивающееся в момент времени 0, и после этого начинается наблюдение реакции системы γ. Для стационарной системы такое определение функции вход-выход не ограничивает его общности.

Введем строгое определение отображения вход-выход [37].

Определение 1.12. [37] *Линейным отображением вход-выход* для нулевого состояния над K называется отображение $f:\Omega\to\Gamma$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Ω есть множество всевозможных последовательностей K-векторов $\omega:\mathbb{Z}\to K^m$, таких, что $\omega(t)=0$ при всех $t>0$ и всех $t<t_{-1}\le 0$, где t_{-1} – некоторое целое, возможно зависящее от ω;

2. Γ есть множество всевозможных последовательностей K-векторов $\gamma:\mathbb{Z}\to K^p$, таких, что $\gamma(t)=0$ при всех $t\le 0$;

3. отображение f инвариантно относительно сдвигов во времени в том смысле, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \sigma_\Omega\downarrow & & \downarrow\sigma_\Gamma \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

является коммутативной по отношению к следующим операторам сдвига σ_Ω и σ_Γ:

$\sigma_\Omega:\big(0,\ldots,\omega(-1),\omega(0);0,\ldots\big)\mapsto\big(0,\ldots,\omega(0),0;0,\ldots\big)$ («приписывание нуля»),

$\sigma_\Gamma:\big(0,\ldots,0;\gamma(1),\gamma(2),\ldots\big)\mapsto\big(0,\ldots,0;\gamma(2),\gamma(3),\ldots\big)$ («отбрасывание $\gamma(1)$»);

4. Ω и Γ суть K-векторные пространства, а f есть некоторый K-гомоморфизм относительно описанной выше структуры в Ω и Γ.

Определение 1.13. [37] Линейная динамическая система Σ в смысле определения 1.1 является *реализацией* отображения вход-выход f в смысле определения 1.11 тогда и только тогда, когда отображение вход-выход f_Σ системы Σ совпадает с f, т. е. когда $f_\Sigma = f$.

Теорема 1.1. Система Σ реализует отображение f только тогда, когда

$$\left[f(e_i)\right]_j = \left([HG]_{ji}, [HFG]_{ji}, \left[HF^2G\right]_{ji}, \dots\right).$$

Теперь выпишем явную формулу отображения f_Σ:

$$f_\Sigma : \omega \mapsto \left(\sum_t HF^{-t}G\omega(t), \sum_t HF^{-t+1}G\omega(t), \dots\right).$$

1.1.5. Классическая проблема реализации

Классическая проблема реализации состоит в определении модели пространства состояний для динамической системы, заданной своим поведением вход-выход. Поведение вход-выход линейной стационарной многомерной управляемой системы может быть охарактеризовано импульсной последовательностью матриц размера $p \times m$ (m – число входов, p – число выходов системы):

$$\{A_1, A_2, \dots\}. \tag{1.4}$$

В этом случае для заданной последовательности векторов управлений (входной последовательности) $u(0), u(1), \dots$ выходная последовательность векторов $y(1), y(2), \dots$ определяется соотношениями

$$y(t) = \sum_{i=1}^{t} A_i u(t-i), \quad t = 1, 2, \dots . \tag{1.5}$$

Таким образом, поведение вход-выход определяет некоторое отображение, которое мы будем называть отображением вход-выход:

$$f : U^{\mathbb{Z}_+} \to Y^{\mathbb{Z}_+}.$$

Задача реализации для данного класса систем состоит в определении математической модели этой системы в пространстве состояний, которая описывается разностными уравнениями (1.2). Определению подлежат матрицы F, G и H вместе с их размерностями.

Для систем над полями задание отображения вход-выход эквивалентно заданию бесконечной последовательности матриц (1.4), такой, что для системы, находящейся в начальный момент времени в нулевом состоянии, имеем (1.5).

Следовательно, задача реализации может быть сформулирована таким образом:

для заданной последовательности матриц размера $p \times m$ *над полем* K (1.4) *построить тройку матриц* (F, G, H) *над тем же полем* K *таких, что*

$$A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1, 2, \ldots$$

где для некоторого n *(которое также нужно определить)* H *– матрица размера* $p \times n$*,* F *– матрица размера* $n \times n$*,* G *– матрица размера* $n \times m$.

Известно также, что для систем над полями (и коммутативными кольцами) реализуемость последовательности (1.4) эквивалентна ее рекуррентности [148]. Это означает, что если для последовательности (1.4) существует конечномерная реализация, то найдутся такое целое $r > 0$ и коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ из поля (или кольца), над которым определена система, такие, что

$$A_{r+j+1} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i A_{i+j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Проблема реализации может быть обобщена также на случай систем над кольцами [148].

1.2. Методы нахождения точной реализации

Теория реализации динамических систем берет свое начало с 60-ых годов XX века. Основными результатами в этой области были работы Б.Л. Хо [119, 120], Р. Калмана [37, 120, 123-125], П. Зейгера [124], Дж. Риссанена [140], Л. Силвермана [147], П. Фурмана [114, 115] и др.

В 1965 г. Р. Калман представил алгоритм, который решал задачу конечномерной реализации над полем действительных чисел с помощью вычисления матричных инвариантов. Теорема о матричных инвариантах представляет собой дословный перевод на язык теории модулей классической теоремы об инвариантных многочленах. Реализация, построенная с помощью этого алгоритма является канонической, а, следовательно, минимальной.

Впервые алгоритм вычисления реализации, носящий имя Б.Л. Хо, был приведен в работе [120]. В работе [37] этот алгоритм обобщается на случай произвольного поля и сводится к приведению ганкелевой матрицы $H_{rr}(f)$ к диагональному виду. Алгоритм Хо-Калмана, позволил обойтись без сложных и утомительных расчетов, характерных для решения задачи реализации с помощью теоремы о матричных инвариантах. Этот алгоритм играет центральную роль в теории систем, его идеи оказалась приложимы и в случае весьма общих колец.

Алгоритм, предложенный П. Фурманом [114, 115] также предназначен для вычисления реализации над полем $\mathbb{R}$. Алгоритмы нахождения частичной реализации над полем $\mathbb{R}$ можно найти в работах Дж. Риссанена [140] и Л. Силвермана [147]. Алгоритм П. Зейгера [124] применим для систем над произвольным полем. В работе [111] приведены алгоритмы реализации систем над целостным кольцом главных идеалов. Показано, что алгоритмы Б.Л. Хо и П. Зейгера могут быть обобщены на случай кольца. Также представлен рекурсивный алгоритм частичной реализации для последовательностей матриц, не всегда являющихся достижимыми. Этот алгоритм обобщает алгоритм Дж. Риссанена на случай кольца. Для систем над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ в работе [13] приведен универсальный алгоритм реализации, обобщающий практически все известные к тому времени алгоритмы реализации. Показано, что алгоритмы Б.Л. Хо и Л. Силвермана являются частными случаями этого алгоритма, но недостаточная структурируемость делает этот алгоритм трудно реализуемым для численного выполнения.

1.2.1. Алгоритм Б.Л. Хо

Задание отображения вход-выход f эквивалентно заданию бесконечной в двух направлениях блочной матрицы

$$\mathcal{H}(f)=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ A_2 & A_3 & A_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

которая называется ганкелевой матрицей отображения f. Хотя матрица $\mathcal{H}(f)$ и блочно-симметрична, она необязательно симметрична в обычном смысле слова. Нас будут интересовать только блочные подматрицы размера $q' \times q$, занимающие верхний левый угол матрицы $\mathcal{H}(f)$, т. е.

$$\mathcal{H}_{q'q}(f)=\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_q \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q'} & \cdots & A_{q'+q+1} \end{bmatrix}.$$

На $\mathcal{H}(f)$ можно ввести оператор сдвига σ следующим образом:

$$\sigma^k \mathcal{H}(f)=\mathcal{H}\left(\sigma^k f\right)=\begin{bmatrix} A_{1+k} & A_{2+k} & \cdots \\ A_{2+k} & A_{3+k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Ганкелеву матрицу $\mathcal{H}(f)$ можно рассматривать как математический объект, эквивалентный отображению f, который можно использовать вместо f в качестве «исходного материала» для различных расчетов.

Обозначим через

$$E_n^m=\begin{cases} \text{матрица рамера } m\times n \text{ вида } \left(I_m^n O_{n-m}^n\right), \text{ если } n<m \\ \text{матрица рамера } m\times n \text{ вида } \begin{pmatrix} I_m^n \\ O_n^{n-m} \end{pmatrix}, \text{ если } n>m \\ \text{единичная матрица вида } \left(I_n^n\right), \text{ если } n=m \end{cases},$$

где I_n^n и O_n^m – соответственно единичная и нулевая матрицы размера $m\times n$.

Теорема 1.2. Пусть для последовательности матриц (1.4) над полем K существует такое r, что выполняется (1.6). Тогда, если матрицы P размера $pr \times pr$ и M размера $mr \times mr$ над K удовлетворяют условию

$$P\left[\mathcal{H}_{rr}\left(f\right)\right]M = \begin{pmatrix} I_n^n & O_{mr\text{-}n}^n \\ O_n^{pr\text{-}n} & O_{mr\text{-}n}^{pr\text{-}n} \end{pmatrix} = E_n^{pr}E_{mr}^n \tag{1.7}$$

для $n = rank\ \mathcal{H}_{rr}\left(f\right)$, то каноническую реализацию отображения f можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} F &= E_{pr}^n P\left[\left(\sigma\ \mathcal{H}\right)_{rr}\left(f\right)\right]ME_n^{mr}, \\ G &= E_{pr}^n P\left[\mathcal{H}_{rr}\left(f\right)\right]E_m^{mr}, \\ H &= E_{pr}^p\left[\mathcal{H}_{rr}\left(f\right)\right]ME_n^{mr}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Эта теорема дает алгоритм вычисления конечномерной реализации, который получил название алгоритма Б.Л. Хо.

Построение канонической реализации произвольного конечномерного отображения вход-выход f можно осуществить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 1.1.

Исходные данные. Ганкелева матрица отображения $\mathcal{H}_{rr}\left(f\right)$.

Шаг 1. Выбираем r, удовлетворяющее условию (1.6).

Шаг 2. Полагаем $n = rank\ \mathcal{H}_{rr}\left(f\right)$. Находим невырожденные матрицы P размера $pr \times pr$ и M размера $mr \times mr$ над K такие, что выполняется (1.7).

Шаг 3. Вычисляем матрицы канонической реализации по формулам (1.8).

Основное ограничение алгоритма Б.Л. Хо состоит в том, что все в нем зависит от справедливости следующего абстрактного условия: для f существует некоторая конечномерная реализация. Даже замена его более ясным эквивалентным условием: существует целое n такое, что

$$rank\ \mathcal{H}_{q'q}\left(f\right) \le n \tag{1.9}$$

для любых положительных q и q', не дает возможности убедиться в реализуемости f эмпирическим путем, поскольку для этого пришлось бы перепробовать бесконечное множество комбинаций q и q'. Выходом из создавшейся затруднительной ситуации является использование вместо условия (1.9) другого условия, которое гарантирует реализуемость первых $q+q'$ членов последовательности (1.4).

Теорема 1.3. Для отображения вход-выход f, заданного последовательностью матриц (1.4) над K, система $\Sigma = \left(F, G, H\right)$, определенная по формулам

$$\begin{aligned} F &= E_{pq'}^{n} P\left[\left(\sigma\, \mathcal{H}\right)_{q'q}\left(f\right)\right] M E_{n}^{mN}, \\ G &= E_{pq'}^{n} P\left[\mathcal{H}_{q'q}\left(f\right)\right] E_{m}^{mN}, \\ H &= E_{pq'}^{p}\left[\mathcal{H}_{q'q}\left(f\right)\right] M E_{n}^{mN} \end{aligned} \tag{1.10}$$

для походящих матриц P и M реализует эту последовательность вплоть до члена A_{q_0} включительно тогда и только тогда, когда

$$q + q' = q_0 \tag{1.11}$$

$$rank\ \mathcal{H}_{q'q}\left(f\right) = rank\ \mathcal{H}_{q'+1,q}\left(f\right) = rank\ \mathcal{H}_{q',q+1}\left(f\right) \tag{1.12}$$

Реализация (1.10) при выполнении условий (1.11)-(1.12) является канонической.

Теорема 1.3 по существу дает нам способ вычисления частичной реализации. Очевидно, у каждого отображения вход-выход f существуют конечномерные канонические частичные реализации любого порядка. В [37] показано, что реализация (1.10) представляет собой минимальную частичную реализацию порядка q_0 только, когда выполняются условия (1.11)-(1.12). Более того, если условие (1.12) не выполняется, то каждая частичная реализация отображения f имеет размерность, большую чем $rank\ \mathcal{H}_{q'q}\left(f\right)$.

1.2.1.1. Численная реализация алгоритма Б.Л. Хо

Работа С.Г. Пушкова [74] содержит численную реализацию алгоритма Б.Л. Хо для систем над полем действительных чисел. При машинной реализации этого алгоритма возникают трудности, связанные с бессмысленностью понятия бесконечной матрицы для машинного представления, а также с ограниченной точностью представления чисел в ЭВМ. Алгоритм и программа, описанные в данной работе, являются вариантом преодоления этих трудностей. Предложенный автором алгоритм численной реализации может быть полностью применен для систем не только над полем $\mathbb{R}$, но и над любым числовым нормированным полем, в частности над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В работах [41, 69] представлены различные версии программного обеспечения, реализующего алгоритм Б.Л. Хо. Представленные в этих работах программы предназначены для вычисления конечномерной реализации точно заданного отображения вход-выход. Исходными данными для них является точно заданная последовательность матриц, соответствующая импульсной характеристике отображения вход-выход. Результатом работы программ являются вычисленные матрицы F, G, H реализации. С помощью программ можно определить размерность реализации и саму реализацию в том случае, когда для заданного отображения вход-выход существует конечномерная реализация, в противном случае вычисляется частичная реализация. Программы можно использовать также для поиска рекуррентной закономерности в заданной последовательности матриц. Если такая закономерность существует, то программы позволяют найти ее и продлить исходную последовательность матриц.

1.2.2. Алгоритм реализации, основанный на псевдообращении ганкелевых матриц

В работе [75] С.Г. Пушкова доказана теорема, которая дает метод вычисления конечномерной реализации для случая, когда ганкелева матрица отображения вход-выход имеет полный ранг. Эта теорема дает новый алгоритм конечномерной реализации для линейных стационарных динамических систем над полем. В этом алгоритме вместо процедуры диагонализации ганкелевой матрицы отображения, используемой в алгоритме Б.Л. Хо, предлагается использовать процедуру псевдообращения ганкелевой матрицы отображения вход-выход. Предложенный алгоритм целесообразно использовать в тех случаях, когда псевдообращение ганкелевой матрицы предпочтительнее. Кроме того, алгоритм позволяет вычислять реализации, в которых матрицы F и H имеют каноническую форму.

Пусть задано отображение вход-выход f и этому отображению соответствует последовательность матриц (1.4). В работах [70, 75] представлены результаты, которые дают алгоритм вычисления реализации этой последовательности и его различные модификации.

Теорема 1.4. Если для f существует конечномерная реализация, то это отображение реализуется тройкой (F, G, H), где

$$\begin{aligned} F &= \left[\left(\sigma\, \mathcal{H}_{rr}\right)(f)\right]\mathcal{H}_{rr}^{+}(f), \\ G &= \mathcal{H}_{rr}(f)\, E_m^{mr}, \\ H &= E_{pr}^{p}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Если $\mathcal{H}_{rr}(f)$ не является матрицей полного ранга, то для определения $\mathcal{H}_{rr}^{+}(f)$ можно воспользоваться подходящей процедурой псевдообращения, например, используя скелетное разложение или метод Гревилля [17].

Этот результат, также как и алгоритм Б.Л. Хо, верен только в том случае, если для f существует конечномерная реализация. Это приводит к требованию того, чтобы для любых положительных r выполнялось неравенство (1.9).

Алгоритм 1.2.

Исходные данные. Последовательность матриц (1.4).

Шаг 1. Выбираем r, удовлетворяющее условию (1.6).

Шаг 2. Используя подходящий метод псевдообращения ганкелевой матрицы $\mathcal{H}_{rr}(f)$, определяем $\mathcal{H}_{rr}^{+}(f)$.

Шаг 3. Вычисляем матрицы канонической реализации по формулам (1.13).

Для этого алгоритма остаются верными все те замечания, которые мы делали для алгоритма 1.1 в связи с выполнением шага 1. При практическом использовании алгоритма 1.2 число r целесообразно выбирать наименьшим, удовлетворяющим либо условию

$$rank\,\mathcal{H}_{rr}(f) = rank\,\mathcal{H}(f)$$

либо, если $rank\ \mathcal{H}(f)$ найти не удается

$$rank\ \mathcal{H}_{rr}(f) = rank\ \mathcal{H}_{q'q}(f),$$

где q и q' удовлетворяют (1.12). В последнем случае алгоритм 1.2 позволяет реализовать первые $q+q'$ членов последовательности (1.4).

Эти и другие методы нахождения алгебраической реализации более подробно описаны в монографии [77].

1.3. Исследование проблемы управления для интервальных динамических систем

Рассматривая реальные объекты управления, мы всегда сталкиваемся с различного рода неопределенностями в данных. В том случае, когда нам известны границы изменения каждого из параметров системы, для решения задачи исследования и управления обоснованным будет применение методов интервального анализа.

Источниками интервальности могут быть неполнота знаний об объекте управления и вытекающие отсюда ошибки моделирования, естественная погрешность измерительных приборов, погрешности вычисления коэффициентов или последствия линеаризации нелинейных уравнений с неопределенными параметрами и т.д. Основные сведения о классической и полной интервальных арифметиках изложены в Приложении А.

1.3.1. Динамические системы с неопределенностью интервального типа

В литературе мы можем найти следующие определения динамической системы с неопределенностями, представленной в пространстве состояний. Всюду интервальная модель объекта управления понимается как семейство математических моделей стационарных объектов, параметры которых принадлежат заданным интервальным величинам. А наличие некоторого свойства (управляемость, устойчивость и др.) у интервальной системы понимается как наличие данного свойства у каждой точечной системы, входящей в интервальную.

В работе [82] Е.М. Смагиной и А.Н. Моисеева под интервальной динамической системой с полностью измеряемым вектором состояния понимается система

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + E\omega(t),$$

где x – n-мерный вектор состояния, u – r-мерное управляющее воздействие и ω – p-мерный вектор неизмеряемых возмущений, который является полиномиальной функцией:

$$\omega(t) = h_0 + h_1 t + \ldots + h_{\mu-1} t^{\mu-1},$$

где $h_0, \ldots, h_{\mu-1}$ – p-векторы. Интервальные матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ и матрица E имеют размеры $n \times n, n \times r, n \times p$ соответственно.

В работах [24, 32] математическая модель линейного многомерного интервально заданного объекта управления в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний, $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ – интервальная матрица размерности $n \times n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих воздействий, $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{n\times m}$ – интервальная матрица размерности $n \times m$.

Ю.И. Шокин и А.В. Захаров в [30] рассматривают интервально-неопределенные динамические системы, заданные в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

где $\dot{x} = Ax + Bu$, $A \in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, B \in \mathbf{B} \in \mathbb{IR}^n, x \in \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n, u \in \mathbf{u} \in \mathbb{IR}$.

В статье [27] Л.Т. Ащепкова и Д.В. Давыдова система управления задается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0,$$

где x, u, y – векторы фазового состояния, управления и наблюдения из $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^m$; A, B, C – неопределенные постоянные матричные коэффициенты размерности $n \times n, n \times r, m \times n, m \leq n$, со значениями из замкнутых интервалов

$$|A - A_0| \leq \vartriangle A, \quad |B - B_0| \leq \vartriangle B, \quad |C - C_0| \leq \vartriangle C$$

A_0, B_0, C_0 и $\vartriangle A, \vartriangle B, \vartriangle C$ – матрицы соответствующих размерностей с заданными произвольными и неотрицательными элементами.

Объект исследования в работах [9, 10] Сперанского Д.В. и Богомолова А.С. – интервальная линейная система с дискретным временем над полем действительных чисел, имеющая l входов, n единичных задержек и задаваемая уравнением переходов

$$x(t+1) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t),$$

где $\mathbf{A}^{n \times n}, \mathbf{B}^{n \times l}$ – характеристические интервальные матрицы, $u(t), x(t)$ – вектор-столбцы размерностей l и n, обозначающие входной сигнал и состояние системы в моменты времени $t = 0, 1, \ldots$.

1.3.2. Статические интервальные системы

Некоторые успехи в применении интервальных методов достигнуты в исследовании интервальных статических систем. Например, в [95, 97-98] С.П. Шарый рассматривает математические и вычислительные аспекты моделирования линейных статических систем с интервальной неопределенностью. В работе [145] решается задача о допусках, которая состоит в следующем.

Дан вектор входных воздействий x, вектор выходных откликов y, линейная зависимость вход-выход $y = Ax$. Параметры системы не являются заданными точно, известны лишь интервалы их возможных значений $\mathbf{a}_{ij}$, $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, которые являются элементами $m \times n$-матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$. Для множества выходных состояний задан интервальный вектор $\mathbf{y}$, в который необходимо обеспечить попадание y вне зависимости от конкретных значений $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$. Допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ является множеством всех таких входных сигналов x, что при любых $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, мы получим $y \in \mathbf{y}$, т.е. $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \operatorname{vert} \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{y}) \right\}$. Допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ есть выпуклое полиэдральное множество в $\mathbb{R}^n$. Если размерность интервальной системы уравнений велика, прямое описание ее допустимого множества решений становится трудоемким и имеет смысл ограничить себя нахождением некоторых оценок для допустимого множества решений. Автор предлагает заменить $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ на его внутреннюю оценку, формулируя линейную задачу о допусках задачу в следующем виде:

найти брус, содержащийся в допустимом множестве решений данной интервальной системы уравнений, т.е.

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \bigcap_{A \in vert \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{y}).$$

1.3.3. Исследование и управление интервальными динамическими системами

Для класса интервальных динамических систем разработка интервальных методов для решения задач исследования и управления находится на начальном этапе развития. Однако существует ряд публикаций, в которых представлены результаты по решению некоторых частных задач управления интервальными динамическими системами.

Проверка устойчивости динамической системы – одна из основных задач в теории управления. В широком понимании ее существо составляет изучение вопроса о сохранении определенных свойств системы при возможных вариациях некоторых ее характеристик или условий функционирования.

Фундаментальные результаты, определяющие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости интервального характеристического полинома, получены В.Л. Харитоновым [87]. Эти результаты позволяют сделать вывод об устойчивости систем, коэффициенты характеристических полиномов которых принимают неопределенные значения из заданных интервалов, по итогам анализа свойств конечного числа полиномов с параметрами, равными нижним или верхним граничным величинам для указанных интервалов. В случае дискретных линейных интервальных динамических систем вопрос о необходимых и достаточных условиях их устойчивости пока остается открытым [19].

В работах Ю.М. Гусева, В.Н. Ефанова и др. [18, 19] приводятся обзор результатов, относящихся к анализу линейных интервальных динамических систем на основании информации об их характеристических полиномах или информации об элементах матриц, участвующих в записи уравнений их состояния; исследованию устойчивости непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем; синтезу регуляторов для систем рассматриваемого класса и другие смежные проблемы. Также авторы классифицируют направления работ в области исследования и управления линейными интервальными динамическими системами:

1. методы и алгоритмы синтеза интервальных систем управления, основанные на применении аппарата функции чувствительности, построения структур, допускающих неограниченное увеличение коэффициентов усиления, а также на других классических подходах [86, 46-48];

2. частотные методы синтеза интервальных систем исходя из требований устойчивости замкнутой системы;

3. методы и алгоритмы синтеза интервальных систем, предполагающие формирование модального управления (в интервальной постановке);

4. методы синтеза оптимальных робастных регуляторов [26, 30, 81, 88-91];

5. методы синтеза регуляторов для интервальных систем на основе аппарата функции Ляпунова;

6. специфические методы, ориентированные на синтез иерархических (многоуровневых) интервальных систем.

Использование аппарата функции чувствительности при синтезе интервальных систем управления предусматривает распространение результатов классической теории на случай конечных приращений параметров системы. Подробнее этот вопрос освящен в [25, 92]. Системы с бесконечными коэффициентами усиления обладают свойством инвариантности к параметрическим возмущениям, что создает предпосылки для их применения при разработке алгоритмов управления объектами с неопределенными параметрами [86], при построении структур с большими (или неограниченно большими) коэффициентами может использоваться аппарат исследования устойчивости интервальных систем [46-48].

Методы, предполагающие реализацию модального управления в рамках интервальных систем управления, применяются при рассмотрении следующих двух аспектов задачи синтеза: с одной стороны, необходимо учесть неопределенность значений параметров объекта (случай интервальной модели объекта), с другой – следует правильно определить приемлемые значения допусков на коэффициенты регулятора (случай интервальной модели регулятора). В ряде ситуаций обе интервальные модели применяются совместно. В каждом из отмеченных случаев приходится иметь дело с интервальными характеристическими полиномами замкнутой системы [88]. Далее осуществляется приближение корней характеристического полинома интервальной системы к желаемому интервальному характеристическому полиному.

Значительная часть работ, относящихся к синтезу интервальных систем управления, охватывает вопросы их стабилизации с помощью соответствующих обратных связей. Один из перспективных подходов в этой области – применение аппарата функций Ляпунова. В целом публикации, в которых используется аппарат функций Ляпунова для синтеза интервальных систем управления, пока ограничиваются исключительно рассмотрением вопроса обеспечения устойчивости разрабатываемых систем и не затрагивает проблем задания желаемого уровня робастного качества управления.

Различные процедуры стабилизации интервальной линейной системы управления представлены в работах Л.Т. Ащепкова [4-6], Д.В. Давыдова [20], Д.В. Сперанского [9,10], Б.В. Уланова [86].

В статьях Е.М. Смагиной и И.В. Дугаровой [24, 81] рассматривается задача синтеза пропорционального регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость динамической системе, параметры которой меняются в заданных диапазонах. Авторами получены условия разрешимости задачи в классе пропорциональных модальных регуляторов. Предлагаемый метод применим как для системы с одним, так и с несколькими входами и удобен для численной реализации на ЭВМ.

Проблема управления интервально-заданным объектом управления рассматривается в статьях Р.С. Ивлева и С.П. Соколовой [32], Ю.И. Шокина и А.В. Захарова [30]. Приведенные в работе [30] утверждения дают условия разрешимости задачи синтеза и позволяют сформулировать вычислительный алгоритм синтеза регулятора с допусками на коэффициенты усиления для интервально-неопределенных систем автоматического управления.

В работе [82] Е.М. Смагиной и А.Н. Моисеева представлен метод, приводящий проблему слежения за полиномиальным сигналом в динамической системе к синтезу модального регулятора для расширенной системы.

Различные вопросы анализа и синтеза систем управления с интервальными неопределенностями рассматриваются также в работах [27, 31, 85, 103, 105, 138] и др.

1.4. Интервальные динамические системы с дискретным временем

Математическая модель многомерного интервально заданного объекта управления обычно представляется в виде системы уравнений с интервальными параметрами и понимается как семейство математических моделей многомерных динамических объектов, параметры которых принадлежат заданным интервальным. Фактически интервальная модель динамической системы отражает реальную ситуацию с информацией о значениях ее параметров, когда известны только границы интервалов, в пределах которых находятся истинные значения параметров.

Следуя этому подходу, введем следующее определение.

Определение 1.14. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем* (с m входами, n состояниями и p выходами) *с интервальными параметрами* будем называть такую систему $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, динамическое поведение которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &x(t+1) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t), \\ &y(t) = \mathbf{H}x(t), \\ &x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t), x(t+1) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, и понимать как семейство математических моделей

$$\begin{aligned} &x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \\ &y(t) = Hx(t), \\ &x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0,1,2,\ldots, \end{aligned}$$

матрицы (F, G, H) которых принадлежат заданным интервальным матрицам $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, т.е. $F \in \mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $G \in \mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n \times m}$, $H \in \mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p \times n}$.

Отметим, что данный подход к определению интервально заданной линейной системы не является единственно возможным, не исчерпывает всего многообразия поведения объектов с интервальной неопределенностью и поэтому не может служить в качестве общего определения линейной системы с интервальной неопределенностью. Условно называя определенный выше тип динамической системы линейной стационарной динамической системой с дискретным временем и интервальными параметрами, мы далее приведем определения еще двух типов линейных динамических систем с интервальной неопределенностью.

Определение 1.15. *Линейной стационарной динамической системой* с дискретным временем *с интервальными состояниями, входами и выходами* будем называть такую систему $\mathbf{\Sigma} = \left(F, G, H\right)$, динамическое поведение которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}\left(t+1\right) = F\mathbf{x}\left(t\right) + G\mathbf{u}\left(t\right), \\ &\mathbf{y}\left(t\right) = H\mathbf{x}\left(t\right), \\ &\mathbf{x}\left(0\right) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{IR}^n, \quad t = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $\mathbf{x}\left(t+1\right), \mathbf{x}\left(t\right) \in \bar{X} \cong \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{u}\left(t\right) \in \bar{U} \cong \mathbb{IR}^m$, $\mathbf{y}\left(t\right) \in \bar{Y} \cong \mathbb{IR}^p$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

К анализу систем такого типа не применимы методы классической реализации, поскольку $\bar{X}, \bar{U}, \bar{Y}$ мы не можем рассматривать как $\mathbb{R}$-модули.

Определение 1.16. *Линейной стационарной динамической системой* с дискретным временем *с интервальными состояниями, входами и выходами и интервальными параметрами* будем называть такую систему $\mathbf{\Sigma} = \left(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\right)$, динамическое поведение которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}\left(t+1\right) = \mathbf{F}\mathbf{x}\left(t\right) + \mathbf{G}\mathbf{u}\left(t\right), \\ &\mathbf{y}\left(t\right) = \mathbf{H}\mathbf{x}\left(t\right), \\ &\mathbf{x}\left(0\right) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{IR}^n, \quad t = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где $\mathbf{x}\left(t+1\right), \mathbf{x}\left(t\right) \in \bar{X} \cong \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{u}\left(t\right) \in \bar{U} \cong \mathbb{IR}^m$, $\mathbf{y}\left(t\right) \in \bar{Y} \cong \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$.

Представленные типы интервальных динамических систем являются примерами обобщения обычных линейных стационарных динамических систем с дискретным временем. Эти типы далеко не исчерпывают ни всех возможных типов обобщений, ни видов интервальной неопределенности. Например, имеет право на существование множество типов интервальных динамических систем с интервальной неопределенностью поведения, когда равенства в (1.14)-(1.16) заменяются на включения. Можно рассматривать промежуточные типы интервальных динамических систем.

Подлежат решению такие проблемы как:

1. классификация интервальных линейных стационарных динамических систем по типам неопределенности;

2. определение канонических форм для интервальных линейных стационарных динамических систем с дискретным временем;

3. исследование свойств отображений вход-выход для различных видов интервальных систем;

4. постановка задач реализации для различных видов интервальных систем и т.д.

Далее в данной работе мы будем рассматривать интервальные динамические системы типов (1.14), (1.16) и называть их просто интервальными динамическими системами.

1.5. Проблема реализации в интервальной постановке

С интервальными динамическими системами можно связать импульсную последовательность матриц

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{H}\mathbf{F}^{i-1}\mathbf{G}, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (1.17)$$

где матричные произведения выполняются справа налево, т.е. сначала вычисляется произведение $\mathbf{FG}, \mathbf{F}(\mathbf{FG})$ и т. д. Этой последовательности матриц можно поставить в соответствие отображение вход-выход, под которым в зависимости от того, с системой какого типа мы имеем дело, можно понимать в общем случае разные объекты.

Для системы с интервальными параметрами, введенной определением 1.14, под отображением вход-выход следует понимать семейство отображений $f_\alpha : U^{\mathbb{Z}_+} \to Y^{\mathbb{Z}_+}$, порождаемых соотношениями

$$y(t) = \sum_{i=1}^{t} A_i^{\alpha} u(t - i), \quad t = 1,2, \ldots$$

для

$$A_i^{\alpha} \in \mathbf{A}_i \in \mathbb{IR}^{p\times m}, \quad i = 1,2.\ldots$$

Для системы с интервальными состояниями, входами и выходами и интервальными параметрами введенной определением 1.16, под отображением вход-выход целесообразно понимать отображение $f : \bar{U}^{\mathbb{Z}_+} \to \bar{Y}^{\mathbb{Z}_+}$, порождаемое интервальными соотношениями

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{A}_i \mathbf{u}(t - i), \ t = 1,2,\ldots$$

Для заданного отображения вход-выход интервальной системы, представленного импульсной последовательностью интервальных матриц можно поставить задачу построения динамического поведения (1.14) (или (1.16)), т.е. задачу реализации. Одной из возможных формулировок задачи реализации для интервальных систем может быть такая:

для заданной последовательности интервальных матриц размера $p\times m$

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\}, \ \mathbf{A}_i \in \mathbb{IR}^{p\times m}, \ i = 1,2,\ldots \qquad (1.18)$$

определить размерность n *и тройку интервальных матриц* $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ *таких, что выполняются интервальные уравнения* (1.17), *где* $\mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}, \mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$.

Данную задачу мы далее будем называть *задачей алгебраической реализации*, а тройку интервальных матриц $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ будем называть *алгебраической интервальной реализацией*.

Очевидно, поставленная задача, которая по своей сути является задачей точной реализации, в общем случае является трудно разрешимой. Более того, в силу «плохих» свойств интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ она вообще может не иметь решения. Проблема остается таковой и в случае рассмотрения систем над $\mathbb{KR}$ вместо $\mathbb{IR}$. Поэтому в данном случае становится актуальной проблема оценки или приближенного описания реализаций.

Если для заданной последовательности интервальных матриц (1.18) будем понимать уравнение (1.17) как семейство троек матриц $\left(F,G,H\right)$ над $\mathbb{R}$ таких, что

$$A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{1.19}$$

для $A_i \in \mathbf{A}_i, \quad i = 1,2,\ldots,$ то можно поставить целый ряд задач описания множества реализаций. Среди этих задач выделим следующие:

1. определение мощности множества алгебраических реализаций (сколько их с точностью до изоморфизма);
2. определение алгебраических реализаций минимальной размерности;
3. для подходящего n (которое также нужно определить) определение внешней оценки для $\left(F,G,H\right)$, т.е. определение интервальных матриц $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}$, содержащих все матрицы $F,G,H,$ удовлетворяющие (1.19) (при определенном значении n);
4. для подходящего n (которое также нужно определить) определение внутренней оценки для $\left(F,G,H\right)$, т.е. определение таких интервальных матриц $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}$, точечные значения $F \in \mathbf{F}$, $G \in \mathbf{G}$, $H \in \mathbf{H}$ которых удовлетворяют уравнениям (1.19) при $A_i \in \mathbf{A}_i, \quad i = 1,2,\ldots,$;
5. описание структуры множества конечномерных реализаций (или хотя бы найти способ такого описания).

Очевидно, решение поставленных задач не единственно даже для фиксированной размерности системы. Наибольший интерес представляют в определенном смысле оптимальные оценки. Очевидным критерием качества интервальных решений в задачах оценивания является степень близости (в том или ином смысле) полученной интервальной оценки к точному множеству решений. Для задач внешнего оценивания такая оптимальность обычно понимается в смысле минимальности по включению, а для задач внутреннего оценивания – максимальности по включению. Причем, нужно быть готовыми к ситуации, что даже такие оптимальные оценки окажутся неединственными. Например, даже для решения задачи внутреннего оценивания решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений может существовать много максимальных, но не сравнимых между собой, решений [96].

Положение еще более усложняется, если ставится задача нахождения реализации минимальной размерности. Здесь мы имеем дело с ситуацией, когда минимизация размерности реализации находится в противоречии с оптимизацией оценок реализации. В связи с этим имеет право на существование целый ряд постановок задач приближенной реализации, являющихся способом разрешения этого противоречия или компромиссного решения.

Выводы

В данной главе определены основные понятия теории линейных динамических систем. Показано, что для динамических систем над полями и над кольцами теория реализации хорошо развита. Существуют методы, алгоритмы и численная реализация некоторых алгоритмов, позволяющих строить алгебраическую реализацию заданной динамической системы.

Анализ литературы, посвященной динамическим системам с интервальной неопределенностью, показал, что внимание авторов, в основном, сосредоточено на исследовании свойств и синтезе подобных систем. Моделированию и тесно связанной с ним проблеме реализации уделяется мало внимания. В настоящий момент не существует эффективных методов и алгоритмов для нахождения описания такой системы в пространстве состояний.

В настоящей главе приведены различные определения динамических систем с интервальной неопределенностью и сформулированы возможные постановки задачи реализации для рассматриваемого класса систем.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕАЛИЗАЦИЙ ДЛЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Эта глава посвящена разработке методов и алгоритмов решения задачи представления в пространстве состояний неотрицательных интервальных динамических систем с дискретным временем. Как показано в предыдущей главе эта задача заключается в следующем:

для заданной последовательности интервальных матриц размера $p \times m$

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\},\ \mathbf{A}_i \in \mathbb{IR}^{p\times m},\ i = 1,2,\ldots \tag{2.1}$$

определить размерность n *и тройку интервальных матриц* $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ *таких, что выполняются интервальные уравнения*

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{H}\mathbf{F}^{i-1}\mathbf{G}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{F} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n\times m}, \mathbf{H} \in \mathbb{IR}^{p\times n}$.

Сначала мы приведем достаточное условие реализуемости для интервальных динамических систем (параграф 1).

В параграфе 2 мы рассмотрим задачу реализации для интервальных скалярных динамических систем, т.е. систем с одним входом и одним выходом.

Следующий параграф посвящен изложению метода реализации для неотрицательных интервальных динамических систем с дискретным временем, получившего название метода граничных реализаций. На основе этого метода разработаны алгоритмы реализации для неотрицательных и неположительных интервальных динамических систем.

В параграфе 4 мы приведем еще один метод нахождения алгебраической реализации для неотрицательных интервальных динамических систем, суть которого заключается в погружении интервального пространства в более широкую алгебраическую систему, в нашем случае это будет линейное пространство удвоенной размерности.

2.1. Достаточное условие реализуемости интервальных динамических систем

Как мы видели в главе 1, для классического (неинтервального) случая рекуррентность заданной импульсной последовательности матриц является необходимым и достаточным условием ее реализуемости. Для интервальных систем рекуррентность остается достаточным условием реализуемости.

Определение 2.1. Будем говорить, что последовательность интервальных матриц (2.1) рекуррентна, если существует такое целое $r > 0$ и коэффициенты $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r \in \mathbb{IR}$ такие, что

$$\mathbf{A}_{r+j+1} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{A}_{i+j}, \quad j = 0,1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Для интервальных динамических систем, поведение вход-выход которых описывается импульсной последовательностью интервальных матриц, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Если последовательность интервальных матриц рекуррентна, то для нее существует алгебраическая интервальная реализация.

Доказательство. Пусть исходная последовательность интервальных матриц рекуррентна с соотношением рекуррентности (2.3). Рассмотрим интервальную систему $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, у которой

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \ldots & \mathbf{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_3\mathbf{I} & \ldots & \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{I} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{A}_{r-1} \\ \mathbf{A}_r \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{O}$ – нулевая интервальная матрица размера $p \times p$, т.е. матрица все элементы которой имеют вид [0,0]; $\mathbf{I}$ – единичная интервальная матрица размера $p \times p$, т.е матрица на главной диагонали которой стоят элементы [1,1], а остальные имеют вид [0,0]; $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$ – интервальные коэффициенты рекуррентности из соотношения (2.3).

Отметим, что

$$\mathbf{FG}=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{I}\\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_3\mathbf{I} & \dots & \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \dots\\ \mathbf{A}_{r\text{-}1}\\ \mathbf{A}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\\ \dots\\ \mathbf{A}_r\\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{A}_2+\dots+\boldsymbol{\beta}_r\mathbf{A}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\\ \dots\\ \mathbf{A}_r\\ \mathbf{A}_{r+1}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{FG})=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{I}\\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_3\mathbf{I} & \dots & \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\\ \dots\\ \mathbf{A}_r\\ \mathbf{A}_{r+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_3\\ \mathbf{A}_4\\ \dots\\ \mathbf{A}_{r+1}\\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{A}_2+\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{A}_3+\dots+\boldsymbol{\beta}_r\mathbf{A}_{r+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_3\\ \mathbf{A}_4\\ \dots\\ \mathbf{A}_{r+1}\\ \mathbf{A}_{r+2}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{I}\\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{I} & \boldsymbol{\beta}_3\mathbf{I} & \dots & \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{r-1}\\ \mathbf{A}_r\\ \dots\\ \mathbf{A}_{2r-2}\\ \mathbf{A}_{2r-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_r\\ \mathbf{A}_{r+1}\\ \dots\\ \mathbf{A}_{2r-1}\\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{A}_{r-1}+\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{A}_r+\dots+\boldsymbol{\beta}_r\mathbf{A}_{2r-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_r\\ \mathbf{A}_{r+1}\\ \dots\\ \mathbf{A}_{2r-1}\\ \mathbf{A}_{2r}\end{pmatrix}.$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{HG}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \dots\\ \mathbf{A}_{r\text{-}1}\\ \mathbf{A}_r\end{pmatrix}=\mathbf{A}_1,$$

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{HFG}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\\ \dots\\ \mathbf{A}_r\\ \mathbf{A}_{r+1}\end{pmatrix}=\mathbf{A}_2,$$

$\vdots$

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{H}\mathbf{F}^{r-1}\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_r \\ \mathbf{A}_{r+1} \\ \ldots \\ \mathbf{A}_{2r-1} \\ \mathbf{A}_{2r} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_r .$$

Следовательно, интервальная система $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, является реализацией исходной последовательности интервальных матриц. □

2.2. Нахождение алгебраических интервальных реализаций для интервальных скалярных динамических систем

Существование рекуррентности импульсной последовательности интервальных матриц позволяет свести некоторые задачи, связанные с алгебраической реализацией, к решению интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Среди таких задач – задача реализации для интервальных систем с одним входом и одним выходом (интервальных скалярных систем).

Пользуясь определением 2.1, задачу реализации импульсной последовательности интервальных матриц можно свести к решению интервальной системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{r+1} \\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{A}_2 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{A}_3 + \ldots + \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{A}_{r+2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{A}_r + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{A}_{r+1} + \ldots + \boldsymbol{\beta}_r\mathbf{A}_{2r-1} = \mathbf{A}_{2r} \end{cases} \tag{2.5}$$

Для решения такой системы можно использовать методы, предложенные С.П. Шарым: субдифференциальный метод Ньютона, реализованный в программе SUBDIFF и метод расщепления (RE_SPLIT) [96]. Найдя интервальные коэффициенты $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$, мы легко сможем построить искомую интервальную реализацию по формулам (2.4).

Пример 2.1. Рассмотрим импульсную последовательность интервальных матриц для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1 = [-0.1, 0], \quad \mathbf{A}_2 = [0.8, 1.2], \quad \mathbf{A}_3 = [0.9, 1.6], \quad \mathbf{A}_4 = [1.3, 3.2].$$

Пользуясь определением 2.1, задачу реализации для данной последовательности можно свести к решению интервальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \mathbf{A}_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 \end{cases}$$

Решая эту систему интервальных уравнений субдифференциальным методом Ньютона, предложенным С.П. Шарым [96] и реализованным в программе SUBDIFF, найдем коэффициенты рекуррентности

$$\boldsymbol{\beta}_1 = [0.234, 0.889], \quad \boldsymbol{\beta}_2 = [1.236, 1.333].$$

Это позволит нам, используя формулы (2.4), построить искомую алгебраическую реализацию

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.234, 0.889] & [1.236, 1.333] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} [-0.1, 0] \\ [0.8, 1.2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

2.3. Метод граничных реализаций

Для дальнейших рассуждений введем следующее определение.

Определение 2.2. Матрица, все элементы которой являются неотрицательными интервалами, т.е.

$$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) = \left(\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right] \right), \quad \forall\, \underline{a}_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

называется *неотрицательной интервальной матрицей* и записывается как $\mathbf{A} \geq 0$.

Аналогично, матрица

$$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times m}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) = \left(\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right] \right), \quad \forall\, \overline{a}_{ij} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

называется *неположительной интервальной матрицей* и записывается как $\mathbf{A} \le 0$. Остальные интервальные матрицы мы будем называть *интервальными матрицами смешанного типа*.

Интервальную динамическую систему, отображение вход-выход которой представлено импульсной последовательностью неотрицательных интервальных матриц, будем называть неотрицательной. Аналогично определим понятия неположительной интервальной системы и интервальной системы смешанного типа.

Для полностью неотрицательных (и неположительных) интервальных систем, мы можем применять метод граничных реализаций, сущность которого заключается в построении алгебраических реализаций последовательностей матриц, составленных из нижних и верхних границ интервалов.

С импульсной последовательностью интервальных матриц можно связать две вещественные импульсные последовательности, определяемые верхними и нижними границами интервальных матриц.

Определение 2.3. Для последовательности интервальных матриц

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\} = \left\{\left[\underline{A}_1, \overline{A}_1\right], \left[\underline{A}_2, \overline{A}_2\right], \ldots\right\} \tag{2.6}$$

реализации последовательности

$$\{\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots\} \tag{2.7}$$

будем называть *нижними граничными реализациями* последовательности (2.6), а реализации последовательности

$$\{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots\} \tag{2.8}$$

будем называть *верхними граничными реализациями* последовательности (2.6).

В рамках интервальной арифметики (классической и полной) не выполняется закон дистрибутивности операций сложения и умножения интервалов. Однако этот закон имеет место, если операции проводятся с неотрицательными интервалами, т.е. интервалами с неотрицательными границами.

Лемма 2.1. Если $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ – неотрицательные интервалы, то имеет место дистрибутивность умножения относительно сложения

$$\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{ca}+\mathbf{cb}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{IR}$, $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$, $\mathbf{b}=[\underline{b},\overline{b}]$, $\mathbf{c}=[\underline{c},\overline{c}]$, $\underline{a},\overline{a},\underline{b},\overline{b},\underline{c},\overline{c}\geq 0$, тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b})&=[\underline{c},\overline{c}]\left([\underline{a},\overline{a}]+[\underline{b},\overline{b}]\right)=\\&=\Big[\min\left(\underline{ca}+\underline{cb},\underline{c}\overline{a}+\underline{c}\overline{b},\overline{c}\underline{a}+\overline{c}\underline{b},\overline{ca}+\overline{cb}\right),\\&\qquad\max\left(\underline{ca}+\underline{cb},\underline{c}\overline{a}+\underline{c}\overline{b},\overline{c}\underline{a}+\overline{c}\underline{b},\overline{ca}+\overline{cb}\right)\Big]=\\&=\left[\underline{ca}+\underline{cb},\overline{ca}+\overline{cb}\right]=[\underline{ca},\overline{ca}]+[\underline{cb},\overline{cb}]=\mathbf{ca}+\mathbf{cb}.\end{aligned}$$

□

В книге Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [2] можно найти доказательство и более общего свойства:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac},\quad bc\geq 0,\quad a\in\mathbf{a},b\in\mathbf{b},c\in\mathbf{c}.$$

Если говорить обо всех случаях, когда имеет место дистрибутивность в классической интервальной арифметике, то это [136]:

1. $\mathbf{b},\mathbf{c}$ – симметричные;
2. $\mathbf{bc}\geq 0$;
3. $0\in\mathbf{a},\quad \operatorname{sign}(\mathbf{b})=\operatorname{sign}(\mathbf{c})$, где $\operatorname{sign}(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}>0,\\ 0, & 0\in\mathbf{x},\\ -1, & \mathbf{x}<0.\end{cases}$

Лемма 2.2. Если $\mathbf{A}\in\mathbb{IR}^{n\times m}, \mathbf{B}\in\mathbb{IR}^{m\times k}, \mathbf{C}\in\mathbb{IR}^{k\times l}$ – неотрицательные интервальные матрицы, то имеет место ассоциативность

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Доказательство. Воспользуемся свойством из леммы 2.1 и покажем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{BC})&=\sum_{i=1}^{m}A_{ni}\left(\sum_{j=1}^{k}B_{mj}C_{jl}\right)=\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}A_{ni}B_{ij}C_{jl}=\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} A_{ni} B_{ij} C_{jl} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ni} B_{ij} \right) C_{jl} =$$

$$= (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

□

Легко заметить, что для неотрицательных интервальных матриц (т.е. матриц, все элементы которых являются неотрицательными интервалами) результат произведения двух неотрицательных интервальных матриц будет также неотрицательной интервальной матрицей.

Лемма 2.3. Для неотрицательных интервальных матриц $\mathbf{B} = \left[\underline{B}, \overline{B} \right]$ и $\mathbf{C} = \left[\underline{C}, \overline{C} \right]$ имеет место

$$\mathbf{BC} = \left[\underline{B}, \overline{B} \right] \left[\underline{C}, \overline{C} \right] = \left[\underline{BC}, \overline{BC} \right].$$

Доказательство. Напомним, что для положительных интервалов $\mathbf{a} > 0$ и $\mathbf{b} > 0$

$$\mathbf{ab} = \left[\underline{a}, \overline{a} \right] \left[\underline{b}, \overline{b} \right] = \left[\underline{ab}, \overline{ab} \right].$$

Пусть $\mathbf{B} = \left(\mathbf{b}_{ij} \right)_{\substack{1<i<n \\ 1<j<m}} \in \mathbb{IR}, \mathbf{C} = \left(\mathbf{c}_{ij} \right)_{\substack{1<i<m \\ 1<j<k}} \in \mathbb{IR}$. Тогда

$$\mathbf{BC} = \left[\underline{B}, \overline{B} \right] \left[\underline{C}, \overline{C} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\underline{b}_{ni}, \overline{b}_{ni} \right] \left[\underline{c}_{ik}, \overline{c}_{ik} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\underline{b}_{ni} \underline{c}_{ik}, \overline{b}_{ni} \overline{c}_{ik} \right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} \underline{b}_{ni} \underline{c}_{ik}, \sum_{i=1}^{m} \overline{b}_{ni} \overline{c}_{ik} \right] =$$

$$= \left[\underline{BC}, \overline{BC} \right].$$

□

Леммы 2.2 и 2.3 позволяют сформулировать и доказать теорему, дающую нам способ нахождения интервальной алгебраической реализации для импульсной последовательности неотрицательных интервальных матриц.

Теорема 2.2. Если для нижней и верхней граничных реализаций одинаковой размерности $\left(\underline{F},\underline{G},\underline{H}\right)$ и $\left(\overline{F},\overline{G},\overline{H}\right)$ некоторой последовательности интервальных матриц выполняются условия:

1. $\underline{F}, \underline{G}, \underline{H}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$ – неотрицательные;

2. $\underline{F} \le \overline{F},\ \underline{G} \le \overline{G},\ \underline{H} \le \overline{H}$,

то интервальная система $\left(\left[\underline{F},\overline{F}\right],\left[\underline{G},\overline{G}\right],\left[\underline{H},\overline{H}\right]\right)$ является интервальной точной (алгебраической) реализацией этой последовательности.

Доказательство. Пусть $\left(\underline{F},\underline{G},\underline{H}\right)$ и $\left(\overline{F},\overline{G},\overline{H}\right)$ – две граничные реализации одинаковой размерности для последовательности интервальных матриц (2.6). А именно, $\left(\underline{F},\underline{G},\underline{H}\right)$ – реализация последовательности (2.7), $\left(\overline{F},\overline{G},\overline{H}\right)$ – реализация последовательности (2.8). Тогда, используя свойства из лемм 2.2 и 2.3, получаем

$$\mathbf{HG} = \left[\underline{H},\overline{H}\right]\left[\underline{G},\overline{G}\right] = \left[\underline{HG},\overline{HG}\right] = \left[\underline{A}_1,\overline{A}_1\right] = \mathbf{A}_1,$$

$$\mathbf{HFG} = \left[\underline{H},\overline{H}\right]\left[\underline{F},\overline{F}\right]\left[\underline{G},\overline{G}\right] = \left[\underline{HFG},\overline{HFG}\right] = \left[\underline{A}_2,\overline{A}_2\right] = \mathbf{A}_2,$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{HF}^{i-1}\mathbf{G} = \left[\underline{H},\overline{H}\right]\left[\underline{F},\overline{F}\right]^{i-1}\left[\underline{G},\overline{G}\right] = \left[\underline{HF^{i-1}G},\overline{HF^{i-1}G}\right] = \left[\underline{A}_i,\overline{A}_i\right] = \mathbf{A}_i$$

и т.д. Следовательно, интервальная система $\left(\left[\underline{F},\overline{F}\right],\left[\underline{G},\overline{G}\right],\left[\underline{H},\overline{H}\right]\right)$ является реализацией последовательности (2.6), что и требовалось доказать. □

Пример 2.2. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1 = [1.3, 1.4],\quad \mathbf{A}_2 = [0.65, 0.9],\quad \mathbf{A}_3 = [1.2, 1.85],\quad \mathbf{A}_4 = [2.9, 4.96].$$

Нижняя и верхняя граничные реализации исходной последовательности имеют вид

$$\underline{F}=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0.673 & 2.129\end{pmatrix},\quad \underline{G}=\begin{pmatrix}1.3\\ 0\end{pmatrix},\quad \underline{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{F}=\begin{pmatrix}0.643 & 1\\ 0.908 & 2.323\end{pmatrix},\quad \overline{G}=\begin{pmatrix}1.4\\ 0\end{pmatrix},\quad \overline{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.$$

соответственно. Полученные граничные реализации удовлетворяют условиям теоремы 2.2, следовательно, интервальная система, составленная из этих граничных реализаций

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}[0.5,0.643] & [1,1]\\ [0.673,0.908] & [2.129,2.323]\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}[1.3,1.4]\\ [0,0]\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}[1,1] & [0,0]\end{pmatrix}$$

является алгебраической интервальной реализацией исходной импульсной последовательности.

Пример 2.3. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для многомерной системы с двумя входами и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}[9.8,10] & [8.6,9]\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}[0.304,1] & [0.604,1.5]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}[1.999,2.3] & [2.2,3]\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}[2.692,3.64] & [3.006,4.763]\end{pmatrix}.$$

Нижняя и верхняя реализации последовательности имеют вид

$$\underline{F}=\begin{pmatrix}0.031 & 1\\ 0.203 & 1.291\end{pmatrix},\quad \underline{G}=\begin{pmatrix}9.8 & 8.6\\ 0 & 0.337\end{pmatrix},\quad \underline{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{F}=\begin{pmatrix}0.1 & 1\\ 0.22 & 1.45\end{pmatrix},\quad \overline{G}=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 0 & 0.6\end{pmatrix},\quad \overline{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности удовлетворяют условиям теоремы 2.2, следовательно, интервальная система, составленная из этих граничных реализаций

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}[0.031,0.1] & [1,1]\\ [0.203,0.22] & [1.291,1.45]\end{pmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{pmatrix}[9.8,10] & [8.6,9]\\ [0,0] & [0.337,0.6]\end{pmatrix},\ \mathbf{H}=\begin{pmatrix}[1,1] & [0,0]\end{pmatrix}$$

является алгебраической интервальной реализацией исходной импульсной последовательности.

Часто оказывается, что найденные граничные реализации не отвечают условиям теоремы 2.2. Но и в этих случаях ситуация не является безнадежной. Дело в том, что подходящим выбором базисов пространств состояний граничных реализаций часто можно добиться того, чтобы граничные реализации удовлетворяли условиям теоремы 2.2. Легко доказывается следующая теорема, являющаяся следствием теоремы 2.2.

Теорема 2.3. Если для граничных реализаций одинаковой размерности $(\underline{F},\underline{G},\underline{H})$ и $(\overline{F},\overline{G},\overline{H})$ некоторой последовательности интервальных матриц найдутся такие матрицы T_1 и T_2, что выполняются неравенства

$$\underline{\hat{F}} \le \hat{\overline{F}},\quad \underline{\hat{G}} \le \hat{\overline{G}},\quad \underline{\hat{H}} \le \hat{\overline{H}},$$

где

$$\begin{aligned} &\underline{\hat{F}} = T_1\underline{F}T_1^{-1}, \quad \underline{\hat{G}} = T_1\underline{G}, \quad \underline{\hat{H}} = \underline{H}T_1^{-1}, \\ &\hat{\overline{F}} = T_2\overline{F}T_2^{-1}, \quad \hat{\overline{G}} = T_2\overline{G}, \quad \hat{\overline{H}} = \overline{H}T_2^{-1}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\underline{\hat{F}},\hat{\overline{F}},\underline{\hat{G}},\hat{\overline{G}},\underline{\hat{H}},\hat{\overline{H}}$ – неотрицательные, то интервальная система $\left(\left[\underline{\hat{F}},\hat{\overline{F}}\right],\left[\underline{\hat{G}},\hat{\overline{G}}\right],\left[\underline{\hat{H}},\hat{\overline{H}}\right]\right)$ является интервальной алгебраической реализацией этой последовательности.

Доказательство. Пусть $(\underline{F},\underline{G},\underline{H})$, $(\overline{F},\overline{G},\overline{H})$, $(\underline{\hat{F}},\underline{\hat{G}},\underline{\hat{H}})$, $(\hat{\overline{F}},\hat{\overline{G}},\hat{\overline{H}})$ – алгебраические реализации последовательностей точечных матриц $\{\underline{A}_1,\underline{A}_2,\ldots\}$, $\{\overline{A}_1,\overline{A}_2,\ldots\}$, $\{\underline{\hat{A}}_1,\underline{\hat{A}}_2,\ldots\}$ и $\{\hat{\overline{A}}_1,\hat{\overline{A}}_2,\ldots\}$ соответственно. Пусть также выполнены условия (2.9).

Легко доказывается эквивалентность последовательностей точечных матриц $\{\underline{A}_1,\underline{A}_2,\ldots\}$ и $\{\underline{\hat{A}}_1,\underline{\hat{A}}_2,\ldots\}$

$$\begin{aligned} &\underline{\hat{A}}_1 = \underline{\hat{H}}\underline{\hat{G}} = \underline{H}T_1^{-1}T_1\underline{G} = \underline{H}\underline{G} = \underline{A}_1, \\ &\underline{\hat{A}}_2 = \underline{\hat{H}}\underline{\hat{F}}\underline{\hat{G}} = \underline{H}T_1^{-1}T_1\underline{F}T_1^{-1}T_1\underline{G} = \underline{H}\underline{F}\underline{G} = \underline{A}_2, \\ &\vdots \\ &\underline{\hat{A}}_i = \underline{\hat{H}}\underline{\hat{F}}^{i-1}\underline{\hat{G}} = \underline{H}T_1^{-1}T_1\underline{F}^{i-1}T_1^{-1}T_1\underline{G} = \underline{H}\underline{F}^{i-1}\underline{G} = \underline{A}_i. \end{aligned}$$

Следовательно, точечные реализации $\left(\underline{F},\underline{G},\underline{H}\right)$ и $\left(\hat{\underline{F}},\hat{\underline{G}},\hat{\underline{H}}\right)$ эквивалентны.

Аналогично доказывается эквивалентность пары точечных реализаций $\left(\overline{F},\overline{G},\overline{H}\right)$ и $\left(\hat{\overline{F}},\hat{\overline{G}},\hat{\overline{H}}\right)$.

Тогда из теоремы 2.2 следует, что интервальная система $\left(\left[\hat{\underline{F}},\hat{\overline{F}}\right],\left[\hat{\underline{G}},\hat{\overline{G}}\right],\left[\hat{\underline{H}},\hat{\overline{H}}\right]\right)$ является интервальной алгебраической реализацией последовательности интервальных матриц $\left\{\left[\underline{A}_1,\overline{A}_1\right],\left[\underline{A}_2,\overline{A}_2\right],\ldots\right\}$. □

Таким образом, теорема 2.3 переводит проблему вычисления интервальной алгебраической реализации в задачу линейной матричной алгебры. Следующий алгоритм позволяет строить конечномерные реализации для последовательностей неотрицательных интервальных матриц с использованием теорем 2.2 и 2.3.

Алгоритм 2.1.

Исходные данные. Импульсная последовательность интервальных матриц вида (2.1).

Шаг 1. Находим нижнюю и верхнюю граничные реализации импульсной последовательности интервальных матриц.

Шаг 2. Если найденные граничные реализации удовлетворяют условиям теоремы 2.2, то соответствующая интервальная реализация и будет искомой, иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Согласно теореме 2.3, с помощью преобразований подобия (2.9) попытаемся найти эквивалентные (с точностью до изоморфизма) граничные реализации, для которых условия теоремы 2.2 выполняются.

При выполнении шага 1 данного алгоритма для вычисления граничных реализаций могут применяться, например, алгоритм Б.Л. Хо [37], либо другие методы вычисления конечномерных реализаций, перечисленных в главе 1, например, такие как [70, 75].

Пример 2.4. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1 = [0.3, 0.7], \quad \mathbf{A}_2 = [1.2, 1.82],$$
$$\mathbf{A}_3 = [0.2, 1.93], \quad \mathbf{A}_4 = [0.57, 3.339].$$

Нижняя и верхняя реализации последовательности имеют вид

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -15.333 & -3.95 \end{pmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 2.6 & 1 \\ -4.003 & -2.001 \end{pmatrix}, \quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности не удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Согласно теореме 2.3, применяя к этим граничным реализациям преобразования подобия

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.6 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно, получим пару реализаций в наблюдаемой канонической форме:

$$\underline{\hat{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.467 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{G}} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.2 & 0.599 \end{pmatrix}, \quad \hat{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.82 \end{pmatrix}, \quad \hat{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая интервальная реализация, согласно теореме 2.2, будет иметь вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.467, 1.2] & [0.05, 0.599] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} [0.3, 0.7] \\ [1.2, 1.82] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

Пример 2.5. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и двумя выходами:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [0.3, 0.5] \\ [1.2, 1.23] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} [1.2, 1.23] \\ [2.181, 2.838] \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} [2.181, 2.838] \\ [4.115, 6.582] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} [4.115, 6.582] \\ [7.743, 15.258] \end{pmatrix}.$$

Нижняя и верхняя реализации последовательности имеют вид

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8.73 & -2.24 \end{pmatrix}, \qquad \underline{G} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 2.46 & 1 \\ -0.376 & -0.333 \end{pmatrix}, \quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.46 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности не удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Согласно теореме 2.3, применяя к этим граничным реализациям преобразования подобия

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.46 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно, получим пару реализаций в наблюдаемой канонической форме:

$$\hat{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.231 & 1.76 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.443 & 2.127 \end{pmatrix}, \quad \hat{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.23 \end{pmatrix}, \quad \hat{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая интервальная реализация, согласно теореме 2.2, будет иметь вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.231, 0.443] & [1.76, 2.127] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} [0.3, 0.5] \\ [1.2, 1.23] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}.$$

2.3.1. Нахождение интервальных алгебраических реализаций для полностью неположительных интервальных систем

Метод граничных реализаций может использоваться также и для вычисления алгебраической реализации для последовательностей неположительных интервальных матриц. В этом случае интервальная алгебраическая реализация строится в соответствии со следующими шагами.

Алгоритм 2.2.

Исходные данные. Импульсная последовательность интервальных матриц вида (2.1).

Шаг 1. Образуем из исходной импульсной последовательности неположительных интервальных матриц новую последовательность неотрицательных интервальных матриц следующего вида:

$$\left\{\left[-\overline{A}_1, -\underline{A}_1\right], \left[-\overline{A}_2, -\underline{A}_2\right], \ldots\right\}. \tag{2.10}$$

Шаг 2. Для полученной таким образом последовательности с помощью алгоритма 2.1 вычисляем интервальную алгебраическую реализацию $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$.

Шаг 3. Строим реализацию исходной последовательности интервальных матриц, в качестве которой могут быть интервальные динамические системы $(\mathbf{F}, -\mathbf{G}, \mathbf{H})$ или $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, -\mathbf{H})$.

Пример 2.6. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1 = [-3.3, -1.1], \quad \mathbf{A}_2 = [-1, -0.8], \quad \mathbf{A}_3 = [-1.458, -0.3], \quad \mathbf{A}_4 = [-0.793, -0.211].$$

В соответствии с шагом 1 алгоритма 2.2 образуем вспомогательную последовательность вида (2.10)

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = [1.1, 3.3], \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = [0.8, 1], \quad \tilde{\mathbf{A}}_3 = [0.3, 1.458], \quad \tilde{\mathbf{A}}_4 = [0.211, 0.793].$$

Найдем алгебраическую интервальную реализацию вспомогательной последовательности. Нижняя и верхняя реализации вспомогательной последовательности имеют вид

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0.727 & 1 \\ -0.256 & -0.702 \end{pmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 0.303 & 1 \\ 0.35 & 0.001 \end{pmatrix}, \quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности не удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Согласно теореме 2.3, применяя к этим граничным реализациям преобразования подобия

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.727 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.303 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно, получим пару реализаций в наблюдаемой канонической форме:

$$\underline{\hat{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.254 & 0.025 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{G}} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.35 & 0.304 \end{pmatrix}, \quad \hat{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, алгебраическая интервальная реализация вспомогательной последовательности, согласно теореме 2.2 будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.254, 0.35] & [0.025, 0.304] \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} [1.1, 3.3] \\ [0.8,1] \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

Искомая нами интервальная реализация, согласно шагу 3 алгоритма 2.2 найдется как

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.254, 0.35] & [0.025, 0.304] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} [1.1, 3.3] \\ [0.8,1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} [-1,-1] & [0,0] \end{pmatrix}$$

или

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} [0,0] & [1,1] \\ [0.254, 0.35] & [0.025, 0.304] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} [-3.3, -1.1] \\ [-1,-0.8] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

2.4. Погружение в линейное пространство

Как уже отмечалось выше, алгебраические свойства интервальных пространств $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ не позволяют нам использовать классические методы нахождения алгебраических реализаций. Поэтому возникает необходимость перенести решение задачи нахождения реализации для систем над $\mathbb{KR}$ в некоторое линейное пространство. Мы сделаем это способом, описанным С.П. Шарым в работах [94, 96], который называется погружением и заключается в погружении интервального пространства в более широкую алгебраическую систему с хорошими алгебраическими свойствами и более мощными аналитическими средствами.

Определение 2.4. [96]. Пусть U – линейное пространство. Биективное отображение $\iota : \mathbb{KR}^n \to U$ будем называть *погружением* $\mathbb{KR}^n$ в U, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. ι есть изоморфизм аддитивных групп $\mathbb{KR}^n$ и U,
2. ι есть гомеоморфизм топологических пространств $\mathbb{KR}^n$ и U.

Этим определением линейное пространство U задается однозначно: U должно быть евклидовым пространством $\mathbb{R}^{2n}$.

Как видно из этой же работы С.П. Шарого, погружение обладает следующими свойствами.

Всякому отображению $\varphi : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$ сопоставляется единственное отображение, называемое индуцированным отображением для φ

$$\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1} : U \to U, \tag{2.11}$$

где $\circ$ – композиция отображений.

Свойства отображений φ и $\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$ тесно связаны, так вместо φ можно исследовать свойства отображения $\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$.

Определение 2.5. [96]. Пусть в интервальном пространстве $\mathbb{KR}^n$ задано уравнение

$$\varphi(x) = \psi(x), \tag{2.12}$$

где $\varphi : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$ – некоторое отображение, и фиксировано вложение $\iota : \mathbb{KR}^n \to U$. Будем называть *индуцированным уравнением* для (2.12) такое уравнение

$$\Phi(y) = \Psi(y) \tag{2.13}$$

в линейном пространстве U, что Φ и Ψ являются индуцированными отображениями для φ и ψ соответственно, т.е. $\Phi = \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$ и $\Psi = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}$.

Таким образом, как видно из [96], исходное интервальное уравнение (2.12) имеет решение $x^* \in \mathbb{KR}^n$ только в том случае, когда индуцированное уравнение (2.13) имеет решение $y^* \in U$. Причем, $x^* = i^{-1} y^*$.

Предложение 2.1. [96]. Если $\imath : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ – погружение, а T – неособенное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^{2n}$, то $(T \circ i)$ также является погружением. Обратно, любое другое погружение $\kappa : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ может быть представлено в виде $(T \circ i)$ для некоторого неособенного линейного преобразования

$$T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}.$$

Это предложение позволяет нам при выборе погружения исходить из соображений удобства, поскольку любые два погружения, удовлетворяющие определению 2.4, одинаковы с точностью до некоторого неособенного преобразования $\mathbb{R}^{2n}$.

Определение 2.6. [96]. Погружение $\mathrm{sti} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{x}_1, -\underline{x}_2, \ldots, -\underline{x}_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

т.е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ становятся первой, второй, …, n-ой компонентой вещественного $2n$-вектора, а правые концы интервалов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ становятся $(n+1)$-ой, …, $2n$-ой компонентами вещественного $2n$-вектора соответственно, будем называть *стандартным погружением* интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Применим изложенные рассуждения для нашей задачи.

Динамическое поведение интервальной системы над $\mathbb{KR}$ описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x(t+1) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t) \\ y(t) = \mathbf{H}x(t). \end{cases}$$

Или, что тоже самое,

$$\begin{cases} \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t) \ominus x(t+1) = 0 \\ \mathbf{H}x(t) \ominus y(t) = 0. \end{cases}$$

Погружая интервальную динамическую систему над $\mathbb{KR}$ в $\mathbb{R}$, получим:

$$\begin{cases} \Pi\left(\mathbf{F}\Pi^{-1}\left(\xi\left(t\right)\right)+\mathbf{G}\Omega^{-1}\left(\theta\left(t\right)\right)\ominus\Pi^{-1}\left(\xi\left(t+1\right)\right)\right)=0 \\ \Gamma\left(\mathbf{H}\Pi^{-1}\left(\xi\left(t\right)\right)\ominus\Gamma^{-1}\left(\eta\left(t\right)\right)\right)=0, \end{cases}$$

где Π, Ω и Γ – погружения интервального пространства $\mathbb{KR}$ в линейное $\mathbb{R}$, а состояниям системы $x(t)$ и $x(t+1)$ в моменты времени t и $t+1$, управлению $u(t)$ и выходу $y(t)$ соответствуют $\xi(t)$, $\xi(t+1)$, $\theta(t)$ и $\eta(t)$ соответственно. Раскрывая скобки, получим

$$\begin{cases} \Pi\mathbf{F}\Pi^{-1}\xi(t)+\Pi\mathbf{G}\Omega^{-1}\theta(t)\ominus\xi(t+1)=0 \\ \Gamma\mathbf{H}\Pi^{-1}\xi(t)\ominus\eta(t)=0. \end{cases}$$

Таким образом, описание динамического поведения погруженной системы над $\mathbb{R}$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \xi(t+1)=\Pi\mathbf{F}\Pi^{-1}\xi(t)+\Pi\mathbf{G}\Omega^{-1}\theta(t) \\ \eta(t)=\Gamma\mathbf{H}\Pi^{-1}\xi(t). \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \hat{F}&=\Pi\mathbf{F}\Pi^{-1}, \\ \hat{G}&=\Pi\mathbf{G}\Omega^{-1}, \\ \hat{H}&=\Gamma\mathbf{H}\Pi^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда погруженная импульсная последовательность матриц будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1&=\hat{H}\hat{G}=\Gamma\mathbf{H}\Pi^{-1}\Pi\mathbf{G}\Omega^{-1}=\Gamma\mathbf{H}\mathbf{G}\Omega^{-1}=\Gamma\mathbf{A}_1\Omega^{-1}, \\ \hat{A}_2&=\hat{H}\hat{F}\hat{G}=\Gamma\mathbf{H}\Pi^{-1}\Pi\mathbf{F}\Pi^{-1}\Pi\mathbf{G}\Omega^{-1}=\Gamma\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{G}\Omega^{-1}=\Gamma\mathbf{A}_2\Omega^{-1}, \\ &\ldots \\ \hat{A}_i&=\hat{H}\hat{F}^{i-1}\hat{G}=\Gamma\mathbf{H}\Pi^{-1}\left(\Pi\mathbf{F}\Pi^{-1}\right)^{i-1}\Pi\mathbf{G}\Omega^{-1}=\Gamma\mathbf{H}\mathbf{F}^{i-1}\mathbf{G}\Omega^{-1}=\Gamma\mathbf{A}_i\Omega^{-1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Проиллюстрируем наши рассуждения коммутативной диаграммой множеств и отображений:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{KR}^{m} & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbb{KR}^{n} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbb{KR}^{n} & \xrightarrow{\mathbf{H}} & \mathbb{KR}^{p} \\
\Omega\downarrow\uparrow\Omega^{-1} & & \Pi\downarrow\uparrow\Pi^{-1} & & \Pi\downarrow\uparrow\Pi^{-1} & & \Gamma\downarrow\uparrow\Gamma^{-1} \\
\mathbb{R}^{2m} & \xrightarrow{\hat{G}} & \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\hat{H}} & \mathbb{R}^{2p} \\
\updownarrow \mathrm{id} & & \varphi\uparrow\downarrow\varphi^{-1} & & \varphi\uparrow\downarrow\varphi^{-1} & & \updownarrow \mathrm{id} \\
\mathbb{R}^{2m} & \xrightarrow{\tilde{G}} & X & \xrightarrow{\tilde{F}} & X & \xrightarrow{\tilde{H}} & \mathbb{R}^{2p}
\end{array},$$

где Π, Ω и Γ – погружения интервального пространства в линейное.

Теорема 2.4. Пусть

$$\begin{aligned}
&\Pi : \mathbb{IR}^{n} \to \mathbb{R}^{2n},\\
&\Omega : \mathbb{IR}^{m} \to \mathbb{R}^{2m},\\
&\Gamma : \mathbb{IR}^{p} \to \mathbb{R}^{2p}
\end{aligned}$$

– погружения интервального пространства $\mathbb{KR}$ в линейное $\mathbb{R}$. Тогда, если для погруженной импульсной последовательности матриц

$$\left\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots\right\}, \quad \hat{A}_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

существует неотрицательная реализация $\left(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}\right)$, то интервальная система $\left(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\right)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} = \Pi^{-1}\hat{F}\Pi,\\
&\mathbf{G} = \Pi^{-1}\hat{G}\Omega,\\
&\mathbf{H} = \Gamma^{-1}\hat{H}\Pi
\end{aligned} \tag{2.15}$$

является алгебраической интервальной реализацией исходной последовательности интервальных матриц

$$\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\right\}, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{IR}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Применяя (2.15), получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{HG} = \Gamma^{-1}\hat{H}\Pi\Pi^{-1}\hat{G}\Omega = \Gamma^{-1}\hat{H}\hat{G}\Omega = \Gamma^{-1}\hat{A}_1\Omega,\\
&\mathbf{HFG} = \Gamma^{-1}\hat{H}\Pi\Pi^{-1}\hat{F}\Pi\Pi^{-1}\hat{G}\Omega = \Gamma^{-1}\hat{H}\hat{F}\hat{G}\Omega = \Gamma^{-1}\hat{A}_2\Omega,\\
&\ldots\\
&\mathbf{HF}^{i\text{-}1}\mathbf{G} = \Gamma^{-1}\hat{H}\Pi\left(\Pi^{-1}\hat{F}\Pi\right)^{i-1}\Pi^{-1}\hat{G}\Omega = \Gamma^{-1}\hat{H}\hat{F}^{i-1}\hat{G}\Omega = \Gamma^{-1}\hat{A}_i\Omega.
\end{aligned}$$

Подставим $\hat{A}_i$ из (2.14)

$$\mathbf{HG} = \Gamma^{-1}\hat{A}_1\Omega = \Gamma^{-1}\Gamma\mathbf{A}_1\Omega^{-1}\Omega = \mathbf{A}_1,$$
$$\mathbf{HFG} = \Gamma^{-1}\hat{A}_2\Omega = \Gamma^{-1}\Gamma\mathbf{A}_2\Omega^{-1}\Omega = \mathbf{A}_2,$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{HF}^{i\text{-}1}\mathbf{G} = \Gamma^{-1}\hat{A}_i\Omega = \Gamma^{-1}\Gamma\mathbf{A}_i\Omega^{-1}\Omega = \mathbf{A}_i.$$

Следовательно, интервальная система $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ является алгебраической интервальной реализацией последовательности (2.1). □

В частности, для неотрицательных интервальных систем погружение ставит в соответствие интервальной матрице из $\mathbb{KR}^n$ точечную матрицу из $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом:

$$\mathbf{A} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Отметим, что для смешанных интервальных систем часто оказывается верным следующее соответствие:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^- + \mathbf{A}^+ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{A^+} & -\overline{A^-} \\ -\underline{A^-} & \overline{A^+} \end{pmatrix}.$$

Искомые $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \Pi^{-1}\varphi\tilde{F}\varphi^{-1}\Pi, \\ \mathbf{G} &= \Pi^{-1}\varphi\tilde{G}\Omega, \\ \mathbf{H} &= \Gamma^{-1}\tilde{H}\varphi^{-1}\Pi. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Отметим, что согласно предложению 2.1 $\Pi^{-1}\varphi$ и $\varphi^{-1}\Pi$ также являются погружениями из интервального пространства в линейное и обратно. Линейное преобразование $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

по сути являющееся перестановкой строк и столбцов, необходимо нам для того, чтобы правильно восстанавливать интервальную матрицу из ее прообраза в линейном пространстве согласно представлению (2.16).

Для последовательности неотрицательных интервальных матриц мы можем предложить следующий алгоритм нахождения алгебраической интервальной реализации с использованием техники погружения.

Алгоритм 2.3.

Исходные данные. Импульсная последовательность интервальных матриц вида (2.1).

Шаг 1. Образуем последовательность точечных матриц с помощью представления (2.16).

Шаг 2. Найдем алгебраическую реализацию $\left(\tilde{F},\tilde{G},\tilde{H}\right)$ этой последовательности с помощью методов, описанных в главе 1. Согласно условиям теоремы 2.4 реализация $\left(\tilde{F},\tilde{G},\tilde{H}\right)$ должна быть неотрицательна.

Шаг 3. Применим к найденной реализации преобразование φ и получим эквивалентную реализацию $\left(\hat{F},\hat{G},\hat{H}\right)$.

Шаг 4. Восстановим интервальную реализацию по $\left(\hat{F},\hat{G},\hat{H}\right)$ с помощью формул (2.15).

Пример 2.7. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1=[0,0.1],\ \mathbf{A}_2=[0.8,1.2],\ \mathbf{A}_3=[0.7,1.6],\ \mathbf{A}_4=[1.3,3.8].$$

Π, Ω и Γ выбраны следующими:

$$\Pi=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \Omega=\Gamma=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

что соответствует стандартному погружению [96].

Погруженная импульсная последовательность будет иметь вид:

$$\tilde{A}_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0.1\end{pmatrix},\quad \tilde{A}_2=\begin{pmatrix}0.8&0\\0&1.2\end{pmatrix},\quad \tilde{A}_3=\begin{pmatrix}0.7&0\\0&1.6\end{pmatrix},\quad \tilde{A}_4=\begin{pmatrix}1.3&0\\0&3.8\end{pmatrix}.$$

Реализация последовательности $\{\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_4\}$, полученная с помощью метода, описанного в [70] имеет вид:

$$\tilde{F}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.859 & 0 & 0.875 & 0\\ 0 & 1.562 & 0 & 1.203 \end{pmatrix},\quad \tilde{G}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0.1\\ 0.8 & 0\\ 0 & 1.2 \end{pmatrix},\quad \tilde{H}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя к ней преобразование φ, получим

$$\hat{F}=\varphi\tilde{F}\varphi^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0.859 & 0.875 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1.562 & 1.203 \end{pmatrix},$$

$$\hat{G}=\varphi\tilde{G}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0.8 & 0\\ 0 & 0.1\\ 0 & 1.2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{H}=\tilde{H}\varphi^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По (2.15)

$$\Pi^{-1}\hat{F}\Pi=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.859 & 0 & 0.875 & 0\\ 0 & 1.562 & 0 & 1.203 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^{-1}\hat{G}\Omega=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0.1\\ 0.8 & 0\\ 0 & 1.2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{-1}\hat{H}\Pi=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим искомые $(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$:

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} [0,0] & [1,1]\\ [0.859,1.562] & [0.875,1.203] \end{pmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix} [0,0.1]\\ [0.8,1.2] \end{pmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] \end{pmatrix}.$$

Пример 2.8. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с двумя входами и двумя выходами:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [1.54, 1.77] & [0,0] \\ [0.2, 0.43] & [0.5, 0.6] \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} [0,0] & [0, 0.74] \\ [1.5, 1.9] & [0.8, 0.94] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} [1.832, 4.329] & [1.36, 3.202] \\ [0.609, 3.6] & [0.647, 3.364] \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} [3.064, 12.663] & [1.91, 9.747] \\ [4.292, 14.962] & [2.878, 11.615] \end{pmatrix}.$$

Погруженная импульсная последовательность будет иметь вид:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.77 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.43 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.74 \\ 1.5 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1.9 & 0 & 0.94 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1.832 & 0 & 1.36 & 0 \\ 0 & 4.329 & 0 & 3.302 \\ 0.609 & 0 & 0.647 & 0 \\ 0 & 3.6 & 0 & 3.364 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_4 = \begin{pmatrix} 3.064 & 0 & 1.91 & 0 \\ 0 & 12.663 & 0 & 9.747 \\ 4.292 & 0 & 2.878 & 0 \\ 0 & 14.962 & 0 & 11.615 \end{pmatrix}.$$

Реализация последовательности $\{\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_4\}$, полученная с помощью метода, описанного в [70] имеет вид:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 1.6 & 0 & 0.13 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 2 & 0 & 0.8 & 0 & 1.5 \\ 0.12 & 0 & 1.07 & 0 & 1.42 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 & 1.28 & 0 & 1.73 & 0 & 1.4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1.54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.77 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.43 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.74 \\ 1.5 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1.9 & 0 & 0.94 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование φ и погружения Π, Ω и Γ в нашем случае имеют вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\Pi^{-1}\varphi\tilde{F}\varphi^{-1}\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 1.6 & 0 & 0.13 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 2 & 0 & 0.8 & 0 & 1.5 \\ 0.12 & 0 & 1.07 & 0 & 1.42 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 & 1.28 & 0 & 1.73 & 0 & 1.4 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^{-1}\varphi\tilde{G}\Omega=\begin{pmatrix}1.54 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1.77 & 0 & 0\\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.43 & 0 & 0.6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.74\\ 1.5 & 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 1.9 & 0 & 0.94\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{-1}\tilde{H}\varphi^{-1}\Pi=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим искомые $(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$:

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1]\\ [0.3,0.35] & [1.6,2] & [0.13,0.8] & [0.7,1.5]\\ [0.12,0.22] & [1.07,1.28] & [1.42,1.73] & [0.14,1.4]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}[1.54,1.77] & [0,0]\\ [0.2,0.43] & [0.5,0.6]\\ [0,0] & [0,0.74]\\ [1.5,1.9] & [0.8,0.94]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}[1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0]\end{pmatrix}.$$

Выводы

В данной главе исследуется проблема реализации для полностью положительных интервальных систем.

Предложено достаточное условие реализуемости интервальной динамической системы, основанное на рекуррентности заданной импульсной последовательности интервальных матриц.

Рассмотрена проблема реализации для скалярных интервальных динамических систем, т.е. систем с одним входом и одним выходом.

Разработан метод граничных реализаций для полностью неотрицательных интервальных систем. На основе этого метода предложены алгоритмы, позволяющие строить интервальную алгебраическую реализацию полностью неотрицательной и полностью неположительной интервальных динамических систем.

Разработан метод и алгоритм, позволяющий находить интервальную алгебраическую реализацию полностью неотрицательных интервальных систем, используя погружение интервального пространства в линейное пространство удвоенной размерности.

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕАЛИЗАЦИЙ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СМЕШАННОГО ТИПА

В этой главе мы продолжаем разработку методов алгебраической реализации для линейных интервальных динамических систем с дискретным временем.

В параграфе 1 мы предложим модификацию метода граничных реализаций для интервальных импульсных последовательностей смешанного типа, т.е. систем, в которых присутствуют и положительные и отрицательные элементы.

В параграфе 2 мы обобщим полученную теорему и определим, что же есть параллельная композиция для интервальных динамических систем.

Заключительный параграф посвящен конструированию различных методов алгебраической реализации интервальных динамических систем на основе их декомпозиции в параллельное соединение.

3.1. Модификация метода граничных реализаций для интервальных динамических систем смешанного типа

В случае интервальных динамических систем смешанного типа, можно использовать следующую модификацию метода граничных реализаций.

Определение 3.1. Для $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$ интервал

$$\mathbf{a}^- = \left[\min\left(\underline{a},0\right),\min\left(\overline{a},0\right)\right]$$

назовем *отрицательной частью интервала* $\mathbf{a}$, а интервал

$$\mathbf{a}^+ = \left[\max\left(\underline{a},0\right),\max\left(\overline{a},0\right)\right]$$

назовем *положительной частью интервала* $\mathbf{a}$.

Определение 3.2. Разложим исходную импульсную последовательность интервальных матриц на неположительную и неотрицательную последовательности:

$$\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\right\} = \left\{\mathbf{A}_1^{\,+}, \mathbf{A}_2^{\,+}, \ldots\right\} - \left\{\mathbf{A}_1^{\,-}, \mathbf{A}_2^{\,-}, \ldots\right\}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{A}_i^{\,-}$ и $\mathbf{A}_i^{\,+}$ – матрицы, элементами которых являются отрицательные и положительные части элементов интервальной матрицы $\mathbf{A}_i$ соответственно. Последовательность

$$\left\{\mathbf{A}_1^{\,-}, \mathbf{A}_2^{\,-}, \ldots\right\}$$

будем называть *отрицательной частью последовательности* (3.1), а последовательность

$$\left\{\mathbf{A}_1^{\,+}, \mathbf{A}_2^{\,+}, \ldots\right\}$$

– *положительной частью последовательности* (3.1).

Имеет место теорема, дающая нам способ нахождения алгебраической интервальной реализации для последовательности смешанных интервальных матриц, для доказательства которой нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и неотрицательных $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{IR}$ выполняется закон ассоциативности умножения

$$\left(\lambda \mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \lambda\left(\mathbf{AB}\right).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_{ij}\right) \in \mathbb{IR}$, $\mathbf{B} = \left(\mathbf{b}_{jk}\right) \in \mathbb{IR}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, k$. По условию леммы $\mathbf{A} \geq 0, \mathbf{B} \geq 0$.

В случае $\lambda > 0$

$$(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\lambda\mathbf{a})_{ni}\,\mathbf{b}_{ik}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\lambda\underline{a},\lambda\overline{a}\right]_{ni}\left[\underline{b},\overline{b}\right]_{ik}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\lambda\underline{a}_{ni}\underline{b}_{ik},\lambda\overline{a}_{ni}\overline{b}_{ik}\right]=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\underline{a}_{ni}\underline{b}_{ik},\overline{a}_{ni}\overline{b}_{ik}\right]=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}_{ni}\mathbf{b}_{ik}=$$

$$=\lambda(\mathbf{AB}).$$

В случае $\lambda<0$

$$(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\lambda\mathbf{a})_{ni}\,\mathbf{b}_{ik}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\lambda\overline{a},\lambda\underline{a}\right]_{ni}\left[\underline{b},\overline{b}\right]_{ik}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\lambda\overline{a}_{ni}\overline{b}_{ik},\lambda\underline{a}_{ni}\underline{b}_{ik}\right]=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\underline{a}_{ni}\underline{b}_{ik},\overline{a}_{ni}\overline{b}_{ik}\right]=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}_{ni}\mathbf{b}_{ik}=$$

$$=\lambda(\mathbf{AB}).$$

Случай $\lambda=0$ в доказательстве не нуждается, так как и $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=0$ и $\lambda(\mathbf{AB})=0$. □

Теорема 3.1. Если для положительной и отрицательной частей последовательности интервальных матриц (3.1) существуют неотрицательные алгебраические реализации $(\mathbf{F}^{+},\mathbf{G}^{+},\mathbf{H}^{+})$ и $(\mathbf{F}^{-},\mathbf{G}^{-},\mathbf{H}^{-})$ соответственно, то интервальная система $(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$ с блочными матрицами

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{F}^{-} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^{+}\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}^{-}\\ \mathbf{G}^{+}\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}-\mathbf{H}^{-} & \mathbf{H}^{+}\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

является интервальной алгебраической реализацией последовательности (3.1).

Доказательство. Заметим, что согласно условиям теоремы 3.2 интервальные матрицы $\mathbf{F}^{-},\mathbf{F}^{+},\mathbf{G}^{-},\mathbf{G}^{+},\mathbf{H}^{-},\mathbf{H}^{+}$ являются неотрицательными. Добавим, что для $i=1,2,\ldots$ истинны следующие соотношения

$$\mathbf{H}^{-}\left(\mathbf{F}^{-}\right)^{i-1}\mathbf{G}^{-}=\mathbf{A}_{i}^{-},\quad \mathbf{H}^{+}\left(\mathbf{F}^{+}\right)^{i-1}\mathbf{G}^{+}=\mathbf{A}_{i}^{+},$$

где все матричные произведения выполняются справа налево. Тогда

$$\mathbf{HG}=\begin{pmatrix}-\mathbf{H}^{-} & \mathbf{H}^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{G}^{-}\\ \mathbf{G}^{+}\end{pmatrix}=\left(-\mathbf{H}^{-}\right)\mathbf{G}^{-}+\mathbf{H}^{+}\mathbf{G}^{+}.$$

Пользуясь леммой 3.1, имеем

$$\left(-\mathbf{H}^{-}\right)\mathbf{G}^{-}=-\left(\mathbf{H}^{-}\mathbf{G}^{-}\right)=-\mathbf{A}_{1}^{-}.$$

Тогда

$$\mathbf{HG}=\mathbf{A}_{1}^{+}-\mathbf{A}_{1}^{-}=\mathbf{A}_{1}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\mathbf{HFG}&=\\ &=\begin{pmatrix}-\mathbf{H}^{-} & \mathbf{H}^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^{-} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{G}^{-}\\ \mathbf{G}^{+}\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}-\mathbf{H}^{-} & \mathbf{H}^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{F}^{-}\mathbf{G}^{-} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^{+}\mathbf{G}^{+}\end{pmatrix}=\\ &=-\mathbf{H}^{-}\left(\mathbf{F}^{-}\mathbf{G}^{-}\right)+\mathbf{H}^{+}\left(\mathbf{F}^{+}\mathbf{G}^{+}\right)=\\ &=\mathbf{A}_{2}^{+}-\mathbf{A}_{2}^{-}=\\ &=\mathbf{A}_{2}.\end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbf{H}\mathbf{F}^{i-1}\mathbf{G} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{H}^- & \mathbf{H}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^- & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^+ \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^- \\ \mathbf{G}^+ \end{pmatrix} =$$

$$= -\mathbf{H}^- \left(\mathbf{F}^-\right)^{i-1} \mathbf{G}^- + \mathbf{H}^+ \left(\mathbf{F}^+\right)^{i-1} \mathbf{G}^+ =$$

$$= \mathbf{A}_i^+ - \mathbf{A}_i^- =$$

$$= \mathbf{A}_i .$$

Тогда

$$\mathbf{H}\mathbf{F}^{i}\mathbf{G} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{H}^- & \mathbf{H}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^- & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^+ \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^- \\ \mathbf{G}^+ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{H}^- & \mathbf{H}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^- & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^+ \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^-\mathbf{G}^- \\ \mathbf{F}^+\mathbf{G}^+ \end{pmatrix} =$$

$$= -\mathbf{H}^- \left(\mathbf{F}^-\right)^{i-1} \left(\mathbf{F}^-\mathbf{G}^-\right) + \mathbf{H}^+ \left(\mathbf{F}^+\right)^{i-1} \left(\mathbf{F}^+\mathbf{G}^+\right) =$$

$$= -\mathbf{H}^- \left(\mathbf{F}^-\right)^{i} \mathbf{G}^- + \mathbf{H}^+ \left(\mathbf{F}^+\right)^{i} \mathbf{G}^+ =$$

$$= \mathbf{A}_{i+1}^+ - \mathbf{A}_{i+1}^- =$$

$$= \mathbf{A}_{i+1} .$$

Этим мы завершаем наше доказательство по индукции. □

Теорема 3.1 дает нам алгоритм вычисления алгебраической интервальной реализации для последовательности смешанных интервальных матриц.

Алгоритм 3.1.

Исходные данные. Импульсная последовательность интервальных матриц вида (3.1).

Шаг 1. Разложим исходную последовательность интервальных матриц смешанного типа на положительную и отрицательную части согласно определению 3.2.

Шаг 2. Найдем алгебраические интервальные реализации положительной и отрицательной частей исходной последовательности интервальных матриц, используя методы, рассмотренные в главе 2 настоящей работы (метод граничных реализаций и метод погружения в линейное пространство).

Шаг 3. Если интервальные реализации положительной и отрицательной частей исходной импульсной существуют и неотрицательны, то, согласно теореме 3.1 по формулам (3.2), построим искомую интервальную реализацию исходной импульсной последовательности.

Пример 3.1. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с двумя входами и двумя выходами:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [-0.2,0] & [-0.8,-0.6] \\ [0,0] & [1.2,1.5] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} [0,0] & [-1.5,-1.2] \\ [0,0.08] & [1.32,2.27] \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} [-0.08,0] & [-2.27,-1.32] \\ [0,0.104] & [1.56,3.551] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} [-0.104,0] & [-3.551,-1.56] \\ [0,0.167] & [1.824,5.524] \end{pmatrix}.$$

Согласно шагу 1 алгоритма 3.1 разложим исходную импульсную последовательность на отрицательную части

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1^- = \begin{pmatrix} [0,0.2] & [0.6,0.8] \\ [0,0] & [0,0] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^- = \begin{pmatrix} [0,0] & [1.2,1.5] \\ [0,0] & [0,0] \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{A}_3^- = \begin{pmatrix} [0,0.08] & [1.32,2.27] \\ [0,0] & [0,0] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4^- = \begin{pmatrix} [0,0.104] & [1.56,3.551] \\ [0,0] & [0,0] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

и положительную

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1^+ = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [1.2,1.5] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^+ = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0.08] & [1.32,2.27] \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{A}_3^+ = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0.104] & [1.56,3.551] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4^+ = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] \\ [0,0.167] & [1.824,5.524] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

части.

Нижняя и верхняя реализации отрицательной части последовательности имеют вид

$$\underline{F}^- = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1.8 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{G}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{H}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\overline{F}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 1.3 \end{pmatrix}, \quad \overline{G}^- = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad \overline{H}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности не удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Найдем пару граничных реализаций, эквивалентную данной, применив преобразования подобия

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Получим

$$\underline{\hat{F}}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{G}}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{H}}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\bar{F}}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\bar{G}}^- = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\bar{H}}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Интервальная система

$$\mathbf{F}^- = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ [0.2,0.4] & [0,0] & [1,1.3] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^- = \begin{pmatrix} [0,0.2] & [0.6,0.8] \\ [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [1.2,1.5] \\ [0,0] & [0,0] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^- = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \end{pmatrix}$$

является интервальной реализацией последовательности (3.3).

Нижняя и верхняя реализации положительной части последовательности имеют вид

$$\underline{F}^{+}=\begin{pmatrix}1.1 & 1\\ 0.09 & -0.1\end{pmatrix},\quad \underline{G}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 1.2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \underline{H}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{F}^{+}=\begin{pmatrix}1.513 & 1\\ 0.077 & -0.213\end{pmatrix},\quad \overline{G}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 1.5\\ 0.08 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{H}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности также не удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Найдем пару граничных реализаций, эквивалентную данной. Применяя преобразования подобия

$$T_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 1.1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 1.513 & 1\end{pmatrix}$$

получим эквивалентные граничные реализации в наблюдаемой канонической форме:

$$\underline{\hat{F}}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \underline{\hat{G}}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1.2\\ 0 & 0\\ 0 & 1.32\end{pmatrix},\quad \underline{\hat{H}}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{\overline{F}}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0 & 1.3\end{pmatrix},\quad \hat{\overline{G}}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1.5\\ 0 & 0\\ 0.08 & 2.27\end{pmatrix},\quad \hat{\overline{H}}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, пара граничных реализаций $\left(\underline{F}^{+},\underline{G}^{+},\underline{H}^{+}\right)$ и $\left(\hat{\overline{F}}^{+},\hat{\overline{G}}^{+},\hat{\overline{H}}^{+}\right)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 и образованная их этих граничных реализаций интервальная система

$$\mathbf{F}^{+}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0.2,0.4] & [0,0] & [1,1.3]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^{+}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [1.2,1.5]\\ [0,0] & [0,0]\\ [0,0.08] & [1.32,2.27]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{+}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0]\end{pmatrix}$$

является интервальной реализацией последовательности (3.4).

Искомая нами интервальная реализация, согласно теореме 3.1, будет иметь вид

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0.2,0.4] & [0,0] & [1,1.3] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0.2,0.4] & [0,0] & [1,1.3]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}[0,0.2] & [0.6,0.8]\\ [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [1.2,1.5]\\ [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [1.2,1.5]\\ [0,0] & [0,0]\\ [0,0.08] & [1.32,2.27]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}[-1,-1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0]\end{pmatrix}.$$

Представленные в данной работе метод граничных реализаций и модификация метода граничных реализаций реализованы в программном обеспечении, описанном в Приложении Б.

Заметим, что в соответствии с теоретико-системной терминологией система (3.2) является ни чем иным как параллельной композицией систем $\left(\mathbf{F}^{+},\mathbf{G}^{+},\mathbf{H}^{+}\right)$ и $\left(\mathbf{F}^{-},\mathbf{G}^{-},-\mathbf{H}^{-}\right)$.

3.2. Параллельная композиция интервальных динамических систем

Вопросы композиции и декомпозиции систем возникают, прежде всего, при исследовании крупномасштабных систем и при решении задач синтеза систем управления. Одним из основных методологических приемов при анализе и синтезе таких систем является рассмотрение системы как определенной композиции подсистем. Здесь мы ограничимся рассмотрением параллельной композиции систем, которая необходима нам для дальнейших исследований.

Определение 3.3. [77] Пусть заданы две линейные системы над полем K с одинаковыми пространствами входных (U) и выходных (Y) сигналов $\Sigma_1=\left(F_1,G_1,H_1\right)$ и $\Sigma_2=\left(F_2,G_2,H_2\right)$ с пространствами состояний X_1 и X_2 соответственно. Их *параллельная композиция* Σ, которую мы будем обозначать через $\Sigma_1+\Sigma_2$ определяется как система $\Sigma=\left(F,G,H\right)$ с пространствами входных сигналов U, выходных сигналов Y и состояний $X_1\oplus X_2$, где гомоморфизмы F, G и H определяются в соответствии со следующими правилами:

$$F=\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}: X_1\oplus X_2\to X_1\oplus X_2,\quad F\left(X_1,X_2\right)=\left(F_1X_1 \quad F_2X_2\right);$$

$$G=\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}: U\to X_1\oplus X_2,\quad G\left(a\right)=\begin{pmatrix} G_1a \\ G_2a \end{pmatrix};$$

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & H_2\end{pmatrix}: X_1\oplus X_2\to Y,\quad H\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=H_1x_1+H_2x_2.$$

Для отображений вход-выход систем Σ_1, Σ_2 и $\Sigma_1+\Sigma_2$ имеет место следующее соотношение, доказательство которого можно найти в [108]:

$$f_{\Sigma_1+\Sigma_2}=f_{\Sigma 1}+f_{\Sigma_2}.$$

Этот результат можно обобщить также для систем над кольцами [77, 108].

Докажем, что данный результат верен и для случая интервальных динамических систем.

Теорема 3.2. **(**О параллельной композиции интервальных динамических систем**)** Пусть имеются интервальные динамические системы одинаковой размерности $\mathbf{\Sigma}_1=\left(\mathbf{F}_1,\mathbf{G}_1,\mathbf{H}_1\right)$ и $\mathbf{\Sigma}_2=\left(\mathbf{F}_2,\mathbf{G}_2,\mathbf{H}_2\right)$, и их параллельная композиция $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{\Sigma}_1+\mathbf{\Sigma}_2=\left(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}\right)$, где матрицы $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}$ имеют следующий вид

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{F}^1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}^1\\ \mathbf{G}^2\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2\end{pmatrix}.$$

Тогда для отображений вход-выход систем $\mathbf{\Sigma}_1$, $\mathbf{\Sigma}_2$ и Σ имеет место

$$f_{\mathbf{\Sigma}_1+\mathbf{\Sigma}_2}=f_{\mathbf{\Sigma}_1}+f_{\mathbf{\Sigma}_2}.$$

Доказательство. Как известно, отображение вход-выход f динамической системы Σ может быть задано последовательностью матриц. Пусть отображения вход-выход $f_{\mathbf{\Sigma}_1}$, $f_{\mathbf{\Sigma}_2}$ и $f_{\mathbf{\Sigma}}$ заданы последовательностями $\left\{\mathbf{A}_1^1,\mathbf{A}_2^1,\ldots,\mathbf{A}_n^1\right\}$, $\left\{\mathbf{A}_1^2,\mathbf{A}_2^2,\ldots,\mathbf{A}_n^2\right\}$ и $\left\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n\right\}$ соответственно. Следовательно, нам нужно доказать, что $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i^1+\mathbf{A}_i^2$ для $i=1,\ldots,n.$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &=\\ &=\mathbf{HG}=\\ &=\begin{pmatrix}\mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{G}^1\\ \mathbf{G}^2\end{pmatrix}=\\ &=\mathbf{H}^1\mathbf{G}^1+\mathbf{H}^2\mathbf{G}^2=\\ &=\mathbf{A}_1^1+\mathbf{A}_1^2.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &= \\
&= \mathbf{HFG} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1\mathbf{G}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2\mathbf{G}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\mathbf{G}^1\right) + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\mathbf{G}^2\right) = \\
&= \mathbf{A}_2^1 + \mathbf{A}_2^2.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_i &= \\
&= \mathbf{HF}^{i-1}\mathbf{G} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\right)^{i-1}\mathbf{G}^1 + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\right)^{i-1}\mathbf{G}^2 = \\
&= \mathbf{A}_i^1 + \mathbf{A}_i^2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{i+1} &= \\
&= \mathbf{HF}^{i}\mathbf{G} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1\mathbf{G}^1 \\ \mathbf{F}^2\mathbf{G}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\right)^{i-1}\left(\mathbf{F}^1\mathbf{G}^1\right) + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\right)^{i-1}\left(\mathbf{F}^2\mathbf{G}^2\right) = \\
&= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\right)^{i}\mathbf{G}^1 + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\right)^{i}\mathbf{G}^2 = \\
&= \mathbf{A}_{i+1}^1 + \mathbf{A}_{i+1}^2.
\end{aligned}$$

Этим мы завершаем наше доказательство по индукции. □

Другие результаты, связанные с параллельной композицией, а также условия разложения (декомпозиции) линейных систем в параллельное, последовательное и параллельно-последовательное соединение можно найти в работах [49, 77, 108].

Теорема 3.2 фактически усиливает результат, полученный нами в параграфе 1 (теорему 3.1).

3.3. Методы реализации, основанные на параллельной декомпозиции интервальных динамических систем

Развивая подход, предложенный в параграфе 1 настоящей главы, предложим методы алгебраической реализации интервальных динамических систем на основе их декомпозиции в параллельное соединение.

Следующая теорема, по сути, является обратной к теореме о параллельной композиции интервальных динамических систем.

Теорема 3.3. Если для двух последовательностей интервальных матриц $\left\{\mathbf{A}_1^1, \mathbf{A}_2^1, \ldots, \mathbf{A}_i^1\right\}$ и $\left\{\mathbf{A}_1^2, \mathbf{A}_2^2, \ldots, \mathbf{A}_i^2\right\}$ существуют неотрицательные алгебраические интервальные реализации $\left(\mathbf{F}^1, \mathbf{G}^1, \mathbf{H}^1\right)$ и $\left(\mathbf{F}^2, \mathbf{G}^2, \mathbf{H}^2\right)$ соответственно, то для последовательности

$$\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i\right\} = \left\{\mathbf{A}_1^1, \mathbf{A}_2^1, \ldots, \mathbf{A}_i^1\right\} + \left\{\mathbf{A}_1^2, \mathbf{A}_2^2, \ldots, \mathbf{A}_i^2\right\}$$

алгебраической интервальной реализацией будет являться интервальная система с блочными матрицами

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для $i = 1, 2, \ldots$ истинны следующие соотношения

$$\mathbf{H}^1 \left(\mathbf{F}^1\right)^{i-1} \mathbf{G}^1 = \mathbf{A}_i^{\,1}, \quad \mathbf{H}^2 \left(\mathbf{F}^2\right)^{i-1} \mathbf{G}^2 = \mathbf{A}_i^{\,2},$$

Тогда

$$\mathbf{HG} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathbf{H}^1\mathbf{G}^1 + \mathbf{H}^2\mathbf{G}^2 =$$
$$= \mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_1^2 =$$
$$= \mathbf{A}_1.$$

Аналогично

$$\mathbf{HFG} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1\mathbf{G}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2\mathbf{G}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\mathbf{G}^1\right) + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\mathbf{G}^2\right) =$$
$$= \mathbf{A}_2^1 + \mathbf{A}_2^2 =$$
$$= \mathbf{A}_2.$$

Пусть

$$\mathbf{HF}^{i-1}\mathbf{G} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\right)^{i-1}\mathbf{G}^1 + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\right)^{i-1}\mathbf{G}^2 =$$
$$= \mathbf{A}_i^1 + \mathbf{A}_i^2 =$$
$$= \mathbf{A}_i.$$

Тогда

$$\mathbf{HF}^i\mathbf{G} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1\mathbf{G}^1 \\ \mathbf{F}^2\mathbf{G}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\right)^{i-1}\left(\mathbf{F}^1\mathbf{G}^1\right) + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\right)^{i-1}\left(\mathbf{F}^2\mathbf{G}^2\right) =$$

$$= \mathbf{H}^1\left(\mathbf{F}^1\right)^{i}\mathbf{G}^1 + \mathbf{H}^2\left(\mathbf{F}^2\right)^{i}\mathbf{G}^2 =$$

$$= \mathbf{A}^1_{i+1} + \mathbf{A}^2_{i+1} =$$

$$= \mathbf{A}_{i+1}.$$

Этим мы завершаем наше доказательство по индукции. □

Пример 3.2. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность для системы с одним входом и одним выходом:

$$\mathbf{A}_1 = [3.93, 4.05], \quad \mathbf{A}_2 = [4.56, 4.795], \quad \mathbf{A}_3 = [4.51.5, 346], \quad \mathbf{A}_4 = [5.4, 6.8].$$

Нижняя и верхняя реализации положительной части последовательности имеют вид

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1.16 & 1 \\ -0.199 & -1.374 \end{pmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 3.93 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} 1.184 & 1 \\ -0.082 & -2.606 \end{pmatrix}, \quad \overline{G} = \begin{pmatrix} 4.05 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Полученные граничные реализации последовательности не удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Попытка найти согласно теореме 2.3 эквивалентные реализации, отвечающие условиям теоремы 2.2 также потерпела неудачу. Попытаемся разложить исходную последовательность интервальных матриц на две последовательности и найти их алгебраические реализации. Пусть это будут последовательности

$$\mathbf{A}^2_1 = [3.63, 3.7], \quad \mathbf{A}^2_2 = [4.11, 4.2], \quad \mathbf{A}^2_3 = [3.81, 4.3], \quad \mathbf{A}^2_4 = [4.2, 4.8].$$

и

$$\mathbf{A}^2_1 = [0.3, 0.35], \quad \mathbf{A}^2_2 = [0.45, 0.595], \quad \mathbf{A}^2_3 = [0.7, 1.046], \quad \mathbf{A}^2_4 = [1.2, 2].$$

Алгебраические интервальные реализации этих последовательностей, найденные в соответствии с алгоритмом 2.1 выглядят следующим образом:

$$\mathbf{F}^1=\begin{pmatrix}[0,0] & [1,1]\\ [0.897,0.966] & [0.135,0.173]\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}^1=\begin{pmatrix}[3.63,3.7]\\ [4.11,4.2]\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}^1=\begin{pmatrix}[1,1] & [0,0]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^2=\begin{pmatrix}[1.5,1.7] & [1,1]\\ [0.083,0.1] & [4.5,4.55]\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}^2=\begin{pmatrix}[0.3,0.35]\\ [0,0]\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}^2=\begin{pmatrix}[1,1] & [0,0]\end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3.3 теперь мы можем найти алгебраическую реализацию исходной последовательности как параллельную композицию реализаций $\left(\mathbf{F}^1,\mathbf{G}^1,\mathbf{H}^1\right)$ и $\left(\mathbf{F}^2,\mathbf{G}^2,\mathbf{H}^2\right)$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,1] & [0,0] & [0,0]\\ [0.897,0.966] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [1.5,1.7] & [1,1]\\ [0,0] & [0,0] & [0.083,0.1] & [4.5,4.55]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}[3.63,3.7]\\ [4.11,4.2]\\ [0.3,0.35]\\ [0,0]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}[1,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0]\end{pmatrix}.$$

Теорема 3.3 дает нам возможность строить различные алгоритмы нахождения алгебраической интервальной реализации с помощью разложения исходной импульсной последовательности интервальных матриц. Например, можно предложить следующее следствие теоремы 3.3, и основанный на нем алгоритм нахождения алгебраической интервальной реализации для смешанной последовательности интервальных матриц.

Следствие 3.1. Пусть для последовательности интервальных неотрицательных матриц

$$\left\{\mathbf{A}_1^+,\mathbf{A}_2^+,\dots,\mathbf{A}_i^+\right\} \tag{3.5}$$

существует неотрицательная интервальная алгебраическая реализация $\left(\mathbf{F}^+,\mathbf{G}^+,\mathbf{H}^+\right)$. А также найдется алгебраическая реализация $\left(F^d,G^d,H^d\right)$

последовательности точечных матриц $\left\{A_1^d, A_2^d, \ldots, A_i^d\right\}$. Тогда, для последовательности интервальных матриц

$$\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i\right\} = \left\{\mathbf{A}_1^+, \mathbf{A}_2^+, \ldots, \mathbf{A}_i^+\right\} + \left\{A_1^d, A_2^d, \ldots, A_i^d\right\}$$

алгебраической интервальной реализацией будет интервальная система $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ с блочными матрицами

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+ & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & F^d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^+ \\ G^d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^+ & H^d \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Алгоритм 3.2.

Исходные данные. Импульсная последовательность l интервальных матриц размера $p \times m$

$$\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_l\right\}, \tag{3.7}$$

где

$$\mathbf{A}_i = \left(\mathbf{a}_{jk}\right)_i = \left(\left[\underline{a}_{jk}, \overline{a}_{jk}\right]\right)_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l,\ j = 1, 2, \ldots, p,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Шаг 1. Найдем наименьший элемент из последовательности интервальных матриц (3.7). Обозначим его δ. Пусть Δ – матрица размерности $p \times m$, все элементы, которой равны δ, т.е.

$$\delta = \left| \min_{\substack{j=1,2,\ldots,p \\ k=1,2,\ldots,m \\ i=1,2,\ldots,l}} \left(\underline{a}_{jk}\right)_i \right|, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta & \ldots & \delta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta & \ldots & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

Шаг 2. Разложим исходную последовательность интервальных матриц (3.7) следующим образом

$$\begin{aligned} \left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_l\right\} &= \left\{\mathbf{A}_1^+, \mathbf{A}_2^+, \ldots, \mathbf{A}_l^+\right\} + \left\{A_1^d, A_2^d, \ldots, A_l^d\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{A}_1 + \Delta, \mathbf{A}_2 + \Delta, \ldots, \mathbf{A}_l + \Delta\right\} + \left\{-\Delta, \ldots, -\Delta\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы разложили исходную последовательность матриц на две последовательности: последовательность неотрицательных интервальных матриц и последовательность точечных матриц.

Шаг 3. Находим алгебраическую реализацию $\left(\mathbf{F}^{+},\mathbf{G}^{+},\mathbf{H}^{+}\right)$ для последовательности интервальных матриц

$$\left\{\mathbf{A}_1^{+},\mathbf{A}_2^{+},\dots,\mathbf{A}_l^{+}\right\}=\left\{\mathbf{A}_1+\Delta,\mathbf{A}_2+\Delta,\dots,\mathbf{A}_l+\Delta\right\}$$

с помощью методов, представленных в главе 2 данной работы. Также строим алгебраическую реализацию $\left(F^d,G^d,H^d\right)$ для последовательности точечных матриц

$$\left\{A_1^d,A_2^d,\dots,A_l^d\right\}=\left\{-\Delta,\dots,-\Delta\right\}.$$

Эта реализация имеет размерность $n=1$ и матрицы

$$F^d=1,\ G^d=\begin{pmatrix}-\delta & \dots & -\delta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times m},\ H^d=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{p\times 1}$$

или

$$F^d=1,\ G^d=\begin{pmatrix}\delta & \dots & \delta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times m},\ H^d=\begin{pmatrix}-1\\ \vdots\\ -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{p\times 1}.$$

Шаг 4. Строим искомую реализацию как параллельную композицию реализаций $\left(\mathbf{F}^{+},\mathbf{G}^{+},\mathbf{H}^{+}\right)$ и $\left(F^d,G^d,H^d\right)$ по формулам (3.6).

Пример 3.3. Рассмотрим интервальную импульсную последовательность с двумя входами и двумя выходами

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}[0,0.2] & [-1.5,-1.5]\\ [-1.4,-1.37] & [-1.1,-1.05]\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}[-1.5,-1.5] & [-1.5,-1.1]\\ [0,0.4] & [-0.7,-0.56]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}[-0.06,1.945] & [-0.94,0.23]\\ [-1.283,1.196] & [1.36,-0.058]\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}[-1.348,5.301] & [-1.402,2.187]\\ [-1.365,2.807] & [-1.424,0.782]\end{pmatrix}.$$

Согласно шагу 1 алгоритма 3.2 найдем минимальный элемент из данной последовательности. Это элемент $\left(\underline{A}_{1,2}\right)_1=-1.5$, следовательно $\delta=1.5$. Матрица $\Delta=\begin{pmatrix}1.5 & 1.5\\ 1.5 & 1.5\end{pmatrix}$.

Разложим исходную импульсную последовательность следующим образом

$$\{\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_4\}=\left\{\begin{pmatrix}[1.5,1.7] & [0,0]\\ [0.1,0.13] & [0.4,0.45]\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0.4]\\ [1.5,1.9] & [0.8,0.94]\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}[1.44,3.445] & [0.56,1.73]\\ [0.217,2.696] & [0.14,1.442]\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[0.152,6.801] & [0.098,3.687]\\ [0.135,4.307] & [0.076,2.282]\end{pmatrix}\right\}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}-1.5 & -1.5\\ -1.5 & -1.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1.5 & -1.5\\ -1.5 & -1.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1.5 & -1.5\\ -1.5 & -1.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1.5 & -1.5\\ -1.5 & -1.5\end{pmatrix}\right\}.$$

Алгебраическая реализация последовательности $\{\mathbf{A}_1^+,\ldots,\mathbf{A}_4^+\}$ имеет вид

$$\mathbf{F}^+=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1]\\ [0.26,0.35] & [0,0] & [0,0.8] & [0.7,1.5]\\ [0,0] & [0.07,0.28] & [0,0] & [0.14,1.4]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^+=\begin{pmatrix}[1.5,1.7] & [0,0]\\ [0.1,0.13] & [0.4,0.45]\\ [0,0] & [0,0.4]\\ [1.5,1.9] & [0.8,0.94]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^+=\begin{pmatrix}[1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0]\end{pmatrix}.$$

Алгебраическая реализация последовательности точечных матриц $\{-\Delta,\ldots,-\Delta\}$ выглядит следующим образом

$$F^d=[1,1],\quad G^d=\begin{pmatrix}[1.5,1.5] & [1.5,1.5]\end{pmatrix},\quad H^d=\begin{pmatrix}[-1,-1]\\ [-1,-1]\end{pmatrix}.$$

Искомая нами интервальная реализация, согласно следствию 3.1, будет иметь вид

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}[0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] & [0,0]\\ [0.26,0.35] & [0,0] & [0,0.8] & [0.7,1.5] & [0,0]\\ [0,0] & [0.07,0.28] & [0,0] & [0.14,1.4] & [0,0]\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1]\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} [1.5,1.7] & [0,0] \\ [0.1,0.13] & [0.4,0.45] \\ [0,0] & [0,0.4] \\ [1.5,1.9] & [0.8,0.94] \\ [1.5,1.5] & [1.5,1.5] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] & [-1,-1] \\ [0,0] & [1,1] & [0,0] & [0,0] & [-1,-1] \end{pmatrix}.$$

Очевидно, алгебраические реализации, найденные с помощью методов, представленных в данной главе не являются минимальными. Для интервальных реализаций пока не удалось найти алгоритм, подобный алгоритму Розенброка [107], приводящий любую реализацию к минимальной.

Выводы

В этой главе рассмотрены методы алгебраической реализации интервальных динамических систем смешанного типа. Представленные методы основываются на параллельной композиции подсистем исходной динамической системы.

Предложена модификация метода граничных реализаций для интервальных систем смешанного типа, основанная на разложении исходной импульсной последовательности интервальных матриц на отрицательную и положительную части.

Доказана теорема о параллельной композиции интервальных динамических систем, дающая возможность конструировать различные алгоритмы реализации интервальных динамических систем и предложен один из таких алгоритмов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая результаты теоретического анализа проблемы и экспериментальной проверки методов и алгоритмов представления интервальных динамических систем в пространстве состояний, можно сделать вывод об актуальности и значимости проведенного исследования и дальнейших перспективах изучения проблемы.

В первой главе исследования определены основные понятия теории линейных динамических систем с дискретным временем, рассмотрены алгоритмы решения задачи реализации для систем над полями, приведены различные определения динамических систем с интервальной неопределенностью и обзор работ в области исследования свойств и управления такими системами, предложено несколько определений интервальных динамических систем с дискретным временем таких систем и сформулирована задача реализации для таких систем. Во второй главе предложено достаточное условие реализуемости интервальных динамических систем, рассмотрена задача реализации для скалярных интервальных динамических систем, разработаны методы и алгоритмы алгебраической реализации полностью неотрицательных интервальных систем (метод граничных реализаций и метод погружения в линейное пространство). В третьей главе предложены методы и алгоритмы алгебраической реализации интервальных динамических систем смешанного типа, основанные на декомпозиции интервальной динамической системы в параллельное соединение.

Основные результаты настоящей работы состоят в следующем:

1. Даны определения интервальной динамической системы с дискретным временем для различных видов интервальной неопределенности.

2. Сформулированы возможные постановки задач реализации для интервальных динамических систем с дискретным временем.

3. Получен достаточный критерий алгебраической реализуемости импульсной последовательности интервальных матриц.

4. Разработан метод граничных реализаций, позволяющий строить алгебраические реализации для полностью неотрицательных интервальных динамических систем.

5. Предложен алгоритм, позволяющий строить алгебраические реализации полностью неположительных интервальных динамических систем.

6. Разработан метод вычисления алгебраических реализаций, основанный на погружении интервального пространства в линейное пространство удвоенной размерности.

7. Предложена модификация метода граничных реализаций для интервальных импульсных последовательностей смешанного типа.

8. Доказана теорема о параллельной композиции интервальных динамических систем, которая позволяет строить различные модификации алгоритмов вычисления алгебраических реализаций для интервальных систем.

9. На основе представленных методов и алгоритмов, создано программное обеспечение для решения задач реализации точечных и интервальных динамических систем с дискретным временем.

Дальнейшее исследование проблемы можно проводить в следующих направлениях:

– формулировка и обоснование необходимых критериев реализуемости интервальной динамической системы с дискретным временем;

– разработка методов вычисления интервальных алгебраических реализаций минимальной размерности;

– описание структуры множества конечномерных реализаций;

– определение внешних и внутренних оценок интервальных алгебраических реализаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф. и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. – М.: Наука, 1986.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
3. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. – Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2000.
4. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Стабилизация линейной стационарной системы управления с интервальными коэффициентами // Дальневосточный матем. сб. – Владивосток: Дальнаука. – 1999. – №8. – С. 32-38.
5. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2002. – №2. – С. 11-17.
6. Ащепков Л.Т., Стегостенко Ю.Б. Стабилизация линейной дискретной системы управления с интервальными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – №12. С. 3-10.
7. Беллман Р. Динамичекое програмирование. – М.: ИЛ, 1958.
8. Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределенности. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995.
9. Богомолов А.С., Сперанский Д.В. Об одной разновидности задачи стабилизации линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №9. – С. 111-124.
10. Богомолов А.С., Сперанский Д.В. Синхронизирующие эксперименты с интервальными линейными системами // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №6. – С. 166-173.

11. Васильев С.Н. От классических задач регулирования к интеллектному управлению. I // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – №1. – С. 5-22.

12. Васильев С.Н. От классических задач регулирования к интеллектному управлению. II // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – №2. – С. 5-21.

13. Виллемс Я.К. От временного ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование: Сборник переводных статей. – М.: Мир, 1989. – С. 8-191.

14. Вощинин А.П. Интервальный анализ: развитие и перспективы // Заводская Лаборатория. – 2002. – №1. – С. 118-126.

15. Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатической ошибке // Заводская Лаборатория. – 1990. – Т. 56, №7. – С. 76-81.

16. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: София: МЭИ (СССР); Техника (НРБ), 1989.

17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988.

18. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы) I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – №1. – С. 3-23.

19. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы) II. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – №2. – С. 3-30.

20. Давыдов Д.В. Локальная стабилизация интервально наблюдаемой системы с неопределенными параметрами // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 44-51.

21. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970.
22. Домбровский В.В. Интервальные методы в управлении финансами // Международная конференция по проблемам управления. Избранные труды. – 1999. – Т. 1. – С. 202-209.
23. Домбровский В.В., Чаусова Е.В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Труды Международной конференции RDAMM – 2001. – Т. 6. Ч. 2. Спец. выпуск. – С. 271-274.
24. Дугарова И.В., Смагина Е.М. Обеспечение устойчивости системы с неопределенными параметрами // Автоматика и Телемеханика. – 1990. – №2. – С. 176-181.
25. Ермаченко А.И. Методы синтеза систем управления низкой чувствительности. – М.: Радио и Связь, 1981.
26. Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Тляшев Р.З. Алгоритмическая процедура синтеза многосвязных систем с интервальными характеристическими полиномами. – 1989. – Деп. В ВИНИТИ № 7505-В89.
27. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
28. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970.
29. Заде Л.А. Понятие приближенной переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
30. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292-295.
31. Ивлев Р.С. Построение и исследование свойств многомерных систем управления интервально заданными объектами // Дисс. на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Алматы, 1999.

32. Ивлев Р.С., Соколова С.П. Построение векторного управления многомерным интервально заданным объектом // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 3-13.

33. Калинкина С.Ю. Методы вычисления реализаций в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Материалы восьмой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во АГУ. – 2005. – С. 58-59.

34. Калинкина С.Ю. Построение моделей с пространством состояний для интервальных динамических систем // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: Межвузовский сборник – Бийск: Изд-во АлтГТУ. – 2004. – С. 264-271.

35. Калинкина С.Ю., Пушков С.Г. Модификация метода граничных реализаций для интервальных импульсных последовательностей смешанного типа // Труды Международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004. Рабочие совещания. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН. – 2004. – С. 219-224.

36. Калинкина С.Ю., Пушков С.Г. Реализация в пространстве состояний интервальных линейных динамических систем: метод граничных реализаций // Известия Алтайского государственного университета. – 2005. – С.

37. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.

38. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

39. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701-709.

40. Кривошапко С.Ю., Пушков С.Г. Вычисление конечномерных реализаций для интервальных динамических систем: метод граничных реализаций //

Материалы шестой краевой конференции по математике. – Барнаул: Изд-во АГУ. – 2003. – С. 59-60.

41. Кривошапко С.Ю., Пушков С.Г. Новая версия программного обеспечения для решения задач точной и приближенной реализации // Измерения, контроль, информатизация: Сборник докладов международной научно-технической конференции. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2003. – С. 9-12.
42. Кривошапко С.Ю., Пушков С.Г. Реализуемость в пространстве состояний интервальных динамических систем // Известия Тульского государственного университета. Серия Технологическая системотехника. Вып. 2. – 2003. – С. 71-74.
43. Куржанский А.Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №4. – С. 3-26.
44. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М: Наука, 1977.
45. Лакеев А.В., Носков С.И. О множестве решений интервального уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074-1084.
46. Лозинский Л.Д., Мееров М.В. Синтез одного класса САУ с жесткой структурой, обладающего адаптивными свойствами: 1. Асимптотические свойства корней характеристических уравнений САУ, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициентов усиления // Автоматика и Телемеханика. – 1986. – № 9. – С. 22-30.
47. Лозинский Л.Д., Мееров М.В. Синтез одного класса САУ с жесткой структурой, обладающего адаптивными свойствами: 2. Методы синтеза структур САУ для односвязных и многосвязных объектов // Автоматика и Телемеханика. – 1986. – № 10. – С. 46-55.
48. Лозинский Л.Д., Мееров М.В. Синтез одного класса САУ с жесткой структурой, обладающего адаптивными свойствами: 3. Синтез структур САУ для объектов, содержащих звенья с распределенными параметрами // Автоматика и Телемеханика. – 1986. – № 11. – С. 45-53.

49. Математические методы в теории систем: сборник переводных статей / Под ред. Ю.И. Журавлева. – М.: Мир, 1979.

50. Меньшиков Г.Г. Интервальные вычисления: упущенные возможности и попытки наверстать // Процессы управления и устойчивостью. Труды XXIX научной конференции. – СПб: СпбГУ. – 1998. – С. 440-447.

51. Меньшиков Г.Г. Элементы локализующего интегрирования дифференциальных уравнений // Интервальный анализ и методы вычислений. Конспект лекций. Вып. 9. Изд. второе. – СПб: ООП НИИ Химии СПбГУ, 2001.

52. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978.

53. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – №5. – С. 3-28.

54. Несенюк А.П. Неопределенные величины в задачах управления с неполной информацией // Автоматика. – 1979. – № 2. – С.55-64.

55. Осетинский Н.И. К теории реализации линейных стационарных систем над полем. I // Программирование. – 1975. – №3. – С. 75-85.

56. Осетинский Н.И. К теории реализации линейных стационарных систем над полем. II // Программирование. – 1975. – №4. – С. 58-68.

57. Осетинский Н.И. К теории реализации линейных стационарных систем над полем. III // Программирование. – 1976. – №1. – С. 70-76.

58. Осетинский Н.И. Обзор некоторых результатов и методов в современной теории систем // Теория систем. Математические методы и моделирование. – М.: Мир. – 1989. – С. 328-379.

59. Осетинский Н.И. Обзор некоторых результатов по современной теории систем // Математические методы в теории систем. – М.: Мир. – 1979. – С. 271-327.

60. Оскорбин Н.М. Некоторые задачи обработки информации в управляемых системах // Синтез и проектирование многоуровневых иерархических систем. Материалы конференции. – Барнаул: АГУ. – 1983. – С.
61. Оскорбин Н.М., Жилин С.И., Дронов С.В. Сравнение статистической и нестатистической оценок параметров эмпирической зависимости. // Известия АГУ. – 1998. – №4. – С. 38-41.
62. Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия АГУ. – 1998. – № 1. – С. 35-38.
63. Параев Ю.И. Алгебраические методы в теории линейных систем управления. – Томск: Изд-во ТГУ, 1980.
64. Параев Ю.И., Перепелкин Е.А. Линейные матричные уравнения в задачах анализа и синтеза многосвязных динамических систем. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2000.
65. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №8. – С. 37-53.
66. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №11. – С. 56-75.
67. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961.
68. Пушков С.Г. Алгоритм вычисления приближенной реализации // Известия РАЕН. Серия МММИУ. – 2000. – Т. 4, №3. – С. 133-144.
69. Пушков С.Г. Комплекс программного обеспечения для решения задач точной и приближенной реализации // Материалы IV Юбилейной научно-практической конференции, посвященной 290-летию г. Бийска. – Барнаул: Изд-во АГТУ, 2000. – С.197-201.

70. Пушков С.Г. Конечномерные реализации импульсной характеристики, основанные на псевдообращении ганкелевой матрицы // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №3. – С. 5-12.
71. Пушков С.Г. Методы вычисления конечномерной реализации импульсной характеристики, основанные на псевдообращении ганкелевой матрицы // IV краевая конференция по математике: Материалы конференции. Барнаул: Изд-во АГУ, 2001. – С. 73-74.
72. Пушков С.Г. Модели точного и приближенного представления данных контроля линейных динамических систем // Дисс. на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Барнаул, 1998.
73. Пушков С.Г. Моделирование пространства состояний асимптотически устойчивых динамических систем // Известия АГУ. – 1999. – №1. – С. 40-43.
74. Пушков С.Г. О вычислении конечномерной реализации // Кибернетика и системный анализ. – 1991. – №6. – С. 107-112.
75. Пушков С.Г. Об алгоритме конечномерной реализации // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №10. – С.56-63.
76. Пушков С.Г. Об одном подходе к описанию наблюдаемого процесса линейной динамической системой // Ивестия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – №1. – С. 9-44.
77. Пушков С.Г. Представление динамических систем в пространстве состояний: точная и приближенная реализация: Монография. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2003.
78. Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю. О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, №1. – С. 75-85.
79. Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю. О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Перспективы систем информатики. Международное совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений: Сборник трудов

пятой международной конференции. – Новосибирск: Институт систем информатики. – 2003. – С. 60-67.

80. Смагина Е.М. Вопросы анализа многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. – Томск: Изд-во ТГУ, 1990.

81. Смагина Е.М., Дугарова И.В. Синтез модального регулятора для системы с неопределенными параметрами. – 1987. – Деп. В ВИНИТИ № 789-В87.

82. Смагина Е.М., Моисеев А.Н. Слежение за полиномиальным сигналом в интервальной динамической системе // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3, №1. – С. 67-74.

83. Смагина Е.М., Моисеев А.Н., Моисеева С.П. Методы вычисления коэффициентов интервального характеристического полинома интервальных матриц // Вычислительные технологии. –1997. – Т.2, № 1.– С. 52-61.

84. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985.

85. Тен И.Г. Синтез оптимального управления в условиях интервальной неопределенности в моделях // Интервальные вычисления. – 1992. – № 11. – С. 27-30.

86. Уланов Б.В. Управление динамическим объектами при неполной информации об их параметрах, состоянии и размерности // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 308, №4. – С. 803-806.

87. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 11. – С. 2086-2088.

88. Хлебалин Н.А. Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. – Саратов: Сарат. политехн. инст-т, 1981. – С. 107-123.

89. Хлебалин Н.А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта управления: Дисс. на соискание

ученой степени кандидата технических наук. – Саратов: Сарат. политехн. инст-т, 1984.

90. Хлебалин Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. – Саратов: Сарат. политехн. инст-т, 1988. – С. 83-88.

91. Хлебалин Н.А., Шокин Ю.А. Интервальный вариант метода модального управления // Доклады АН. – 1991. – Т.316, №4. – С. 846-850.

92. Ходько С.Т. Проектирование систем управления с нестабильными параметрами. – Л.: Машиностроение, 1987.

93. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988.

94. Шарый С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 67-114.

95. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – №3. – С. 51-61.

96. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: Дисс. на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Новосибирск, 2000.

97. Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные Технологии. – 1995. – Т. 4, №13. – С. 64-80.

98. Шарый С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных // Вычислительные Технологии. –1997. – Т. 2, №1. – С.84-102.

99. Шашихин В.Н. Задача робастного размещения полюсов в интервальных крупномасштабных системах // Автоматика и Телемеханика. – 2002. – №2. – С. 34-43.

100. Шашихин В.Н. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных систем // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2002. – №4. – С. 17-24.
101. Шашихин В.Н. Оптимизация интервальных систем // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №1. – С. 94-103.
102. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981.
103. Ackermann J., Bartlett A., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R. Robust control systems with uncertain physical parameters. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
104. Alefeld G., Mayer G. Interval analysis: theory and applications // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – №121. – P. 421-464.
105. Barmish B. New tools for robustness of linear systems. – New York: Macmillan, 1994.
106. Brockett R.W. Finite dimensional systems. – New York: Wiley, 1970.
107. De Schutter B. Minimal state-space realization in linear system theory: an overview // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – V. 121. – P. 331-354.
108. Eilenberg S. Automata, languages and machines, vol. A. – New York: Academic Press, 1974.
109. Eising R. Low order realizations and for 2-D transfer functions // Proc. IEEE. – 1979. – V. 67, №4. – P. 866-868.
110. Eising R. Realization and stabilization of 2-D systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1978. – V. AC-23, №5. – P. 793-800.
111. Eising R., Hautus M. Realization algorithms for systems over a principal ideal domain // Math. Systems Theory. – 1981. – V. 14, №4. – P. 353-366.
112. Fuhrmann P. Algebraic system theory: An analyst’s of view // J. Franklin Inst. – 1976. – V. 301. – P. 521-540.
113. Fuhrmann P.A. Algebraic methods in system theory // R.E.Kalman Festschrift. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P. 233-265.

114. Fuhrmann P.A. Duality in polinomial models with some applications to geometric control theory // IEEE Trans. Autom. Control. – 1981. – V. AC-26. – P. 284-295.

115. Fuhrmann P.A. Linear systems and operators in Hilbert space. – New York: McGrow-Hill, 1981.

116. Hansen E.R. Global optimization using interval analysis. – New York: Marcel Dekker, 1992.

117. Hansen E.R. Interval form of Newton's method // Computing. – 1978. – V. 4, №3. – P. 187-201.

118. Heinen J.A. Sufficient conditions for stability of interval matrices. // Int. J. Contr. – 1984. – V. 39, №6. – P. 1323-1328.

119. Ho B.L. An effective construction of realizations from input-output descriptions // PhD Thesis. – Stanford: Stanford University, 1966.

120. Ho B.L., Kalman R.E. Effective construction of linear state-variable models for input/output function // Proc. Third Allerton Conf., 1965. – P. 449-459; Regelungstechnik. – V. 14, Jahrg. Heft 12. – P. 545-548.

121. Kalman R.E., Bertram J.E. General synthesis procedure for computer control of single and multi-loop linear systems // Trans. AIEE. – 1959. – 77 II. – P. 602-609.

122. Kalman R.E. Lectures on controllability and observability // CIME Summer Course 1968. – Cremonese, Roma, 1969.

123. Kalman R.E. Mathematical description of linear dynamical systems // SIAM J. Contr. – 1963. – V. 1. – P. 152-192.

124. Kalman R.E. Realization theory of linear dynamical systems // Control Theory and Topics in Functional Analysis, Vol. II. – Vienna: International Atomic Energy Agency, 1976. – P. 235-236.

125. Kalman R.E., Rouchaleau Y. Realizations theory of linear systems over commutative ring // Automatica, Languages and Program. – Amsterdam e.a., 1974. – P. 61-65.

126. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space // Computing Supplement. – 1980. – V. 2. – P. 33-49.
127. Kearfott R. B. Rigorous global search: continuous problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
128. Kreinovich V., Lakeev A., Rohn J., Kahl P. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. – Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
129. Kreinovich V., Lakeev A.V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties // Reliable Computing. – 1997. – V. 3, №1. – P. 51-81.
130. Lakeyev A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduls // Reliable Computing. – 1996. – V. 2, №2. – P. 125-131.
131. Mayer G. Enclosing the solutions of systems of linear equations by interval iterative processes // Computing Supplement. – 1998. – V. 6. – P. 47-58.
132. Mayer G., Rohn J. On then applicability of then interval Gaussian algorithm // Reliable Computing. –1998. – V. 4, №3. – P. 205-222.
133. Moore R.E. Interval analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
134. Moore R.E. Interval methods for nonlinear systems // Fundamentals of numerical computation (computer-oriented numerical analysis). Computing Supplement. – Wienn: Springer Verlag, 1980. – P. 113-120.
135. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979.
136. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
137. Neumaier A. Linear interval equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – P. 109-120.
138. Polyak B.T., Tsypkin Y.Z. Robust absolute stability of continuous systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1993. – V. 3, №2. – P. 231-239.

139. Pushkov S.G., Kalinkina S. Yu. Boundary realizations method for interval linear dynamic systems // Reliable Computing. – 2005. – V. 11, №5. – P. 413-423.

140. Rissanen J. Recursive identification of linear systems // SIAM J. Contr. – 1971. – V. 9, №3. – P. 420-430.

141. Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica. – 1980. – V. 48. – P.767-769.

142. Rohn J. Systems of linear interval equations // Linear Algebra and its Applications. – 1989. – V. 126. – P.39-78.

143. Rosenbrock H.H. State space and multivariable theory. – London: Nelson and Sons Ltd, 1970.

144. Shary S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problem, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable Computing. – 1996. – V. 2, №1. – P. 3-33.

145. Shary S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – V. 39. – P. 53-85.

146. Shokin Yu. I. On interval problems, interval algorithms and their computational complexity // Scientific Computing and Validated Numerics – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 314-328.

147. Silverman L.M. Realization of linear dynamical systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 1971. – V. AC-16. – P. 554-567.

148. Sontag E.D. Linear systems over commutative rings: A survey. // Ricerche di Automatica. – 1976. – V. 7. – P. 1-34.

149. Sontag E.D. On linear systems and noncommutative rings // Math. System Theory. – 1976. – V. 9, №4. – P. 327-344.

150. Sontag E.D. Realization theory of discrete-time nonlinear systems, I // IEEE Trans. Circuits and Syst. – 1979. – V. CAS-26, №4. – P. 342-356.

151. Wang K., Michel A. On sufficient conditions for the stability of interval matrices // Syst. Control Lett. – 1993. – V. 20. – P. 345-351.

152. Willems J.C. From time series to linear system. I // Automatica. – 1986. – V. 22, №5. – P. 561-580.

153. Willems J.C. From time series to linear system. II // Automatica. – 1986. – V. 22, №6. – P. 675-694.

154. Willems J.C. From time series to linear system. III // Automatica. – 1986. – V. 23, №1. – P. 87-115.

155. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – V. 8. – P. 338-353.

156. Zeiger H.P. Ho's algorithm, commutative diagrams, and the uniqueness of minimal linear systems // Information and Control. – 1967. – V. 11, №4. – P. 71-79.

157. Zeiger H.P., McEwen A.J. Approximate linear realizations of given dimension via Ho's algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. – 1974. – V. 19, №2. – P. 153.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Некоторые сведения из интервальной арифметики

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$, такое что

$$A = [a_1, a_2] = \{t \mid a_1 \le t \le a_2,\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\},$$

называется *замкнутым вещественным интервалом*, или просто *интервалом* [2].

Два интервала $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$ называются равными, если они равны в теоретико-множественном смысле.

Интервальная матрица – это матрица, хоть один элемент которой является интервалом. Интервальная матрица, все элементы которой являются точечными интервалами (интервалами нулевой ширины) называется *точечной матрицей*. Алгебраические операции между интервальными матрицами, также как и между интервалами, понимаются в покомпонентном смысле.

Классическая интервальная арифметика

Классическая интервальная арифметика – это алгебраическая система $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$, носитель которой – множество всех вещественных интервалов $\mathbf{x} := [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \le x \le \overline{x}\}$, а бинарные операции – сложение, вычитание, умножение и деление - определены «по представителям», т.е. в соответствии со следующим фундаментальным принципом:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} := \{x * y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$$

для всех интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ таких, что выполнение точечной операции $x * y, * \in \{+, -, \cdot, /\}$, имеет смысл для любых $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$. Развернутое определение интервальных арифметических операций таково:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}], \tag{4.1}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}], \tag{4.2}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\left[\min\left\{\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}\right\},\max\left\{\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}\right\}\right], \tag{4.3}$$

$$\mathbf{x}/\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\left[1/\overline{y},1/\underline{y}\right] \quad \text{для } 0\notin\mathbf{y}. \tag{4.4}$$

При этом вещественные числа a отождествляются с интервалами нулевой ширины $[a,a]$, а через $(-\mathbf{a})$ обозначается интервал $(-1)\cdot\mathbf{a}$.

Алгебраические свойства классической интервальной арифметики плохи, так как:

– для интервалов ненулевой ширины из $\mathbb{IR}$ отсутствуют обратные операции относительно арифметических операций (4.1)-(4.4);

– отсутствует полноценная дистрибутивность умножения и деления относительно сложения и вычитания, имеет место лишь субдистрибутивность;

– имеют место плохие порядковые свойства $\mathbb{IR}$.

Полная интервальная арифметика

Полная интервальная арифметика получается присоединением неправильных интервалов $[\underline{x},\overline{x}]$, $\underline{x}>\overline{x}$ ко множеству $\mathbb{IR}=\left\{[\underline{x},\overline{x}]\mid \underline{x},\overline{x}\in\mathbb{R},\underline{x}\le\overline{x}\right\}$ правильных интервалов и вещественных чисел (вырожденных интервалов, т.е. интервалов нулевой ширины).

Полная интервальная арифметика (также ее называют интервальной арифметикой Каухера, по имени ее создателя), в отличие от классической интервальной арифметики является группой по сложению, решеткой относительно порядка по включению и минимаксной интервальной арифметикой.

Сложение и умножение на вещественные числа, вычитание и деление в $\mathbb{KR}$ производится также как и в $\mathbb{IR}$:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}:=\left[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}\right],$$

$$\mu\cdot\mathbf{x}:=\begin{cases}[\mu\underline{x},\mu\overline{x}], & \text{если } \mu\ge 0,\\ [\mu\overline{x},\mu\underline{x}], & \text{иначе,}\end{cases}$$

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}:=\mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{y}=\left[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}\right],$$

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} := \mathbf{x}\cdot\left[1/\overline{y}, 1/\underline{y}\right] \quad \text{для } 0 \notin \operatorname{pro}\mathbf{y}.$$

Каждый элемент $\mathbf{x}$ из $\mathbb{KR}$ имеет единственный обратный по сложению, обозначаемый через «$\operatorname{opp}\mathbf{x}$», а операция, обратная сложению называется внутреннее вычитание и обозначается $\ominus$:

$$\operatorname{opp}\mathbf{x} := \left[-\underline{x}, -\overline{x}\right],$$

$$\mathbf{x}\ominus\mathbf{y} := \mathbf{x} + \operatorname{opp}\mathbf{y} = \left[\underline{x}-\underline{y}, \overline{x}-\overline{y}\right].$$

Умножение в $\mathbb{KR}$ может быть описано следующей таблицей:

	$\mathbf{y}\in\mathcal{P}$	$\mathbf{y}\in\mathcal{Z}$	$\mathbf{y}\in-\mathcal{P}$	$\mathbf{y}\in\operatorname{dual}\mathcal{Z}$
$\mathbf{x}\in\mathcal{P}$	$\left[\underline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right]$	$\left[\overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right]$	$\left[\overline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}\right]$	$\left[\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}\right]$
$\mathbf{x}\in\mathcal{Z}$	$\left[\underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right]$	$\left[\min\left\{\underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}\right\}, \max\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}\right]$	$\left[\overline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\underline{y}\right]$	0
$\mathbf{x}\in-\mathcal{P}$	$\left[\underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}\right]$	$\left[\underline{x}\,\overline{y}, \underline{x}\,\underline{y}\right]$	$\left[\overline{x}\,\overline{y}, \underline{x}\,\underline{y}\right]$	$\left[\overline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}\right]$
$\mathbf{x}\in\operatorname{dual}\mathcal{Z}$	$\left[\underline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\underline{y}\right]$	0	$\left[\overline{x}\,\overline{y}, \underline{x}\,\overline{y}\right]$	$\left[\max\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}, \min\left\{\underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}\right\}\right]$

где

$\mathcal{P} := \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{KR} \mid \left(\underline{x}\ge 0\right) \& \left(\overline{x}\ge 0\right)\right\}$ – неотрицательные интервалы,

$\mathcal{Z} := \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{KR} \mid \underline{x}\le 0\le\overline{x}\right\}$ – нульсодержащие интервалы,

-$\mathcal{P} := \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{KR} \mid -\mathbf{x}\in\mathcal{P}\right\}$ – неположительные интервалы,

$\operatorname{dual}\mathcal{Z} := \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{KR} \mid \operatorname{dual}\mathbf{x}\in\mathcal{Z}\right\}$ – интервалы, содержащиеся в нуле.

Операция, обратная умножению на $\mathbb{KR}$ – внутреннее деление $\oslash$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{x}\oslash\mathbf{y} := \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}^{-1} = \mathbf{x}\cdot\left[1/\underline{y}, 1/\overline{y}\right], \quad 0\notin\operatorname{pro}\mathbf{y}.$$

Более подробную информацию о различных интервальных арифметиках читатель может найти, например, в [2, 38, 96, 102].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Программное обеспечение для решения задач реализации точечных и интервальных динамических систем

В настоящем приложении представлено описание программного продукта RealCalc для решения задач точной и приближенной реализации импульсной последовательности точечных или интервальных матриц. Данный программный продукт является развитием комплекса программных продуктов для решения задач точной и приближенной реализации, представленного в работах [41, 69]. Программный продукт работает под управлением операционной системы MS WINDOWS и предлагает пользователю удобный MDI-интерфейс.

Данный программный продукт позволяет:

1. Вычислять конечномерные реализации точно заданного отображения вход-выход. С помощью программы можно определить размерность реализации и саму реализацию в том случае, когда для заданного отображения вход-выход существует конечномерная реализация. В противном случае вычисляется частичная реализация. Ее можно использовать также для поиска рекуррентной закономерности в заданной последовательности матриц. Если такая закономерность существует, то программа позволяет найти ее и продлить исходную последовательность матриц.

2. Вычислять порядок и параметры многомерной линейной динамической системы по неточным данным. Для оценивания порядка линейной динамической системы используется метод, основанный на вычислении финальной ошибки прогнозирования. Затем параметры системы уточняются путем минимизации функции несогласованности квадратичного вида с помощью метода покоординатного спуска или метода ψ-преобразования в окрестности грубого начального приближения параметров системы.

3. Вычислять конечномерные реализации отображения вход-выход, заданного последовательностью интервальных матриц. В случае, когда для

заданного отображения вход-выход существует конечномерная интервальная реализация, RealCalc позволяет определить размерность реализации, вычислить матрицы реализации и продлить исходную последовательность интервальных матриц.

4. Формировать последовательность матриц отображения вход-выход (импульсную характеристику) из экспериментальных данных для конечного времени затухания переходных процессов.

Вычисление алгебраической реализации последовательности точечных матриц

Исходными данными является последовательность матриц, соответствующая импульсной характеристике отображения вход-выход. Результатом работы программы являются вычисленные матрицы (F,G,H) реализации.

Методы решения задачи алгебраической реализации последовательности точечных матриц основаны на факторизации ганкелевой матрицы отображения вход-выход. RealCalc организует вычисление матриц реализации согласно алгоритму Б.Л. Хо, описанному нами в параграфе 1.2.1 главы 1. В работе [74] содержится численная реализация алгоритма Б.Л. Хо и описание одной из первых версий программной реализации.

Вычисление приближенной реализации последовательности точечных матриц

Исходными данными является последовательность матриц, соответствующая импульсной характеристике отображения вход-выход. Результатом работы программы являются вычисленные матрицы (F,G,H) реализации.

Задачу приближенной реализации рассматривается как обобщение задачи точной реализации на случай систем с “шумом”. В этом случае задачу вычисления приближенной реализации можно сформулировать так:

для заданной последовательности матриц размера $p \times m$

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_N\} \tag{4.5}$$

найти размерность n *и построить тройку матриц* (F, G, H) *таких, чтобы функция несогласованности между наблюдаемой последовательностью матриц* (4.5) *и системой* $\Sigma = (F, G, H)$ *принимала минимальное значение на множестве всех троек* (F, G, H), *где* F *– матрица размера* $n \times n$, G *–- матрица размера* $n \times m$, H *– матрица размера* $p \times n$.

На начальном этапе производится оценивание порядка линейной динамической системы. Для этого используется метод, основанный на вычислении финальной ошибки прогнозирования. Затем параметры системы уточняются путем минимизации функции несогласованности квадратичного вида с помощью метода покоординатного спуска или метода ψ-преобразования в окрестности грубого начального приближения параметров системы. На заключительном этапе строятся матрицы (F, G, H) линейной динамической системы.

Вычисление алгебраической реализации последовательности интервальных матриц

Исходными данными является последовательность интервальных матриц, соответствующая импульсной характеристике отображения вход-выход. Результатом работы программы являются вычисленные матрицы $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ реализации.

Вычисление алгебраической реализации последовательности неотрицательных или неположительных интервальных матриц производится по методу граничных реализаций (раздел 2.3). Для последовательности интервальных матриц смешанного типа используются методы, основанные на декомпозиции интервальной системы в параллельное соединение (раздел 3.1 и 3.3).

Формирование импульсной характеристики из экспериментальных данных для конечного времени затухания переходных процессов

Исходными данными являются последовательность N экспериментов – пар $(u(i), y(i))$, $i = 1,2,\ldots N$, $N > \tau$, где τ – время затухания переходных процессов. Результатом – вычисленные матрицы последовательности $\{A_1, A_2, \ldots, A_\tau\}$.

Для формирования последовательности матриц отображения вход-выход (импульсной характеристики) из экспериментальных данных для конечного времени затухания переходных процессов используется алгоритм, предложенный Пушковым С.Г. в работе [72]. $A(j)$, $j = 0,1,\ldots,\tau$ определяются из решения задачи минимизации квадратичного функционала

$$\Phi = \sum_{i=\tau+1}^{N} \left\| y(i) - \sum_{j=0}^{\tau} A(j) u(i-j) \right\|^2 \to \min .$$

Эта задача сводится к решению системы τ матричных уравнений

$$\sum_{j=0}^{\tau} A(j) S_{jt} = R_t, \quad t = 0,1,\ldots,\tau,$$

где

$$S_{jt} = \sum_{i=\tau+1}^{N} u(i-j) u'(i-t),$$

$$R_t = \sum_{i=\tau+1}^{N} y(i) u'(i-t),$$

$$j,t = 0,1,\ldots,\tau, \quad S \in \mathbb{R}^{m\times m}, R \in \mathbb{R}^{p\times m}.$$

Представленный программный продукт выполнен в среде Borland C++ Builder 5.0. Корректность работы программы проверялась на многочисленных эталонных примерах. Программный продукт может быть использован при разработке моделей контроля и управления процессами, представленными входными и выходными сигналами.