

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КОСТОУСОВА Елена Кирилловна

**ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ
В ЗАДАЧАХ ГАРАНТИРОВАННОГО
УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

01.01.07 — вычислительная математика

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:
академик А.Б.Куржанский

Екатеринбург

2005

Оглавление

Обозначения и сокращения	4
Введение	9
I "Полиэдральное исчисление"	27
1 Мотивация: постановка некоторых задач управления и оценивания и полиэдральные аппроксимации трубок траекторий для многошаговых систем	28
2 Основные понятия: параллелепипеды, параллелотопы и полосы; операции с множествами. Полиэдральные оценки для выпуклых множеств	34
3 Аппроксимации геометрической суммы параллелепипедов	49
4 Геометрическая разность параллелепипедов. Оценки для $(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) - \mathcal{P}^{(3)}$	64
5 Аппроксимации пересечения параллелепипеда и полосы .	71
6 Оценки для $\text{co}(\mathcal{P}^{(1)} \cup \mathcal{P}^{(2)})$. Оценки множеств в \mathbb{R}^{n+1} с помощью политопов Π	81
II Полиэдральные аппроксимации множеств достижимости при геометрических ограничениях на управление	93
7 Многошаговые системы	93
8 Системы с непрерывным временем	103
9 Численные алгоритмы и программная реализация. Численное моделирование	119

III	Полиэдральные оценки множеств достижимости систем с фазовыми ограничениями и информационных областей	126
10	Многошаговые системы	126
11	Системы с непрерывным временем	132
12	Численное моделирование	134
IV	Полиэдральные оценки в задаче целевого синтеза стратегий управления без неопределенности и в условиях неопределенности	139
13	Постановка задачи синтеза	140
14	Внешние оценки трубки разрешимости	144
15	Внутренние оценки трубки разрешимости. Построение стратегий управления	148
16	Численное моделирование	156
V	Задача гарантированного оценивания состояния параболической системы при "геометрических" ограничениях	161
17	Постановка задачи. Конечномерные аппроксимирующие задачи	161
18	Сходимость при аппроксимации множеств достижимости и информационных областей	166
19	Полиэдральные оценки. Результаты численного моделирования	172
VI	Полиэдральные оценки множеств достижимости многошаговых систем при интегральных ограничениях на управление	177
20	Постановка задачи. Точное описание множеств достижимости $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ в исходном и "расширенном" пространстве	177
21	Внешние и внутренние оценки для $\mathcal{X}[k]$	188
22	Внешние оценки для $\mathcal{Z}[k]$ и соответствующие оценки для $\mathcal{X}[k]$	194

Заключение	199
Приложения	201
А Некоторые вспомогательные сведения и утверждения	201
A1 Вспомогательные утверждения	201
A2 Некоторые свойства обобщенного решения уравнения теп- лопроводности и аппроксимирующих систем	206
В Программная реализация алгоритмов в пакете программ BOXES для системы MATLAB 5	208
С Рисунки	213
Литература	238

Обозначения и сокращения

\triangleq — знак равенства по определению;

\square — знак окончания доказательства теоремы, леммы и т.п.;

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство;

\top — знак транспонирования;

$(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$;

$\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$;

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — другая норма вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$;

$e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — i -й единичный орт в \mathbb{R}^n (единица стоит на i -м месте);

e — вектор $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$, а также число e ;

$\text{Nrv } x = \|x\|^{-1}x$ — результат нормирования вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$;

$\text{rank } F$ — ранг системы векторов $F = \{f^\mu\}_{\mu=1}^M$, $f^\mu \in \mathbb{R}^n$;

$\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейное пространство действительных $n \times m$ -матриц;

$A = \{a_i^j\} = \{a^1 \dots a^m\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица с элементами a_i^j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов);

$\det A$ — определитель матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ — след матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

δ_i^j — символы Кронекера: $\delta_i^j = 1$, если $i = j$, и $\delta_i^j = 0$, если $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n$);

$I = \{\delta_i^j\}$, I^n — единичная матрица в $\mathbb{R}^{n \times n}$;

0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности $k \times l$;

$\mathcal{M}_0^{n \times n} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ — множество всех неособых матриц из $\mathbb{R}^{n \times n}$;

$$\mathcal{M}_{00}^{n \times n} = \{A \in \mathcal{M}_0^{n \times n} \mid \det(I - A) \neq 0\};$$

$\mathcal{M}_*^{n \times n} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0, \|a^i\| = 1, i = 1, \dots, n\}$ — множество всех неособых $n \times n$ -матриц со столбцами единичной длины;

$A \leq B, A < B$ — неравенства такого типа для $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ понимаются покомпонентно;

$\text{diag } \pi, \text{diag } \{\pi_i\}$ — диагональная матрица, элементы диагонали которой совпадают с компонентами π_i вектора $\pi \in \mathbb{R}^n$;

A^\vee — присоединенная матрица к A [101], так что $A^{-1} = A^\vee / \det A$;

$\text{Abs } A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\}$:
 $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$;

$\text{Ab } A$ — матрица, полученная из $A = \{a_i^j\}$ путем замены всех элементов кроме диагональных их абсолютными величинами: $(\text{Ab } A)_i^i = a_i^i$ при $i = 1, \dots, n$, и $(\text{Ab } A)_i^j = |a_i^j|$ при $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$;

$\text{Ort } A$ — матрица, которая составлена из ненулевых векторов, получающихся в процессе ортогонализации (с нормированием) Граммах-Шмидта [101, с. 70] столбцов $a^i, i = 1, \dots, m$, матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, и $\text{Ort } A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ для $A = 0$;

$\{p^{\perp i}\}_{i=1}^n$ — система векторов, биортогональных к $\{p^i\}_{i=1}^n$, то есть $(p^{\perp i}, p^j) = 0, j = 1, \dots, n, j \neq i; (p^{\perp i}, p^i) > 0; \|p^{\perp i}\| = 1 (i = 1, \dots, n)$;

P^\perp — матрица: $P^\perp = \{p^{\perp 1} \dots p^{\perp n}\}$ для $P = \{p^1 \dots p^n\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$;

$\text{conv } \mathbb{R}^n$ — множество всех выпуклых компактных подмножеств \mathbb{R}^n ;

$\rho(l|\mathcal{X}) = \sup\{(x, l) \mid x \in \mathcal{X}\}, l \in \mathbb{R}^n$, — опорная функция множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ по направлению l ;

$\text{int } \mathcal{X}$ — внутренность множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ [129];

$\text{cl } \mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}$ — замыкание множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$;

$\partial \mathcal{X}$ — множество граничных точек $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$;

$\text{co } \mathcal{X}$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ [129];

$\text{dim } \mathcal{X}$ — размерность выпуклого множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ [129];

$\text{Lin } \mathcal{X}$ — несущее подпространство множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ [129];

$\text{Lin } \{v^i\}_{i=1}^m$ — линейное подпространство, натянутое на векторы v^i ;

\mathcal{L}^\perp — ортогональное дополнение линейного подпространства \mathcal{L} ;

$\mathcal{B}(c, r)$ — шар с центром c и радиусом r в \mathbb{R}^n и в линейном нормированном пространстве;

$h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \min\{\gamma \geq 0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + \gamma \mathcal{B}(0, 1)\}$ — хаусдорфово полурасстояние между множествами \mathcal{X}, \mathcal{Y} в \mathbb{R}^n и в линейном нормированном пространстве;

$h(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max\{h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), h_+(\mathcal{Y}, \mathcal{X})\} = \max\{|\rho(l|\mathcal{X}) - \rho(l|\mathcal{Y})| \mid \|l\| \leq 1\}$ — хаусдорфово расстояние [225, с.48,53];

$o(\sigma)$ — величина или матрица высшего порядка, чем бесконечно малая величина σ : $\sigma^{-1}o(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$;

$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + o(\sigma)$ для $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ означает, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + o_1(\sigma)\mathcal{B}(0, 1)$, $\sigma^{-1}o_1(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$;

$\mathcal{X} = \mathcal{Y} + o(\sigma)$ означает, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + o(\sigma)$ и $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} + o(\sigma)$;

$\{x \in \mathcal{X} \mid R\}$ — множество элементов $x \in \mathcal{X}$, обладающих свойством R ;

$\cup\{\mathcal{X}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ($\cap\{\mathcal{X}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$) — объединение (пересечение) множеств \mathcal{X}_λ по всем $\lambda \in \Lambda$;

$+$, $\dot{-}$ — знаки геометрической суммы (суммы Минковского) и геометрической разности множеств (с. 36);

$\odot, \oplus, \otimes, \uplus$ — знаки операций над множествами в \mathbb{R}^{n+1} (с. 83);

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}, \gamma^{(+)})$ — параллелепипед в \mathbb{R}^n (с. 30, 35);

$\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ — параллелотоп в \mathbb{R}^n (с. 32);

$\Sigma = \Sigma(c, s, \sigma)$ — гиперполоса в \mathbb{R}^n (с. 30);

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m)$ — полоса в \mathbb{R}^n (с. 30);

$\text{vol } \mathcal{P}$ — функционал объема (с. 37);

$\text{vol}_l \mathcal{P}$ — объем l -параллелепипеда (с. 37);

$\mathcal{P}_V^+(\mathcal{Q})$ — внешний параллелепипед для $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ (с. 39);

$\mathcal{P}_{v, V, \nu}^-(\mathcal{Q})$ — внутренний параллелепипед для $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ (с. 42);

$\mathcal{P}_{v, V}^-(\mathcal{Q})$ — внутренний параллелепипед для $\mathcal{Q} = \cap_{j=1}^{\Gamma} \Sigma^j$ (с. 45);

$\mathcal{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^-(\mathcal{Q})$ — внутренний параллелотоп для множеств $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$, где $\mathcal{P}^{(k)}$ — параллелотопы (с. 57, 69);

$P_{\Gamma}^{-}(\mathcal{P})$ — внутренний параллелотоп для \mathcal{P} (с. 58);

\mathcal{V}^0 — множество матриц, обладающее свойством, указанным на с. 97;

\mathcal{V}^i , $i = 1, 2, 3$, — множества матриц ориентации, вводимые при аппроксимации суммы параллелепедов (с. 51);

\mathcal{V}^i , $i = 4, 5, 6$, — множества матриц ориентации, вводимые при построении внешних оценок для $\mathcal{Q} = \bigcap_{j=1}^{\Gamma} \Sigma^j$ (с. 47, 47);

$\mathcal{G}^{r \times n}$, \mathcal{G} — множества матриц, вводимые для построения точных внутренних аппроксимаций суммы параллелотопов (с. 57, 113);

$\Pi = \Pi(\{\mathcal{P}^b, \mu^b\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\})$ — политоп Π в \mathbb{R}^{n+1} (с. 85);

$\mathcal{Z}_V^{+}(\mathcal{Z})$ — внешняя оценка для множества $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (с. 86);

$\Pi_{g^{(-)}, g^{(+)}}^{+}(\mathcal{Z})$ — внешняя оценка в виде политопа Π для множества $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ специального вида (с. 87);

$M(W)$ — мощность (число элементов) конечного множества W ;

$C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ — число различных сочетаний из k элементов по r ;

$X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$ — теоретико-множественная разность;

$\text{sign } z$ — функция знака числа: равна -1 , 0 , 1 соответственно при $z < 0$, $z = 0$, $z > 0$;

$[a]$ — целая часть числа a ;

Argmin , Argmax — множество всех решений экстремальной задачи;

$\varphi(\cdot)$ — функция φ (в отличие от значения $\varphi(t)$ данной функции);

$\partial f(x_0)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в точке x_0 [129];

D — ограниченная область в \mathbb{R}^r ;

$Q_{\delta\theta} = \{(x, t) \mid x \in D, t \in (\delta, \theta)\}$ — цилиндр в \mathbb{R}^{r+1} ;

$\langle u, v \rangle_V$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве V ;

$\|u\|_V$ — норма элемента u в гильбертовом пространстве V ;

$L_2(D)$ — гильбертово пространство (классов) функций, измеримых (по Лебегу) на D , со скалярным произведением $\langle u, v \rangle_{L_2(D)} = \int_D u(x) \cdot v(x) dx$. В гл. V обычно для краткости используются обозначения $(u, v) = (u(\cdot), v(\cdot)) = \langle u, v \rangle_{L_2(D)}$, $\|u\| = \|u\|_{L_2(D)}$;

$u_{x_i}, u_{x_i x_j}$ — производные (классические и обобщенные) $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$;

$W_2^1(D)$ — гильбертово пространство Соболева [100], состоит из элементов $u \in L_2(D)$, имеющих квадратично суммируемые по D обобщенные производные первого порядка; скалярное произведение в нем определяется равенством $\langle u, v \rangle_{W_2^1(D)} = \int_D (uv + \sum_{i=1}^r u_{x_i} v_{x_i}) dx$, $u, v \in W_2^1(D)$;

$W_{2,0}^1(Q_{0\theta})$ — подпространство пространства $W_2^1(Q_{0\theta})$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, равные нулю вблизи $S_{0\theta} = \{(x, t) | x \in \partial D, t \in (0, \theta)\}$ — боковой поверхности $Q_{0\theta}$ [100];

$W_2^{1,0}(Q_{0\theta})$ — гильбертово пространство, которое состоит из элементов $u(x, t) \in L_2(Q_{0\theta})$, имеющих квадратично суммируемые по $Q_{0\theta}$ обобщенные производные u_{x_i} ($i=1, \dots, r$); скалярное произведение в нем определяется равенством [100] $\langle u, v \rangle_{W_2^{1,0}(Q_{0\theta})} = \int_{Q_{0\theta}} (uv + \sum_{i=1}^r u_{x_i} v_{x_i}) dx dt$;

$W_2^{1,0}(Q_{0\theta})$ — подпространство $W_2^{1,0}(Q_{0\theta})$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, равные нулю вблизи $S_{0\theta}$ [100];

$L_\infty^r(a, b)$ — пространство существенно ограниченных r -мерных функций $w(t)$, $t \in [a, b]$, с нормой $\|w(\cdot)\|_{L_\infty^r(a,b)} = \text{vrai max} \{(w(t)^\top w(t))^{1/2}, t \in [a, b]\}$ [88];

V^m — пространства сеточных функций (см. §17);

$\mathcal{L}^m, \mathcal{M}_{\delta\theta}^n$ — операторы дискретизации (§17);

$\mathcal{R}^m, \mathcal{S}_{\delta\theta}^n$ — операторы восполнения (§17);

Const, C — обозначение для константы. В гл. V так обозначаются константы, зависящие только от известных параметров распределенной системы (например, от коэффициентов в уравнении, промежутка и оператора наблюдения, параметров ограничений) и не зависящие от шагов дискретизации, а также от начальных условий и правых частей;

\forall, \exists — логические кванторы всеобщности ("для всех") и существования ("существует");

$\Rightarrow, \Leftrightarrow$ — логические операции следования и эквивалентности;

ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения;

МД — множество(а) достижимости;

ФО — фазовые ограничения.

Введение

Работа посвящена разработке методов построения полиэдральных аппроксимаций для трубок траекторий динамических систем и применению этих методов для решения задач гарантированного управления и оценивания.

Проблему построения трубок траекторий (многозначных функций, описывающих, например, динамику множеств достижимости, разрешимости, информационных областей) можно назвать одной из фундаментальных задач математической теории управления. К необходимости изучения трубок траекторий (в частности, трубок выживающих траекторий, трубок разрешимости) приводят многие задачи теории управления и оценивания, теории дифференциальных игр, связанные с исследованием сложных реальных систем различной природы (механических, технологических, экономических, экологических, био-медицинских и др.), в которых присутствует недоопределенность в их описании. К недоопределенности могут приводить, например, неполнота информации о начальном состоянии системы, неконтролируемые возмущающие силы, помехи при измерении данных, неточности в задании параметров модели (коэффициентов уравнений) и т.д. При гарантированном подходе, принятом в настоящей работе, предполагается, что описание недоопределенностей имеет вид включений, ограничивающих возможные значения неизвестных величин принадлежностью заданным множествам. При этом решение многих задач управления и оценивания может быть получено, если построено некоторое многозначное отображение (трубка траекторий). Гарантированный подход был иницииро-

ван исследованиями Н.Н.Красовского [76–78] и далее систематически развит А.Б.Куржанским [86–93, 196, 201], Ю.С.Осиповым [81, 117, 218], А.И.Субботиным [80, 140], их сотрудниками и учениками. Принципиальные результаты в области гарантированного управления, оценивания и идентификации, математического программирования в условиях неполной информации для различных классов систем были получены авторами работ [2–5, 7, 17, 24, 26–29, 33–35, 38, 51, 58, 75, 82, 83, 96, 97, 106, 110, 115, 120, 130, 135, 136, 142, 145, 148, 157, 164, 167–169, 176, 180, 197, 198, 208, 210, 212, 224, 226, 235] и др.

Для нахождения упомянутых многозначных отображений выведены различные динамические уравнения, форма которых соответствует выбранной форме описания множеств $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. При этом использовались следующие формы описания: поточечная (закрывающаяся в прямом перечислении точек, которые содержит \mathcal{X}); с помощью неравенства типа $\mathcal{X} = \{x | B(x) \leq 0\}$, задающего множество уровня некоторой функции (например, подходящей функции цены, функции Минковского); с помощью опорных функций (опорных отображений в невыпуклом случае); с помощью параметрического описания границы. Для систем с геометрическими ограничениями первой форме соответствует эволюционное уравнение, представляющее собой для многошаговых систем рекуррентные соотношения для пересчета множеств от предыдущего момента к следующему, а для дифференциальных систем — так называемое уравнение интегральной воронки. Последнее есть предельное соотношение, связывающее (в терминах расстояния или "полурасстояния" Хаусдорфа) близкие по времени значения множеств, и является аналогом обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Решением уравнения интегральной воронки служит многозначный интеграл, сводящийся в разных задачах к интегралу Аумана [165], альтернированному интегралу Понтрягина [124, 125], конволюционному интегралу [98] или обобщенному интегралу из [95]. При втором описании множества уравнение выпи-

сывается в пространстве состояний в терминах функции $B(x)$. В частности, функция цены в дифференциальных системах, имеющая смысл оптимального расстояния до цели, описывается уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса с частными производными. Для опорного отображения получаются уравнения в частных производных в сопряженном пространстве. Известно несколько типов уравнений для параметрического описания границы. Выводу и изучению упомянутых уравнений посвящено большое число теоретических исследований, из которых отметим работы [14, 19, 32, 38, 55, 79, 95, 98, 108, 111, 118, 123, 139, 142, 144, 173, 220].

Однако точное решение указанных уравнений может оказаться достаточно затруднительным. Поэтому возникает необходимость в разработке численных методов построения трубок траекторий, их аппроксимации. В частности, значение разработки методов решения эволюционных уравнений для теории управления по своей важности можно сравнить, например, с разработкой численных алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений, систем ОДУ или уравнений с частными производными.

Существует много подходов к созданию упомянутых численных методов. Рассматривая их с точки зрения геометрического представления аппроксимирующих множеств, условно можно выделить следующие большие группы методов. В первую отнесем методы, которые основываются на аппроксимации множеств многогранниками (часто внешними и/или внутренними, а иногда и не обладающими указанными свойствами) с большим числом вершин и граней [15, 16, 18, 20, 31, 44, 45, 47, 50, 56, 85, 103, 109, 116, 141, 143, 146, 155, 158, 160, 162, 170, 178, 212, 231]. Для систем высокой размерности эти методы могут потребовать весьма большого объема вычислений. Для невыпуклого случая разрабатываются методы, основанные на аппроксимации множеств невыпуклыми многогранниками [217], на представлении множеств в виде конечного набора своих выпуклых сечений и аппроксимации последних выпуклыми многогранниками [83, 84].

В другую группу можно отнести методы, основанные на аппроксимации множеств объединением точек ("пикселов") [37, 107, 119, 223, 227]. Они применимы и для невыпуклого случая, но тоже могут потребовать большого объема вычислений и памяти. Существует и явление "расширяющейся сетки" (чем больше множество, тем больше точек необходимо для его аппроксимации).

Еще один подход состоит в аппроксимации множеств классом более простых областей некоторой фиксированной формы (например, эллипсоидами, параллелепипедами). В настоящее время достаточно хорошо развит метод эллипсоидов, позволяющий строить внешние и внутренние оценки выпуклых множеств, в том числе оптимальные и локально-оптимальные в некотором смысле. Его разработке посвящены работы [6, 9, 21, 43, 52–54, 112–114, 121, 133, 153, 155, 156, 161, 169, 175, 177, 184, 206, 215, 216, 219, 221, 224, 226, 228, 229, 232, 234, 235] и др.

А.Б.Куржанский внес принципиальные изменения в схему эллипсоидальных аппроксимаций. Им предложено аппроксимировать искомую трубку целыми семействами внешних и внутренних трубок, образованных областями фиксированной формы (эллипсоидами, параллелепипедами). Семейства вводятся таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить, по возможности, точные представления решений (путем пересечения внешних или объединения внутренних оценок), а с другой стороны, чтобы каждая конкретная трубка находилась с помощью эволюционных уравнений независимо от остальных (что открывает возможности для параллельных вычислений). Первоначально этот подход был развит для эллипсоидального оценивания [199–203]. В настоящей диссертации делается попытка его развития (с использованием другой техники) для полиэдрального (параллелепипедо- и параллелотопозначного) оценивания.

Вопросы оценивания искомых множеств с помощью параллелепипедов рассматривались также в работах [22, 42, 88, 91, 166, 171, 172, 174,

185, 209, 211, 212, 230–233] и некоторых других. Здесь значительные усилия уделены нахождению внешних и внутренних оценок, являющихся оптимальными (в статической постановке) или "последовательно" - оптимальными (в динамической постановке) в каком-либо смысле, например, в смысле объема или радиуса [22, 42, 166, 171, 172, 185, 212, 232, 233], а также построению внешних оценок в виде ортогональных параллелепипедов, преимущественно с гранями, параллельными координатным плоскостям ("боксов") [88, 91, 166, 174, 209, 211, 212, 230, 231]. При этом решение задачи часто предлагается не в аналитическом виде, а в виде решения одной или $2n$ статических оптимизационных задач. В некоторых случаях (например, для нахождения внешней оптимальной по объему оценки пересечения невырожденного параллелепипеда с гиперполосой и суммы невырожденного параллелепипеда с отрезком) решение было найдено в явном виде [172, 233]. Строились также [194, 195] внешние оценки в виде зонотопов [225] — политопов, представляющих собой сумму q ($q \geq n$) отрезков.

Покоординатные оценки ("боксы", в русскоязычной литературе называемые также брусами или интервальными векторами) получают также с помощью интервальных операций, используемых в интервальном анализе. Интервальный анализ [1, 49] — это самостоятельно развивающаяся область математики, имеющая в настоящее время очень обширную библиографию, а первой монографией на эту тему была книга R.E. Moore [213], вышедшая в 1966 г. Ряд авторов использовал методы интервального анализа для решения задач управления, оценивания и идентификации [36, 41, 46, 48, 57, 152, 159, 183, 204, 207].

Следует однако отметить, что в динамических задачах оценивания трубок траекторий оценки, построенные с помощью интервальных вычислений, могут оказаться слишком грубыми в силу известного в интервальном анализе "эффекта обертывания" (wrapping effect) (см., например, [179], [49, с.177], [214]), и такие оценки наиболее полезны для

систем, обладающих сильными свойствами устойчивости [57]. Другое применение интервального анализа состоит в построении для искомым множеств внешних и внутренних оценок в виде подпокрытий ("замощений", дословно, "subbravings") — объединений неперекрывающихся "боксов". При этом для достижения заданной точности аппроксимации для систем большой размерности может потребоваться очень много вычислений и памяти. Поэтому, как признают сами авторы [183], такие методы подходят больше для систем невысокой размерности.

Обращаясь к теме диссертации, подчеркнем, что рассматриваемые в ней трубки траекторий обладают полугрупповым свойством, входящим в определение обобщенной динамической системы в смысле Е.А.Барбашина и Е.Roxin [8, 222]. Поэтому естественно требовать выполнения аналогичного свойства для оценок. Таким образом, постановка задачи исключает использование стандартных процедур оптимизации ввиду требований динамики и многозначности. Упомянутая постановка является решающей при рассмотрении задач оценивания и синтеза управлений в условиях неопределенности [88, 201].

Перейдем к изложению содержания работы. Она состоит из введения, шести глав, разбитых на 22 раздела (параграфа), заключения, трех приложений и списка литературы.

Первая глава посвящена "полиэдральному исчислению". Этим термином мы называем аппарат для работы с множествами в рамках выбранного класса областей — параллелепипедов (и иногда более широкого класса — параллелотопов). Упомянутый аппарат разрабатывается с целью последующего использования для построения полиэдральных аппроксимаций трубок траекторий в задачах гарантированного управления и оценивания и в этом смысле в некоторой степени подобен развитому в [201] эллипсоидальному исчислению (чем и объясняется выбранный термин). Разрабатываемое "полиэдральное исчисление" может рассматриваться и как некоторое развитие интервального анализа, при кото-

ром базовыми множествами служат не интервальные векторы, а произвольные параллелепипеды. Представляется, что оно может оказаться полезным для решения более широкого круга задач, чем те, которые рассмотрены в последующих главах (в частности, в областях, относящихся к оптимизации, аппроксимации, идентификации и др.).

Для пояснения мотивации вводимых конструкций в главу I включен § 1, где на примере многошаговых систем даны постановки некоторых задач управления и оценивания, решения которых связаны с построением трубок траекторий. Здесь приведены определения некоторых многозначных функций $\mathcal{X}[\cdot]$. Так, трубка траекторий или трубка достижимости описывает эволюцию во времени множеств достижимости (МД) $\mathcal{X}[k]$ — множеств тех состояний системы, которые могут быть достигнуты в момент $k \in \{1, \dots, N\}$ из заданного начального множества с помощью входных воздействий (управлений или возмущений), подчиненных заданным ограничениям. Если на траектории системы наложено дополнительное ограничение на координаты — фазовое ограничение (ФО), то трубка достижимости известна также как трубка выживающих траекторий (траекторий, не нарушающих ФО). Для задач гарантированного оценивания состояния такое многозначное отображение возникает естественным образом. Оно описывает динамику информационных областей — множеств состояний, совместимых с данными измерений и априорными ограничениями [88].

Далее предполагается, что множество начальных состояний и множества входных воздействий в каждый момент времени (геометрические "жесткие" ограничения на управления/возмущения) являются параллелепипедами, а ФО в каждый момент времени представляют собой параллелепипеды или полосы. Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ в \mathbb{R}^n с центром $p \in \mathbb{R}^n$, неособой матрицей ориентации $P = \{p^1 \dots p^n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и величинами "полуосей" $\pi_i \geq 0$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x | x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i=1, \dots, n\}$. Полосой \mathcal{S} называем пересечение m

($m \leq n$) гиперполос с линейно независимыми нормальными (при $m = n$ полоса превращается в параллелепипед). Ставится задача о нахождении внешних $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и внутренних $\mathcal{P}^-[\cdot]$ параллелепипедозначных оценок для $\mathcal{X}[\cdot]$: $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$, обладающих обобщенным полугрупповым [201] и эволюционным [155] свойствами (являющимися аналогами полугруппового свойства для МД), и, более того, о введении некоторых семейств таких трубок, обеспечивающих точные представления

$$\mathcal{X}[k] = \bigcap \mathcal{P}^+[k], \quad (0.1)$$

$$\mathcal{X}[k] = \bigcup \mathcal{P}^-[k] \quad (0.2)$$

посредством пересечения внешних и объединения внутренних оценок. Иногда внутренние оценки удобнее искать в виде параллелотопов — зонотопов с числом слагаемых отрезков $q = n$. Для формализации естественного желания строить оценки так, чтобы они были "как можно ближе" к искомым множествам, вводятся понятия тугих [202, 203], касающихся и неулучшаемых по включению [201] оценок. В частности, внешнюю (внутреннюю) оценку \mathcal{P} множества $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ называем тугой (в направлении l), если значения опорной функции множеств \mathcal{P} и \mathcal{Q} на векторах $\pm l$ совпадают. Внешнюю оценку называем касающейся, если она является тугой в направлении n векторов, биортогональных к $\{p^i\}_{i=1}^n$. Если число элементов в семействах оценок оказывается довольно большим или даже бесконечным, то, ограничиваясь каким-либо конечным подмножеством элементов, можно получить внешние и внутренние аппроксимации искомого множества. Задавшись каким-либо критерием оптимальности, можно искать оптимальную оценку искомого множества.

Как следует из известных рекуррентных формул [51], построение оценок для введенных трубок основывается на выполнении элементарных операций над параллелепипедами: аффинного преобразования, геометрической суммы, пересечения. Результат такой операции может не быть параллелепипедом и в этом случае аппроксимируется параллелепипедами снаружи и изнутри. Остальные пять параграфов главы I посвящены

разработке техники аппроксимации множеств (в частности, полученных в результате использования упомянутых и некоторых других операций) с помощью областей выбранного класса. Далее, если не оговорено противное, под оценками будем понимать параллелепипедозначные оценки. Все предлагаемые ниже оценки зависят от некоторых параметров и могут быть легко вычислены по явным формулам (за исключением специально оговариваемых случаев).

В §2 рассмотрены способы построения и некоторые свойства оценок для выпуклых компактных множеств $Q \in \text{conv } \mathbb{R}^n$. Для произвольного $Q \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ (выпуклого политопа Q) введены семейства внешних (внутренних) оценок \mathcal{P}^+ (\mathcal{P}^-), обеспечивающие представления

$$Q = \bigcap \mathcal{P}^+, \quad (0.3)$$

$$Q = \bigcup \mathcal{P}^-. \quad (0.4)$$

Внешние оценки однозначно определяются матрицами ориентации, строятся в явном виде с использованием значений опорной функции Q и являются касающимися. Для внутренних оценок такой однозначности нет, и каждому выбранному центру и матрице ориентации соответствует множество допустимых величин полуосей, определяемое системой линейных неравенств. Найдены достаточные условия, гарантирующие неулучшаемость по включению внешних и внутренних оценок. При заданных центре и матрице ориентации указан простой способ нахождения величин полуосей внутренних оценок в аналитическом виде. Обсуждаются некоторые функционалы, которые можно использовать для сравнения параллелепипедов и, значит, в качестве критерия оптимальности оценок.

§3 посвящен аппроксимации множества Q , являющегося суммой нескольких параллелепипедов. Введено несколько семейств внешних и внутренних оценок, обеспечивающих (0.3), (0.4). Рассмотрена задача о нахождении для суммы двух параллелепипедов внешней оценки наименьшего объема. В случае, когда один из слагаемых параллелепипедов невырожден, а другой мал, ее решение найдено в явном виде.

В §4 строятся оценки для множеств, полученных в результате использования операции $\dot{-}$ геометрической разности. Отмечено, что геометрическая разность параллелепипеда и произвольного множества $\mathcal{U} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ есть либо параллелепипед, либо пустое множество. Введены семейства внешних и внутренних оценок для множества $(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$, где $\mathcal{P}^{(k)}$ — параллелепипеды, и приведен пример, показывающий, что представление (0.4) при этом, вообще говоря, не гарантировано. Для случая, когда $\mathcal{P}^{(1)}$ невырожден, а $\mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathcal{P}^{(3)}$ "малы", в явном виде найдена внешняя оценка, имеющая наименьший объем.

§5 посвящен построению оценок для пересечения $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}$ параллелепипеда и полосы. Для случая, когда $\mathcal{S}^{(2)}$ есть параллелепипед, рассмотрены два способа построения семейств внешних оценок, обеспечивающих (0.3). Первый основывается на сведении (путем введения матричных параметров [75, 201]) операции пересечения к изученной ранее операции сложения параллелепипедов, второй — на том факте, что пересечение параллелепипедов с одинаковыми матрицами ориентации снова есть параллелепипед. Далее рассмотрен случай, когда $\mathcal{S}^{(2)}$ — гиперполоса. Отмечается, что внешняя оценка с произвольной матрицей ориентации может быть несложно найдена с помощью алгоритма; в явном виде найдено несколько касающихся оценок, соответствующих специально выбранным матрицам ориентации; указаны оценки, имеющие наименьший объем. Последние два утверждения обобщают результаты [233] на случай $\text{int } \mathcal{Q} = \emptyset$. Описаны способы нахождения в аналитическом виде точки, принадлежащей \mathcal{Q} , что позволяет строить внутренние оценки, введенные в § 5, в явном виде.

В §6 строятся "элементарные" оценки для множеств, возникающих в гл. VI. Сначала рассматриваются аппроксимации выпуклой оболочки объединения двух параллелотопов и вводятся семейства оценок, обеспечивающие (0.3), (0.4). Затем рассматриваются множества \mathcal{Z} в пространстве \mathbb{R}^{n+1} , заданные своими сечениями по последней координате. Введе-

ны четыре операции с таким множеством. Первые три: $A \odot \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \oplus a$ и $\mathcal{Z} \odot \mathcal{Y}$ (умножение на матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, сложение с вектором $a \in \mathbb{R}^n$, пересечение с множеством $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$) действуют независимо на каждое сечение, а последняя — $\mathcal{Z} \uplus \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, — комбинирует операции суммы Минковского и объединения по сечениям. В качестве внешних оценок множеств в \mathbb{R}^{n+1} берутся политопы Π , определяемые своими "нижним" и "верхним" сечениями посредством операции выпуклой оболочки, причем сечения эти — параллелепипеды с одинаковыми матрицами ориентации. При этом "промежуточные" сечения Π тоже оказываются параллелепипедами. Построены семейства внешних оценок для множеств вида $\Pi \uplus \mathcal{P}$, где \mathcal{P} — параллелотоп, и $\Pi \odot \mathcal{S}$, где \mathcal{S} — параллелепипед либо гиперполоса в \mathbb{R}^n . Параметрами оценок выступают матрицы ориентации сечений и $2n$ векторов, определяющих "боковые грани".

Во второй главе разрабатываются методы двусторонней аппроксимации МД линейных динамических систем с геометрическими ограничениями на входные воздействия и без ФО. Если не сказано другое, введенные семейства оценок обеспечивают соотношения (0.1), (0.2).

§7 посвящен многошаговым системам. Введены три конечных семейства тугих внешних оценок в виде ортогональных или неортогональных параллелепипедов; оценки из последнего семейства оказываются касающимися, а при $k=N$ — минимальными по включению. Трубки $\mathcal{P}^+[\cdot]$ из введенных семейств удовлетворяют эволюционным уравнениям, включающим на каждом шаге изученную ранее операцию вычисления внешней оценки для суммы двух параллелепипедов, и отличаются друг от друга способом построения матриц ориентации. Таким образом, отказ от фиксированных единичных матриц ориентации позволяет ослабить эффект "обертывания" из интервального анализа. Построены касающиеся оценки, применимые и в случае более общих ограничивающих множеств. Далее введено несколько конечных семейств внутренних оценок. Доказано, что оценки одного из семейств являются тугими, а при $k = N$ — и

максимальными по включению. Однако в системах, получающихся дискретизацией систем с непрерывным временем, оценки такого типа могут получиться "длинными узкими". Поэтому введено также более широкое семейство внутренних параллелотопозначных оценок; в нем выделены тугие.

В §8 изучены аппроксимации МД $\mathcal{X}(t)$ для систем с непрерывным временем. При заданной динамике матриц ориентации выведены ОДУ для центров и величин полуосей параллелепипедов $\mathcal{P}^+(t)$, являющихся внешними оценками для $\mathcal{X}(t)$. В частном случае (матрицы ориентации — единичные, ограничивающие множества — "боксы" с центром в начале координат) оценки превращаются в приведенные в [230]. Показано, что если матрицы ориентации удовлетворяют однородной системе ОДУ с матрицей из исходной системы, то соответствующие оценки оказываются касающимися для $\mathcal{X}(t)$ и (0.1) достигается варьированием (бесконечного числа) начальных условий для матриц ориентации. Приводятся ОДУ, описывающие динамику тугих внутренних оценок $\mathcal{P}^-(t)$ для $\mathcal{X}(t)$; при этом $\mathcal{X}(t)$ (в случае $\text{int } \mathcal{X}(t) \neq \emptyset$) представимо в виде замыкания объединения оценок $\mathcal{P}^-(t)$, взятого по матричному параметру, определяющему начальные условия $\mathcal{P}^-(0)$. Введено также семейство внутренних параллелотопозначных оценок для $\mathcal{X}(t)$, параметризованное матричной функцией $\Gamma(\cdot)$, которая входит в правую часть ОДУ, описывающих динамику параметров $\mathcal{P}^-(\cdot)$. Среди множества оценок выделены тугие, и предложены способы построения кусочно-постоянных функций $\Gamma(\cdot)$, обеспечивающих невырожденность оценок. Рассмотрена задача оптимального управления (роль управления играет $\Gamma(\cdot)$) о нахождении во введенном семействе трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$ с наибольшим в смысле объема сечением в конечный момент времени, и для нее выписано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [126].

§9 посвящен вопросам численного построения оценок МД. Вначале предлагаемые численные алгоритмы рассматриваются с точки зрения

их эффективности. В частности, приведены оценки числа операций для точного нахождения $\mathcal{X}[N]$ в виде (0.1) и показано, что при больших N предложенные алгоритмы могут быть более эффективны по числу операций, чем известный алгоритм [103], где МД ищется в виде системы линейных неравенств. Этот выигрыш обусловлен специальным видом ограничивающих множеств (это параллелепипеды, а не произвольные выпуклые политопы, как в [103]). Ряд алгоритмов реализован в виде пакета программ (ToolBox'a) BOXES в системе MATLAB 5 (краткие сведения о нем приведены в Приложении В), а ряд — в виде программы на языке С для многопроцессорного вычислительного комплекса МВС-100. Дается ее краткое описание и обсуждаются вопросы эффективности распараллеливания. Приводятся результаты расчетов для модельных примеров, аналогичных рассмотренным в [155, 201].

В третьей главе рассмотрены оценки МД линейных динамических систем с ФО в дискретные моменты времени. Разработанные алгоритмы применимы для аппроксимации информационных областей в задачах гарантированного оценивания при неточных дискретных измерениях. Вводимые семейства оценок опять обеспечивают (0.1), (0.2).

§10 посвящен многошаговым системам. При построении первого (бесконечного) семейства внешних трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$ используется подход [75, 201], основывающийся на снятии ФО (путем введения параметров) и последующем использовании конструкций из §7. При построении двух других семейств внешних оценок (когда ФО имеют вид параллелепипедов и полос) используются оценки из §5 для пересечения двух параллелепипедов и параллелепипеда с гиперполосой соответственно. При этом пересечение в (0.1) достаточно брать по конечному (но очень большому) множеству последовательностей матриц ориентации. Указано, как в случае $\text{int } \mathcal{X}[N] = \emptyset$ можно выбирать матрицы ориентации, чтобы иметь возможность получать оценки в виде вырожденных параллелепипедов. Далее введены семейства внутренних трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$. Можно заметить, од-

нако, что при неудачном выборе параметров не исключается и случай, когда, начиная с некоторого шага, оценки могут получиться пустыми, а брать для обеспечения (0.2) объединение по всевозможным центрам не очень конструктивно. В §11 вводятся семейства оценок $\mathcal{P}^\pm(\cdot)$ для трубок достижимости $\mathcal{X}(\cdot)$ систем с непрерывным временем и ФО в моменты t_k , $k = 0, \dots, N_c$. При $t \in (t_k, t_{k+1}]$ параметры $\mathcal{P}^\pm(t)$ удовлетворяют ОДУ, описанным в гл. II, §8, а при $t = t_k$ используются оценки, введенные в гл. I, §5. В §12 описаны примеры численного построения оценок МД.

В четвертой главе рассматриваются две задачи нелинейного синтеза управлений в системах с исходной линейной структурой и геометрическими ограничениями: нахождение трубки разрешимости $\mathcal{W}(\cdot)$ и многозначной позиционной стратегии управления, гарантирующей попадание в конечный момент времени на целевое множество всех траекторий соответствующего дифференциального включения, начинающихся в любой позиции из упомянутой трубки, и та же задача, но для систем, функционирующих в условиях неопределенности. Пути решения данного класса задач указаны в монографиях [80, 88]. В [95, 111] показано, что искомая трубка $\mathcal{W}(\cdot)$ представляет собой единственное максимальное по включению решение некоторого эволюционного уравнения. Решение этого уравнения дается интегралом Аумана (если нет неопределенности в задании правых частей системы) или альтернированным интегралом Понтрягина. Точное нахождение $\mathcal{W}(\cdot)$ представляет собой нетривиальную задачу. Известно, что если построена вся трубка $\mathcal{W}(\cdot)$, либо какая-либо другая трубка, удовлетворяющая эволюционному уравнению, то решение задачи синтеза для позиций из этой трубки может быть найдено с помощью экстремальных стратегий Н.Н. Красовского. В [93, 94, 201] разработана схема "эллипсоидального синтеза". В данной главе разрабатываются конструктивные схемы решения задачи синтеза, при которых вместо трубки $\mathcal{W}(\cdot)$ используются семейства параллелепипедозначных оценок. В §13 дается постановка задачи синтеза. В §14 введены семейства внешних оценок

для трубки разрешимости, дающих внешние оценки множеств тех позиций, для которых задача синтеза разрешима. В §15 введены семейства внутренних параллелотопозначных оценок — оценок, удовлетворяющих упомянутому уравнению интегральной воронки. Эволюция внешних и внутренних оценок описывается системами ОДУ, где начальные условия или правая часть зависят от параметров (матрица или матричная функция), определяющих семейство. Внутренние оценки, являющиеся параллелепипедозначными трубками разрешимости, позволяют находить допустимые синтезирующие стратегии в аналитическом виде на основе решения специфической задачи квадратичного программирования (минимизации квадратичной функции на единичном кубе). Для первой задачи оба семейства обеспечивают точные представления трубки разрешимости (через операции пересечения или объединения оценок), а внешние оценки являются касающимися. Выведено нелинейное дифференциальное включение, все решения которого определяют невырожденные параллелепипедозначные внутренние оценки. В §16 обсуждаются результаты расчетов для модельных примеров, аналогичных рассмотренным в [201].

В пятой главе рассматривается задача гарантированного оценивания состояния параболической системы при "геометрических" ограничениях на неопределенные входные параметры. Задачам оценивания в системах с распределенными параметрами посвящен обширный поток публикаций. Наиболее близким вопросам, связанным с вычислением множеств достижимости и информационных областей параболических систем при "геометрических" ограничениях, посвящены, например, работы [92, 105, 198]. В §17 дается постановка задачи и для аппроксимации информационной области, являющейся решением задачи, вводятся (путем дифференциально-разностных или конечно-разностных аппроксимаций) последовательности задач гарантированного оценивания состояния конечномерных систем. В §18 показано, что при сгущении сетки имеет

место сходимость к нулю хаусдорфова полурасстояния между искомым множеством и множеством кусочно-постоянных восполнений решений аппроксимирующих задач. Сходимость к нулю второго полурасстояния доказана при двух дополнительных предположениях. Первое связано с гладкостью функций, задающих ограничения. Второе связано с корректностью задачи. Оно выполняется, например, либо в случае сильной наблюдаемости системы [198] при отсутствии возмущений в правой части уравнения теплопроводности (что эквивалентно [136] так называемой непрерывной наблюдаемости [181]), либо при предположении о регулярности сигнала [198]. Установлена скорость сходимости. Аналогичные результаты справедливы для множества достижимости. В §19 обсуждаются возможности использования параллелепипедозначных оценок решений аппроксимирующих задач для нахождения внешних и внутренних оценок искомого множества. Отмечается, что формулы для построения семейства внешних касающихся оценок МД многошаговых систем из §7 приводят в данном случае к неустойчивой разностной схеме. Предлагаются способы построения двух внешних оценок и одной внутренней. Эти способы, ввиду их простоты, позволяют находить параллелепипедозначные оценки решений аппроксимирующих задач достаточно высокой размерности (в модельном примере $n = 199$, $N = 5(n+1)$).

Шестая глава посвящена аппроксимации МД линейных многошаговых систем с интегральными неквадратичными ограничениями на управление и неопределенностью в начальных условиях, включая системы с фазовыми ограничениями. В §20 дается постановка задачи и вводятся множества достижимости $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ в исходном и в "расширенном" фазовом пространстве, включающем координату, которая соответствует текущему запасу управления. Отмечается, что множества $\mathcal{Z}[k]$ (в отличие от $\mathcal{X}[k]$) обладают полугрупповым свойством. Приведены точные описания МД и, в частности, системы рекуррентных соотношений для нахождения $\mathcal{X}[k]$ (в случае отсутствия ФО) и $\mathcal{Z}[k]$. Статическое опи-

сание $\mathcal{X}[k]$ из начала координат для автономных многошаговых систем (без ФО) со скалярным управлением известно из [138]. Найдены достаточные условия, гарантирующие для множеств $\mathcal{Z}[k]$ невозрастание сечений и выпуклость. В §21 для множеств $\mathcal{X}[k]$ введены семейства внешних и внутренних параллелепипедо-(иногда параллелотопо-)значных оценок $\mathcal{P}^\pm[k]$, обеспечивающие точные представления (0.1), (0.2). Для случая без ФО во введенных семействах выделены тугие и касающиеся оценки. Построение внешних (внутренних) оценок при наличии ФО в виде параллелепипедов (соответственно, полос) сводится путем введения параметров к построению оценок МД для вспомогательных систем без ФО (соответственно, с геометрическими ограничениями на управление). В §22 для МД $\mathcal{Z}[k]$, отвечающих, соответственно, исходным системам без ФО, с ФО в виде параллелепипедов и с ФО в виде полос введены три семейства внешних оценок в виде политопов Π ; выведены рекуррентные соотношения, описывающие динамику этих оценок. В случае отсутствия ФО в исходной системе доказано точное представление $\mathcal{Z}[k]$ в виде пересечения внешних оценок. С использованием оценок такого типа найдены параллелепипедозначные оценки множеств $\mathcal{X}[k]$ и установлено, что при отсутствии ФО получаемое при этом семейство совпадает с введенным в §21 семейством касающихся оценок. Конструкции, описанные в §§ 21 и 22, проиллюстрированы на модельных примерах.

В Приложении А приведены некоторые вспомогательные леммы из области линейной алгебры, теории матриц и выпуклого анализа, а также некоторые известные факты, которые используются при доказательстве основных утверждений. В Приложении В приводится список основных функций пакета программ BOXES для системы MATLAB. В Приложении С собраны все рисунки.

Формулы, леммы, теоремы и т.д. имеют в работе двойную нумерацию — параграф и номер внутри параграфа. Такая же нумерация принята для рисунков (где первый номер обозначает параграф, к которому рису-

нок относится), хотя сами они вынесены в Приложение С.

Разработка методов, описанных в диссертации, была поддержана грантами РФФИ 94-01-00803, 96-01-00050, 97-01-01003, 97-01-00672, 00-01-00369 и 03-01-00528. Результаты диссертации были представлены в докладах (указано в хронологическом порядке) на V Конференции "Транспьютерные системы и их применение", Домодедово, 1995; II – III International Workshops "Beam Dynamics & Optimization" (BDO-95, BDO-96), С.-Петербург, 1995, 1996; IMACS Multiconference "Computational Engineering in Systems Applications" (CESA'96), Лилль, Франция, 1996; 11 – 12 Международных совещаниях по интервальной математике, Новосибирск, 1996, Красноярск, 1997; 13th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS-98), Падуя, Италия, 1998; Международной конференции "Распределенные системы: Оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде" (DSO'2000), Екатеринбург, 2000; Международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели", Челябинск, 2002; юбилейной конференции, посвященной 10-летию РФФИ, Москва, 2002; 4th International Conference "Tools for Mathematical Modelling" (MathTolls'2003), С.-Петербург, 2003, и докладывались на совместных семинарах "Системный анализ и сопряженные уравнения" кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ им.Ломоносова и Института вычислительной математики РАН (руководители семинара — академик РАН А.Б.Куржанский и академик РАН Г.И.Марчук), семинарах Института математики и механики УрО РАН. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах [64–74, 149, 186–193]. Статьи [61–63] примыкают к вопросам, затронутым в диссертации, но не вошли в нее.

Автор выражает глубокую признательность академику РАН Александру Борисовичу Куржанскому за привлечение ее внимания к теме диссертации, постоянное внимание к работе, ценные советы и поддержку.

Глава I

"Полиэдральное исчисление"

Данная глава посвящена "полиэдральному исчислению" — технике работы с множествами в рамках выбранного класса областей — параллелепипедов (и иногда более широкого класса — параллелотопов), разрабатываемой с целью последующего использования для построения *полиэдральных* (параллелепипедо- или параллелотопозначных) аппроксимаций трубок траекторий в задачах гарантированного управления и оценивания. Изучаются основные операции над параллелепипедами (геометрические сумма и разность, пересечение, выпуклая оболочка объединения) и способы построения параллелепипедо- и параллелотопозначных внешних и внутренних аппроксимаций результирующих множеств.

Разрабатываемое "полиэдральное исчисление" в некоторой степени подобно развитому в [201] эллипсоидальному исчислению, а также может рассматриваться как некоторое развитие интервального анализа. Оно может оказаться полезным для решения более широкого круга задач, чем рассмотрены в настоящей работе (в частности, для задач идентификации). В этом смысле содержание главы имеет самостоятельное значение. По отношению ко всей работе глава носит вспомогательный характер, так как содержит факты ("кирпичики"), используемые далее для решения выбранных к рассмотрению задач.

Для пояснения мотивации вводимых конструкций в главу включен § 1, где на примере многошаговых систем даны постановки некоторых

задач управления и оценивания, решения которых связаны с построением трубок траекторий.

Изложение материала главы основано, в основном, на результатах работ [65, 67, 68, 71, 72, 188, 191, 192].

1 Мотивация: постановка некоторых задач управления и оценивания и полиэдральные аппроксимации трубок траекторий для многошаговых систем

Рассмотрим линейную многошаговую систему

$$x[k] = A[k]x[k-1] + w[k], \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Здесь $x[k] \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых координат системы, $A[k]$ — известные матрицы, а неизвестные заранее начальное состояние $x[0] \in \mathbb{R}^n$ и входные воздействия $w[k] \in \mathbb{R}^n$ стеснены ограничениями

$$x[0] \in \mathcal{X}_0, \quad w[k] \in \mathcal{R}[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

где $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}[k] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ — заданные выпуклые компактные множества. Могут быть заданы также фазовые ограничения (ФО)

$$x[k] \in \mathcal{Y}[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

(где $\mathcal{Y}[j]$ — выпуклые замкнутые множества), которые, в частности, могут порождаться уравнением измерений с неизвестной, но ограниченной помехой [75]

$$y[k] = G[k]x[k] + \eta[k], \quad (1.4)$$

$$\eta[k] \in \Theta[k] \subset \mathbb{R}^m, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

где $G[k]$ — заданные $m \times n$ -матрицы ранга m , $\Theta[k] \in \text{conv } \mathbb{R}^m$ — известные множества, $y[k]$ — данные измерений.

Определение 1.1 [103, 155, 201] Множеством (областью) достижимости (МД) $\mathcal{X}[j] = \mathcal{X}(j, 0, \mathcal{X}_0)$ системы (1.1), (1.2) ((1.1) – (1.3))

называется множество всех тех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует такая пара $\{x[0], w[\cdot]\}$, удовлетворяющая (1.2), что порождаемое ею в силу (1.1) решение $x[\cdot]$ удовлетворяет условию $x[j] = x$ (и (1.3) для $k = 1, \dots, j$). Многозначная функция $\mathcal{X}[j]$, $j = 1, \dots, N$, известна как *трубка траекторий* $\mathcal{X}[\cdot]$ или *трубка достижимости*, а при наличии ограничений (1.3) — как *трубка выживающих траекторий* [201].

Таким образом, если входные воздействия $w[\cdot]$ — управляющие, то $\mathcal{X}[j]$ определяет множество точек, в которые управляемую систему можно перевести из \mathcal{X}_0 за j шагов (не нарушая фазовых ограничений при $k = 1, \dots, j$). Если же $w[\cdot]$ — неизвестные заранее возмущения, то $\mathcal{X}[j]$ для системы (1.1), (1.2) характеризует ту область, в которую может попасть система под действием возмущений. Если при этом ограничения (1.3) порождаются измерениями, то $\mathcal{X}[j]$ являются множествами состояний, совместимых с данными измерений и априорными ограничениями, и известны как *информационные области* [75].

Определение 1.2 [51, 75] *Информационной областью* $\mathcal{X}[j]$ системы (1.1), совместимой в момент j с реализацией $y[k]$, $k = 1, \dots, j$, и с априорными ограничениями (1.2), (1.5), называется множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует такая тройка $\{x[0]^*, w^*[\cdot], \eta^*[\cdot]\}$, удовлетворяющая (1.2) и (1.5) при $k = 1, \dots, j$, что порождаемые ею в силу уравнений (1.1) и (1.4) решение $x^*[\cdot]$ и сигнал $y^*[\cdot]$ удовлетворяют условиям $x^*[j] = x$, $y^*[k] = y[k]$, $k = 1, \dots, j$. Информационная область $\mathcal{X}[j]$ дает решение *задачи гарантированного оценивания состояния*, которая состоит в нахождении состояния $x[j]$ по данным наблюдений $y[k]$, $k = 1, \dots, j$, и априорной информации (1.2), (1.5).

Известно [51, 75, 155], что МД обладают *полугрупповым свойством*

$$\mathcal{X}(k, 0, \mathcal{X}_0) = \mathcal{X}(k, j, \mathcal{X}(j, 0, \mathcal{X}_0)), \quad 0 \leq j \leq k \leq N, \quad (1.6)$$

и могут быть найдены из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^0[k] &= A[k] \mathcal{X}[k-1] + \mathcal{R}[k], \\ \mathcal{X}[k] &= \mathcal{X}^0[k] \cap \mathcal{Y}[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{X}[0] = \mathcal{X}_0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При отсутствии ФО полагаем $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$, так что $\mathcal{X}[k] \equiv \mathcal{X}^0[k]$.

Известны методы, реализующие процедуру (1.7) в виде алгоритмов (см., например, [103, 170]). Однако осуществление ее в случае большой размерности n может потребовать довольно большого объема вычислений. Далее будем считать выполненным

Предположение 1.1 $A[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$, где $\mathcal{M}_0^{n \times n}$ – совокупность всех неособых матриц из $\mathbb{R}^{n \times n}$.

И будем предполагать, что $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}[k]$ являются параллелепипедами

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0) \triangleq \mathcal{P}(r[0], R[0], \rho[0]), \quad \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}(r[k], R[k], \rho[k]), \quad (1.8)$$

а множества $\mathcal{Y}[k]$ в ограничениях (1.3) — параллелепипедами

$$\mathcal{Y}[k] = \mathcal{P}(q[k], Q[k], \kappa[k]), \quad (1.9)$$

или полосами

$$\mathcal{Y}[k] = \mathcal{S}(c[k], S[k], \sigma[k], m[k]). \quad (1.10)$$

Определение 1.3 *Параллелепипедом* $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ в \mathbb{R}^n называем множество

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (1.11)$$

где $p \in \mathbb{R}^n$; матрица $P = \{p_j^i\} = \{p^1 \dots p^n\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $\mathcal{M}_*^{n \times n} = \{P \mid \det P \neq 0, \|p^i\| = 1\}$ — множество всех неособых $n \times n$ -матриц со столбцами единичной длины¹, $\pi \in \mathbb{R}^n$, причем все $\pi_i \geq 0$. Можно сказать, что p задает центр параллелепипеда, p^i — "направления", а π_i — величины его "полуосей"; матрица P определяет ориентацию параллелепипеда. Называем параллелепипед *невыврожденным*, если все $\pi_i > 0$.

Определение 1.4 *Полосой* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m)$ называем пересечение m ($1 \leq m \leq n$) *гиперполос* Σ^i :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i, \quad \Sigma^i = \Sigma(c_i, s^i, \sigma_i) = \{x \mid |(x, s^i) - c_i| \leq \sigma_i\},$$

¹Условие $\|p^i\| = 1$ несущественно и может быть опущено; оно, в частности, обеспечивает единственность представления параллелепипеда с ненулевыми величинами полуосей.

с линейно независимыми векторами $s^i \in \mathbb{R}^n$, $\|s^i\| = 1^2$. Здесь $c \in \mathbb{R}^m$ — вектор с компонентами c_i , $S = \{s_j^i\} = \{s^1 \cdots s^m\}$ — $n \times m$ -матрица ранга m со столбцами s^i , $\sigma \in \mathbb{R}^m$, все $\sigma_i \geq 0$. Векторы $\pm s^i$ определяют нормали к гиперплоскостям, ограничивающим гиперполосу Σ^i .

При сделанных предположениях множества $\mathcal{X}[k]$ параллелепипедами, вообще говоря, не являются. Будем искать внешние $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и внутренние $\mathcal{P}^-[\cdot]$ параллелепипедозначные оценки для $\mathcal{X}[\cdot]$:

$$\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k], \quad \mathcal{P}^\pm[k] = \mathcal{P}(p^\pm[k], P^\pm[k], \pi^\pm[k]), \quad (1.12)$$

обладающие *полугрупповым* [201] и *эволюционным* [155] свойствами, являющимися аналогами соотношений (1.6). Как будет видно ниже, оценки $\mathcal{P}^\pm[k]$ могут быть найдены из рекуррентных уравнений с начальными условиями $\mathcal{P}^\pm[0]$, так что по аналогии с множествами достижимости можно ввести обозначения $\mathcal{P}^\pm[k] \triangleq \mathcal{P}^\pm(k, 0, \mathcal{P}^\pm[0])$, где символами $\mathcal{P}^\pm(k, i, \mathcal{P}_i^\pm)$ обозначаем значения решений упомянутых уравнений в момент k с начальными условиями $\mathcal{P}^\pm[i] = \mathcal{P}_i^\pm$.

Определение 1.5 [93, 201] Говорят, что оценки $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}^+(k, 0, \mathcal{P}^+[0])$ и $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}^-(k, 0, \mathcal{P}^-[0])$ обладают "*верхним*" и "*нижним*" *полугрупповым свойством*, если

$$\mathcal{P}^+(k, 0, \mathcal{P}^+[0]) = \mathcal{P}^+(k, j, \mathcal{P}^+(j, 0, \mathcal{P}^+[0])), \quad 0 \leq j \leq k \leq N, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}^+[0];$$

$$\mathcal{P}^-(k, 0, \mathcal{P}^-[0]) = \mathcal{P}^-(k, j, \mathcal{P}^-(j, 0, \mathcal{P}^-[0])), \quad 0 \leq j \leq k \leq N, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{P}^-[0] \subseteq \mathcal{X}_0.$$

Определение 1.6 [155] Говорят, что оценки $\mathcal{P}^+[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ обладают *эволюционным свойством*, если

$$\mathcal{X}(k, k-1, \mathcal{P}^+[k-1]) \subseteq \mathcal{P}^+[k], \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}^+[0]; \quad (1.15)$$

$$\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}(k, k-1, \mathcal{P}^-[k-1]), \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^-[0] \subseteq \mathcal{X}_0 \quad (1.16)$$

²Условие $\|s^i\| = 1$ может быть опущено.

(они называются еще множествами *супер-* и *субдостижимости*).

Известно, что свойства (1.15), (1.16) эквивалентны соотношениям

$$\mathcal{X}(k, j, \mathcal{P}^+[j]) \subseteq \mathcal{P}^+[k], \quad 0 \leq j \leq k \leq N; \quad \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}^+[0]; \quad (1.17)$$

$$\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}(k, j, \mathcal{P}^-[j]), \quad 0 \leq j \leq k \leq N; \quad \mathcal{P}^-[0] \subseteq \mathcal{X}_0 \quad (1.18)$$

и обеспечивают включения (1.12).

Наша цель состоит не только в том, чтобы найти какие-либо внешние $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и внутренние $\mathcal{P}^-[\cdot]$ параллелепипедозначные оценки для $\mathcal{X}[\cdot]$, обладающие указанными свойствами, но ввести некоторые семейства таких трубок, обеспечивающие точные представления

$$\mathcal{X}[k] = \bigcap \mathcal{P}^+[k], \quad (1.19)$$

$$\mathcal{X}[k] = \bigcup \mathcal{P}^-[k] \quad (1.20)$$

посредством операций пересечения внешних и объединения внутренних оценок. При этом требуется, чтобы каждая конкретная трубка находилась с помощью эволюционных уравнений независимо от остальных.

Иногда внутренние оценки удобнее искать в виде параллелотопов.

Определение 1.7 *Параллелотопом* $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ называем множество

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^r \bar{p}^i \xi_i, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, r\},$$

где $p \in \mathbb{R}^n$, $r \leq n$, а матрица $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ может быть особой. Таким образом, p определяет центр параллелотопа, а матрица \bar{P} — его форму. Называем параллелотоп \mathcal{P} *невыврожденным*, если $r = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Оценки желательно строить так, чтобы они были "как можно ближе" к множествам достижимости, например, были "тугими", "касающимися" или неулучшаемыми по включению.

Определение 1.8 [202, 203] Называем внешней (внутреннюю) оценку \mathcal{P} множества $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ *тугой* (в направлении l), если $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$) и существует такой вектор $l \in \mathbb{R}^n$, что $\rho(\pm l | \mathcal{P}) = \rho(\pm l | \mathcal{Q})$, где $\rho(l | \mathcal{Q}) = \sup\{(x, l) \mid x \in \mathcal{Q}\}$ — опорная функция \mathcal{Q} .

Определение 1.9 Назовем $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ внешним *касающимся* параллелепипедом для $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ и

$$\begin{aligned} \rho(\pm p^{\perp i} | \mathcal{P}) &= \rho(\pm p^{\perp i} | \mathcal{Q}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{или, эквивалентно,} \\ \rho(\pm (P^{-1})^\top e^i | \mathcal{P}) &= \rho(\pm (P^{-1})^\top e^i | \mathcal{Q}), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\{p^{\perp i}\}_{i=1}^n$ — система векторов, биортогональных к $\{p^i\}_{i=1}^n$, то есть $(p^{\perp i}, p^j) = 0$, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$; $(p^{\perp i}, p^i) > 0$; $\|p^{\perp i}\| = 1$ ($i = 1, \dots, n$)³; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — i -й единичный орт в \mathbb{R}^n .

Таким образом, касающийся параллелепипед является тугой оценкой в направлении n векторов, выбранных специальным образом. Геометрический смысл соотношений (1.21) состоит в том, что все гиперплоскости, в которых лежат $(n - 1)$ -границы невырожденного параллелепипеда \mathcal{P} , являются опорами [129] и для множества \mathcal{Q} .

Определение 1.10 [201] Параллелепипед \mathcal{P} называем *минимальной по включению внешней оценкой* для \mathcal{Q} , если условие $\mathcal{Q} \subseteq \tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ для некоторого параллелепипеда $\tilde{\mathcal{P}}$ влечет $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ ⁴; *максимальные по включению внутренние оценки* определяются аналогично.

К оценкам могут предъявляться и другие требования, например, ортогональность.

Определение 1.11 Параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ называем *ортогональным*, если его матрица ориентации ортогональна, то есть $P^\top P = I$.

Число элементов в семействах (1.19), (1.20) может оказаться довольно большим или даже бесконечным. Ограничиваясь каким-либо конечным подмножеством элементов, получаем внешние и внутренние аппроксимации искомых множеств. При этом то обстоятельство, что оценки находятся независимо друг от друга, открывает возможности для параллельных вычислений. Задавшись каким-либо критерием оптимальности и выделив в семействе оценок соответствующий элемент, получаем ап-

³ Система векторов $\{p^{\perp i}\}_{i=1}^n$, биортогональных к $\{p^i\}_{i=1}^n$, определяется единственным образом.

⁴ Если на множестве оценок определить частичный порядок при помощи отношения включения, то минимальные по включению оценки отвечают недоминируемым (оптимальным по Парето) элементам.

проксимацию $\mathcal{X}[\cdot]$ при помощи оптимальной (в выбранном смысле) параллелепипедозначной трубки.

Как следует из формул (1.7), построение параллелепипедозначных оценок трубок траекторий рассматриваемых систем основывается на выполнении элементарных операций над параллелепипедами: аффинного преобразования, геометрической суммы, пересечения⁵. Результат такой операции может не быть параллелепипедом, и в этом случае аппроксимируется параллелепипедами снаружи и изнутри. Оставшаяся часть главы I посвящена изучению свойств упомянутых операций и разработке техники работы с множествами в рамках выбранного класса областей.

Отметим еще следующие обстоятельства. С одной стороны, во многих практических задачах ограничения действительно задаются соотношениями (1.8) – (1.10). С другой стороны, заменяя, в общем случае, множества $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}[k], \mathcal{Y}[k]$ их внешними (внутренними) оценками указанного вида, и применяя разработанную для систем (1.1) – (1.3), (1.8) – (1.10) технику полиэдрального оценивания, можно найти внешние (внутренние) оценки для МД исходных систем. Кроме того, пользуясь теоремами сравнения, можно аналогично [155] находить грубые полиэдральные оценки для трубок траекторий нелинейных систем.

2 Основные понятия: параллелепипеды, параллелотопы и полосы; операции с множествами. Полиэдральные оценки для выпуклых множеств

Отметим сначала очевидные свойства параллелепипедов, параллелотопов и полос и связи между этими понятиями.

Лемма 2.1 *Опорные функции параллелепипеда и параллелотона вычисляются по формулам $\rho(l|\mathcal{P}(p, P, \pi)) = (p, l) + \sum_{i=1}^n |(p^i, l)|\pi_i = (p, l) +$*

⁵В гл. IV, где рассматривается задача синтеза допустимых управлений в системах с неопределенностью, потребуется еще операция геометрической разности, а в гл. VI — и другие операции.

$$\text{Abs}(l^\top P)\pi; \rho(l|\mathcal{P}[p, \bar{P}]) = (p, l) + \sum_{i=1}^r |(\bar{p}^i, l)| = (p, l) + \text{Abs}(l^\top \bar{P})e.$$

Здесь символом $\text{Abs } A$ обозначена матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\}$: $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$; $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$.

Лемма 2.2 *Любой параллелепипед является параллелотопом: $\mathcal{P}(p, P, \pi) \equiv \mathcal{P}[p, \bar{P}]$, где $\bar{P} = P \text{diag } \pi$. Обратное, невырожденный параллелотоп есть параллелепипед с параметрами $P = \bar{P} \text{diag} \{\|\bar{p}^i\|^{-1}\}$, $\pi_i = \|\bar{p}^i\|$.*

Здесь символ $\text{diag } \pi$ (или $\text{diag} \{\pi_i\}$) обозначает диагональную матрицу, элементы диагонали которой совпадают с компонентами π_i вектора π .

Лемма 2.3 *Если $m = n$, то полоса $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m)$ является параллелепипедом $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ с параметрами $P = S^\perp = S^{-1\top} \cdot \text{diag} \{\|S^{-1\top} e^i\|^{-1}\}$, $p = S^\perp (S^\top S^\perp)^{-1} c = P \text{diag} \{(e^{i\top} S^\top P e^i)^{-1}\} c$, $\pi = (S^\top S^\perp)^{-1} \sigma = \text{diag} \{(e^{i\top} S^\top P e^i)^{-1}\} \sigma$. Обратное, параллелепипед \mathcal{P} есть полоса \mathcal{S} с параметрами $m = n$, $S = P^\perp = P^{-1\top} \text{diag} \{\|P^{-1\top} e^i\|^{-1}\}$, $c = (P^\perp)^\top p = S^\top p$, $\sigma = (P^\perp)^\top P \pi = S^\top P \pi$. Или, иначе,*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{x | x = p + P \text{diag } \pi \alpha, \text{Abs } \alpha \leq e\} = \{x | \text{Abs}(P^{-1}(x-p)) \leq \pi\} \\ &= \{x | \pm(x, p^\perp{}^i) \leq \pm(p, p^\perp{}^i) + (p^i, p^\perp{}^i) \pi_i, i=1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь P^\perp — матрица, столбцы $p^\perp{}^i$ которой биортогональны столбцам P . Матричные (векторные) неравенства понимаем покомпонентно.

Доказательство. Покажем, для примера, что параллелепипед \mathcal{P} представим в виде полосы \mathcal{S} . Включение $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ вытекает из леммы 2.1. Обратное включение докажем от противного. Пусть $x^* \in \mathcal{S}$, но $x^* \notin \mathcal{P}$. Разложим $x^* - p$ по базису $\{p^i\}$: $x^* = p + \sum_{i=1}^n \gamma_i p^i$. Условие $x^* \notin \mathcal{P}$ означает, что существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $|\gamma_j| > \pi_j$. Умножая выражение для x^* скалярно на векторы $\pm p^\perp{}^i$, приходим к противоречию с неравенствами, задающими включение $x^* \in \mathcal{S}$. \square

Иногда будем использовать также следующее обозначение:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}, \gamma^{(+)}) \triangleq \{x | \gamma^{(-)} \leq P^{-1}x \leq \gamma^{(+)}\}, \quad (2.2)$$

где связь между p , π и $\gamma^{(\pm)}$ задается формулами

$$\gamma^{(\pm)} = P^{-1}p \pm \pi; \quad p = P(\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)})/2, \quad \pi = (\gamma^{(+)} - \gamma^{(-)})/2; \quad (2.3)$$

при этом

$$\gamma_i^{(\pm)} = \pm \rho(\pm P^{-1\top} e^i | \mathcal{P}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Отметим следующее свойство оценок для симметричных множеств.

Лемма 2.4 Пусть множество $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ симметрично относительно нуля, то есть $\mathcal{Q} = -\mathcal{Q}$. Тогда, если $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(p, P, \pi)$, то $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(0, P, \pi)$. И, наоборот, если $\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}(p, P, \pi)$, то $\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}(0, P, \pi)$.

Доказательство аналогично доказательству [201, Лемма 2.1.4]. \square

Как было отмечено в §1, нам придется иметь дело со следующими основными операциями над множествами.

Определения 2.1 [225] Геометрическая сумма (сумма Минковского) двух множеств $\mathcal{X}^k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2$, определяется соотношениями

$$\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 = \{x \mid x = x^1 + x^2, x^k \in \mathcal{X}^k, k = 1, 2\} = \bigcup_{y \in \mathcal{X}^2} (\mathcal{X}^1 + y). \quad (2.5)$$

Геометрическая разность (разность Минковского) двух множеств определяется соотношениями

$$\mathcal{X}^1 - \mathcal{X}^2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1\} = \bigcap_{y \in \mathcal{X}^2} (\mathcal{X}^1 - y). \quad (2.6)$$

Пересечение $\mathcal{X}^1 \cap \mathcal{X}^2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathcal{X}^1, x \in \mathcal{X}^2\}$.

Аффинное преобразование множества $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, задаваемое $n \times n$ -матрицей A и вектором $a \in \mathbb{R}^n$: $A\mathcal{X} + a = \{y \mid y = Ax + a, x \in \mathcal{X}\}$.

Лемма 2.5 $A\mathcal{P}[p, \bar{P}] + a = \mathcal{P}[Ap + a, A\bar{P}]$. Если $\det A \neq 0$, то $A\mathcal{P}(p, P, \pi) + a = \mathcal{P}(Ap + a, AP, \pi) = \mathcal{P}(Ap + a, APB^{-1}, B\pi)$, где $B = \text{diag} \{\|Ap^i\|\}$.

Результат сложения двух параллелепипедов и пересечения параллелепипеда с полосой может не быть параллелепипедом. В этом случае будем аппроксимировать его параллелепипедами снаружи и изнутри.

Среди множества внешних и внутренних параллелепипедозначных оценок может оказаться полезным выделить оценки, оптимальные по отношению к выбранному критерию оптимальности $\mu(\mathcal{P}) = \mu(\mathcal{P}(p, P, \pi))$. От функционала μ естественно потребовать [201, с.101], чтобы

1) он был определен на множестве всех параллелепипедов $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ и принимал неотрицательные значения;

2) обладал свойством монотонности по отношению к включению: $\mu(\mathcal{P}^{(1)}) \leq \mu(\mathcal{P}^{(2)})$, если $\mathcal{P}^{(1)} \subseteq \mathcal{P}^{(2)}$.

Как известно, всеми перечисленными свойствами обладает функционал объема $\mu_{\text{vol}}(\mathcal{P}) = \text{vol } \mathcal{P}$, где символом $\text{vol } \mathcal{P}$ мы обозначаем значение на множестве $\mathcal{X} = \mathcal{P}$ функционала объема $\text{vol}_n \mathcal{X}$, удовлетворяющего свойствам объема n -области, перечисленным в [131, с.161]⁶, причем в случае $\text{vol}_n \mathcal{P} = 0$ примем дополнительное соглашение. Для его формулировки понадобятся следующие определения, которые согласуются с [131, с.159, 165].

Определения 2.2 Параллелепипед $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ называем l -параллелепипедом, если он имеет l ненулевых полуосей, то есть $\pi_i > 0$ для $i \in I_1 = \{i_1, \dots, i_l\}$, $\pi_i = 0$ для $i \in I_2$, $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, n\}$. Относительным объемом⁷ l -параллелепипеда \mathcal{P} будем называть функционал

$$\text{vol}_l \mathcal{P} = 2^l \cdot \prod_{k \in I_1} \pi_k \cdot (\det \{(p^i, p^j)\})^{1/2}, \quad i, j \in I_1, \quad (2.7)$$

то есть квадрат относительного объема l -параллелепипеда \mathcal{P} пропорционален определителю Грама для l векторов $p^i \pi_i$, $i \in I_1$.

При каждом l , $1 \leq l \leq n$, этот функционал обладает всеми свойствами объема l -области (перечисленными в сноске на с.37) и обоими свой-

⁶Согласно [131, с.161], n -областью пространства \mathbb{R}^n называют область этого пространства, а m -областью пространства \mathbb{R}^n — область m -поверхности этого пространства. Объемом m -области \mathcal{X} называют числовую функцию $f(\mathcal{X})$, для которой мы будем использовать обозначение $f(\mathcal{X}) = \text{vol}_m \mathcal{X}$, обладающую следующими тремя свойствами: а) инвариантностью при движениях (т.е. аффинных преобразованиях с ортогональной матрицей A): $f(\mathcal{X}) = f(A\mathcal{X} + a)$; б) аддитивностью, т.е. если m -область \mathcal{X} распадается на m -области \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 , то $f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}_1) + f(\mathcal{X}_2)$; в) позитивностью, т.е. $f(\mathcal{X}) > 0$, если \mathcal{X} — m -область, и $f(\mathcal{X}) = 0$, если \mathcal{X} — l -область при $l < m$.

⁷Термин "относительный объем" использован здесь по аналогии с относительной внутренностью.

ствами, сформулированными выше для $\mu(\mathcal{P})$, если в качестве \mathcal{P} брать l -параллелепипеды.

Объем n -параллелепипеда можно найти также по формуле [30, с.216], [131, с.166]

$$\text{vol } \mathcal{P} = \text{vol}_n \mathcal{P} = 2^n |\det P| \prod_{i=1}^n \pi_i. \quad (2.8)$$

Использование этой формулы для l -параллелепипеда, где $l < n$, дает $\text{vol } \mathcal{P} = \text{vol}_n \mathcal{P} = 0$. В дальнейшем, сравнивая l_1 -параллелепипед $\mathcal{P}^{(1)}$ и l_2 -параллелепипед $\mathcal{P}^{(2)}$ по объему, будем сравнивать их относительные объемы, опуская для краткости прилагательное "относительный". Точнее, условимся говорить, что объем $\mathcal{P}^{(1)}$ меньше объема $\mathcal{P}^{(2)}$, и записывать это как $\text{vol } \mathcal{P}^{(1)} < \text{vol } \mathcal{P}^{(2)}$, если либо $l_1 < l_2$, либо $l_1 = l_2 = l$ и $\text{vol}_l \mathcal{P}^{(1)} < \text{vol}_l \mathcal{P}^{(2)}$.

Для сравнения можно использовать и другие функционалы.

Лемма 2.6 *Свойствами 1) и 2) обладают следующие функционалы, определенные на множестве параллелепипедов $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$:*

$\mu_\varphi(\mathcal{P}) = \max\{\varphi(x - p) \mid x \in \mathcal{P}\}$, где $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — произвольная непрерывная неотрицательная функция;

$$\mu_h(\mathcal{P}) = \max\{\|x - p\| \mid x \in \mathcal{P}\};$$

$$\mu_\rho(\mathcal{P}) = \max\{e^{i^\top} \text{Abs } P \pi \mid i = 1, \dots, n\};$$

$$\mu_l(\mathcal{P}) = \rho(l \mid \mathcal{P} - p);$$

$\mu_W(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \rho(w^i \mid \mathcal{P} - p)$ — сумма значений опорной функции для параллелепипеда с центром в нуле на вектор-столбцах неособой матрицы W (в частности, $\mu_I(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n e^{i^\top} \text{Abs } P \pi$).

На классе ортогональных параллелепипедов $\mu_h(\mathcal{P}) = \|\pi\|$.

Доказательство. Выполнение свойства 1) очевидно. Пусть $\mathcal{P}^{(1)} \subseteq \mathcal{P}^{(2)}$. После сдвига на вектор $-p^{(1)}$ имеем $\mathcal{P}(p^{(1)} - p^{(1)}, P^{(1)}, \pi^{(1)}) \subseteq \mathcal{P}(p^{(2)} - p^{(1)}, P^{(2)}, \pi^{(2)})$, и в силу леммы 2.4 $\mathcal{P}(0, P^{(1)}, \pi^{(1)}) \subseteq \mathcal{P}(0, P^{(2)}, \pi^{(2)})$. Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что центры обоих параллелепипедов расположены в начале координат. Тогда $\mu_\varphi(\mathcal{P}^{(1)}) =$

$\max\{\varphi(x)|x \in \mathcal{P}^{(1)}\} \leq \max\{\varphi(x)|x \in \mathcal{P}^{(2)}\} = \mu_\varphi(\mathcal{P}^{(2)})$, то есть μ_φ обладает свойством 2). Функционалы μ_l и μ_W — такого же типа, а μ_h и μ_ρ являются частными случаями μ_φ , когда в качестве $\varphi(x)$ взяты векторные нормы [101, с.190] $h(x) = (x, x)^{1/2}$ и $\rho(x) = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$. Последнее утверждение леммы легко проверяется с учетом леммы 2.1 и того, что $P^\top P = I$. \square

А вот функционал $\mu(\mathcal{P}) = \max\{\pi_i \mid i=1, \dots, n\}$ для сравнения параллелепипедов не годится, т.к. не обладает свойством монотонности по включению даже в классе ортогональных параллелепипедов. Это видно на простом примере, где в качестве $\mathcal{P}^{(2)}$ взят единичный куб, а $\mathcal{P}^{(1)}$ есть вырожденный параллелепипед, совпадающий с диагональю этого куба.

Рассмотрим сначала способы построения и некоторые свойства оценок для произвольных множеств $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ и начнем с внешних. Зафиксируем матрицу $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ и определим параллелепипед

$$\begin{aligned} P_V^+(\mathcal{Q}) &= \mathcal{P}(v, V, \nu) = S_V^+(\mathcal{Q}) = \mathcal{S}(c, V^\perp, \sigma, n), \\ v &= V((V^\perp)^\top V)^{-1}s, \quad c_i = (\rho(v^{\perp i}|\mathcal{Q}) - \rho(-v^{\perp i}|\mathcal{Q}))/2, \\ \nu &= ((V^\perp)^\top V)^{-1}\sigma, \quad \sigma_i = (\rho(v^{\perp i}|\mathcal{Q}) + \rho(-v^{\perp i}|\mathcal{Q}))/2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Лемма 2.7 $P_V^+(\mathcal{Q})$ является внешним касающимся параллелепипедом для \mathcal{Q} , минимальным по включению среди оценок с данной матрицей ориентации V . Кроме того, $\mathcal{Q} = \bigcap \{P_V^+(\mathcal{Q}) \mid V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}\}$.

Доказательство. Соотношения (1.21) проверяются непосредственными вычислениями. Включение $\mathcal{Q} \subseteq P_V^+(\mathcal{Q})$ и представление \mathcal{Q} в виде пересечения следуют из выпуклости \mathcal{Q} и (1.21). Чтобы проверить, что включение $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P} = \mathcal{P}(p, V, \pi)$ влечет $P_V^+(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{P}$, достаточно, ввиду леммы 2.3, сравнить значения опорных функций параллелепипедов P_V^+ и \mathcal{P} на векторах $\pm v^{\perp i}$, $i = 1, \dots, n$, и использовать (1.21). \square

Замечание 2.1 При фиксированной матрице V оценка $P_V^+(\mathcal{Q})$ обладает свойством *монотонности по включению*, то есть если $\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные множества и $\mathcal{Q}^1 \subseteq \mathcal{Q}^2$, то $P_V^+(\mathcal{Q}^1) \subseteq P_V^+(\mathcal{Q}^2)$.

Замечание 2.2 Иногда параметры параллелепипеда $P_V^+(\mathcal{Q})$ и полосы $S_V^+(\mathcal{Q})$ удобно записывать в виде

$$\begin{aligned} c_i &= (\rho((V^{-1})^\top e^i | \mathcal{Q}) - \rho(-(V^{-1})^\top e^i | \mathcal{Q}))/2, \\ \nu_i &= (\rho((V^{-1})^\top e^i | \mathcal{Q}) + \rho(-(V^{-1})^\top e^i | \mathcal{Q}))/2, \quad i = 1, \dots, n, \\ v &= Vc, \quad S = (V^{-1})^\top, \quad \sigma = \nu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При этом столбцы матриц V и S могут иметь неединичную длину.

Пусть теперь \mathcal{Q} — *выпуклый политоп (многогранник)*, то есть, по определению [129, с.42], выпуклая оболочка конечного числа точек: $\mathcal{Q} = \text{co} \{g^\delta\}_{\delta=1}^t$. Рассмотрим альтернативное описание многогранника \mathcal{Q} с помощью линейных неравенств. Согласно [129, с.45], справедливо

Замечание 2.3 Множество $\mathcal{Q} = \text{co} \{g^\delta\}$ задается следующей системой равенств и неравенств:

$$(x, c^\alpha) = \rho(c^\alpha | \mathcal{Q}), \quad \alpha=1, \dots, \omega, \quad (x, d^\beta) \leq \rho(d^\beta | \mathcal{Q}), \quad \beta=1, \dots, \chi, \quad (2.11)$$

где $\{c^\alpha\}$ — некоторая максимальная система из ω линейно независимых векторов, ортогональных $\text{Lin } \mathcal{Q}$ — несущему подпространству \mathcal{Q} ($\omega = 0$ при $\text{int } \mathcal{Q} \neq \emptyset$), а векторы d^β определяют все крайние опоры к \mathcal{Q} .

Определения 2.3 *Опорой* называется гиперплоскость $(x, l) = \rho(l | \mathcal{Q})$; *крайней* мы называем опору со следующими свойствами. Обозначим $I(l) = \{\delta | (g^\delta, l) = \rho(l | \mathcal{Q}), \delta \in \{1, \dots, t\}\}$. Пусть $d \in \mathbb{R}^n$, причем

$$(d, c^\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \omega, \quad (2.12)$$

$\beta \in I(d)$, и среди векторов $g^\gamma - g^\beta$, $\gamma \in I(d)$, имеется $n - \omega - 1$ линейно независимых. Опора, определяемая вектором d , в случае $\omega = 0$ называется *крайней* [129, с.42]. Мы будем пользоваться этим термином и при $\omega > 0$ (когда $\dim \mathcal{Q} = n - \omega$), а также в более общем случае, когда $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ и $\{c^\alpha\}_{\alpha=1}^\omega$ — это некоторая максимальная система линейно независимых векторов, ортогональных $\text{Lin } \mathcal{Q}$ ⁸.

Следующий критерий позволяет выделить из всего множества оценок $P_V^+(\mathcal{Q})$ элементы, минимальные по включению (см. определение 1.10).

⁸В последнем случае множество крайних точек $\{g^\delta\}_{\delta=1}^t$ и, значит, $I(d)$ могут быть бесконечны.

Лемма 2.8 Пусть $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ и матрица $V = \{v^i\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ такова, что векторы $v^{\perp i}$, $i = 1, \dots, n - \omega$, определяют некоторые крайние опоры для \mathcal{Q} , а $v^{\perp n - \omega + i} = c^i$, $i = 1, \dots, \omega$. Тогда $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ есть минимальная по включению внешняя оценка для \mathcal{Q} .

Доказательство. Нужно убедиться, что если \mathcal{P} удовлетворяет

$$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}), \quad (2.13)$$

то $\mathcal{P} = \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$. Из леммы 2.7, (2.13) и (2.11) следует, что $\rho(\pm v^{\perp i} | \mathcal{Q}) = \rho(\pm v^{\perp i} | \mathcal{P}) = \rho(\pm v^{\perp i} | \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}))$, $i = 1, \dots, n$, $\rho(-v^{\perp i} | \mathcal{Q}) = -\rho(v^{\perp i} | \mathcal{Q})$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$. Из этих соотношений (ввиду (2.9)) следует, что $\pi_i = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, и, значит, остальные $\pi_j > 0$, $j = 1, \dots, n - \omega$ (иначе ввиду леммы 2.3 систему векторов $\{c^\alpha\}$ для $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$ можно было бы расширить, что невозможно ввиду ее максимальности для \mathcal{Q}). Конкретизируя теперь равенства $\rho(v^{\perp i} | \mathcal{P}) + \rho(-v^{\perp i} | \mathcal{P}) = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, заключаем, что $(p^j, v^{\perp i}) = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n - \omega$. Следовательно, $(x, v^{\perp i}) = \rho(v^{\perp i} | \mathcal{P})$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, $\forall x \in \mathcal{P}$. Из (2.13) и определения крайней опоры для \mathcal{Q} следует, что все $\pm v^{\perp i}$, $i = 1, \dots, n - \omega$, определяют крайние опоры не только для \mathcal{Q} , но и для \mathcal{P} . Векторы $\{\pm v^{\perp i}\}_{i=1}^{n-\omega}$ определяют все крайние опоры для \mathcal{P}^9 . Мы построили систему линейных неравенств, определяющих \mathcal{P} в соответствии с замечанием 2.3. Аналогично убеждаемся, что $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ определяется той же системой неравенств, что и \mathcal{P} . \square

Оценки $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ обладают также следующими свойствами.

Лемма 2.9 Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, и $C_1, C_2 > 0$ — такие константы, что $\max\{|\rho(l | \mathcal{X})| \mid \|l\| \leq 1\} \leq C_1$, $\max\{|\rho(l | \mathcal{Y})| \mid \|l\| \leq 1\} \leq C_1$, $C_2 = \max\{\|(V^{-1})^\top e^i\| \mid i = 1, \dots, n\}$. Тогда $h(\mathbf{P}_V^+(\mathcal{X}), \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Y})) \leq n C_2 h(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, и $|\text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{X}) - \text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Y})| \leq 2^n n C_1^{n-1} C_2^n |\det V| h(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, где $h(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — хаусдорфово расстояние (с.6).

⁹Это следует, например, из леммы 3.4.

Доказательство. Из представления параллелепипеда в виде полосы (лемма 2.3) следует, что $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Y}) \subseteq \mathbf{P}_V^+(\mathcal{X}) + \mathcal{P}(0, V, C_2 h(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) e)$, и аналогичное включение верно для $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{X})$. Так как $\mathcal{P}(0, V, \nu) \subseteq \mathcal{B}(0, \sum_{i=1}^n \nu_i)$ ($\mathcal{B}(0, r)$ обозначает шар в \mathbb{R}^n радиуса r с центром в нуле), то первое неравенство доказано. Второе неравенство проверяется путем расписывания его левой части с помощью формул (2.8), (2.9), добавления и вычитания перекрестных членов и прямого оценивания полученного выражения. \square

Рассмотрим теперь внутренние оценки для выпуклых политопов.

Лемма 2.10 Пусть \mathcal{Q} — выпуклый политоп (2.11) и $\mathbf{P}_{v,V,\nu}^-(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(v, V, \nu)$ — параллелепипед с $v \in \mathcal{Q}$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ и $\nu = \nu(v, V)$ таким, что

$$\begin{aligned} \nu_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \nu_i &= 0, \quad \text{если } \exists \alpha \in \{1, \dots, \omega\} : |(v^i, c^\alpha)| \neq 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n |(v^i, d^\beta)| \nu_i &\leq \rho(d^\beta | \mathcal{Q}) - (v, d^\beta), \quad \beta = 1, \dots, \chi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тогда $\mathbf{P}_{v,V,\nu}^-(\mathcal{Q})$ есть внутренняя оценка для \mathcal{Q} : $\mathbf{P}_{v,V,\nu}^-(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$.

Доказательство. Лемма следует из замечания 2.3 и леммы 2.1. \square

Лемма 2.11 Пусть \mathcal{Q} — политоп (2.11) и $\mathbf{P}_{v,V,\nu}^-(\mathcal{Q})$ — параллелепипед из леммы 2.10. Пусть существуют $\gamma \geq 1$ векторов d^{β_j} , $j = 1, \dots, \gamma$, таких, что соответствующие неравенства в (2.14) удовлетворяются как равенства, и для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ либо $(v^i, d^{\beta_j}) \neq 0$ при некотором β_j , $j \in \{1, \dots, \gamma\}$, либо $(v^i, c^\alpha) \neq 0$ при некотором $\alpha \in \{1, \dots, \omega\}$. Тогда оценка $\mathbf{P}_{v,V,\nu}^-(\mathcal{Q})$ является максимальной по включению среди всех параллелепипедов $\mathcal{P}(v, V, \nu)$ с теми же самыми v и V .

Доказательство. Нужно доказать, что если $\mathbf{P}_{v,V,\nu}^-(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ для некоторого $\mathcal{P} = \mathcal{P}(v, V, \bar{\nu})$, то $\bar{\nu} = \nu \equiv \nu(v, V)$. Используя соотношения для опорных функций множеств \mathcal{P} и \mathcal{Q} на векторах d^{β_j} (вытекающие из правого включения) и предположения леммы, имеем $\sum_{i=1}^n |(v^i, d^{\beta_j})| (\bar{\nu}_i - \nu_i) \leq 0$, откуда с учетом неравенств $\nu_i \leq \bar{\nu}_i$, $i = 1, \dots, n$ (вытекающих

из левого включения), получаем $|(v^i, d^{\beta_j})|(\nu_i - \bar{\nu}_i) = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \gamma$. Аналогично, $|(v^i, c^\alpha)|(\nu_i - \bar{\nu}_i) = 0, i = 1, \dots, n, \alpha = 1, \dots, \omega$. Теперь равенство $\nu = \bar{\nu}$ очевидно. \square

Заметим, что, в отличие от внешних оценок, может быть целое семейство внутренних оценок (определяемое множеством значений $\nu(v, V)$), являющихся для \mathcal{Q} максимальными по включению среди параллелепипедов с фиксированными v и V . Очевидно также, что при варьировании параметра $v \in \mathcal{Q}$ (к которому можно добавить варьирование по $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$) оценки $\mathbf{P}_{v, V, \nu}^-(\mathcal{Q})$ "заметают" все множество \mathcal{Q} .

Сформулируем теперь достаточное условие, обеспечивающее для внутренних оценок максимальность по включению.

Определение 2.4 *Вершиной параллелепипеда \mathcal{P} называем любую точку $x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i$, где $|\xi_i| = 1$ для таких i , что $\pi_i > 0$.*

Определение 2.5 [129, 132] *Точка x выпуклого множества \mathcal{Q} называется крайней, если не существует таких $x^1, x^2 \in \mathcal{Q}, x^1 \neq x^2$, что $x = (x^1 + x^2)/2$.*

Лемма 2.12 *Пусть $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$. Если каждая вершина параллелепипеда \mathcal{P} является крайней точкой для \mathcal{Q} и $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{Q}$, то \mathcal{P} есть максимальная по включению внутренняя оценка для \mathcal{Q} .*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P} \subseteq \tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{Q}$ для некоторого параллелепипеда $\tilde{\mathcal{P}}$. Каждая вершина \bar{x} параллелепипеда \mathcal{P} является крайней точкой для $\tilde{\mathcal{P}}$. Несложно проверить, что множество вершин параллелепипеда совпадает с множеством его крайних точек. В силу условия $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{Q}$ параллелепипеды \mathcal{P} и $\tilde{\mathcal{P}}$ имеют одинаковое число вершин $2^{n-\omega}$ ($n - \omega = \dim \mathcal{Q}$). Так как множества крайних точек \mathcal{P} и $\tilde{\mathcal{P}}$ совпадают, то $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. \square

Пусть теперь \mathcal{Q} — ограниченный политоп с непустой внутренностью, который задается в виде пересечения $\Upsilon \geq n + 1$ гиперполос

$$\mathcal{Q} = \bigcap_{j=1}^{\Upsilon} \Sigma^j, \quad \Sigma^j = \Sigma(c_j, s^j, \sigma_j) = \{x \mid |(x, s^j) - c_j| \leq \sigma_j\}. \quad (2.15)$$

Пусть $v \in \mathcal{Q}$ и матрица $V = \{v^1 \dots v^n\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Отметим простой способ определения параметра $\nu = \nu(v, V)$, обеспечивающий внутреннюю оценку $\mathcal{P}(v, V, \nu)$ для \mathcal{Q} . Рассмотрим систему линейных неравенств

$$A^\top \nu \leq b, \quad \nu \geq 0, \quad (2.16)$$

где $A = \{a_i^j\} = \{a^1 \dots a^\Upsilon\} \in M^{n \times \Upsilon}$, $b \in \mathbb{R}^\Upsilon$, причем

$$\begin{aligned} a_i^j &= |(v^i, s^j)|, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, \Upsilon, \\ b_j &= \min\{\sigma_j + c_j - (v, s^j), \sigma_j - c_j + (v, s^j)\}, \quad j = 1, \dots, \Upsilon. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Лемма 2.13 Пусть $v \in \mathcal{Q}$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, а A и b определены соотношениями (2.17). Тогда $a^j \neq 0$, $j=1, \dots, \Upsilon$; $A \geq 0$, $b \geq 0$. Если $v \in \text{int } \mathcal{Q}$, то $b > 0$.

Доказательство. Равенство $a^j = 0$ невозможно, т.к. иначе ненулевой вектор s^j оказался бы ортогонален n линейно-независимым векторам v^i , $i=1, \dots, n$. Если $v \in \text{int } \mathcal{Q}$, то $-\sigma_j < (v, s^j) - c_j < \sigma_j$, $j=1, \dots, \Upsilon$, откуда $b > 0$. Неравенство $b \geq 0$ получается аналогично, а $A \geq 0$ — очевидно. \square

Аналогом леммы 2.10 для множества (2.15) служит

Лемма 2.14 Если $v \in \mathcal{Q}$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, то $\mathcal{P}(v, V, \nu) \subseteq \mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда ν удовлетворяет (2.16).

Лемма 2.15 Пусть $v \in \text{int } \mathcal{Q}$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, а ν^0 и ν^* имеют вид

$$\nu_i^0 = (1/n) \min\{b_j/a_i^j \mid j=1, \dots, \Upsilon, a_i^j \neq 0\}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.18)$$

$$\nu^* = \gamma \nu^0, \quad \text{где } \gamma = \min\{b_j/(a^j, \nu^0) \mid j=1, \dots, \Upsilon, (a^j, \nu^0) \neq 0\}. \quad (2.19)$$

Тогда оба ν^0 и ν^* удовлетворяют (2.16), и, следовательно, определяют внутренние оценки для \mathcal{Q} . При этом

$$0 < \text{vol } \mathcal{P}(v, V, \nu^0) \leq \text{vol } \mathcal{P}(v, V, \nu^*). \quad (2.20)$$

Заметим, что ввиду ограниченности \mathcal{Q} , условия $v \in \text{int } \mathcal{Q}$ и леммы 2.13 множества элементов под знаком минимума в (2.18) и (2.19) не пусты, а числители и знаменатели всех элементов положительны.

Доказательство. Зафиксировав v и V , попытаемся найти ν так, чтобы, не нарушая условия $\mathcal{P}(v, V, \nu) \subseteq \mathcal{Q}$, обеспечить максимальное значение для $\text{vol } \mathcal{P}(v, V, \nu)$. Ввиду (2.8) и леммы 2.14 приходим к задаче нелинейного программирования

$$\nu \in \mathcal{Y} \triangleq \{\nu \mid A^\top \nu \leq b, \nu \geq 0\}, \quad \varphi(\nu) = \prod_{i=1}^n \nu_i \rightarrow \max, \quad (2.21)$$

решение которой в явном виде выписать, однако, затруднительно.

Найдем точки $\alpha_i^j e^j$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, \Upsilon$, пересечения гиперплоскостей $a^j \nu = b_j$ с i -и координатными осями (получим $\alpha_i^j = b_j/a_i^j$). Затем для каждой i -й оси выберем среди точек $\alpha_i^j e^j$, $j=1, \dots, \Upsilon$, ближайшую к началу координат. В силу ограниченности \mathcal{Q} и соотношения $b > 0$ получаем n точек. Проведем через них гиперплоскость $d^\top \nu = c$ (достаточно положить $c=1$, $d_i=1/\min\{b_j/a_i^j \mid j=1, \dots, \Upsilon\}$, $i=1, \dots, n$). Учитывая лемму 2.13, легко убедиться, что симплекс $\mathcal{Z} = \{\nu \mid d^\top \nu \leq c, \nu \geq 0\}$ содержится в множестве (2.16): $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$. Заменяем задачу (2.21) более простой

$$\nu \in \mathcal{Z} = \{\nu \mid d^\top \nu \leq c, \nu \geq 0\}, \quad \varphi(\nu) = \prod_{i=1}^n \nu_i \rightarrow \max, \quad (2.22)$$

для которой легко найти (например, с помощью правила множителей Лагранжа [23, с.241]) единственное решение ν^0 в виде (2.18). Поскольку $\nu^0 \in \mathcal{Y}$, то, в силу леммы 2.14, $\mathcal{P}(v, V, \nu^0) \subseteq \mathcal{Q}$. Очевидно, что значение $\varphi(\nu^0)$ может оказаться значительно меньше, чем $\varphi(\nu^{\text{opt}})$, где $\nu^{\text{opt}} \in \text{Argmax}\{\varphi(\nu) \mid \nu \in \mathcal{Y}\}$ ¹⁰. Поэтому рассмотрим "раздутые" параллелепипеды $\mathcal{P}(v, V, \nu)$ с $\nu = \gamma \nu^0$, $\gamma \geq 1$. Ввиду леммы 2.14 включение $\mathcal{P}(v, V, \nu) \subseteq \mathcal{Q}$ имеет место, если γ удовлетворяет неравенству $\gamma A^\top \nu^0 \leq b$. Наибольшее из таких γ дается равенством (2.19). \square

Далее будем использовать следующее обозначение для внутренней оценки $\mathcal{P}(v, V, \nu^*)$ множества (2.15):

$$\mathbf{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(v, V, \nu^*), \quad \nu^* = \begin{cases} \text{см. (2.19),} & \text{если } v \in \text{int } \mathcal{Q}, \\ 0, & \text{если } v \in \partial \mathcal{Q}. \end{cases} \quad (2.23)$$

¹⁰Например, если $A = I$, $b = e$, то $\varphi(\nu^0) = (1/n)^n \varphi(\nu^{\text{opt}})$.

Замечание 2.4 В лемме 2.15 предполагается, что известна некоторая внутренняя для \mathcal{Q} точка v . Для некоторых множеств \mathcal{Q} указать такую точку нетрудно (см., например, ниже лемму 5.7). В общем случае найти точку $x^* \in \text{int } \mathcal{Q}$ можно, например, путем решения некоторых задач оптимизации. Упомянем некоторые из них.

1) x^* берется из решения $z^* = (x^{*\top}, \delta^*)$ задачи линейного программирования (см. [23, с.408])

$$\delta \rightarrow \min, \quad z \in \{(x^\top, \delta)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |(x, s^j) - c_j| \leq \sigma_j + \delta, j=1, \dots, \Upsilon\}. \quad (2.24)$$

2) Можно найти x^* путем решения задач типа

$$\max_{j=1, \dots, \Upsilon} (\sigma_j)^{-1} |(x, s^j) - c_j| \rightarrow \min \quad (2.25)$$

или

$$\max_{j=1, \dots, \Upsilon} \{|(x, s^j) - c_j| - \sigma_j\} \rightarrow \min. \quad (2.26)$$

3) Найти $x^* \in \text{Argmax} \{\text{vol } \mathbf{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) \mid v \in \mathcal{Q}\}$. Это эквивалентно решению задачи

$$f(v) \rightarrow \min; \quad f(v) = \begin{cases} -\prod_{i=1}^n \nu_i^*, & \text{если } b \geq 0, \\ -\sum_{1 \leq j \leq \Upsilon: b_j < 0} b_j, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.27)$$

где $b = b(v)$ и $\nu_i^* = \nu_i^*(v)$ вычисляются по формулам (2.17), (2.19). Здесь функция $f(v)$ оказывается непрерывной, причем $f(v) \leq 0$ при $v \in \mathcal{Q}$ и $f(v) > 0$ при $v \notin \mathcal{Q}$.

Пусть $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ — политоп

$$\mathcal{Q} = \{x \mid \pm (x, z^j) \leq \zeta_j^\pm, \quad \|z^j\| = 1, \quad j = 1, \dots, \Upsilon\}^{11}. \quad (2.28)$$

Ввиду его ограниченности $\text{rank } Z = n$, где $Z = \{z^1, \dots, z^\Upsilon\}$. Политоп \mathcal{Q} можно также представить ("сдвигая" при $\Upsilon \geq n + 1$ ограничивающие гиперплоскости) в виде пересечения (2.15) тугих гиперполос с $s^j = z^j$.

¹¹Очевидно, любой политоп \mathcal{Q} , заданный системой линейных неравенств, может быть записан в виде (2.28), где допустимы значения $\zeta_j^- = \infty$.

Определение 2.6 [233] Гиперполосу $\Sigma = \{x \mid |(x, s) - c| \leq \sigma\}$ называем *тугой по отношению к \mathcal{Q}* , если обе гиперплоскости $(x, s) = c \pm \sigma$ являются опорами для \mathcal{Q} , то есть $c \pm \sigma = \pm \rho(\pm s | \mathcal{Q})$.

Считая вначале, что $\text{int } \mathcal{Q} \neq \emptyset$, рассмотрим следующую задачу: найти параллелепипед \mathcal{P}^+ с минимальным объемом, содержащий \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^+, \quad \text{vol } \mathcal{P}^+ \rightarrow \min. \quad (2.29)$$

Введем такое множество $\mathcal{V}^4 = \mathcal{V}^4(\mathcal{Q})$ ¹² матриц $V = \{v^i\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, что для каждой системы из n линейно независимых векторов $z^{j_i} \in Z$, $i = 1, \dots, n$, найдется $V \in \mathcal{V}^4$ такая, что $v^{\perp i} = z^{j_i}$. Из [233] и лемм 2.3, 2.7 следует

Лемма 2.16 Если $\text{int } \mathcal{Q} \neq \emptyset$, то параллелепипед $\mathcal{P}^+ = \mathbf{P}_{V^*}^+(\mathcal{Q})$ с

$$V^* \in \text{Argmin} \{ \text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}) \mid V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q}) \} \quad (2.30)$$

является решением задачи (2.29).

Распространим эту лемму на случай $\text{int } \mathcal{Q} = \emptyset$. Пусть $I_1 = \{i \in \{1, \dots, \Upsilon\} \mid \sigma_i > 0\}$, $I_2 = \{i \in \{1, \dots, \Upsilon\} \mid \sigma_i = 0\}$. Выберем среди векторов $\{s^i\}_{i \in I_2}$ максимальную систему линейно независимых и обозначим через $C = \{s^j\}_{j \in I_0}$, $I_0 \subseteq I_2$; $\text{Lin } C$ — порождаемое ею подпространство; $\omega = \dim(\text{Lin } C)$.

Введем следующие конечные множества $\mathcal{V}^\gamma = \mathcal{V}^\gamma(\mathcal{Q})$, $\gamma = 5, 6$ ¹³, матриц $V = \{v^i\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Оба множества удовлетворяют условию, что для каждой системы из $n - \omega$ линейно независимых векторов s^{j_i} , $j_i \in I_1$, $i = 1, \dots, n - \omega$, найдется такая $V \in \mathcal{V}^\gamma$, что

$$v^{\perp i} = s^{j_i}, \quad i = 1, \dots, n - \omega. \quad (2.31)$$

Для любой матрицы $V \in \mathcal{V}^6$ дополнительно требуется, чтобы

$$v^{\perp i} \in \text{Lin } C, \quad i = n - \omega + 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

¹²Множества \mathcal{V}^γ , $\gamma = 1, 2, 3$, будут введены далее; такая нумерация принята для сохранения обозначений, введенных ранее в статьях автора.

¹³Множества \mathcal{V}^γ , $\gamma = 5, 6$, указанными ниже условиями определяются неоднозначно; \mathcal{V}^5 оказывается частным случаем множества \mathcal{V}^6 .

А матрицы $V \in \mathcal{V}^5$ кроме (2.31) должны удовлетворять условиям

$$(v^i, v^j) = 0, \quad i = 1, \dots, n - \omega, \quad j = n - \omega + 1, \dots, n; \quad (2.33)$$

$$(v^i, v^j) = \delta_i^j, \quad i, j = n - \omega + 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

В силу леммы А1.1 из Приложения А условия (2.33), (2.34) дают

$$v^{\perp i} = v^i \in \text{Lin } C, \quad i = n - \omega + 1, \dots, n. \quad (2.35)$$

Лемма 2.17 *Любой параллелепипед $\mathbf{P}_{V^*}^+(\mathcal{Q})$ с матрицей*

$$V^* \in \text{Argmin} \{ \text{vol}_{n-\omega} \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}) \mid V \in \mathcal{V}^\gamma(\mathcal{Q}) \}, \quad \gamma = 4, 5, 6, \quad (2.36)$$

является оптимальной в смысле объема внешней оценкой для \mathcal{Q} .

Доказательство. Поскольку все гиперполосы в (2.15) — тугие, из соглашения о сравнении объемов l_1 - и l_2 -параллелепипедов следует, что оптимальные внешние оценки могут находиться только среди $(n - \omega)$ -параллелепипедов, для которых направления ненулевых полуосей лежат в $(\text{Lin } C)^\perp$ (ортогональном дополнении $\text{Lin } C$).

Зафиксируем какой-либо ортонормированный базис v^i , $i = n - \omega + 1, \dots, n$, в $\text{Lin } C$. Тогда несложно заметить, что любой упомянутый параллелепипед можно представить в виде $\mathcal{P}_V = \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(p(V), V, \pi(V))$, где столбцы матрицы V удовлетворяют (2.33), (2.34), причем последние ω штук совпадают с векторами введенного базиса. При этом $\pi_i(V) > 0$, $i = 1, \dots, n - \omega$; $\pi_i(V) = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$. Введем параллелепипед $\tilde{\mathcal{P}}_V = \mathcal{P}(p(V), V, \tilde{\pi})$ такой, что

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i(V), \quad i = 1, \dots, n - \omega; \quad \tilde{\pi}_i = 1, \quad i = n - \omega + 1, \dots, n. \quad (2.37)$$

Тогда, используя (2.7), (2.33), (2.34), (2.37), (2.8), несложно убедиться, что $\text{vol}_{n-\omega} \mathcal{P}_V = 2^{-\omega} \text{vol}_n \tilde{\mathcal{P}}_V = 2^{n-\omega} |\det(V \text{diag } \tilde{\pi})| = 2^{n-\omega} |\det(W)|^{-1}$, где $W^\top = (\text{diag } \tilde{\pi})^{-1} V^{-1}$.

Оценки \mathcal{P}_V представляют собой пересечение ω гиперплоскостей и $n - \omega$ тугих гиперполос, имеющих в силу леммы 2.3 вид $\tilde{\Sigma}^l = \{x \mid$

$|(W^\top x - c)_l| \leq 1\}$, $l = 1, \dots, n - \omega$, где $c = W^\top p(V)$. Рассуждая аналогично [233, доказательство второй части леммы 1], можно получить необходимое условие того, чтобы полоса $\Sigma \supset \mathcal{Q}$ была тугой, которое применительно к $\tilde{\Sigma}^l$, $l = 1, \dots, n - \omega$, означает, что первые $n - \omega$ столбцов матрицы W представимы в виде

$$w^l = \sum_{\beta=1}^{n-\omega} \alpha_{i_\beta}^l s^{i_\beta} \sigma_{i_\beta}^{-1} + \sum_{k=1}^{\omega} \zeta_k v^{n-\omega+k}, \quad l = 1, \dots, \omega, \quad (2.38)$$

где индексы i_β , $\beta = 1, \dots, n - \omega$, удовлетворяют условию $i_\beta \in I_1$; ζ_k , $k = 1, \dots, \omega$ — некоторые числа, а $\alpha_{i_\beta}^l$, $\beta, l = 1, \dots, n - \omega$, — некоторые числа, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_{i_\beta}^l \geq 0, \quad \beta, l = 1, \dots, n - \omega; \quad \sum_{\beta=1}^{n-\omega} \alpha_{i_\beta}^l = 1, \quad l = 1, \dots, \omega. \quad (2.39)$$

Задача $\text{vol}_{n-\omega} \mathcal{P}_V \rightarrow \min$ свелась к максимизации $|\det W|$ при условиях (2.38), (2.39) и $w^i = v^i$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, вытекающих из (2.35). При этом отбрасывание второй суммы в (2.38) не влияет на величину определителя. Рассуждая аналогично [233, теорема 1], получаем, что минимум $\text{vol}_{n-\omega} \mathcal{P}_V$ достигается на матрицах V , удовлетворяющих (2.31), (2.33), (2.34), т.е. лемма доказана для случая $\gamma=5$. Пользуясь возможной неединственностью V в представлении $(n-\omega)$ -параллелепипедов \mathcal{P}_V в виде $\mathcal{P}(p(V), V, \pi(V))$, замечаем, что найденные оптимальные оценки находятся среди множеств параллелепипедов $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$, $V \in \mathcal{V}^\gamma$, $\gamma=4, 6$. \square

3 Аппроксимации геометрической суммы параллелепипедов

Данный параграф посвящен исследованию множества \mathcal{Q} , являющегося суммой N параллелепипедов:

$$\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)}, \quad \mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Лемма 3.1 Сумма N параллелепипедов $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})$ с одинаковыми матрицами ориентации $P^{(k)} = P$ является параллелепипедом: $\sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(\sum_{k=1}^N p^{(k)}, P, \sum_{k=1}^N \pi^{(k)})$. Если $\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^N \mathcal{X}^{(k)}$, где $\mathcal{X}^{(k)} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, то $P_V^+(\mathcal{Q}) = \sum_{k=1}^N P_V^+(\mathcal{X}^{(k)})$.

Лемма 3.2 Пусть $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P, \pi^{(k)})$, $k = 1, 2$, — параллелепипеды с одинаковыми матрицами P . Тогда множество $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda = \lambda \mathcal{P}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathcal{P}^{(2)}$, где $\lambda \in [0, 1]$, совпадает с параллелепипедом $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}(p_\lambda, P, \pi_\lambda)$, где $p_\lambda = \lambda p^{(1)} + (1 - \lambda) p^{(2)}$, $\pi_\lambda = \lambda \pi^{(1)} + (1 - \lambda) \pi^{(2)}$.

Доказательство. Проверка включений $\mathcal{P}_\lambda \subseteq \tilde{\mathcal{P}}_\lambda$, $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda \subseteq \mathcal{P}_\lambda$ проводится, соответственно, с помощью первого и второго из указанных в (2.1) представлений параллелепипеда. \square

Рассмотрим структуру суммы параллелепипедов в общем случае.

Пусть $G = \{g^\delta\}_{\delta=1}^t$ — множество всевозможных сумм вершин N параллелепипедов, взятых по одной для каждого $\mathcal{P}^{(k)}$. Очевидно, $t \leq 2^{nN}$.

Лемма 3.3 Все крайние точки \mathcal{Q} содержатся в G , и, значит, $\mathcal{Q} = \text{co } G$.

Знак $\text{co } G$ обозначает выпуклую оболочку множества G [129].

Опишем все векторы c^α и d^β , определяющие сумму \mathcal{Q} в виде (2.11).

Из всех столбцов $p^{(k),i}$ матриц $P^{(k)}$, $k=1, \dots, N$, выберем те, которым соответствуют положительные значения $\pi_i^{(k)}$, и введем множество $F = F[\mathcal{Q}] = F(P^{(1)}, \pi^{(1)}, \dots, P^{(m)}, \pi^{(m)}) = \{f^\mu\}_{\mu=1}^M$, состоящее из M различных векторов f^μ , где $f^\mu \in F$ тогда и только тогда, когда найдется такое целое $L(\mu) \geq 1$ и такие $k_\alpha \in \{1, \dots, N\}$, $i_\alpha \in \{1, \dots, n\}$, $j_\alpha \in \{0, 1\}$, что

$$f^\mu = (-1)^{j_\alpha} p^{(k_\alpha), i_\alpha}, \quad \pi_{i_\alpha}^{(k_\alpha)} > 0, \quad (\alpha = 1, \dots, L(\mu)); \quad j_1 = 0. \quad (3.2)$$

Сопоставим каждому вектору $f^\mu \in F$ число $\varphi^\mu = \sum_{\alpha=1}^{L(\mu)} \pi_{i_\alpha}^{(k_\alpha)}$. Тогда очевидно, что $\mathcal{Q} = \{x \mid x = p^{\text{sum}} + \sum_{\mu=1}^M f^\mu \varphi^\mu \zeta_\mu, \quad |\zeta_\mu| \leq 1\}$, где $p^{\text{sum}} = \sum_{k=1}^N p^{(k)}$.

Лемма 3.4 Пусть $\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)}$. Множество $\text{int } \mathcal{Q} \neq \emptyset$ ($\omega = 0$) если и только если $\text{rank } F = n$. При $\dim \mathcal{Q} = n - \omega < n$ в качестве $\{c^\alpha\}$ достаточно взять какую-либо максимальную систему $C = C[\mathcal{Q}] = \{c^\alpha\}_{\alpha=1}^\omega$

линейно независимых нормированных векторов, каждый из которых ортогонален всем векторам f^μ из F .

Нулевой вектор d определяет крайнюю опору к \mathcal{Q} тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям (2.12) и ортогонален каким-либо $n - \omega - 1$ линейно независимым векторам $f^{\mu_\alpha} \in F$:

$$(f^{\mu_\alpha}, d) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n - \omega - 1, \quad \text{rank} \{f^{\mu_\alpha}\}_{\alpha=1}^{n-\omega-1} = n - \omega - 1. \quad (3.3)$$

Доказательство. Остановимся на доказательстве второй части леммы. Пусть $d \in \mathbb{R}^n$. Используя лемму 2.1, замечаем, что индекс β точки $g^\beta = g' + \Sigma'' f^\mu \varphi^\mu$, $g' = p^{\text{sum}} + \Sigma' f^\mu \varphi^\mu \text{sign}(f^\mu, d)$, где в Σ' участвуют такие μ , что $(f^\mu, d) \neq 0$, а в Σ'' — такие, что $(f^\mu, d) = 0$, принадлежит $I(d)$ (см. определения 2.3). Другие индексы $\gamma \in I(d)$ отвечают точкам $g^\gamma = g' + \Sigma'' f^\mu \varphi^\mu \zeta_\mu^\gamma$, получающимся варьированием в Σ'' значений $\zeta_\mu^\gamma \in \{-1, 1\}$. При этом $g^\gamma - g^\beta = \Sigma'' f^\mu \varphi^\mu (\zeta_\mu^\gamma - 1)$. Отсюда уже нетрудно усмотреть справедливость доказываемого утверждения. \square

Замечание 3.1 Условиям (2.12), (3.3) удовлетворяют векторные произведения $n - 1$ векторов $\{c^\beta\}_{\beta=1}^\omega$, $\{f^{\mu_\alpha}\}_{\alpha=1}^{n-\omega-1}$ [131, с.65-67], в частности, $d = [c^1 \dots c^\omega f^{\mu_1} f^{\mu_2} \dots f^{\mu_{n-\omega-1}}] = \det\{c^1 \dots c^\omega f^{\mu_1} \dots f^{\mu_{n-\omega-1}} \mathbf{e}\}$, где компоненты последнего столбца \mathbf{e} представляют собой базисные векторы e^i .

Обозначим через $D = D[\mathcal{Q}] = \{d^\beta\}_{\beta=1}^r$ множество всех различных векторов d , удовлетворяющих (2.12), (3.3), $\|d\|=1$, причем из двух векторов d и $-d$, удовлетворяющих этим условиям, в D включим только один.

Найдем внешние оценки (2.9) для суммы параллелепипедов \mathcal{Q} в явном виде, а также некоторые представления для \mathcal{Q} в виде пересечения конечного числа оценок $P_V^+(\mathcal{Q})$.

Нам потребуются следующие множества матриц $\mathcal{V}^\gamma = \mathcal{V}^\gamma(\sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)})$, $\gamma = 1, 2, 3$. Все они состоят из различных элементов и содержат только матрицы $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ со столбцами

$$v^i \in \text{Lin } F, \quad i = 1, \dots, n - \omega \quad (\text{при } \omega < n); \quad (3.4)$$

$$v^i \in \text{Lin } C = (\text{Lin } F)^\perp, \quad i = n - \omega + 1, \dots, n \quad (\text{при } \omega > 0). \quad (3.5)$$

А именно, если $\omega < n$, то \mathcal{V}^1 — совокупность r матриц $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ удовлетворяющих соотношениям (3.5), $v^i \in F$, $i = 1, \dots, n - \omega - 1$, и

$$\begin{aligned} v^{n-\omega} &= d^\beta \in D \quad (\beta \in \{1, \dots, r\}), \\ (v^{n-\omega}, v^i) &= 0, \quad i = 1, \dots, n - \omega - 1; \end{aligned} \quad (3.6)$$

\mathcal{V}^2 — произвольная совокупность из r матриц $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, удовлетворяющих (3.4) – (3.6)¹⁴; в частности, $\mathcal{V}^2 = \{V \mid V = \text{Ort } V^{(j)}, V^{(j)} \in \mathcal{V}^1, j = 1, \dots, r\}$, где $\text{Ort } V$ — результат ортогонализации (с нормированием) векторов v^1, \dots, v^n с помощью процедуры Грамма-Шмидта [101, с. 70]; \mathcal{V}^3 — произвольное множество матриц $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, стесненных условиями (3.5), $v^i \in F$, $i = 1, \dots, n - \omega$, и такое, что для каждого $d^\beta \in D$, $\beta = 1, \dots, r$, в нем найдется такая матрица $V \in \mathcal{V}^3$, что d^β ортогонален каким-либо $n - \omega - 1$ столбцам v^i матрицы V , $i \in \{1, \dots, n - \omega\}$. Множества \mathcal{V}^γ приведенными условиями определяются неоднозначно. Если $\omega = 0$, то их мощности¹⁵ удовлетворяют соотношениям $M(\mathcal{V}^1) = M(\mathcal{V}^2) = r \leq C_{Nn}^{n-1}$, $M(\mathcal{V}^3) \leq C_{Nn}^n$, и существуют такие \mathcal{V}^3 , что $M(\mathcal{V}^3) < M(\mathcal{V}^1)$ (где $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ — число различных сочетаний из k элементов по m). При $\omega = n$ все эти множества — одноэлементные. Если множество (3.1) представить в виде (2.11), то для него можно также ввести множества матриц \mathcal{V}^γ , $\gamma = 4, 5, 6$, описанные на с. 47 и ниже. Тогда в силу лемм 3.4, A1.1 имеем $\mathcal{V}^3 \subseteq \mathcal{V}^4$ при $\omega = 0$, $\mathcal{V}^3 \subseteq \mathcal{V}^6$ при $\omega > 0$.

Теорема 3.1 Если $\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)}$ есть сумма N параллелепипедов $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})$, то внешние для \mathcal{Q} оценки (2.9) имеют вид

$$\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(p^{\text{sum}}, V, \nu(V)), \quad p^{\text{sum}} = \sum_{k=1}^N p^{(k)}, \quad \nu = \sum_{k=1}^N \text{Abs}(V^{-1}P^{(k)})\pi^{(k)}, \quad (3.7)$$

или, иначе (при записи $\mathcal{P}^{(k)}$ в форме параллелотопов),

$$\mathbf{P}_V^+(\sum_{k=1}^N \mathcal{P}[p^{(k)}, \bar{P}^{(k)}]) = \mathcal{P}[\sum_{k=1}^N p^{(k)}, V \cdot \text{diag}(\sum_{k=1}^N \text{Abs}(V^{-1}\bar{P}^{(k)})e)] \quad (3.8)$$

¹⁴Таким образом, \mathcal{V}^1 оказывается частным случаем множества \mathcal{V}^2 .

¹⁵То есть число элементов, которое мы обозначаем через $M(\mathcal{V}^\gamma)$.

(эти формулы верны при любой неособой матрице V). Кроме того,

$$\mathcal{Q} = \bigcap \{ \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}) \mid V \in \mathcal{V}^\gamma \}, \quad \gamma = 1, 2, 3, 5, 6 \text{ и } \gamma = 4 \text{ при } \omega = 0. \quad (3.9)$$

Если $\text{int } \mathcal{Q} = \emptyset$ и $V \in \mathcal{V}^\gamma$ ($\gamma \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$), то оказывается, что $\nu_i = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$.

Доказательство. Выражения для $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ вытекают из (2.10) и леммы 2.1. Равенства $\nu_i = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, получаются за счет того, что для каждого слагаемого в ν_i либо $\pi_j^{(k)} = 0$, либо $p^{(k),j}$ совпадает (с точностью до знака) с одним из векторов F , и тогда при $V \in \mathcal{V}^\gamma$ ввиду леммы A1.1 $(V^{-1}P^{(k)})_i^j = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$. В силу леммы 2.7 $\mathcal{Q} \subseteq \mathbf{P}_P^+(\mathcal{Q})$, $\forall V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Осталось доказать, что $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$, где \mathcal{Q}' — множество в правой части (3.9). Рассуждаем от противного. Пусть $x^* \in \mathcal{Q}'$, но $x^* \notin \mathcal{Q}$. В силу теоремы отделимости, замечания 2.3 и леммы 3.4, $(x^*, l^*) > \rho(l^* | \mathcal{Q})$, где l^* либо совпадает с одним из векторов $\pm d^\beta$, $d^\beta \in D$, либо $l^* \in (\text{Lin } F)^\perp$. Соответственно, для каждого из множеств \mathcal{V}^γ , $\gamma = 1, 2, 3$, можно либо найти такую матрицу $V^* \in \mathcal{V}^\gamma$, что какие-то $n - \omega - 1$ из ее первых $n - \omega$ столбцов ортогональны d^β , либо взять произвольную $V^* \in \mathcal{V}^\gamma$. Поскольку $\mathcal{Q}' \subseteq \mathbf{P}_{V^*}^+(\mathcal{Q})$, имеем $(x^*, l^*) \leq \rho(l^* | \mathbf{P}_{V^*}^+(\mathcal{Q}))$. Расписывая правые части обоих неравенств для (x^*, l^*) с учетом леммы 2.1, соотношений ортогональности между l^* и столбцами V^* и леммы A1.1, получаем противоречие. Доказательство для \mathcal{V}^γ , $\gamma = 4, 5, 6$, аналогично. \square

Для иллюстрации на рис. 3.1(a) показан пример оценки $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ для случая $n = N = 2$; на рис. 3.2(b) и 3.2(c) показаны, соответственно, семейства оценок $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ при $V \in \mathcal{V}^1 = \mathcal{V}^2$ и $V \in \mathcal{V}^3 = \mathcal{V}^4$.

Рассмотрим внутренние оценки для \mathcal{Q} . Из лемм 2.10, 2.15 следует

Лемма 3.5 Если $\text{rank } F = n$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ и вектор $\nu \geq 0$ удовлетворяет $\sum_{i=1}^n |(v^i, d^\beta)| \nu_i \leq \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n |(p^{(k),i}, d^\beta)| \pi_i^{(k)}$, $d^\beta \in D$, $\beta = 1, \dots, r$, то $\mathcal{P}(p^{\text{sum}}, V, \nu) \subseteq \mathcal{Q}$. В частности, $\mathbf{P}_{p^{\text{sum}}, V}^-(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$, где $\mathbf{P}_{p^{\text{sum}}, V}^-(\mathcal{Q})$ строится, как описано в лемме 2.15, на основе представления \mathcal{Q} в виде $\mathcal{Q} = \{x \mid \pm (x, d^\beta) \leq \sum_{k=1}^N \rho(\pm d^\beta | \mathcal{P}^{(k)})\}$, $d^\beta \in D$, $\beta = 1, \dots, r$.

Представим \mathcal{Q} в виде объединения параллелепипедов. Пусть $d^\beta \in D[\mathcal{Q}]$. Обозначим $J = \{1, \dots, M\}$, $J_1[d^\beta] = \{\mu \mid (f^\mu, d^\beta) = 0, \mu \in J\}$, $J_2[d^\beta] = J \setminus J_1[d^\beta]$. В силу определения d^β имеем $M(J_1[d^\beta]) \geq n - \omega - 1$.

Предположение 3.1 Каждый $d^\beta \in D$ ортогонален не более, чем $n - \omega - 1$ векторам из F (при $\omega = 0$ любые n векторов из F линейно независимы).

Лемма 3.6 Пусть $\mathcal{Q} \setminus p^{\text{sum}} \neq \emptyset$. Тогда

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{\beta=1}^r \mathcal{Q}^\beta, \quad \text{где } \mathcal{Q}^\beta = \{x \mid x = p^{\text{sum}} + u^\beta \eta_1 + \mathcal{T}^\beta, |\eta_1| \leq 1\},$$

$$u^\beta = \sum_{\mu \in J_2[d^\beta]} f^\mu \varphi^\mu \text{sign}(f^\mu, d^\beta), \quad \mathcal{T}^\beta = \{x \mid x = \sum_{\mu \in J_1[d^\beta]} f^\mu \varphi^\mu \zeta_\mu, |\zeta_\mu| \leq 1\}, \quad d^\beta \in D[\mathcal{Q}].$$

В условиях предположения 3.1 все \mathcal{Q}^β являются параллелепипедами: $\mathcal{Q}^\beta = \mathcal{P}(p^{\text{sum}}, V^\beta, \nu^\beta)$, где $v^{\beta,i} = f^{\mu_i}$, $\nu_i^\beta = \varphi^{\mu_i}$, $\mu_i \in J_1[d^\beta]$, $i = 1, \dots, n - \omega - 1$; $v^{\beta, n-\omega} = \text{Nrv } u^\beta$, $\nu_{n-\omega}^\beta = \|u^\beta\|$; $v^{\beta,i} = c^i \in C$, $\nu_i^\beta = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$.

Символом $\text{Nrv } x$ обозначаем нормированный вектор: $\text{Nrv } x = \|x\|^{-1}x$.

Доказательство. Поскольку вектор $v^{\beta, n-\omega}$ линейно независим от $\{v^{\beta,i}\}_{i=1}^{n-\omega-1}$ (ввиду $J_2[d^\beta] \neq \emptyset$) и $\text{Lin } \{v^{\beta,i}\}_{i=n-\omega+1}^n = (\text{Lin } \{v^{\beta,i}\}_{i=1}^{n-\omega})^\perp$, то $V^\beta = \{v^{\beta,i}\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. С помощью аппарата опорных функций устанавливается, что $\mathcal{Q}^\beta \subseteq \mathcal{Q}$, $\beta = 1, \dots, r$. Пусть $x \in \mathcal{Q}$. Ввиду замечания 2.3, леммы 3.4 и ограниченности \mathcal{Q} на луче $x(\lambda) = p^{\text{sum}} + \lambda(x - p^{\text{sum}})$, $\lambda \geq 0$, найдется такая точка $x^* = x(\lambda^*) \in \mathcal{Q}$ ($\lambda^* \geq 1$), что для некоторого $d^\beta \in D$ будем иметь $(x^*, (-1)^\delta d^\beta) = \rho((-1)^\delta d^\beta \mid \mathcal{Q})$, где $\delta \in \{0, 1\}$. Нетрудно убедиться, что $x^* \in p^{\text{sum}} + (-1)^\delta u^\beta + \mathcal{T}^\beta$. Так как x^* и p^{sum} принадлежат выпуклому множеству \mathcal{Q}^β , то и $x \in \mathcal{Q}^\beta$. Представление $\mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}^\beta$ доказано. Второе утверждение леммы очевидно, т.к. $M(J_1[d^\beta]) = n - \omega - 1$. \square

Рассмотрим множества \mathcal{Q}^β без предположения 3.1. Зафиксируем $\beta_1 \in \{1, \dots, r\}$. Если $M(J_1[d^{\beta_1}]) = n - \omega - 1$, то \mathcal{Q}^{β_1} является параллелепипедом с параметрами, указанными выше. В противном случае для \mathcal{T}^{β_1} ($\dim \mathcal{T}^{\beta_1} = n - \omega - 1$) построим множество векторов $D^{\beta_1} = D^{\beta_1}[\mathcal{T}^{\beta_1}] = \{d^{\beta_1, \beta_2}\}_{\beta_2=1}^{r_2(\beta_1)}$ аналогично тому, как строилось $D[\mathcal{Q}]$ для \mathcal{Q} (векторы из

D^{β_1} будут определять половину крайних опор для \mathcal{T}^{β_1}). Обозначим $J_1[d^{\beta_1\beta_2}] = \{\mu \mid (f^\mu, d^{\beta_1\beta_2})=0, \mu \in J_1[d^{\beta_1}]\}$, $J_2[d^{\beta_1\beta_2}] = J_1[d^{\beta_1}] \setminus J_1[d^{\beta_1\beta_2}]$. Тогда $\mathcal{T}^{\beta_1} = \bigcup_{\beta_2=1}^{r_2(\beta_1)} \mathcal{Q}^{\beta_1\beta_2}$, $\mathcal{Q}^{\beta_1\beta_2} = \{x \mid x = u^{\beta_1\beta_2}\eta_2 + \mathcal{T}^{\beta_1\beta_2}, |\eta_2| \leq 1\}$, $u^{\beta_1\beta_2} = \sum_{\mu \in J_2[d^{\beta_1\beta_2}]} f^\mu \varphi^\mu \text{sign}(f^\mu, d^{\beta_1\beta_2})$, $\mathcal{T}^{\beta_1\beta_2} = \{x \mid x = \sum_{\mu \in J_1[d^{\beta_1\beta_2}]} f^\mu \varphi^\mu \zeta_\mu, |\zeta_\mu| \leq 1\}$. По построению $\dim \mathcal{T}^{\beta_1\beta_2} = n - \omega - 2 \leq M(J_1[d^{\beta_1\beta_2}])$. Если здесь имеет место строгое неравенство, то процесс продолжаем для $\mathcal{T}^{\beta_1\beta_2}$. За конечное число шагов дойдем до $\mathcal{T}^{\beta_1 \dots \beta_j} = \{x \mid x = \sum_{\mu \in J_1[d^{\beta_1 \dots \beta_j}]} f^\mu \varphi^\mu \zeta_\mu, |\zeta_\mu| \leq 1\}$ такого, что $\dim \mathcal{T}^{\beta_1 \dots \beta_j} = n - \omega - j = M(J_1[d^{\beta_1 \dots \beta_j}])$. Таким образом, справедлива

Лемма 3.7 Пусть $\mathcal{Q} \setminus p^{\text{sum}} \neq \emptyset$. Тогда \mathcal{Q} представимо в виде

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{\beta_1=1}^r \bigcup_{\beta_2=1}^{r_2(\beta_1)} \dots \bigcup_{\beta_j=1}^{r_j(\beta_1 \dots \beta_{j-1})} \mathcal{P}(p^{\text{sum}}, V^{\beta_1 \dots \beta_j}, \nu^{\beta_1 \dots \beta_j}),$$

где $v^{\beta_1 \dots \beta_j, i} = f^{\mu_i}$, $\nu_i^{\beta_1 \dots \beta_j} = \varphi^{\mu_i}$, $\mu_i \in J_1[d^{\beta_1 \dots \beta_j}]$, $i = 1, \dots, n - \omega - j$; $v^{\beta_1 \dots \beta_j, n - \omega - j + i} = \text{Nrv } u^{\beta_1 \dots \beta_i}$, $\nu_{n - \omega - j + i}^{\beta_1 \dots \beta_j} = \|u^{\beta_1 \dots \beta_i}\|$, $i = 1, \dots, j$; $v^{\beta_1 \dots \beta_j, i} = c^i \in C$, $\nu_i^{\beta_1 \dots \beta_j} = 0$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$.

Замечание 3.2 Если $\omega = 0$, $M(F) = Nn$ и выполнено предположение 3.1, то это объединение состоит из $r = C_{Nn}^{n-1}$ множеств. На рис. 3.2(а) приведен пример для $n = N = 2$, когда для представления \mathcal{Q} в виде объединения необходимо не менее 4 (то есть C_{Nn}^{n-1}) параллелепипедов.

Действительно, здесь \mathcal{Q} имеет 4 пары параллельных граней. При представлении \mathcal{Q} в виде конечного числа внутренних оценок для каждой грани должен найтись содержащий ее параллелепипед. Для того, чтобы число элементов в объединении было меньше 4, необходимо построить хотя бы один параллелепипед, содержащий три из упомянутых граней, но из рисунка видно, что это невозможно.

Введем еще одно семейство внутренних оценок для \mathcal{Q} .

Пусть $\tilde{V} = \{\tilde{v}^i\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ — такая матрица, что ее первые $n - \omega$ столбцов принадлежат F , а остальные им ортогональны: $\tilde{v}^i \in F$, $i = 1, \dots, n - \omega$, $\tilde{v}^{n - \omega + j} = c^j$, $j = 1, \dots, \omega$, $W = \{w^i\} = \text{Ort } \tilde{V}$, и пусть

векторы \tilde{u}^i , $i = 1, \dots, n-\omega$, имеют вид $\tilde{u}^i = \sum_{\mu \in J_i} f^\mu \varphi^\mu \text{sign}(f^\mu, w^i)$, $J_i = \{\mu \in \{1, \dots, M\} \mid (f^\mu, w^\alpha) = 0, \alpha = i+1, \dots, n\}$.

Теорема 3.2 Если $\mathcal{P} = \mathcal{P}(v, V, \nu)$ определяется соотношениями

$$v = p^{\text{sum}}; \quad V = \{v^i\}; \quad \begin{array}{ll} v^i = \text{Nrv } \tilde{u}^i, & \nu_i = \|\tilde{u}^i\|, & i = 1, \dots, n-\omega; \\ v^i = w^i, & \nu_i = 0, & i = n-\omega+1, \dots, n, \end{array}$$

то он является максимальным по включению внутренним параллелепипедом для $\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)}$. Кроме того, $\mathcal{Q} = \cup \mathcal{P}(p^{\text{sum}}, V, \nu)$, где объединение взято по всем различным параллелепипедам, которые могут быть построены, как описано выше.

Доказательство. Заметим, что $(\tilde{u}^i, w^i) \neq 0$, $i = 1, \dots, n-\omega$ (действительно, равенство $(\tilde{u}^i, w^i) = 0$ означает $(f^\mu, w^i) = 0$, $\forall \mu \in J_i$, а это для упомянутых i невозможно ввиду выбора \tilde{V} и W). По лемме A1.2 $\det V \neq 0$. Значит, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Так как каждый f^μ вносит ненулевой вклад только в один из \tilde{u}^i , то $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$. Пусть $x^* = \sum_{i=1}^{n-\omega} (-1)^{\alpha_i} \tilde{u}^i$ — произвольная вершина \mathcal{P} . Прямым вычислением можно проверить, что она удовлетворяет условиям леммы A1.3 (где w^i заменены на $(-1)^{\alpha_i} w^i$), и, значит, является крайней точкой для \mathcal{Q} . По лемме 2.12 \mathcal{P} — максимальный по включению внутренний параллелепипед для \mathcal{Q} . Представление \mathcal{Q} в виде объединения вытекает из леммы 3.7, поскольку каждый параллелепипед из леммы 3.7 может быть построен как описано выше. \square

Рис. 3.2(d) иллюстрирует теорему 3.2 для случая $n = N = 2$.

Замечание 3.3 Сумму параллелепипедов удалось представить в виде объединения конечного числа неуплощаемых по включению внутренних оценок. Однако несложно заметить, что если она состоит из "большого" числа "маленьких" параллелепипедов, то указанные оценки оказываются "длинными узкими". Поэтому имеет смысл ввести также более широкое семейство внутренних параллелотопозначных оценок.

Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$ — сумма двух параллелотопов, где $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}[p^{(k)}, \bar{P}^{(k)}]$, $k = 1, 2$, $\bar{P}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times r_k}$, $r_k \leq n$.

Введем множества $\mathcal{G}^{r \times n}$ $r \times n$ -матриц, для которых сумма абсолютных величин элементов каждой строки не превосходит 1:

$$\mathcal{G}^{r \times n} = \{\Gamma = \{\gamma_\alpha^\beta\} \in \mathbb{R}^{r \times n} \mid \max_{1 \leq \alpha \leq r} \sum_{\beta=1}^n |\gamma_\alpha^\beta| \leq 1\}. \quad (3.10)$$

Для произвольных $\Gamma^{(k)} \in \mathcal{G}^{r_k \times n}$, $k = 1, 2$, и определим параллелотоп

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) &\triangleq \mathcal{P}[p^-, \bar{P}^-], \quad \text{где} \\ p^- &= p^{(1)} + p^{(2)}, \quad \bar{P}^- = \bar{P}^{(1)}\Gamma^{(1)} + \bar{P}^{(2)}\Gamma^{(2)}, \quad \Gamma^{(k)} \in \mathcal{G}^{r_k \times n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Лемма 3.8 *Параллелотоп (3.11) есть внутренняя оценка для $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$ каковы бы ни были $\Gamma^{(k)} \in \mathcal{G}^{r_k \times n}$, $k=1, 2$. Кроме того,*

$$\mathcal{Q} = \bigcup \{\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{Q}) \mid \Gamma^{(1)} \in \mathcal{G}^{r_1 \times n}, \Gamma^{(2)} \in \mathcal{G}^{r_2 \times n}\}, \quad (3.12)$$

причем если $\mathcal{P}^{(1)}$ — параллелепипед, то достаточно положить $\Gamma^{(1)} = I$:

$$\mathcal{Q} = \bigcup \{\mathbf{P}_{I, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{Q}) \mid \Gamma^{(2)} \in \mathcal{G}^{r_2 \times n}\}. \quad (3.13)$$

Оценка \mathcal{P}^- вида (3.11) является тугой (в направлении l), если $\Gamma^{(k)} = \{\gamma^{(k)j}\} \in \mathcal{G}^{r_k \times n}$ таковы, что

$$\text{sign } c^{(1)\top} \gamma^{(1)j} = \text{sign } c^{(2)\top} \gamma^{(2)j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} : c^{(k)\top} \gamma^{(k)j} \neq 0, \quad k=1, 2, \quad (3.14)$$

$$\text{Abs } (c^{(k)\top} \Gamma^{(k)})e = (\text{Abs } c^{(k)})^\top e^{16}, \quad k = 1, 2, \quad \text{где } c^{(k)} = \bar{P}^{(k)\top} l. \quad (3.15)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $p^{(1)} = p^{(2)} = 0$. Если $x \in \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{Q})$, то существует $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\text{Abs } \xi \leq e$ и $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, где $x^{(k)} = \bar{P}^{(k)} \xi^{(k)}$, $\xi^{(k)} = \Gamma^{(k)} \xi$. Ввиду (3.10) $\text{Abs } \xi^{(k)} \leq e$. Поэтому $x^{(k)} \in \mathcal{P}^{(k)}$ и $x \in \mathcal{Q}$. Включение $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$ доказано.

Докажем обратные включения в (3.12), (3.13). Пусть $x \in \mathcal{Q}$, т.е. найдутся такие $\xi^{(k)} \in \mathbb{R}^{r_k}$, $\text{Abs } \xi^{(k)} \leq e$, что $x = \bar{P}^{(1)} \xi^{(1)} + \bar{P}^{(2)} \xi^{(2)}$. Полагая $\Gamma^{(k)} = \{\text{diag } \xi^{(k)}, 0\} \in \mathcal{G}^{r_k \times n}$ и $\xi = e \in \mathbb{R}^n$, замечаем, что $x = \bar{P}^- \xi \in \mathcal{P}[0, \bar{P}^-] = \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{Q})$ и x принадлежит правой части (3.12).

¹⁶Здесь векторы $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ в левой и правой части могут иметь разную размерность.

Рассмотрим случай, когда $\bar{P}^{(1)} = P^{(1)} \text{diag } \pi^{(1)}$, $\det P^{(1)} \neq 0$, $\pi^{(1)} \geq 0$. Пусть вначале x принадлежит границе \mathcal{Q} . Тогда хотя бы одна из компонент $\xi^{(1)}$ (пусть i -я) по модулю равна 1. Действительно, если $\pi_i^{(1)} = 0$ для некоторого i , то можно считать $\xi_i^{(1)} = 1$. Если же $\pi^{(1)} > 0$ и было бы $\text{Abs } \xi^{(1)} < e$, то точка x принадлежала бы \mathcal{Q} вместе с некоторой окрестностью в \mathbb{R}^n и не была граничной. Полагая $\Gamma^{(1)} = I$, $\Gamma^{(2)} = \{0 \dots 0 \text{ sign } \xi_i^{(1)} \xi^{(2)} 0 \dots 0\} \in \mathcal{G}^{r_2 \times n}$ (все столбцы кроме i -о — нулевые), $\xi = \xi^{(1)}$, опять имеем $x = \bar{P}^- \xi$, что означает принадлежность x правой части (3.13). Пусть теперь x — произвольная точка из \mathcal{Q} . Тогда найдется некоторая точка x^* , принадлежащая лучу λx , $\lambda \geq 0$, и границе \mathcal{Q} . Согласно предыдущему, $x^* \in \mathcal{P}^-$, где \mathcal{P}^- — некоторый элемент объединения (3.13). Очевидно, что и $0 \in \mathcal{P}^-$. Поскольку $x = \lambda_1 x^* + (1 - \lambda_1) \cdot 0$, $0 \leq \lambda_1 = \lambda^{-1} \leq 1$, то $x \in \mathcal{P}^-$ ввиду выпуклости \mathcal{P}^- .

Для доказательства последнего утверждения леммы замечаем, что $\rho(l|\mathcal{P}^-) = \text{Abs}(l^\top(\bar{P}^{(1)}\Gamma^{(1)} + \bar{P}^{(2)}\Gamma^{(2)}))e = \text{Abs}(c^{(1)\top}\Gamma^{(1)})e + \text{Abs}(c^{(2)\top}\Gamma^{(2)})e = \rho(l|\mathcal{P}^{(1)}) + \rho(l|\mathcal{P}^{(2)})$, где использованы формула для опорной функции параллелотопа и соотношения (3.14) – (3.15). \square

Использование обозначений $\mathbf{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q})$ из (2.23) и $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)},\Gamma^{(2)}}^-(\mathcal{Q})$ из (3.11) в каждом конкретном контексте, по-видимому, не должно вызвать путаницы. Мы будем использовать также обозначение

$$\mathbf{P}_{\Gamma}^-(\mathcal{P}) \triangleq \mathcal{P}[p, \bar{P}\Gamma] \quad \text{для } \mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}], \quad \bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \Gamma \in \mathcal{G}^{r \times n}. \quad (3.16)$$

Следствие 3.1 Пусть в условиях леммы 3.8 $r_1 = n$, $r_2 = r$. Пусть $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ — произвольное подмножество индексов из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а $\{i_1, \dots, i_r\}$ — какая-либо перестановка чисел $\{1, \dots, r\}$. Если $\Gamma^{(1)} = I$, а $\Gamma^{(2)} = \{\gamma^{(2)j}\}$ такова, что ненулевыми могут быть только столбцы с номерами $j \in J$, и столбцы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)j} &= 0, \quad \text{если } j \notin J, & \gamma^{(2)j} &= \beta_\alpha e^{i_\alpha}, \quad \text{если } j = j_\alpha \in J, \\ \beta_\alpha &= \begin{cases} \text{sign } c_{j_\alpha}^{(1)} \text{sign } c_{i_\alpha}^{(2)}, & \text{если } c_{j_\alpha}^{(1)} \cdot c_{i_\alpha}^{(2)} \neq 0, \\ \text{sign } c_{i_\alpha}^{(2)}, & \text{если } c_{j_\alpha}^{(1)} = 0, \quad c_{i_\alpha}^{(2)} \neq 0, \\ \text{любое число, такое что } |\beta_\alpha| \leq 1, & \text{если } c_{i_\alpha}^{(2)} = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

то оценка $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^-(\mathcal{Q})$ будет тугой для \mathcal{Q} (в направлении l)¹⁷.

Доказательство. Достаточно проверить (3.14), (3.15). Равенства (3.14) не нужно обеспечивать при $j \notin J$ (т.к. тогда $c^{(2)\top} \gamma^{(2)j} = 0$), а также при $j = j_\alpha \in J$ в случаях, когда $c_{i_\alpha}^{(2)} = 0$ (тогда $c^{(2)\top} \gamma^{(2)j} = c_{i_\alpha}^{(2)} \beta_\alpha = 0$) или $c_{i_\alpha}^{(2)} \neq 0$, но $c_j^{(1)} = 0$ (тогда $c^{(1)\top} \gamma^{(1)j} = c_j^{(1)} = 0$). При оставшихся значениях α имеем $c_{j_\alpha}^{(1)} \cdot c_{i_\alpha}^{(2)} \neq 0$, и равенства (3.14) выполнены в силу выбора β_α в соответствии с (3.17). Для проверки условия (3.15) при $k = 2$ (при $k = 1$ оно очевидно) достаточно заметить, что $\text{Abs}(c^{(2)\top} \Gamma^{(2)})e = \sum_{\alpha=1}^r |c_{i_\alpha}^{(2)} \beta_\alpha|$, разбить последнюю сумму на три части, соответствующие трем указанным в (3.17) случаям вычисления β_α , и убедиться, что полное суммирование дает $\sum_{\alpha=1}^r |c_\alpha^{(2)}|$. \square

Для примера на рис. 3.1(b) показаны две внутренние оценки (3.11): $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^-(\mathcal{Q})$ соответствует $\Gamma^{(1)} = 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma^{(2)} = I$, а $\mathbf{P}_{I, \Gamma^*}^-(\mathcal{Q})$ соответствует матрице Γ^* , удовлетворяющей условиям (3.29), описанным ниже.

Рассмотрим задачу о нахождении для суммы двух параллелепипедов внешней оценки наименьшего объема. Ее решение может быть получено с помощью лемм 2.16, 2.17 и 3.4. При этом, если $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$, $\text{int } \mathcal{Q} \neq \emptyset$, то $Z = D[\mathcal{Q}]$ (см. с. 51) и для нахождения V^* достаточно перебрать не более $C_r^n \leq C_{C_{2n}^{n-1}}^n$ матриц $V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q})$.

В частном случае, когда один из параллелепипедов "мал":

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \varepsilon \cdot \mathcal{P}^{(2)}, \quad \mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)}), \quad \varepsilon > 0, \quad (3.18)$$

решение задачи (2.29) может быть получено в явном виде.

Лемма 3.9 Пусть \mathcal{Q} имеет вид (3.18) и $\pi^{(1)} > 0$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\varepsilon < \varepsilon_0$ параллелепипед $\mathbf{P}_{\mathcal{P}^{(1)}}^+(\mathcal{Q})$ имеет наименьший объем среди всех параллелепипедов, содержащих \mathcal{Q} .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда центры $\mathcal{P}^{(k)}$ находятся в начале координат, и $\mathcal{P}^{(1)}$ — это единичный куб:

$$\mathcal{P}^{(1)} = \bar{\mathcal{P}}^{(1)} = \mathcal{P}(0, I, e), \quad \mathcal{P}^{(2)} = \bar{\mathcal{P}}^{(2)} = \mathcal{P}(0, P, \pi). \quad (3.19)$$

¹⁷Но не обязательно параллелепипедом.

Действительно, если $x^{(k)}$, $k = 1, 2$, пробегают $\varepsilon^{k-1}\mathcal{P}^{(k)}$, то $y = y^{(1)} + y^{(2)}$, где $y^{(k)} = A(x^{(k)} - \varepsilon^{k-1}p^{(k)})$, $A = (\text{diag } \pi^{(1)})^{-1}(P^{(1)})^{-1}$, пробегают $\mathcal{Q}_y = \bar{\mathcal{P}}^{(1)} + \varepsilon \cdot \bar{\mathcal{P}}^{(2)}$ с $P = AP^{(2)}(\text{diag } \{\|Ap^{(2)i}\|\})^{-1}$, $\pi = \text{diag } \{\|Ap^{(2)i}\|\}\pi^{(2)}$ в (3.19). Предположим, уже доказано, что $\mathbf{P}_I^+(\mathcal{Q}_y)$ является решением задачи (2.29) для \mathcal{Q}_y . Аффинное преобразование $x = p^{(1)} + \varepsilon p^{(2)} + A^{-1}y$ отображает \mathcal{Q}_y на \mathcal{Q} и сохраняет свойство включения и отношение объемов. Следовательно, \mathcal{P}^+ , являющийся образом $\mathbf{P}_I^+(\mathcal{Q}_y)$, решает задачу (2.29). По лемме 2.5 $\mathcal{P}^+ = \mathbf{P}_{P^{(1)}}^+(\mathcal{Q})$.

Осталось доказать для случая (3.19), что $\Delta(V) \equiv 2^{-n}(\text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}) - \text{vol } \mathbf{P}_I^+(\mathcal{Q})) \geq 0$, $\forall V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ для всех достаточно малых ε . Ввиду (3.7)

$$\Delta(V) = |\det V|^{-(n-1)} \prod_{i=1}^n (a_i + \varepsilon b_i) - \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon d_i) = A_0(V) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i A_i(V), \quad (3.20)$$

где $a_i = \rho(\tilde{w}^i | \bar{\mathcal{P}}^{(1)})$, $b_i = \rho(\tilde{w}^i | \bar{\mathcal{P}}^{(2)})$, $d_i = \rho(e^i | \bar{\mathcal{P}}^{(2)})$, $\tilde{W}^\top = \{\tilde{w}^i\}^\top$ — соединенная матрица к V , $(V^{-1})^\top = W = \{w^i\} = (\det V)^{-1} \tilde{W}$.

Рассмотрим $A_0(V)$. Так как $(\det W)^2 \leq \prod_{i=1}^n \|w^i\|^2$ [12, с.154], то для каждой V

$$\begin{aligned} A_0(V) &= |\det V| \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(w^i, e^j)| - 1 \\ &= |\det V| \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n |w_\alpha^i|^2 + 2 \sum_{\alpha < \beta} |w_\alpha^i| |w_\beta^i| \right)^{1/2} - 1 \geq |\det V| \prod_{i=1}^n \|w^i\| - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_0(V) = 0$ может быть только в том случае, если все $\sum_{\alpha < \beta} |w_\alpha^i| |w_\beta^i| = 0$ и, с учетом $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, только если $\text{Abs } V = I^{18}$.

Обозначим через D_j δ -окрестности нулей $A_0(V)$, $D_* = \mathcal{M}_*^{n \times n} \setminus \cup_j D_j$. Тогда $\min\{A_0(V) | V \in D_*\} = A_{0*} > 0$, и при $\varepsilon < 1$ ввиду (3.20)

$$\Delta(V) \geq A_{0*} - \varepsilon \bar{C}_*, \quad \forall V \in D_*, \quad (3.21)$$

где константа \bar{C}_* определяется величиной $\bar{C} = \max\{\|p^j\| \pi_j | 1 \leq j \leq n\}$.

Оценим $\Delta(V)$ в D_j , и без потери общности, в D_1 — δ -окрестности $V = I$. Используя сферические координаты [150, т.3, с.401] и вводя углы

¹⁸Равенство $\sum_{\alpha < \beta} |w_\alpha w_\beta| = 0$ для вектора $w \in \mathbb{R}^n$ возможно только, если какие-то $n - 1$ его компонент равны 0.

ϕ_i^j , $i=1, \dots, n-1$, для j -х столбцов матрицы $V = \{v_i^j\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, имеем:

$$v_1^j = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \phi_k^j, \quad v_i^j = \prod_{k=1}^{n-i} \sin \phi_k^j \cos \phi_{n-i+1}^j, \quad i = 2, \dots, n, \quad (j = 1, \dots, n).$$

В D_1 углы ϕ_i^j близки к $\bar{\phi}_i^j$, где $\bar{\phi}_{n-j+1}^j = 0$ при $j = 2, \dots, n$, а остальные $\bar{\phi}_i^j = \pi/2$. Обозначим $\bar{\delta} = \max\{|\phi_i^j - \bar{\phi}_i^j| \mid 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n\}$, $\delta = \max\{\max\{|\phi_i^j - \bar{\phi}_i^j| \mid 1 \leq i \leq n-j, 1 \leq j \leq n-1\}, \max\{|\phi_{n-j+1}^j - \bar{\phi}_{n-j+1}^j| \mid 2 \leq j \leq n\}\}$. Используя тот факт, что существуют такие константы $C > 0$, $C_\delta > 0$, что $|\sin x| \leq C|x|$, $|\cos x - 1| \leq Cx^2$ для всех x с $|x| \leq C_\delta$, и $|\cos x| \leq C|x - \pi/2|$, $|\sin x - 1| \leq C(x - \pi/2)^2$ для x с $|x - \pi/2| \leq C_\delta$, оценим элементы V и \tilde{W} . При $\delta \leq \bar{\delta} \leq C_\delta$ можно получить следующие неравенства: $C_1|\phi_{n-i+1}^j - \bar{\phi}_{n-i+1}^j| \leq |v_i^j| \leq C_2\delta$ ($i > j$) — для элементов V под главной диагональю; $C_1|\phi_{n-j+1}^j - \bar{\phi}_{n-j+1}^j| \leq |v_1^j| \leq C_2\delta$ ($j = 2, \dots, n$) — для элементов над главной диагональю в первой строке; $|v_i^j| \leq C_2\delta\bar{\delta}$ ($i < j, i \geq 2$) — для элементов над главной диагональю в остальных строках; $|v_i^i - 1| \leq C_2\delta^2$ ($i = 1, \dots, n$) — для элементов на главной диагонали. Так как $\det V$ содержит в качестве слагаемого произведение диагональных элементов, а каждое из остальных слагаемых имеет множителями, по крайней мере, один элемент над и один — под главной диагональю, то

$$|\det V - 1| \leq C_3\delta^2. \quad (3.22)$$

Оценивая определители \tilde{w}_i^j с учетом приведенных неравенств, имеем

$$|\tilde{w}_i^i - 1| \leq C_4\delta^2, \quad |\tilde{w}_i^j| \leq C_5\delta, \quad i \neq j. \quad (3.23)$$

В $\sum_{i \neq j} |\tilde{w}_i^j|$ представлены все члены, содержащие произведение каждого недиагонального элемента матрицы V на $n-2$ ее диагональных элементов, а остальные члены можно оценить сверху величиной $C_6\delta^2$. Поэтому

$$\sum_{i \neq j} |\tilde{w}_i^j| \geq \sum_{i \neq j} |v_i^j| - C_7\delta^2 \geq C_1\delta - C_8\delta^2. \quad (3.24)$$

Используя (3.20), (3.22) – (3.24), имеем в D_1 :

$$|\det V|^{n-1} A_0(V) \geq C_9\delta - C_{10}\delta^2, \quad |\det V|^{n-1} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon^i A_i(V) \right| \leq B_1 + B_2 + B_3, \quad (3.25)$$

$$B_1 = \left| \prod_{i=1}^n (a_i + \varepsilon b_i) - \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon d_i) - \prod_{i=1}^n a_i + 1 \right|,$$

$$B_2 = \left| \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon d_i) \right| |(\det V)^{n-1} - 1| \leq \bar{C}_{11} \delta^2, \quad B_3 = |(\det V)^{n-1} - 1| \leq C_{12} \delta^2.$$

Для того, чтобы оценить B_1 , добавим и вычтем перекрестные члены и используем соотношения $|a_i| \leq C_{13}$, $|b_i| \leq \bar{C}_{14}$, $|a_i - 1| \leq C_{15} \delta$, $|b_i - d_i| \leq \bar{C}_{16} \delta$, вытекающие из (3.23). Тогда

$$\Delta(V) \geq |\det V|^{n-1} (C_9 - C_{17} \delta - \bar{C}_{18} \varepsilon) \delta. \quad (3.26)$$

Неравенства (3.21), (3.26) показывают, что можно сначала выбрать D_j (т.е. δ), а затем ε_0 так, чтобы $\Delta(V) \geq 0$ для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$. Отметим, что константы C_α (без черточек) зависят только от размерности пространства n , а \bar{C}_β зависят от \bar{C} . \square

Замечание 3.4 Утверждение леммы 3.9 верно для $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)+\varepsilon} \mathcal{W}$, где $\mathcal{W} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ и симметрично относительно некоторого центра¹⁹. Величина $\varepsilon_0 > 0$ зависит от $\tilde{C} \|\text{diag } \{\pi_i^{(1)}\}^{-1} (P^{(1)})^{-1}\|$ (в некоторой положительной степени), где константа \tilde{C} определяется величиной $\bar{C} = \max\{\|x\| \mid x \in \mathcal{W}\}$.

В самом деле, аналогичными рассуждениями получаем, что $b_i = \rho(\tilde{w}^i | \bar{\mathcal{W}})$, $d_i = \rho(e^i | \bar{\mathcal{W}})$ ($\bar{\mathcal{W}}$ есть образ \mathcal{W}). Поэтому справедливы неравенства (3.21), (3.25), (3.26), где для оценивания B_1 достаточно воспользоваться неравенством Липшица для $\rho(l | \bar{\mathcal{W}})$ [129, с.61].

Запишем теперь множество (3.18) в виде суммы двух параллелотопов полагая $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}[p^{(k)}, \bar{P}^{(k)}]$, $k=1, 2$, где $\bar{P}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{P}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, и попытаемся выделить в достаточно богатом семействе (3.13) внутренних оценок $\mathcal{P}^- = \mathcal{P}_{I,\Gamma}^-(\mathcal{P}^{(1)+\varepsilon} \mathcal{P}^{(2)})$ параллелотоп наибольшего объема.

Пользуясь невырожденностью $\mathcal{P}^{(1)}$, имеем $\text{vol } \mathcal{P}^- = 2^n |\det \bar{P}^{(1)}| \cdot |\det(I + \varepsilon \Xi \Gamma)|$, где $\Xi = (\bar{P}^{(1)})^{-1} \bar{P}^{(2)}$. Таким образом, приходим к задаче

$$\Psi(\Gamma) \triangleq \det(I + \varepsilon \Xi \Gamma) \rightarrow \max, \quad \Gamma \in \mathcal{G}^{r \times n}. \quad (3.27)$$

¹⁹Напомним, что \mathcal{X} симметрично относительно точки a (центра), если $2a - x \in \mathcal{X}$ при всех $x \in \mathcal{X}$.

Несложно заметить²⁰, что $\Psi(\Gamma) = 1 + \varepsilon \cdot \text{tr}(\Xi \Gamma) + o(\varepsilon)$. Считая $\varepsilon > 0$ малым, рассмотрим задачу

$$\text{tr}(\Xi \Gamma) \rightarrow \max, \quad \Gamma \in \mathcal{G}^{r \times n}. \quad (3.28)$$

Несложно проверить, что при $\Gamma \in \mathcal{G}^{r \times n}$ имеем $\text{tr}(\Xi \Gamma) \leq \sum_{l=1}^r \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i^l|$ и последнее значение достигается на любой матрице $\Gamma^* = \{\gamma_l^{*j}\}$ вида

$$\begin{aligned} \gamma_l^{*j} &= \text{sign } \xi_j^l \cdot \lambda_l^j, \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, r, \quad \text{где } \lambda_l^j \geq 0, \\ \lambda_l^j &= 0, \quad \text{для } j \notin J_l, \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, r, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_l^j &= 1, \quad l = 1, \dots, r, \\ J_l &= \text{Argmax} \{|\xi_j^l| \mid j = 1, \dots, n\}, \quad l = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Пример оценки $\mathbf{P}_{I, \Gamma^*}^-(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)})$ приведен на рис. 3.1(b).

Решение (3.29) задачи (3.28), вообще говоря, неединственно. Матрицы (3.29), вообще говоря, неоптимальны в смысле (3.27) и дают только решения задачи (3.27), рассматриваемой в первом приближении (по ε). Однако, как будет показано в § 8, они могут оказаться полезными при нахождении невырожденных внутренних оценок трубок достижимости.

Замечание 3.5 Утверждения теорем 3.1, 3.2 и лемм 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 этого параграфа справедливы и в случае, когда $\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)}$ есть сумма N параллелотопов $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}[p^{(k)}, \bar{P}^{(k)}]$, $\bar{P}^{(k)} = \{\bar{p}^{(k), i}\} \in \mathbb{R}^{n \times r_k}$. Все используемые конструкции сохраняются, а отличие состоит только в формальном описании множества $F = F[\mathcal{Q}]$ векторов f^μ и чисел φ^μ . В данном случае $f^\mu \in F$ тогда и только тогда, когда найдется такое целое $L(\mu) \geq 1$ и такие $k_\alpha \in \{1, \dots, N\}$, $i_\alpha \in \{1, \dots, r_{k_\alpha}\}$, $j_\alpha \in \{0, 1\}$, что $f^\mu = (-1)^{j_\alpha} \text{Nrv } \bar{p}^{(k_\alpha), i_\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, L(\mu)$), $j_1 = 0$, а $\varphi^\mu = \sum_{\alpha=1}^{L(\mu)} \|\bar{p}^{(k_\alpha), i_\alpha}\|$.

²⁰ Действительно, пусть $f(X) = \det X$. Тогда $f(I + hB) = f(I) + h \sum_{i,j=1}^n \partial f(X) / \partial x_i^j |_{X=I} b_i^j + o(h)$. Но $\partial f(X) / \partial X = f(X)(X^{-1})^\top$ [163]. Поэтому $\det(I + hB) = 1 + h \cdot \text{tr } B + o(h)$.

4 Геометрическая разность параллелепипедов. Оценки для $(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$

Раздел посвящен построению оценок для геометрической разности двух множеств. Подробно рассмотрены специальные случаи, возникающие при полиэдральных аппроксимациях некоторых задач теории управления в условиях неопределенности.

Следующая лемма показывает, что геометрическая разность параллелепипеда и выпуклого компактного множества — это либо параллелепипед, либо пустое множество.

Лемма 4.1 Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \dot{-} \mathcal{Y}$, где $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$, $\mathcal{Y} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$. Пусть $\pi^{\text{dif}} = \pi - \sigma$, где σ — вектор величин полуосей параллелепипеда $\mathbf{P}_P^+(\mathcal{Y}) = \mathcal{P}(Pc, P, \sigma)$, найденного по формулам (2.10). Если $\min_{1 \leq i \leq n} \pi_i^{\text{dif}} \geq 0$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(p - Pc, P, \pi^{\text{dif}})$, в противном случае $\mathcal{Q} = \emptyset$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.3 произвольное $\mathcal{R} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ содержится в \mathcal{P} если и только если $\rho(\pm P^{-1\top} e^i | \mathcal{R}) \leq \rho(\pm P^{-1\top} e^i | \mathcal{P})$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, с учетом леммы 2.1 и формул (2.10), $\mathcal{Q} = \{x \mid x + \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}\} = \{x \mid (x, \pm P^{-1\top} e^i) \leq \rho(\pm P^{-1\top} e^i | \mathcal{P}) - \rho(\pm P^{-1\top} e^i | \mathcal{Y}), i = 1, \dots, n\} = \{x \mid \text{Abs}(P^{-1}(x - p + Pc)) \leq \pi^{\text{dif}}\}$. Если $\pi_i^{\text{dif}} < 0$ для некоторого i , то соответствующая пара неравенств несовместна; в противном случае \mathcal{Q} есть параллелепипед указанного вида ввиду леммы 2.3. \square

Следствие 4.1 Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \dot{-} \mathcal{P}^{(2)}$, $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})$, $k = 1, 2$, и $\pi^{\text{dif}} = \pi^{(1)} - \text{Abs}((P^{(1)})^{-1} P^{(2)}) \pi^{(2)}$. Если $\pi^{\text{dif}} \geq 0$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(p^{(1)} - p^{(2)}, P^{(1)}, \pi^{\text{dif}})$, иначе $\mathcal{Q} = \emptyset$. Аналогично, пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \dot{-} \mathcal{P}^{(2)}$, где $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}[p^{(k)}, \bar{P}^{(k)}]$, $k = 1, 2$, — это параллелотопы, первый из которых невырожден ($\det \bar{P}^{(1)} \neq 0$). Положим $\pi^* = e - \text{Abs}((\bar{P}^{(1)})^{-1} \bar{P}^{(2)}) e$. Если $\pi^* \geq 0$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}[p^{(1)} - p^{(2)}, \bar{P}^{(1)} \text{diag } \pi^*]$, иначе $\mathcal{Q} = \emptyset$.

Рассмотрим теперь внешние оценки для геометрической разности двух выпуклых компактных множеств.

Пусть \mathcal{X} — ограниченный политоп, такой что $\text{int } \mathcal{X} \neq \emptyset$ и

$$\mathcal{X} = \{x \mid \pm(x, z^j) \leq \rho(\pm z^j | \mathcal{X}), \|z^j\| = 1, j = 1, \dots, \Upsilon\}. \quad (4.1)$$

Таким образом, ранг системы векторов $Z = \{z^1, \dots, z^\Upsilon\}$ равен n .

Лемма 4.2 Если \mathcal{X} имеет вид (4.1), $\mathcal{Y} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, и $\mathcal{Q} = \mathcal{X} \dot{-} \mathcal{Y} \neq \emptyset$, то

$$\rho(l | \mathcal{Q}) = \min_{V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{X})} \rho(l | \mathcal{P}_V^+), \quad \forall l \in \mathbb{R}^n; \quad \mathcal{Q} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{X})} \mathcal{P}_V^+, \quad (4.2)$$

$$\text{где } \mathcal{P}_V^+ = \mathbf{P}_V^+(\mathcal{X}) \dot{-} \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Y}), \quad (4.3)$$

множество $\mathcal{V}^4 = \mathcal{V}^4(\mathcal{X})$ строится, как описано на с. 47.

Доказательство. Зафиксируем $l \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\rho(l | \mathcal{Q}) = (x^*, l)$, где $x^* \in \mathcal{Q}$ есть решение задачи линейного программирования

$$\max\{(x, l) \mid (x, \pm z^j) \leq \rho(\pm z^j | \mathcal{X}) - \rho(\pm z^j | \mathcal{Y}), j = 1, \dots, \Upsilon\} \quad (4.4)$$

(см. [225, с.134]). По необходимому условию оптимальности [129, с.135] и лемме о линейной комбинации векторов с неотрицательными коэффициентами [154, с.37], можно выбрать линейно независимые векторы z^{β_j} , $j = 1, \dots, n$, и найти $\tilde{\mu}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, такие что

$$l = \sum_{j=1}^k \tilde{\mu}_j z^{\beta_j} + \sum_{j=k+1}^n \tilde{\mu}_j (-z^{\beta_j});$$

$$\tilde{\mu}_j((x^*, z^{\beta_j}) - \rho(z^{\beta_j} | \mathcal{X}) + \rho(z^{\beta_j} | \mathcal{Y})) = 0, \quad j = 1, \dots, k;$$

$$\tilde{\mu}_j((x^*, -z^{\beta_j}) - \rho(-z^{\beta_j} | \mathcal{X}) + \rho(-z^{\beta_j} | \mathcal{Y})) = 0, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Рассмотрим такую матрицу V_* , что векторы $(V_*^{-1})^\top e^j$ коллинеарны векторам z^{β_j} ($j = 1, \dots, n$). Тогда $V_* \in \mathcal{V}^4$, и найдется $\mu \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$l = (V_*^{-1})^\top \mu, \quad \mu \geq 0, \quad (4.5)$$

$$\mu_j((x^*, (V_*^{-1})^\top e^j) - \rho((V_*^{-1})^\top e^j | \mathcal{X}) + \rho((V_*^{-1})^\top e^j | \mathcal{Y})) = 0,$$

где $j = 1, \dots, n$. Отсюда

$$(x^*, l) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\rho((V_*^{-1})^\top e^j | \mathcal{X}) - \rho((V_*^{-1})^\top e^j | \mathcal{Y})). \quad (4.6)$$

Используя (4.4), (2.10) и лемму 2.1, несложно проверить, что $\rho(\pm(V^{-1})^\top e^j | \mathcal{Q}) \leq \rho(\pm(V^{-1})^\top e^j | \mathcal{X}) - \rho(\pm(V^{-1})^\top e^j | \mathcal{Y}) = \rho(\pm(V^{-1})^\top e^j | \mathcal{P}_V^+)$, $j = 1, \dots, n$, для каждой $V \in \mathcal{V}^4$. Следовательно, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_V^+$, и $\rho(l | \mathcal{Q}) \leq \min\{\rho(l | \mathcal{P}_V^+) \mid V \in \mathcal{V}^4\} \leq \rho(l | \mathcal{P}_{V_*}^+)$.

Предположим, что первое неравенство в (4.2) неверно, то есть

$$(x^*, l) = \rho(l | \mathcal{Q}) < \min\{\rho(l | \mathcal{P}_V^+) \mid V \in \mathcal{V}^4\} \leq \rho(l | \mathcal{P}_{V_*}^+). \quad (4.7)$$

Но в силу леммы 2.1 и (4.5), (2.10), (4.6) имеем

$$\rho(l | \mathcal{P}_{V_*}^+) = \sum_{j=1}^n \mu_j (\rho((V_*^{-1})^\top e^j | \mathcal{X}) - \rho((V_*^{-1})^\top e^j | \mathcal{Y})) = (x^*, l),$$

что противоречит (4.7). Второе соотношение в (4.2) вытекает из первого (см., например, лемму A1.4). \square

Изучим теперь подробнее внешние и внутренние оценки для множеств вида $(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$, возникающих, например, при аппроксимациях задачи целевого синтеза управлений при неопределенности (см. гл. IV).

Лемма 4.3 Пусть $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})$, $k = 1, 2, 3$. Тогда

$$\mathbf{P}_V^+((\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}) \subseteq \mathbf{P}_V^+(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}, \quad \forall V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_V^+(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)} &= \mathcal{P}(p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}, V, \nu) \text{ при } \nu \geq 0, \\ \text{где } \nu &= \sum_{k=1}^2 \text{Abs}(V^{-1}P^{(k)})\pi^{(k)} - \text{Abs}(V^{-1}P^{(3)})\pi^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Доказательство. Пусть $(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)} \neq \emptyset$ (в противном случае (4.8) очевидно). Обозначим через $\mathcal{Q}^{(1)}$ и $\mathcal{Q}^{(2)}$ параллелепипеды в левой и правой частях (4.8). Поскольку они имеют одну и ту же матрицу ориентации V , для доказательства (4.8) достаточно проверить, что $\rho((V^{-1})^\top e^j | \mathcal{Q}^{(1)}) \leq \rho((V^{-1})^\top e^j | \mathcal{Q}^{(2)})$, $i=1, \dots, n$. Эти неравенства и (4.9) доказываются с помощью соотношений (2.9), (2.10), неравенства $\rho(l | \mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2) \leq \rho(l | \mathcal{X}^1) - \rho(l | \mathcal{X}^2)$, $\forall l \in \mathbb{R}^n$, леммы 2.1, теоремы 3.1 и следствия 4.1. \square

Рассмотрим теперь задачу (2.29) о нахождении внешней для \mathcal{Q} оценки наименьшего объема для специального случая, когда множество \mathcal{Q} есть

результат геометрического вычитания "маленького" параллелепипеда из суммы "большого" и другого "маленького" параллелепипедов.

Пусть $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})$, $k = 1, 2, 3$, и $\sigma \geq 0$. Тогда множество

$$\mathcal{Q}_\sigma = (\mathcal{P}^{(1)} + \sigma \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \sigma \mathcal{P}^{(3)} \quad (4.10)$$

(которое, вообще говоря, может быть пусто) представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\sigma = \{x \mid (x, \pm d^\beta) \leq \rho(\pm d^\beta | \mathcal{P}^{(1)}) + \sigma \rho(\pm d^\beta | \mathcal{P}^{(2)}) \\ - \sigma \rho(\pm d^\beta | \mathcal{P}^{(3)}), \beta = 1, \dots, r\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где векторы $\{d^\beta\}_{\beta=1}^r$ определяют все крайние опоры множества $\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$ (см. §3). Если $\text{int } \mathcal{Q}_\sigma \neq \emptyset$, то в силу леммы 2.16 для нахождения решения V^* задачи (2.29), где \mathcal{Q} заменено на \mathcal{Q}_σ , достаточно перебрать не более $C_r^n \leq C_{C_{2n}^{n-1}}^n$ матриц $V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q}_\sigma)$. Следующая лемма показывает, что если σ "мало", то решение может быть получено в явном виде.

Лемма 4.4 Пусть \mathcal{Q}_σ имеет вид (4.10) и $\pi^{(1)} > 0$. Тогда существует такое $\sigma_0 > 0$, что для каждого σ , $0 \leq \sigma < \sigma_0$, параллелепипед $\mathbf{P}_{\mathcal{P}^{(1)}}^+(\mathcal{Q}_\sigma)$ решает задачу (2.29) с $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\sigma$ и

$$\mathbf{P}_{\mathcal{P}^{(1)}}^+(\mathcal{Q}_\sigma) = \mathbf{P}_{\mathcal{P}^{(1)}}^+(\mathcal{P}^{(1)} + \sigma \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \sigma \mathcal{P}^{(3)}. \quad (4.12)$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3.9, без потери общности достаточно рассмотреть случай, когда

$$\mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}(0, I, e), \quad \mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(0, P^{(k)}, \pi^{(k)}), \quad k = 2, 3. \quad (4.13)$$

Так как $\mathcal{Q}_\sigma \supseteq \mathcal{P}^{(1)} \dot{-} \sigma \mathcal{P}^{(3)}$ и $\pi^{(1)} > 0$, то с учетом следствия 4.1 $\text{int } \mathcal{Q}_\sigma \neq \emptyset$ для всех достаточно малых $\sigma > 0$. Следовательно, задача линейного программирования, состоящая в нахождении $\rho(l | \mathcal{Q}_0)$ (где $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_\sigma$ при $\sigma = 0$), устойчиво разрешима и устойчива по функции [25, с.116,137]. По лемме 2.9 для любых $\varepsilon > 0$ и $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ существует такое σ_0 , что $|\text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}_\sigma) - \text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}_0)| < \varepsilon$, $\forall \sigma: 0 \leq \sigma < \sigma_0$ (для более явных оценок можно воспользоваться результатами [205]). Поэтому

$$\Delta_\sigma(V) \triangleq \text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}_\sigma) - \text{vol } \mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q}_0) \geq \Delta_0(V) - 2\varepsilon, \quad \forall V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q}_\sigma). \quad (4.14)$$

Из доказательства леммы 3.9 видно, что $\Delta_0(V) \geq 0$, $\forall V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, и $\Delta_0(V) = 0$ может быть только для диагональных матриц с элементами на диагонали ± 1 . Так как множество $\mathcal{V}^4 = \mathcal{V}^4(\mathcal{Q}_\sigma)$ состоит из конечного числа матриц и можно считать, что $V = I$ — единственный элемент в \mathcal{V}^4 , для которого $\Delta_0(V) = 0$, то найдется $M_1 > 0$ (M_1 зависит от $P^{(k)}$, $\pi^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$) такое, что $\Delta_0(V) \geq M_1$ для всех $V \in \mathcal{V}^4$, $V \neq I$. Вместе с (4.14) это дает $\Delta_\sigma(I) = 0$, и $\Delta_\sigma(V) \geq M_1 - 2\varepsilon$ для всех $V \in \mathcal{V}^4$, $V \neq I$. Благодаря (2.30), первое утверждение леммы доказано.

Обозначим $\mathcal{P}^I = \mathbf{P}_I^+(\mathcal{P}^{(1)} + \sigma \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)} = \mathcal{P}(0, I, \pi^I)$ и $\mathcal{P}^{II} = \mathbf{P}_I^+(\mathcal{Q}_\sigma)$. По лемме 4.3 $\pi^I = e + \sigma \text{Abs } P^{(2)} \pi^{(2)} - \sigma \text{Abs } P^{(3)} \pi^{(3)}$. По лемме 2.7 $\mathcal{P}^{II} \subseteq \mathcal{P}^I$.

Докажем (4.12) от противного. Предположим, что (4.12) неверно. Тогда $\mathcal{P}^{II} \subset \mathcal{P}^I$, где \mathcal{P}^I и \mathcal{P}^{II} имеют одну и ту же матрицу ориентации I . С учетом леммы 2.7 найдем такой номер $\alpha_* \in \{1, \dots, n\}$, что

$$\rho(e^{\alpha_*} | \mathcal{P}^{II}) = \rho(e^{\alpha_*} | \mathcal{Q}_\sigma) < \rho(e^{\alpha_*} | \mathcal{P}^I) = \pi_{\alpha_*}^I. \quad (4.15)$$

По лемме 4.2 существует матрица $V_* \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q}_\sigma)$, такая что

$$\rho(e^{\alpha_*} | \mathcal{Q}_\sigma) = \rho(e^{\alpha_*} | \mathcal{P}^{III}), \quad (4.16)$$

где $\mathcal{P}^{III} = \mathbf{P}_{V_*}^+(\mathcal{P}^{(1)} + \sigma \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathbf{P}_{V_*}^+(\sigma \mathcal{P}^{(3)}) = \mathcal{P}(0, V_*, \pi^{III})$, и $\pi^{III} = (\text{Abs } V_*^{-1}) e + \sigma \text{Abs } (V_*^{-1} P^{(2)}) \pi^{(2)} - \sigma \text{Abs } (V_*^{-1} P^{(3)}) \pi^{(3)}$. Используя (4.16), лемму 2.1 и формулы для π^I и π^{III} , можно переписать (4.15) в виде

$$A_0(V_*) + A_1(V_*) + \sigma A_2(V_*) < 1 + \sigma A_3, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{\gamma=1}^n |e^{\alpha_* \top} V_* e^\gamma| |e^{\gamma \top} V_*^{-1} e^{\alpha_*}| \geq e^{\alpha_* \top} V_* V_*^{-1} e^{\alpha_*} = 1, \\ A_1 &= \sum_{j=1, j \neq \alpha_*}^n \sum_{\gamma=1}^n |e^{\alpha_* \top} V_* e^\gamma| |e^{\gamma \top} V_*^{-1} e^j| \geq 0, \\ A_2 &= \sum_{\gamma=1}^n |e^{\alpha_* \top} V_* e^\gamma| \left(\sum_{j=1}^n |e^{\gamma \top} V_*^{-1} P^{(2)} e^j| \pi_j^{(2)} - \sum_{j=1}^n |e^{\gamma \top} V_*^{-1} P^{(3)} e^j| \pi_j^{(3)} \right), \\ A_3 &= \sum_{j=1}^n |e^{\alpha_* \top} P^{(2)} e^j| \pi_j^{(2)} - \sum_{j=1}^n |e^{\alpha_* \top} P^{(3)} e^j| \pi_j^{(3)}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

и далее в виде

$$A_1(V_*) + \sigma A_2(V_*) < \sigma A_3. \quad (4.19)$$

Но $\mathcal{V}^4 = \mathcal{V}_1^4 \cup \mathcal{V}_2^4$, где $\mathcal{V}_1^4 = \{V \in \mathcal{V}^4 \mid A_1(V) \neq 0\}$, $\mathcal{V}_2^4 = \mathcal{V}^4 \setminus \mathcal{V}_1^4$. Так как \mathcal{V}^4 состоит из конечного числа матриц, то существует такое $M_2 > 0$, что $A_1(V) \geq M_2 > 0$, $\forall V \in \mathcal{V}_1^4$. Если $V_* \in \mathcal{V}_1^4$, то (4.19) при $\sigma < M_2 / (\max\{|A_2(V)| \mid V \in \mathcal{V}_1^4\} + |A_3|)$ приводит к противоречию $M_2 \leq A_1(V_*) < M_2$.

Пусть $V_* \in \mathcal{V}_2^4$. Тогда для каждого фиксированного $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ либо

$$e^{\alpha_* \top} V_* e^\gamma = 0, \quad (4.20)$$

либо

$$e^{\gamma \top} V_*^{-1} e^j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq \alpha_*. \quad (4.21)$$

Но (4.20) не может выполняться для всех $\gamma = 1, \dots, n$, так как это означает, что V_* имеет нулевую строку. Следовательно, найдется такой номер $\gamma_* \in \{1, \dots, n\}$, что $e^{\alpha_* \top} V_* e^{\gamma_*} \neq 0$ и, значит, (4.21) выполнено для $\gamma = \gamma_*$. Такой номер γ_* — единственный, поскольку иначе V_*^{-1} имела бы две строки, коллинеарные $e^{\alpha_* \top}$, что влечет $\det V_*^{-1} = 0$. Таким образом, получаем (4.20) для $\gamma = 1, \dots, n$, $\gamma \neq \gamma_*$. Следовательно, V_* такова, что ее α_* -я строка коллинеарна $e^{\gamma_* \top}$, а γ_* -я строка V_*^{-1} коллинеарна $e^{\alpha_* \top}$. Используя этот факт в (4.18), можно проверить, что $A_2(V_*) = A_3$. Тогда (4.19) приводит к противоречию $0 = A_1(V_*) < 0$. \square

Для построения внутренних оценок для множеств типа $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$ воспользуемся конструкциями (3.10), (3.11).

Следующая лемма сразу вытекает из леммы 3.8 и следствия 4.1.

Лемма 4.5 Пусть $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)} \neq \emptyset$, где $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}[p^{(k)}, \bar{P}^{(k)}]$, $k = 1, 2, 3$. Пусть $\Gamma^{(1)} \in \mathcal{G}^{r_1 \times n}$, $\Gamma^{(2)} \in \mathcal{G}^{r_2 \times n}$ и $\det(\bar{P}^{(1)}\Gamma^{(1)} + \bar{P}^{(2)}\Gamma^{(2)}) \neq 0$.

Если множество

$$\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^-((\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^- (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)} \quad (4.22)$$

непусто, то оно является внутренней параллелепипедозначной оценкой для \mathcal{Q} , то есть $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^-((\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}) \subseteq \mathcal{Q}$.

Следующий пример показывает, что, к сожалению, в данном случае нельзя гарантировать точное представление, подобное (3.13).

Пример 4.1 Пусть $n=2$, $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$, $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}[0, \bar{P}^{(k)}]$,

$$\bar{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \bar{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}^{(3)} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где $a, b, c > 0, b \ll a, c \ll a$

(\ll означает "значительно меньше"). Так как по лемме 3.4 все крайние опоры к $\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$ определяются нормальями $d^1 = (1, 0)^\top$, $d^2 = (0, 1)^\top$ и $d^3 = (1, -1)^\top$, имеем $\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} = \{x \mid |x_i| \leq a+b, i = 1, 2, |x_1 - x_2| \leq 2a\}$,

$$\mathcal{Q} = \{x \mid |x_i| \leq d, i = 1, 2, |x_1 - x_2| \leq 2a\}, \quad d = a + b - c. \quad (4.24)$$

При $b \leq c$ третье неравенство в (4.24) есть следствие первых двух.

Рассмотрим множество $\mathcal{Y} = \cup\{\mathbf{P}_{I,\Gamma}^-((\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}) \mid \Gamma \in \mathcal{G}\} \equiv \cup\{\mathcal{P} \mid \Gamma \in \mathcal{G}\}$, где $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{n \times n}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}[0, \bar{P}]$, $\bar{P} = \tilde{P}(I - \text{diag}(\text{Abs}(\tilde{P}^{-1} \cdot \bar{P}^{(3)}))e)$, $\tilde{P} = \bar{P}^{(1)} + \bar{P}^{(2)}$. Как показывают прямые вычисления,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} a + \gamma_1^1 b & \gamma_1^2 b \\ \gamma_1^1 b & a + \gamma_1^2 b \end{bmatrix} \cdot \left(1 - \frac{c}{|a + (\gamma_1^1 + \gamma_1^2) b|}\right), \quad |\gamma_1^1| + |\gamma_1^2| \leq 1.$$

Параллелотопы $\mathcal{P}[0, \bar{P}]$ имеют вершины $\pm g^1$ и $\pm g^2$. При предположениях (4.23) $g^1 = (a + (\gamma_1^1 + \gamma_1^2) b - c) \cdot (1, 1)^\top$, $g^2 = \varphi(\gamma_1^1 + \gamma_1^2) \cdot (a + (\gamma_1^1 - \gamma_1^2) b, -a + (\gamma_1^1 - \gamma_1^2) b)^\top$, где $\varphi(t) = (a + tb - c)/(a + tb)$.

Опишем вначале множество $\mathcal{Y}_1 = \cup\{\mathcal{P} \mid \Gamma \in \mathcal{G} \cap \mathcal{G}_1\}$, где $\mathcal{G}_1 = \{\Gamma \mid \gamma_1^1 + \gamma_1^2 = 1\}$. Если $\Gamma \in \mathcal{G} \cap \mathcal{G}_1$, то $g^1 = (d, d)^\top$, $g^2 = \varphi(1) \cdot (a + (2\gamma_1^1 - 1) b, -a + (2\gamma_1^1 - 1) b)^\top$, $0 \leq \gamma_1^1 \leq 1$. Если γ_1^1 пробегает $[0, 1]$, то g^2 пробегает отрезок между точками $(\alpha d, -d)^\top$ и $(d, -\alpha d)^\top$, где $\alpha = (a - b)/(a + b)$. Поэтому

$$\mathcal{Y}_1 = \{x \mid |x_i| \leq d, i = 1, 2, |x_1 - x_2| \leq 2ad/(a + b)\}. \quad (4.25)$$

Докажем, что в действительности $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1$. Так как $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Q}$, то достаточно проверить неравенство $|x_1 - x_2| \leq 2ad/(a + b)$ для всех вершин $\mathcal{P}[0, \bar{P}]$ при условии $|\gamma_1^1| + |\gamma_1^2| \leq 1$. Это очевидно для $\pm g^1$. Для

$\pm g^2$ имеем $|g_1^2 - g_2^2| = 2a|\varphi(\gamma_1^1 + \gamma_1^2)|$. Но $-1 \leq \gamma_1^1 + \gamma_1^2 \leq 1$, а функция $\varphi(t)$ монотонна и достигает своих экстремальных значений на границе отрезка $[-1, 1]$. Поэтому, действительно, $|g_1^2 - g_2^2| \leq 2a|\varphi(1)| = 2ad/(a+b)$.

Сравнивая множества \mathcal{Q} и $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1$, описываемые неравенствами (4.24) и (4.25), видим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{Y}$ и при $b \geq c > 0$, и при $0 < b \leq c$ (см. рис. 4.1).

5 Аппроксимации пересечения параллелепипеда и полосы

Раздел посвящен построению оценок для пересечения параллелепипеда и полосы:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}, \quad \mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}(p^{(1)}, P^{(1)}, \pi^{(1)}), \quad \mathcal{S}^{(2)} = \mathcal{S}(c^{(2)}, S^{(2)}, \sigma^{(2)}, m_2). \quad (5.1)$$

Наиболее подробно рассмотрены случаи, когда \mathcal{Q} есть пересечение либо двух параллелепипедов, либо параллелепипеда и гиперполосы.

Начнем с внешних оценок. Рассмотрим сначала два способа построения внешних оценок для пересечения двух параллелепипедов:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \cap \mathcal{P}^{(2)}, \quad \mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)}). \quad (5.2)$$

Первый аналогичен конструкциям из [75, 201] и основывается на введении матричных параметров и сведении операции пересечения к изученной ранее операции сложения параллелепипедов. Введем следующие множества $n \times n$ -матриц: $\mathcal{D}^1 = \mathcal{M}_0^{n \times n}$; \mathcal{D}^2 — множество неособых диагональных матриц; \mathcal{D}^3 — множество матриц вида $D = \delta I$, $0 < \delta < 1$.

Лемма 5.1 Пусть множество \mathcal{Q} из (5.2) непусто. Пусть векторы $v = v(D^{(1)}, D^{(2)})$ и $\nu = \nu(D^{(1)}, D^{(2)}, V)$ определяются формулами $v = D^{(1)}p^{(1)} + D^{(2)}p^{(2)}$, $\nu = \sum_{k=1}^2 \text{Abs}(V^{-1}D^{(k)}P^{(k)})\pi^{(k)}$, где $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ и V — произвольные неособые $n \times n$ -матрицы, стесненные соотношениями $D^{(1)} + D^{(2)} = I$, $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Тогда параллелепипед $\mathcal{P}(v, V, \nu)$ является внешней оценкой для \mathcal{Q} . Справедливы представления $\mathcal{Q} = \cap \{\mathcal{P}(v(D^{(1)},$

$D^{(2)}), V, \nu(D^{(1)}, D^{(2)}, V) | D^{(k)} \in \mathcal{D}, k=1, 2, D^{(1)}+D^{(2)}=I, V \in \mathcal{V}\}$, где в качестве \mathcal{D} можно взять любое из введенных множеств $\mathcal{D}^j, j \in \{1, 2, 3\}$, а в качестве \mathcal{V} — либо все $\mathcal{M}_*^{n \times n}$, либо любое из множеств $\mathcal{V}^\gamma = \mathcal{V}^\gamma(D^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}+D^{(2)}\mathcal{P}^{(2)}), \gamma \in \{1, 2, 3\}$, построенных, как описано на с. 51.

Доказательство следует из соотношения $\mathcal{Q} = \cap\{D^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}+D^{(2)}\mathcal{P}^{(2)} | D^{(k)} \in \mathcal{D}, k = 1, 2, D^{(1)} + D^{(2)} = I\}$ и теоремы 3.1. \square

На рис. 5.1(a) показан пример $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2$ и несколько оценок, отвечающих случайно выбранным $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}, D^{(1)} \in \mathcal{D}^3$. Видно, что каждая отдельная оценка такого типа может оказаться довольно грубой для \mathcal{Q} .

Рассмотрим оценки другого типа, построение которых основывается на вычислении двух вспомогательных оценок с одинаковыми матрицами ориентации и том факте, что их пересечение снова есть параллелепипед.

Лемма 5.2 *Если $P^{(1)}=P^{(2)}=P$, то $\mathcal{Q}=P^{(1)} \cap P^{(2)}$ есть параллелепипед $\mathcal{Q} = P(p^{\text{in}}, P, \pi^{\text{in}})$, когда $\pi^{\text{in}} \geq 0$; в противном случае \mathcal{Q} пусто. Здесь*

$$\begin{aligned} p^{\text{in}} &= P \bar{p}; & \bar{p}_i &= (\gamma_i + \delta_i)/2, & \pi_i^{\text{in}} &= (\gamma_i - \delta_i)/2, \\ \gamma_i &= \min_{1 \leq k \leq 2} (\bar{p}_i^{(k)} + \pi_i^{(k)}), & \delta_i &= \max_{1 \leq k \leq 2} (\bar{p}_i^{(k)} - \pi_i^{(k)}), & \bar{p}^{(k)} &= P^{-1} p^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если $P^{(1)} \neq P^{(2)}$, то параллелепипед $\tilde{\mathcal{P}}_V^+ = P_V^+(P^{(1)}) \cap P_V^+(P^{(2)})$ есть внешняя оценка для \mathcal{Q} , какова бы ни была матрица $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Кроме того,

$$\rho(l|\mathcal{Q}) = \min_{V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q})} \rho(l|\tilde{\mathcal{P}}_V^+), \quad \forall l \in \mathbb{R}^n; \quad \mathcal{Q} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{Q})} \tilde{\mathcal{P}}_V^+. \quad (5.4)$$

(множества $\mathcal{V}^4(\mathcal{Q})$ описаны на с. 47, где следует взять $Z(\mathcal{Q}) = \{p^{(1)\perp 1}, \dots, p^{(1)\perp n}, p^{(2)\perp 1}, \dots, p^{(2)\perp n}\}$).

Доказательство. В случае $P^{(1)} = P^{(2)}$ утверждение следует из леммы 2.3. Включение $\mathcal{Q} \subseteq \tilde{\mathcal{P}}_V^+$ очевидно. Доказательство соотношений (5.4) проводится аналогично доказательству леммы 4.2 и приведено в [188]. \square

На рис. 5.1(b) показан пример оценки $\tilde{\mathcal{P}}_V^+$ такого типа.

Аналогично проверяется

Замечание 5.1 Если $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ имеет вид (2.28), то справедливы соотношения (5.4), где $\tilde{\mathcal{P}}_V^+$ заменено на $\mathcal{P}_V^+(\mathcal{Q})$.

Замечание относится, очевидно, и к случаю, когда \mathcal{Q} имеет вид (5.1). Трудность, однако, состоит в том, что для нахождения $\mathcal{P}_V^+(\mathcal{Q})$ может понадобиться найти значения $(g^j, \pm v^{\perp i})$, $i=1, \dots, n$, на элементах множества $G = \{g^j\}$ всех вершин \mathcal{Q} .

Замечание 5.2 Можно проверить, что если $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0$ есть пересечение параллелепипеда и гиперполосы $\Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$, где $\text{int } \mathcal{P} \neq \emptyset$ и $\sigma_0 > 0$, то все элементы G можно найти с помощью следующего алгоритма. Перебираем все вершины $x^j = p + \sum_{\beta=1}^n p^\beta \pi_\beta (-1)^{j_\beta+1}$ параллелепипеда \mathcal{P} , где $j_\beta \in \{0, 1\}$ — это величины из двоичного представления (j_n, \dots, j_1) числа $j = j_n \cdot 2^{n-1} + \dots + j_2 \cdot 2^1 + j_1 \cdot 2^0$, $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Если $|(x^j, s^0) - c_0| \leq \sigma_0$, то $x^j \in G$. Для каждого j перебираем n соседних вершин x^k параллелепипеда \mathcal{P} . Здесь $k = (k_n, \dots, k_1)$ отличается от j только γ -й компонентой: $k_\gamma = 0$ при $j_\gamma = 1$ и наоборот, $k_\alpha = j_\alpha$, $\alpha \neq \gamma$ ($\gamma \in \{1, \dots, n\}$). Если $k < j$, то переходим к следующему k (ребро $x^j x^k$ уже рассматривалось); в противном случае находим точки $x(\lambda^i)$, $i = 1, 2$, пересечения линии $x = \lambda x^j + (1 - \lambda)x^k$ с гиперплоскостями $(x, s^0) - s_0 = (-1)^{i+1} \sigma_0$. Если $0 < \lambda^i < 1$, то $x(\lambda^i) \in G$.

Лемма 5.3 Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)} \neq \emptyset$, где $\mathcal{S}^{(2)} = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i$ есть пересечение m гиперполос Σ^i . Если параллелепипед $\mathcal{P}^{(m)+}$ найден за m шагов:

$$\mathcal{P}^{(i)+} = \mathcal{P}_{\mathcal{P}^{(i)+}}^+(\mathcal{P}^{(i-1)+} \cap \Sigma^i), \quad i = 1, \dots, m; \quad \mathcal{P}^{(0)+} = \mathcal{P}^{(1)}, \quad (5.5)$$

то параллелепипед $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^{(m)+}$ есть внешняя для \mathcal{Q} оценка, каковы бы ни были матрицы $\mathcal{P}^{(i)+} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $i=1, \dots, m$. Справедливы соотношения

$$\rho(l|\mathcal{Q}) = \min \rho(l|\mathcal{P}^+), \quad \forall l \in \mathbb{R}^n; \quad \mathcal{Q} = \bigcap \mathcal{P}^+, \quad (5.6)$$

где операции минимума и пересечения производятся по всем последовательностям матриц $\mathcal{P}^{(i)+} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих соотношениям $\mathcal{P}^{(i)+} \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^{(i-1)+} \cap \Sigma^i)$, $i = 1, \dots, m$.

Доказательство первого из соотношений (5.6) проводится по индукции с учетом формулы инфимальной конволюции для пересечения множеств, заданных конечным числом линейных неравенств, [132, с.164,197] и замечания 5.1 (см. также доказательство теоремы 10.2, где аналогичные рассуждения приведены подробнее). \square

Замечание 5.3 Пусть \mathcal{Q} есть пересечение параллелепипеда и гиперполосы:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi), \quad \Sigma^0 = \{x \mid |(x, s^0) - c_0| \leq \sigma_0\}, \quad (5.7)$$

а матрица ориентации $V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P} \cap \Sigma^0)$. Тогда формулы из [233], приведенные в модифицированном виде в следующей лемме 5.4, вместе с леммой 2.3 позволяют находить $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ проще, чем описано в замечании 5.2.

Лемма 5.4 Пусть имеем $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, n)$, $\Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$, и множество $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0 \neq \emptyset$. Тогда справедливо следующее представление \mathcal{Q} в виде пересечения тугих гиперполос: $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{S}} \cap \bar{\Sigma}^0$, где параметры $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{S}, \bar{\sigma}, n) = \bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\bar{p}, \bar{P}, \bar{\pi})$ и $\bar{\Sigma}^0 = \mathcal{S}(\bar{c}_0, \bar{s}^0, \bar{\sigma}_0, 1)$ определяются соотношениями (где $\alpha, \beta, \gamma, \nu, r^{(\pm)} \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} \bar{S} &= S, \quad \bar{c} = c + \text{diag } \nu \text{ diag } \gamma \cdot \sigma, \quad \bar{\sigma} = \text{diag } \beta \cdot \sigma, \\ \bar{P} &= P, \quad \bar{p} = p + P \text{diag } \nu \text{ diag } \gamma \cdot \pi, \quad \bar{\pi} = \text{diag } \beta \cdot \pi, \\ \bar{s}^0 &= s^0, \quad \bar{c}_0 = c_0 + \gamma_0, \quad \bar{\sigma}_0 = \beta_0, \\ \nu_i &= \begin{cases} 1, & \text{если } s^{0\top} p^i \pi_i \geq 0, \\ -1, & \text{если } s^{0\top} p^i \pi_i < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta_i &= (r_i^{(+)} + r_i^{(-)})/2, \quad \gamma_i = (r_i^{(+)} - r_i^{(-)})/2, \quad i = 0, \dots, n, \\ r_0^{(\pm)} &= \min\{\sigma_0, \pm \epsilon^{(\pm)}\}, \\ r_i^{(\pm)} &= \begin{cases} \min\{1, (\sigma_0 \mp \epsilon^{(\mp)})/\alpha_i - 1\}, & \text{если } \alpha_i \neq 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \\ \alpha &= \text{Abs}(s^{0\top} P \text{diag } \pi), \quad \epsilon^{(\pm)} = s^{0\top} p - c_0 \pm \sum_{i=1}^n \alpha_i. \end{aligned}$$

При этом оказывается, что $0 \leq \beta_i \leq 1$, $i=1, \dots, n$, $0 \leq \beta_0 \leq \sigma_0$. Множество \mathcal{Q} непусто тогда и только тогда, когда $\epsilon^{(+)} \geq -\sigma_0$ и $\epsilon^{(-)} \leq \sigma_0$.

Рассмотрим теперь задачу (2.29) о нахождении минимального в смысле объема внешнего параллелепипеда \mathcal{P}^+ для множества \mathcal{Q} , когда \mathcal{Q} есть пересечение параллелепипеда и гиперполосы. В [233] решение этой задачи найдено в аналитическом виде при неявном предположении, что \mathcal{Q} имеет непустую внутренность. Ниже приводится модификация, дающая решение и в случае $\text{int } \mathcal{Q} = \emptyset$.

Лемма 5.5 Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0 \neq \emptyset$. Оптимальные в смысле объема внешние оценки для \mathcal{Q} могут быть найдены по следующему алгоритму. В соответствии с леммой 5.4 найти представление $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{P}} \cap \bar{\Sigma}^0 = \bar{\mathcal{S}} \cap \bar{\Sigma}^0$ в виде пересечения $n+1$ тугих гиперполос $\bar{\Sigma}^i$. Пусть $\bar{\mathcal{P}}$ оказался l -параллелепипедом и $\bar{I}_1 = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\pi}_i > 0\}$. Если $\bar{I}_1 = \emptyset$, то множество $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{P}}$ состоит из единственной точки \bar{p} . В противном случае найти множество индексов

$$\begin{aligned} I^* &= \text{Argmax} \{|\delta_i| \mid i \in I_1^*\}, \text{ где } \delta = s^{0\top} \bar{\mathcal{P}} \text{diag } \bar{\pi}, \\ I_1^* &= \{i \in \bar{I}_1, s^{0\top} \bar{p}^i \neq 0\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Если $I^* = \emptyset$ или $|\delta_{i_*}| < \bar{\sigma}_0$ для $i_* \in I^*$, то оптимальная оценка единственна и совпадает с $\bar{\mathcal{P}}$. В противном случае оптимальными будут все параллелепипеды $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$, для которых $j \in I^*$, где через $\bar{\mathcal{P}}^{(j)} = \mathcal{P}(\bar{p}^{(j)}, \bar{P}^{(j)}, \bar{\pi}^{(j)})$ обозначен параллелепипед, полученный из $\bar{\mathcal{P}}$ заменой j -й гиперполосы $\bar{\Sigma}^j$ на $\bar{\Sigma}^0$: $\bar{\mathcal{P}}^{(j)} = \bigcap_{i=0, i \neq j}^n \bar{\Sigma}^i$. Если $\bar{\sigma}_0 = |\delta_{i_*}|$ для $i_* \in I^*$, то в число оптимальных входит также параллелепипед $\bar{\mathcal{P}} \equiv \bar{\mathcal{P}}^{(0)} = \bigcap_{i=1}^n \bar{\Sigma}^i$.

Доказательство. В силу леммы 2.17 оптимальные оценки содержатся среди ограниченных параллелепипедов $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$, $j = 0, \dots, n$ (ограниченность $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ при $j > 0$ обеспечивается условием $\bar{s}^{0\top} \bar{p}^j \neq 0$). Ввиду лемм 2.3, A1.5 параметры таких параллелепипедов $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
\bar{p}^{(j),i} &= \|\tilde{p}^{(j),i}\|^{-1} \tilde{p}^{(j),i}, \quad i = 1, \dots, n, \\
\bar{\pi}_i^{(j)} &= \|\tilde{p}^{(j),i}\| |\bar{s}^i \top \bar{p}^i|^{-1} \bar{\sigma}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\
\bar{\pi}_j^{(j)} &= |\bar{s}^0 \top \bar{p}^j|^{-1} \bar{\sigma}_0, \\
\tilde{p}^{(j),i} &= \bar{p}^i - (\bar{s}^0 \top \bar{p}^i)(\bar{s}^0 \top \bar{p}^j)^{-1} \bar{p}^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\
\tilde{p}^{(j),j} &= (\bar{s}^0 \top \bar{p}^j)^{-1} \bar{p}^j, \quad (\text{для } j > 0), \\
\bar{\pi}_i^{(0)} &= |\bar{s}^i \top \bar{p}^i|^{-1} \bar{\sigma}_i, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Если $j > 0$ и $j \notin \bar{I}_1$, то в силу (5.9) $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ — это $(l+1)$ -параллелепипед с направлениями полуосей $\bar{p}^{(j),i}$, $i \in \bar{I}_1$, $\bar{p}^{(j),j}$ в случае $\bar{\sigma}_0 > 0$, и l -параллелепипед с направлениями полуосей $\bar{p}^{(j),i}$, $i \in \bar{I}_1$, в случае $\bar{\sigma}_0 = 0$. Если же $j \in \bar{I}_1$, то $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ в случаях $\bar{\sigma}_0 > 0$ и $\bar{\sigma}_0 = 0$ — это, соответственно, l - и $(l-1)$ -параллелепипед с направлениями полуосей $\bar{p}^{(j),i}$, $i \in \bar{I}_1$, и $\bar{p}^{(j),i}$, $i \in \bar{I}_1$, $i \neq j$. Поэтому при поиске оптимальных $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ достаточно перебирать те, для которых $j = 0$ либо $j \in I_1^* \subseteq \bar{I}_1$.

Пусть $\bar{\sigma}_0 > 0$. Вычислим объем $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ при $j \in I_1^*$ по формуле (2.7) с учетом выражений (5.9). Вынесем общие множители из строк и столбцов за знак определителя. В оставшемся определителе k -е строки ($k = 1, \dots, l$) состоят из $(\tilde{p}^{(j),i_k}, \tilde{p}^{(j),t})$, $t \in \bar{I}_1$. Добавляя к каждой k -й строке (где $i_k \neq j$) s -ю строку, для которой $i_s = j$, умноженную на $(\bar{s}^0 \top \bar{p}^{i_k})(\bar{s}^0 \top \bar{p}^j)^{-1}$, и затем производя аналогичную операцию со столбцами, получаем

$$\text{vol}_l \bar{\mathcal{P}}^{(j)} = \bar{\Gamma}^{1/2} \bar{\sigma}_0 |\bar{s}^0 \top \bar{p}^j|^{-1} \prod_{i \in \bar{I}_1, i \neq j} \bar{\sigma}_i |\bar{s}^i \top \bar{p}^i|^{-1} \quad (j > 0), \tag{5.10}$$

где $\bar{\Gamma}$ — определитель Грамма для векторов \bar{p}^i , $i \in \bar{I}_1$. Поскольку $\text{vol}_l \bar{\mathcal{P}}^{(0)} = \bar{\Gamma}^{1/2} \prod_{i \in \bar{I}_1} \bar{\sigma}_i |\bar{s}^i \top \bar{p}^i|^{-1}$, то с учетом леммы 2.3 $\text{vol}_l \bar{\mathcal{P}}^{(j)} / \text{vol}_l \bar{\mathcal{P}}^{(0)} = \bar{\sigma}_0 |\bar{s}^0 \top \bar{p}^j|^{-1} \bar{\sigma}_j^{-1} |\bar{s}^j \top \bar{p}^j| = \bar{\sigma}_0 |\bar{s}^0 \top \bar{p}^j \bar{\pi}_j|^{-1}$, откуда вытекает справедливость леммы в случае $\bar{\sigma}_0 > 0$.

Рассмотрим случай $\bar{\sigma}_0 = 0$. Если $I_1^* \neq \emptyset$, то оценка $\bar{\mathcal{P}}^{(0)}$ не может быть оптимальной, так как это l -параллелепипед, а оценки $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$, $j \in I_1^*$, — $(l-1)$ -параллелепипеды. Для сравнения объемов $\bar{\mathcal{P}}^{(j_1)}$ и $\bar{\mathcal{P}}^{(j_2)}$ при $j_1, j_2 \in I_1^*$, используем формулы (5.10) для объемов вспомогательных

параллелепипедов, соответствующих случаю $\bar{\sigma}_0 > 0$. Используя индуктивное определение объема l -параллелепипеда [30, с. 216], произведем предельный переход по $\bar{\sigma}_0 \rightarrow 0$. Вычисляя отношение объемов вспомогательных параллелепипедов и сокращая числитель и знаменатель на $\bar{\sigma}_0$, получаем $\text{vol}_{l-1} \bar{\mathcal{P}}^{(j_1)} / \text{vol}_{l-1} \bar{\mathcal{P}}^{(j_2)} = |\bar{s}^{0\top} \bar{p}^{j_2} \bar{\pi}_{j_2}| / |\bar{s}^{0\top} \bar{p}^{j_1} \bar{\pi}_{j_1}|$, что доказывает лемму в случае $\bar{\sigma}_0 = 0$. \square

Замечание 5.4 Центры $\bar{p}^{(j)}$ и параметры $\bar{p}^{(j),i}$, $\bar{\pi}_i^{(j)}$ "полуосей" ($i = 1, \dots, n$) параллелепипедов $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ при $j > 0$, $s^{0\top} \bar{p}^j \neq 0$ определяются следующими соотношениями (где $\tilde{p}^{(j),i}$ введены в (5.9), δ_j — в (5.8)):

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(j)} &= \bar{p} + (\bar{c}_0 - \bar{s}^{0\top} \bar{p}) \delta_j^{-1} \bar{p}^j \bar{\pi}_j; \\ \bar{p}^{(j),j} &= \bar{p}^j, \quad \bar{\pi}_j^{(j)} = \beta_0 |\delta_j|^{-1} \bar{\pi}_j; \\ \bar{p}^{(j),i} &= \|\tilde{p}^{(j),i}\|^{-1} \tilde{p}^{(j),i}, \quad \bar{\pi}_i^{(j)} = \|\tilde{p}^{(j),i}\| \bar{\pi}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Для иллюстрации на рис. 5.2 показано три внешних оценки для $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0 \subset \mathbb{R}^2$. Первая имеет ту же матрицу ориентации, что и \mathcal{P} , и построена по формулам из леммы 5.4; вторая построена для заданной матрицы ориентации в соответствии с замечанием 5.2; третья найдена с помощью замечания 5.4 и имеет наименьший возможный объем.

Если параллелепипед \mathcal{P} — вырожденный (то есть l -параллелепипед, $l < n$), то в представлении $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ матрица P может быть выбрана неединственным образом. Как будет видно в § 10 (см. замечание 10.1), может оказаться удобным иметь дело с такими матрицами ориентации, у которых столбцы поделены на две группы, соответствующие положительным и нулевым значениям величин полуосей, причем каждый столбец второй группы ортогонален всем столбцам из первой. Поэтому замечание 5.4 полезно переформулировать также в следующем виде.

Замечание 5.5 Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0 \neq \emptyset$, причем параметры параллелепипеда $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \pi_i > 0, \quad \forall i \in I_1; \quad \pi_i = 0, \quad \forall i \in I_0; \quad I_0 \cup I_1 = \{1, \dots, n\}, \\ (p^i, p^j) = 0 \quad \forall i, j : i \in I_1, j \in I_0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Пусть для параллелепипеда $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\bar{p}, \bar{P}, \bar{\pi})$ из леммы 5.4 оказалось, что

$$\bar{\pi}_i > 0, \forall i \in I_{11}; \quad \bar{\pi}_i = 0, \forall i \in I_{10}; \quad I_{10} \cup I_{11} = I_1.$$

Тогда в качестве матрицы ориентации \bar{P} параллелепипеда $\mathcal{P}(\bar{p}, \bar{P}, \bar{\pi})$ можно взять матрицу со столбцами \bar{p}^i , которые для всех $i \in I_{11} \cup I_{10}$ совпадают с p^i : $\bar{p}^i = p^i$, а для $i \in I_{10}$ получаются в процессе применения процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта [101, с.70] к векторам p^i , $i \in I_{11} \cup I_{10}$ (взятых в порядке возрастания i сначала в множестве индексов I_{11} , а затем в множестве I_{10}) на последних шагах, соответствующих $i \in I_{10}$. При этом параметры \bar{P} и $\bar{\pi}$ будут удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_i > 0, \forall i \in \bar{I}_1 = I_{11}; \quad \bar{\pi}_i = 0, \forall i \in \bar{I}_0 = I_{10} \cup I_0; \\ (\bar{p}^i, \bar{p}^j) = 0, \quad \forall i, j : i \in \bar{I}_1, j \in \bar{I}_0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

аналогичным (5.12). Далее считаем, что в представлении $\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{P}} \cap \bar{\Sigma}^0$ параметры $\bar{\mathcal{P}}$ удовлетворяют (5.13). Тогда параллелепипед $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ из замечания 5.4 может быть представлен в виде $\bar{\mathcal{P}}^{(j)} = \mathcal{P}(\bar{p}^{(j)}, \bar{P}^{(j)}, \bar{\pi}^{(j)})$, где центр $\bar{p}^{(j)}$ и параметры $\bar{p}^{(j),i}, \bar{\pi}_i^{(j)}$, при $i \in \bar{I}_1, i \neq j$, определяются так же, как в (5.11); $\bar{p}^{(j),i} = \bar{p}^i, \bar{\pi}_i^{(j)} = 0$ при $i \in \bar{I}_0$, а $\bar{p}^{(j),j}$ и $\bar{\pi}_j^{(j)}$ вычисляются в зависимости от значения $\bar{\sigma}_0$. Если $\bar{\sigma}_0 > 0$, то $\bar{p}^{(j),j} = \bar{p}^j, \bar{\pi}_j^{(j)} = |\bar{s}^0 \top \bar{p}^j|^{-1} \bar{\sigma}_0$. Если же $\bar{\sigma}_0 = 0$, то $\bar{\pi}_j^{(j)} = 0$, а $\bar{p}^{(j),j}$ совпадает с последним вектором, полученным при ортогонализации Грамма-Шмидта уже найденных векторов $\bar{p}^{(j),i}, i \in \bar{I}_1, i \neq j$, и \bar{p}^j . При этом оказывается, что матрица $\bar{P}^{(j)} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, а ее столбцы удовлетворяют соотношениям $(\bar{p}^{(j),\alpha}, \bar{p}^{(j),\beta}) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $\bar{\pi}_\alpha^{(j)} > 0, \bar{\pi}_\beta^{(j)} = 0$, которые аналогичны (5.12).

Перейдем к построению внутренних оценок.

Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}$ — это пересечение (5.1) параллелепипеда $\mathcal{P}^{(1)}$ и полосы $\mathcal{S}^{(2)}$, причем найдено описанное в лемме 2.3 представление параллелепипеда $\mathcal{P}^{(1)}$ в виде полосы $\mathcal{S}^{(1)} = \mathcal{S}(c^{(1)}, S^{(1)}, \sigma^{(1)}, n)$. При фиксированных $v \in \mathcal{Q}$ и $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ в силу леммы 2.15 можно найти внутреннюю для \mathcal{Q} оценку $\mathbf{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q})$ вида (2.23), где $\nu^* = \nu^*(v, V)$ определяется соотношениями (2.18), (2.19), в которых $A = \{a_i^j\} \in M^{n \times (n+m_2)}$ и $b \in \mathbb{R}^{n+m_2}$

определяются формулами, выписанными для $n + m_2$ гиперполос, определяющих $\mathcal{S}^{(1)}$ и $\mathcal{S}^{(2)}$. Несложно заметить, что справедлива

Лемма 5.6 Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)} \neq \emptyset$. Тогда, если $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \bigcup \{ \mathbf{P}_{v,V}^- (\mathcal{Q}) \mid v = p^{(1)} + \lambda P^{(1)} \text{diag } \pi^{(1)} \xi, \\ \xi \in \partial \mathcal{P}(0, I, e), \lambda^{(-)}(\xi) \leq \lambda \leq \lambda^{(+)}(\xi) \}, \quad \forall V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где объединение берется по всем $v = v(\xi, \lambda)$, которые параметризованы векторным параметром ξ , пробегающим границу единичного куба, и скалярным параметром λ , стесненным указанными ограничениями,

$$\begin{aligned} \lambda^{(-)}(\xi) &= \max \{ -1, \max_{1 \leq i \leq m_2} \min \{ \zeta_i^{(-)}, \zeta_i^{(+)} \} \}, \\ \lambda^{(+)}(\xi) &= \min \{ 1, \min_{1 \leq i \leq m_2} \max \{ \zeta_i^{(-)}, \zeta_i^{(+)} \} \}, \\ \zeta_i^{(\pm)} &= (c_i^{(2)} - (s^{(2),i})^\top p^{(1)} \pm \sigma_i^{(2)}) / (s^{(2),i})^\top P^{(1)} \text{diag } \pi^{(1)} \xi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Объединение в (5.14) можно дополнить варьированием $V \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$.

Отметим, что приведенные ограничения на λ фактически описывают условия принадлежности $v \in \mathcal{Q}$. Если для $\xi \in \partial \mathcal{P}(0, I, e)$ имеем

$$\lambda^{(-)}(\xi) < \lambda^{(+)}(\xi), \quad (5.16)$$

то $\mathbf{P}_{v,V}^- (\mathcal{Q})$ является параллелепипедом при любом $\lambda \in (\lambda^{(-)}(\xi), \lambda^{(+)}(\xi))$. Если же $\lambda^{(-)}(\xi) > \lambda^{(+)}(\xi)$, то $\mathbf{P}_{v,V}^- (\mathcal{Q}) = \emptyset$.

Для случая, когда $\mathcal{S}^{(2)}$ — это гиперполоса, следующая лемма дает способ нахождения такого ξ , для которого могут быть построены заведомо непустые параллелепипеды $\mathbf{P}_{v,V}^- (\mathcal{Q})$.

Лемма 5.7 Пусть \mathcal{Q} — это пересечение (5.7) параллелепипеда $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$ и гиперполосы $\Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$, причем $\text{int } \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Если центр параллелепипеда $p \in \text{int } \mathcal{Q}$, т.е. $c_0 - \sigma_0 < s^{0\top} p < c_0 + \sigma_0$, то при любом $\xi \in \partial \mathcal{P}(0, I, e)$ имеем (5.16), где

$$\begin{aligned} \lambda^{(-)}(\xi) &= \max \{ -1, \theta^{(-)} \}, & \lambda^{(+)}(\xi) &= \min \{ 1, \theta^{(+)} \}, \\ \theta^{(-)} &= \min \{ \zeta^{(-)}, \zeta^{(+)} \}, & \theta^{(+)} &= \max \{ \zeta^{(-)}, \zeta^{(+)} \}, \\ \zeta^{(\pm)} &= (c_0 - s^{0\top} p \pm \sigma_0) / (\eta \xi), & \eta &= s^{0\top} P \text{diag } \pi, \end{aligned} \quad (5.17)$$

и справедливы включения

$$v = v(\xi, \lambda) = p + \lambda P \text{diag } \pi \xi \in \text{int } \mathcal{Q}, \quad \forall \lambda \in (\lambda^{(-)}(\xi), \lambda^{(+)}(\xi)). \quad (5.18)$$

Если $p \notin \text{int } \mathcal{Q}$, а ξ^* — вектор с компонентами

$$\xi_i^* = \begin{cases} -\text{sign } \eta_i, & \text{если } \eta_i \neq 0 \text{ и } s^{0\top} p \geq c_0 + \sigma_0, \\ \text{sign } \eta_i, & \text{если } \eta_i \neq 0 \text{ и } s^{0\top} p \leq c_0 - \sigma_0, \\ \in [-1, 1], & \text{если } \eta_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.19)$$

то для $\xi = \xi^*$ опять имеем (5.16), (5.18).

Доказательство. При фиксированном $\xi \in \partial \mathcal{P}(0, I, e)$ точка $v(\xi, \lambda) \in \text{int } \mathcal{P} \iff \lambda \in (-1, 1)$, и $v(\xi, \lambda) \in \text{int } \Sigma^0 \iff \lambda \in (\theta^{(-)}, \theta^{(+)})$. Значит, для доказательства достаточно проверить непустоту интервала $(\lambda^{(-)}, \lambda^{(+)}) = (-1, 1) \cap (\theta^{(-)}, \theta^{(+)})$. Условие $p \in \text{int } \Sigma^0$ означает, что $0 \in (\theta^{(-)}, \theta^{(+)})$, то есть, действительно, $(\lambda^{(-)}, \lambda^{(+)}) \neq \emptyset$. Пусть теперь $p \notin \text{int } \mathcal{Q}$, и, для определенности, рассмотрим случай

$$s^{0\top} p \geq c_0 + \sigma_0 \quad (5.20)$$

(другой рассматривается аналогично). Для ξ^* вида (5.19) имеем

$$\eta \xi^* = -\text{Abs}(s^{0\top} P) \text{diag } \pi e < 0, \quad (5.21)$$

причем неравенство здесь строгое, т.к. в противном случае оказалось бы, что ненулевой вектор s^0 ортогонален n линейно независимым векторам $p^i \pi_i$. Из (5.17), (5.21) получается, что в этом случае

$$\zeta^{(+)}(\xi^*) < \zeta^{(-)}(\xi^*). \quad (5.22)$$

Поэтому в силу формул (5.17) для доказательства (5.16) достаточно убедиться, что $\zeta^{(+)}(\xi^*) < 1$ и $\zeta^{(-)}(\xi^*) > -1$. Оба неравенства проверяются способом от противного.

Пусть $\zeta^{(+)} \geq 1$. Тогда из (5.17) и (5.21) следует, что

$$c_0 + \sigma_0 \leq s^{0\top} p - \text{Abs}(s^{0\top} P) \text{diag } \pi e. \quad (5.23)$$

С другой стороны, по условию найдется точка $\tilde{x} \in \text{int } \mathcal{Q}$. Учитывая, что $\tilde{x} = p + P \text{diag } \pi \tilde{\xi}$, $\text{Abs } \tilde{\xi} \leq e$, имеем $s^{0\top} p - \text{Abs}(s^{0\top} P) \text{diag } \pi e \leq s^{0\top} \tilde{x} < c_0 + \sigma_0$, что противоречит (5.23).

Если же $\zeta^{(-)} \leq -1$, то в силу (5.22) имеем $\zeta^{(+)} < -1$. Из этого неравенства с учетом (5.17), (5.21) получаем, что $s^{0\top} p < c_0 + \sigma_0 - \text{Abs}(s^{0\top} P) \text{diag } \pi e < c_0 + \sigma_0$, а это противоречит (5.20). \square

Для иллюстрации на рис. 5.3(a) и 5.3(b) для случаев $p \notin \text{int } \mathcal{Q}$ и $p \in \text{int } \mathcal{Q}$ штриховой линией изображены по три внутренних оценки $\mathbf{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q})$ для $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0 \subset \mathbb{R}^2$. Оценки имеют одинаковые центры и разные матрицы ориентации. В первом случае центр вычисляется по формуле

$$v = v(\xi^*, (\lambda^{(-)}(\xi^*) + \lambda^{(+)}(\xi^*))/2), \quad (5.24)$$

где ξ^* определено в (5.19), а во втором —

$$\begin{aligned} v &= p + \lambda s^0, \quad \lambda = (\lambda^{(-)} + \lambda^{(+)})/2, \\ \lambda^{(-)} &= \max\{\zeta_0^{(-)}, \max_{1 \leq i \leq n} \theta_i^{(-)}\}, \quad \lambda^{(+)} = \min\{\zeta_0^{(+)}, \min_{1 \leq i \leq n} \theta_i^{(+)}\}, \\ \zeta_i^{(\pm)} &= (c_i - s^{i\top} p \pm \sigma_i) / s^{i\top} s^0, \quad i = 0, \dots, n, \\ \theta_i^{(-)} &= \min\{\zeta_i^{(-)}, \zeta_i^{(+)}\}, \quad \theta_i^{(+)} = \max\{\zeta_i^{(-)}, \zeta_i^{(+)}\}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где использовано представление $\mathcal{P} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, n)$ в виде полосы. Сплошными линиями показаны оценки $\mathbf{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q})$, соответствующие тем же трем матрицам V , когда в качестве v взят результат решения задачи (2.27), найденный с помощью симплексного метода Нелдера и Мида (Nelder – Mead) с начальным приближением в p .

6 Оценки для $\text{co}(\mathcal{P}^{(1)} \cup \mathcal{P}^{(2)})$. Оценки множеств в \mathbb{R}^{n+1} с помощью политопов П

Раздел посвящен построению "элементарных" оценок для множеств, возникающих в гл. VI при оценивании множеств достижимости систем с интегральными ограничениями на управление.

Рассмотрим сначала оценки для множеств вида $\mathcal{Q} = \text{co } \bigcup_{j=1}^k \mathcal{P}^{(j)}$, где $\mathcal{P}^{(j)} = \mathcal{P}[p^{(j)}, \bar{P}^{(j)}]$, $\bar{P}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times r_j}$ ($r_j \leq n$).

Внешние оценки $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ строятся согласно (2.9) с учетом выражений

$$\rho(l | \text{co } \bigcup_{j=1}^k \mathcal{P}^{(j)}) = \rho(l | \bigcup_{j=1}^k \mathcal{P}^{(j)}) = \max_{1 \leq j \leq k} \rho(l | \mathcal{P}^{(j)}) \quad \forall l \in \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Построение внутренних основывается на сведениях (путем введения параметров) операции $\text{co } \bigcup_{j=1}^k \mathcal{P}^{(j)}$ к сложению параллелотопов.

Лемма 6.1 Пусть $\mathcal{Q} = \text{co } \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{P}^{(j)}$, где $\mathcal{P}^{(j)} = \mathcal{P}[p^{(j)}, \bar{P}^{(j)}]$ — параллелотопы, $\bar{P}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times r_j}$. Зафиксируем матрицы $\Gamma^{(j)} \in \mathcal{G}^{r_j \times n}$, $j = 1, 2$, число $\alpha \in [0, 1]$ и определим параллелотоп

$$\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \alpha}^-(\text{co } \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{P}^{(j)}) \triangleq \mathcal{P}[\alpha p^{(1)} + (1-\alpha)p^{(2)}, \alpha \bar{P}^{(1)} \Gamma^{(1)} + (1-\alpha) \bar{P}^{(2)} \Gamma^{(2)}]. \quad (6.2)$$

Тогда $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \alpha}^-(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$. Кроме того, справедливо представление $\mathcal{Q} = \bigcup \{ \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \alpha}^-(\mathcal{Q}) \mid \Gamma^{(1)} \in \mathcal{G}^{r_1 \times n}, \Gamma^{(2)} \in \mathcal{G}^{r_2 \times n}, \alpha \in [0, 1] \}$, и если $\mathcal{P}^{(1)}$ — параллелепипед, то при взятии объединения можно положить $\Gamma^{(1)} = I$.

Доказательство первого утверждения проводится по аналогии с леммой 3.8. Пусть $x \in \mathcal{Q}$. Тогда найдутся такие $\alpha \in [0, 1]$ и $x^j \in \mathcal{P}^{(j)}$, что $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$ (достаточно произвести перегруппировку слагаемых и переобозначение в разложении x из теоремы Каратеодори). Замечая, что $x \in \alpha \mathcal{P}^{(1)} + (1-\alpha)\mathcal{P}^{(2)}$ и применяя лемму 3.8, получаем, что $x \in \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \alpha}^-(\mathcal{Q})$ при некоторых $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ из числа допустимых. \square

Для примера на рис. 6.1 показаны два параллелотопа в \mathbb{R}^2 и 10 оценок $\mathbf{P}_{I, \Gamma^{(2)}, \alpha}^-(\mathcal{Q})$, соответствующих двум значениям $\Gamma^{(2)} = I$ и $\Gamma^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ при $\alpha = (i-1)/4$, $i = 1, \dots, 5$.

В гл. VI придется также работать с множествами $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, заданными своими сечениями $\mathcal{X}(\mu)^{21}$:

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{ \mathcal{X}(\mu), \mu \}, \quad \text{где } 0 \leq \mu^b \leq \mu^t, \quad \mathcal{X}(\mu) \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (6.3)$$

²¹Которые, в частности, могут быть пусты: $\mathcal{X}(\mu) = \emptyset$ при некоторых μ .

Определения 6.1 Операции \odot , \oplus , \otimes и $\uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}}$ над множеством (6.3) определим следующими равенствами.

$$\text{Если } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ то } A \odot \mathcal{Z} \triangleq \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{A\mathcal{X}(\mu), \mu\}.$$

$$\text{Если } a \in \mathbb{R}^n, \text{ то } \mathcal{Z} \oplus a \triangleq \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu) + a, \mu\}.$$

$$\text{Если } \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ то } \mathcal{Z} \otimes \mathcal{Y} \triangleq \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu) \cap \mathcal{Y}, \mu\}.$$

Если $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \underline{\mu} \leq \bar{\mu}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \mathcal{R} &\triangleq \tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{\tilde{\mu}^b \leq \mu \leq \tilde{\mu}^t} \{\tilde{\mathcal{X}}(\mu), \mu\}, \quad \text{где} \\ \tilde{\mu}^b = \underline{\mu}, \quad \tilde{\mu}^t = \min\{\mu^t, \bar{\mu}\}, \quad \tilde{\mathcal{X}}(\mu) &= \bigcup_{\max\{\mu^b, \mu\} \leq \zeta \leq \mu^t} (\mathcal{X}(\zeta) + (\zeta - \mu)\mathcal{R}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

При $\underline{\mu} = 0$, $\bar{\mu} = +\infty$ будем использовать обозначение $\mathcal{Z} \uplus \mathcal{R} \triangleq \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \mathcal{R}$.

Несложно проверить следующее

Замечание 6.1 Если $\mathcal{X}^b, \mathcal{X}^t \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества, $\mathcal{Z}^i = \{\mathcal{X}^i, \mu^i\}$, $i = "b", "t"$, то $\text{co}(\mathcal{Z}^b \cup \mathcal{Z}^t) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} (\lambda \mathcal{Z}^t + (1 - \lambda) \mathcal{Z}^b)$.

Отметим некоторые свойства введенных операций.

Определение 6.2 Будем говорить, что сечения множества $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ вида (6.3) не возрастают, если $\mathcal{X}(\mu^1) \supseteq \mathcal{X}(\mu^2)$, $\forall \mu^1, \mu^2 : \mu^b \leq \mu^1 \leq \mu^2 \leq \mu^t$, другими словами, вместе с любой точкой $\{x, \mu\} \in \mathcal{Z}$ множество \mathcal{Z} содержит и все точки $\{x, \eta\}$, где $\mu^b \leq \eta \leq \mu$.

Лемма 6.2 Пусть \mathcal{Z} имеет вид (6.3), его сечения не возрастают, и пусть $\underline{\mu} \geq \mu^b$. Тогда сечения множества $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \mathcal{R}$ не возрастают, каково бы ни было множество $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\tilde{z} \triangleq \{\tilde{x}, \mu\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, где $\underline{\mu} \leq \mu \leq \min\{\mu^t, \bar{\mu}\}$. В силу (6.4) существуют такие $\zeta \in [\max\{\mu^b, \mu\}, \mu^t]$, $x \in \mathcal{X}(\zeta)$ и $u \in \mathcal{R}$, что $\tilde{x} = x + (\zeta - \mu)u$. Рассмотрим точку $\{\tilde{x}, \eta\}$ с произвольным $\eta \in [\underline{\mu}, \mu]$. Введем $\tilde{\zeta} = \zeta - (\mu - \eta)$. С учетом $\underline{\mu} \geq \mu^b$ имеем $\tilde{\zeta} \geq \max\{\mu^b, \mu\} - (\mu - \eta) = \eta \geq \underline{\mu} \geq \mu^b$. Очевидно, $\tilde{\zeta} \leq \zeta \leq \mu^t$. Тогда $\tilde{x} = x + (\tilde{\zeta} - \eta)u$, где $x \in \mathcal{X}(\tilde{\zeta})$ в силу свойства \mathcal{Z} . Из (6.4) следует, что $\{\tilde{x}, \eta\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$. \square

Лемма 6.3 Пусть выполнены условия леммы 6.2, \mathcal{K} — конус в \mathbb{R}^r , $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Тогда множества $\mathcal{Z}^1 = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} B(\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K})$ и $\mathcal{Z}^2 = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} B(\mathcal{C} \cap \mathcal{K})$ совпадают ($\partial\mathcal{C}$ — граница \mathcal{C}).

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{Z}^1 \subseteq \mathcal{Z}^2$. Пусть $\tilde{z} \triangleq \{\tilde{x}, \mu\} \in \mathcal{Z}^2$, т.е. найдутся такие $\zeta \in [\mu, \mu^t]$, $x \in \mathcal{X}(\zeta)$ и $u \in \mathcal{K}$, $\|u\|_\infty \leq 1$, что $\tilde{x} = x + (\zeta - \mu)Bu$. Если $\|u\|_\infty = 1$, то $\tilde{z} \in \mathcal{Z}^1$. Пусть $\|u\|_\infty = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда можно записать \tilde{x} в виде $\tilde{x} = x + (\zeta - \tilde{\mu})B\tilde{u}$, где $\tilde{u} = u/\|u\|_\infty \in \mathcal{K}$, $\|\tilde{u}\|_\infty = 1$, а $\tilde{\mu} = \zeta - \varepsilon(\zeta - \mu) = \mu + (1 - \varepsilon)(\zeta - \mu)$. При этом $\mu^b \leq \underline{\mu} \leq \mu \leq \tilde{\mu} \leq \zeta$. Ввиду (6.4) $\{\tilde{x}, \tilde{\mu}\} \in \mathcal{Z}^1$, а по лемме 6.2 и $\tilde{z} = \{\tilde{x}, \mu\} \in \mathcal{Z}^1$. В случае $u = 0$ можно записать $\tilde{x} = x + (\mu - \mu)B\tilde{u}$, где \tilde{u} — произвольная точка из $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, причем $x \in \mathcal{X}(\mu)$ в силу свойства \mathcal{Z} . Значит, опять $\{\tilde{x}, \mu\} \in \mathcal{Z}^1$. Включение $\mathcal{Z}^2 \subseteq \mathcal{Z}^1$ доказано. \square

Лемма 6.4 Из выпуклости \mathcal{Z} и \mathcal{R} при любых $\underline{\mu} \leq \bar{\mu}$ следует выпуклость $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \mathcal{R}$. Если выполнены условия леммы 6.3, причем \mathcal{Z} и \mathcal{K} выпуклы, то оба множества \mathcal{Z}^1 и \mathcal{Z}^2 из леммы 6.3 выпуклы.

Доказательство. Убедимся сначала в выпуклости $\tilde{\mathcal{Z}}$. Пусть $\tilde{z}^k \triangleq \{\tilde{x}^k, \mu^k\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, $k=1, 2$, т.е. $\tilde{x}^k = x^k + (\zeta^k - \mu^k)u^k$, где $\zeta^k \in [\max\{\mu^b, \mu^k\}, \mu^t]$, $x^k \in \mathcal{X}(\zeta^k)$, $u^k \in \mathcal{R}$. Рассмотрим точку $z_\lambda \triangleq \{\tilde{x}_\lambda, \mu_\lambda\} = \lambda\tilde{z}^1 + (1-\lambda)\tilde{z}^2$ с $\lambda \in [0, 1]$. Тогда $\tilde{x}_\lambda = x_\lambda + (\zeta_\lambda - \mu_\lambda)u_\lambda$, где $\zeta_\lambda = \lambda\zeta^1 + (1-\lambda)\zeta^2 \in [\max\{\mu^b, \mu_\lambda\}, \mu^t]$, $x_\lambda \in \mathcal{X}(\zeta_\lambda)$ в силу выпуклости \mathcal{Z} , а $u_\lambda = (\zeta_\lambda - \mu_\lambda)^{-1} \cdot (\lambda(\zeta^1 - \mu^1)u^1 + (1-\lambda)(\zeta^2 - \mu^2)u^2) \in \mathcal{R}$, если $\zeta_\lambda > \mu_\lambda$ (в силу выпуклости \mathcal{R}), и u_λ — произвольный элемент из \mathcal{R} , если $\zeta_\lambda = \mu_\lambda$. Имеем $z_\lambda \in \tilde{\mathcal{Z}}$. Значит, \mathcal{Z}^2 выпукло, а в силу леммы 6.3 выпукло и \mathcal{Z}^1 . \square

Следствие 6.1 Пусть выполнены условия замечания 6.1, $\mu^b = 0$, $\mathcal{Z} = \text{co}(\mathcal{Z}^b \cup \mathcal{Z}^t)$ представлено в виде (6.3) и $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus \mathcal{R}$, где множество \mathcal{R} выпукло. Тогда множества $\tilde{\mathcal{X}}(\mu)$ из (6.4) совпадают с множествами $\hat{\mathcal{X}}(\mu) = \text{co}(\mathcal{X}(\mu) \cup (\mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R}))$, где $\mathcal{X}(\mu) = \frac{\mu}{\mu^t}\mathcal{X}^t + \frac{\mu^t - \mu}{\mu^t}\mathcal{X}^b$.

Доказательство. $\mathcal{X}(\mu)$ имеет указанный вид в силу замечания 6.1. Беря выпуклую оболочку обеих частей очевидного включения $\mathcal{X}(\mu) \cup$

$(\mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R}) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}(\mu)$ и учитывая выпуклость $\tilde{\mathcal{X}}(\mu)$, вытекающую из леммы 6.4, получаем $\hat{\mathcal{X}}(\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}(\mu)$. Обратно, пусть $x \in \tilde{\mathcal{X}}(\mu)$, т.е. найдутся $\zeta \in [\mu, \mu^t]$, $x^1 \in \mathcal{R}$, $x^2 \in \mathcal{X}^t$, $x^3 \in \mathcal{X}^b$ такие, что $x = \frac{\zeta}{\mu^t}x^2 + \frac{\mu^t - \zeta}{\mu^t}x^3 + (\zeta - \mu)x^1$. Несложно проверить, что x можно представить в виде $x = (1 - \alpha)\tilde{x}^3 + \alpha\tilde{x}^2$, где $\alpha = \frac{\zeta - \mu}{\mu^t - \mu} \in [0, 1]$, $\tilde{x}^3 = \frac{\mu}{\mu^t}x^2 + \frac{\mu^t - \mu}{\mu^t}x^3 \in \mathcal{X}(\mu)$, $\tilde{x}^2 = x^2 + (\mu^t - \mu)x^1 \in \mathcal{X}^t + (\mu^t - \mu)\mathcal{R}$, и, значит, $x \in \hat{\mathcal{X}}(\mu)$. \square

Лемма 6.5 *Если сечения \mathcal{Z} не возрастают, то таково же множество $\mathcal{Z} \circledast \mathcal{U}$ при любом $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Если \mathcal{Z} и \mathcal{U} выпуклы, то $\mathcal{Z} \circledast \mathcal{U}$ тоже выпукло.*

Для построения внешних оценок множеств \mathcal{Z} определим в \mathbb{R}^{n+1} следующий класс политопов $\Pi = \Pi(\{\mathcal{P}^b, \mu^b\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\})$ (см. рис. 6.2).

Определение 6.3 Если μ^b, μ^t — числа, $0 \leq \mu^b \leq \mu^t$, а $\mathcal{P}^b = \mathcal{P}(p^b, P^b, \pi^b)$, $\mathcal{P}^t = \mathcal{P}(p^t, P^t, \pi^t)$ — параллелепипеды с одинаковыми матрицами $P^b = P^t = P$, то *политоп* Π определим в виде²²

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi(\{\mathcal{P}^b, \mu^b\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\}) = \text{co}(\mathcal{Z}^b \cup \mathcal{Z}^t), \\ \mathcal{Z}^i &= \{\mathcal{P}^i, \mu^i\} = \{\mathcal{P}(p^i, P, \pi^i), \mu^i\}, \quad i = \text{"b"}, \text{"t"}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Из замечания 6.1 и леммы 3.2 получаем

Следствие 6.2 Политоп (6.5) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{P}(\mu), \mu\}, \quad \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(p(\mu), P, \pi(\mu)), \\ p(\mu) &= \lambda p^t + (1 - \lambda)p^b, \quad \pi(\mu) = \lambda \pi^t + (1 - \lambda)\pi^b, \quad \lambda = \frac{\mu - \mu^b}{\mu^t - \mu^b}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Следствие 6.3 Сечения политопы (6.5) не возрастают тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}^t \subseteq \mathcal{P}^b$, и тогда и только тогда, когда все функции $\gamma_j^{(+)}(\mu)$ монотонно не возрастают, а $\gamma_j^{(-)}(\mu)$ — монотонно не убывают на $[\mu^b, \mu^t]$, где $\gamma^{(\pm)}(\mu)$ определены для $\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(p(\mu), P, \pi(\mu))$ из (6.6) формулами (2.3), (2.4).

²²Индексы "b" и "t" произошли от слов "bottom" ("дно") и "top" ("верхушка").

Доказательство проводится с помощью исследования свойств монотонности для опорных функций $\rho(l|\mathcal{P}(\mu)) = ((\mu - \mu^b)/(\mu^t - \mu^b))\rho(l|\mathcal{P}^t) + ((\mu^t - \mu)/(\mu^t - \mu^b))\rho(l|\mathcal{P}^b)$. \square

Очевидно, что результат операций $A \odot \Pi$ и $\Pi \oplus a$ также является политопом типа (6.6). Найдем теперь внешние оценки типа (6.6) для результата операций $\Pi \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} B\mathcal{R}$ и $\Pi \odot \mathcal{Y}$, где $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathcal{R} = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, \mathcal{K} — конус, \mathcal{Y} — параллелепипед либо гиперполоса.

При этом будем использовать следующую схему построения оценок для множеств $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ вида (6.3). Сначала при фиксированной матрице $P^+ \in \mathcal{M}_{0}^{n \times n}$ строится внешняя для \mathcal{Z} оценка $\tilde{\mathcal{Z}} \supseteq \mathcal{Z}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{\tilde{\mathcal{P}}(\mu), \mu\}, \quad \tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{(-)}(\mu), \gamma^{(+)}(\mu)) \supseteq \mathcal{X}(\mu), \quad \forall \mu \in [\mu^b, \mu^t].$$

В частности, можно строить $\tilde{\mathcal{Z}}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathbf{Z}_{P^+}^+(\mathcal{Z}) \triangleq \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{\tilde{\mathcal{P}}(\mu), \mu\}, \quad \text{где } \tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{X}(\mu)). \quad (6.7)$$

При этом $\tilde{\mathcal{Z}}$ может не быть политопом Π типа (6.6). В этом случае предположим, что функции $\gamma^{(\pm)}(\mu)$ представимы в виде

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \left(\min_{\max} \right) \{\gamma_j^{1(\pm)}(\mu), \gamma_j^{2(\pm)}(\mu)\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.8)$$

причем все функции $\gamma_j^{k(\pm)}(\mu)$ линейны. Построим для $\gamma_j^{(+)}(\mu)$ ($\gamma_j^{(-)}(\mu)$) линейные мажоранты (миноранты) $\gamma_j^{+, (+)}(\mu)$ ($\gamma_j^{+, (-)}(\mu)$), определяемые параметрами $g_j^{(+)}$ ($g_j^{(-)}$):

$$\begin{aligned} \gamma_j^{+, (\pm)}(\mu) &= \gamma_j^{(\pm)}(\mu_{*j}^{(\pm)}) + g_j^{(\pm)}(\mu - \mu_{*j}^{(\pm)}), \\ \mu_{*j}^{(\pm)} &= \mu_{0j}^{(\pm)}, \quad g_j^{(\pm)} \in \mp \partial(\mp \gamma_j^{(\pm)}(\mu_{*j}^{(\pm)})), \quad \text{если уравнение } \gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{2(\pm)}(\mu) \\ &\text{имеет единственный корень } \mu_{0j}^{(\pm)}, \quad \text{причем } \mu^b < \mu_{0j}^{(\pm)} < \mu^t; \\ \mu_{*j}^{(\pm)} &= \mu^b, \quad g_j^{(\pm)} = \frac{d}{d\mu} \gamma_j^{(\pm)}(\mu_{*j}^{(\pm)}) \quad \text{в противном случае,} \end{aligned} \quad (6.9)$$

где в последней формуле имеется ввиду правая односторонняя производная. Векторы $g^{(-)}$, $g^{(+)}$, удовлетворяющие (6.9), будем называть *допустимыми*. Здесь символом $\partial f(\mu_*)$ обозначен субдифференциал выпуклой функции $f(\mu)$ в точке μ_* . Определим далее множество

$$\Pi_{g^{(-)},g^{(+)}}^+(\tilde{\mathcal{Z}}) \triangleq \bigcup_{\mu^b \leq \mu \leq \mu^t} \{\mathcal{P}^+(\mu), \mu\}, \quad \mathcal{P}^+(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,-}(\mu), \gamma^{+,+}(\mu)). \quad (6.10)$$

Оно содержит $\tilde{\mathcal{Z}}$ в силу свойств субдифференциала²³ и представления параллелепипеда в виде (2.2). Таким образом, справедлива

Лемма 6.6 Пусть \mathcal{Z} — множество вида (6.3). При сделанных относительно $\tilde{\mathcal{Z}}$ предположениях множество (6.10) представляет собой политоп типа (6.6) и является внешней для \mathcal{Z} оценкой: $\Pi^+ = \Pi_{g^{(-)},g^{(+)}}^+(\tilde{\mathcal{Z}}) \supseteq \mathcal{Z}$, каковы бы ни были матрица $P^+ \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и допустимые векторы $g^{(-)}$, $g^{(+)}$.

Из фактов выпуклого анализа [23, с.211] получаем

Замечание 6.2 Пусть $\gamma(\mu) = \max\{\gamma^1(\mu), \gamma^2(\mu)\}$, где $\gamma^k(\mu) = a_k\mu + b_k$, $k = 1, 2$, и $\mu_0 = (b_2 - b_1)/(a_2 - a_1)$ — единственный корень уравнения $\gamma^1(\mu) = \gamma^2(\mu)$. Тогда $\partial\gamma(\mu_0) = \text{co}(\cup_{k=1}^2 \partial\gamma^k(\mu_0)) = \text{co}(a_1 \cup a_2) = [\min\{a_1, a_2\}, \max\{a_1, a_2\}]$ и любая функция вида $\gamma^+(\mu) = \gamma(\mu_0) + g(\mu - \mu_0)$, $g = \alpha \max\{a_1, a_2\} + (1 - \alpha) \min\{a_1, a_2\}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, служит минорантой для $\gamma(\mu)$: $\gamma^+(\mu) \leq \gamma(\mu)$, причем если обе функции $\gamma^1(\mu)$ и $\gamma^2(\mu)$ монотонно не убывают, то этим свойством обладает и $\gamma^+(\mu)$.

Лемма 6.7 Пусть Π — политоп (6.6), $\mathcal{R} \in \text{conv } \mathbb{R}^r$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ и $0 \leq \underline{\mu} \leq \bar{\mu}$. Тогда внешней оценкой для множества $\mathcal{Z} = \Pi \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} B\mathcal{R}$ является политоп вида $\Pi^+ = \bigcup_{\mu^{+,b} \leq \mu \leq \mu^{+,t}} \{\mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,-}(\mu), \gamma^{+,+}(\mu)), \mu\}$, $\mu^{+,b} = \underline{\mu}$, $\mu^{+,t} = \min\{\mu^t, \bar{\mu}\}$, построенный по формулам $\Pi^+ = \Pi_{g^{(-)},g^{(+)}}^+(\tilde{\mathcal{Z}})$, $\tilde{\mathcal{Z}} =$

²³Напомним [129], что вектор x^* называется субградиентом функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в точке x_0 , если $f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0, x^*)$, а множество всех субградиентов в точке x_0 называется субдифференциалом $\partial f(x_0)$.

$\mathbf{Z}_{P^+}^+(\mathcal{Z})$, каковы бы ни были матрица $P^+ \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и векторы $g^{(\pm)}$, допустимые в силу (6.9), где μ^b, μ^t надо заменить на $\mu^{+,b}, \mu^{+,t}$. Здесь

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{\mu^{+,b} \leq \mu \leq \mu^{+,t}} \{\tilde{\mathcal{P}}(\mu), \mu\}, \quad \tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{(-)}(\mu), \gamma^{(+)}(\mu)), \quad (6.11)$$

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = (Dp^t \pm C\pi^t)_j + (\mu^t - \mu)h_j^{(\pm)}, \quad (6.12)$$

если либо $\mu^b = \mu^t$, либо $\mu^b < \mu^t$ и выполняются условия

$$(Dp^t \pm C\pi^t)_j + (\mu^t - \mu^b)h_j^{(\pm)} \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} (Dp^b \pm C\pi^b)_j, \quad (6.13)$$

а если $\mu^b < \mu^t$ и (6.13) не выполняется, то имеет место представление (6.8), где

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{1(\pm)}(\mu) \text{ при } \mu \geq \mu^b, \quad \gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{2(\pm)}(\mu) \text{ при } \mu \leq \mu^b, \quad (6.14)$$

$$\gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = \frac{\mu - \mu^b}{\mu^t - \mu^b} (Dp^t \pm C\pi^t)_j + \frac{\mu^t - \mu}{\mu^t - \mu^b} (Dp^b \pm C\pi^b)_j, \quad (6.15)$$

$$\gamma_j^{2(\pm)}(\mu) = (Dp^b \pm C\pi^b)_j + (\mu^b - \mu)h_j^{(\pm)}$$

и использованы обозначения

$$D = P^{+^{-1}}, \quad C = \text{Abs}(P^{+^{-1}}P), \quad h_j^{(\pm)} = \pm \rho(\pm(P^{+^{-1}})^\top e^i | B\mathcal{R}). \quad (6.16)$$

Доказательство. Имеем $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{X}(\mu))$, где в силу (6.4)

$$\mathcal{X}(\mu) = \bigcup_{\max\{\mu^b, \mu\} \leq \zeta \leq \mu^t} (\mathcal{P}(\zeta) + (\zeta - \mu)B\mathcal{R}). \quad (6.17)$$

Учитывая, что для семейства множеств \mathcal{Q}_λ , зависящих от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^1$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{P^+}^+(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{Q}_\lambda) &= \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,-}, \gamma^{+,+}), \\ \gamma_i^{+,\pm} &= \left(\begin{array}{c} \sup \\ \inf \end{array} \right) \{ \pm \rho(\pm(P^{+^{-1}})^\top e^i | \mathcal{Q}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

и используя лемму 2.1, в случае $\mu^b = \mu^t$ получаем (6.12), а при $\mu^b < \mu^t$

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(\pm)}(\mu) &= \left(\begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} \right) \{ \varphi_j^{(\pm)}(\zeta, \mu) \mid \max\{\mu^b, \mu\} \leq \zeta \leq \mu^t \} \\ &= \left(\begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} \right) \{ \varphi_j^{(\pm)}(\max\{\mu^b, \mu\}, \mu), \varphi_j^{(\pm)}(\mu^t, \mu) \}, \end{aligned}$$

$$\varphi^{(\pm)}(\zeta, \mu) \triangleq \frac{\zeta - \mu^b}{\mu^t - \mu^b}(Dp^t \pm C\pi^t) + \frac{\mu^t - \zeta}{\mu^t - \mu^b}(Dp^b \pm C\pi^b) + (\zeta - \mu)h^{(\pm)}.$$

С учетом неравенства $\max\{\mu^b, \mu\} - \mu^t \leq 0$ несложно проверить, что соотношения $\varphi_j^{(\pm)}(\mu^t, \mu) \left(\begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right) \varphi_j^{(\pm)}(\max\{\mu^b, \mu\}, \mu)$ эквивалентны условиям (6.13), и $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ определяются формулами (6.12) – (6.16). Включение $\mathcal{Z} \subseteq \Pi^+$ следует из леммы 6.6. \square

Следствие 6.4 Если в условиях леммы 6.7 либо $\mu^b = \mu^t$, либо $\mu^b < \mu^t$ и $\underline{\mu} = \mu^b$, то $\Pi^+ = \mathbf{Z}_{P^+}^+(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Функции $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ в (6.12), (6.14) оказываются линейными, а векторы $g^{(\pm)}$ определяются в силу (6.9) однозначно и обеспечивают равенство $\Pi_{g^{(-)}, g^{(+)}}^+(\tilde{\mathcal{Z}}) = \tilde{\mathcal{Z}}$. \square

Следствие 6.5 Пусть $\Pi^{(1)}$ и $\Pi^{(2)}$ — два политопа (6.5) с одинаковыми $\mathcal{P}^{(1),b} = \mathcal{P}^{(2),b} = \mathcal{P}^{(1),t} = \mathcal{P}^{(2),t}$ и $\mu^{(1),t} = \mu^{(2),t}$, но у первого $\mu^{(1),b} = \mu^{(1),t}$, а у второго $\mu^{(2),b} < \mu^{(2),t}$, и пусть $\mathcal{Z}^{(k)} = \Pi^{(k)} \uplus_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} B\mathcal{R}$, причем $0 \in \mathcal{R}$. Тогда соответствующие в силу леммы 6.7 оценки имеют вид $\Pi^{(k)+} = \mathbf{Z}_{P^+}^+(\mathcal{Z}^{(k)})$ и совпадают: $\Pi^{(1)+} = \Pi^{(2)+}$.

Доказательство. Условие $0 \in \mathcal{R}$ обеспечивает $\rho(l|B\mathcal{R}) \geq 0$ и, значит, (6.13). \square

Следствие 6.6 Если в условиях леммы 6.7 множество \mathcal{R} представимо в виде $\mathcal{R} = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$, а \mathcal{K} — конус, то сечения множества \mathcal{Z} и его оценки Π^+ не возрастают²⁴. Если к тому же оказывается, что $\mathcal{R} = \mathcal{P}(r, I, \rho)$, то величины $h_j^{(\pm)}$ из (6.16) вычисляются по явным формулам $h^{(\pm)} = d \pm f$, $d = DBr$, $f = \text{Abs}(DB)\rho$.

Доказательство. Пусть $\mu^1 \leq \mu^2$. Расписывая $\mathcal{X}(\mu^1)$ в виде (6.17), заменяя отрезок $[\max\{\mu^b, \mu^1\}, \mu^t]$, по которому производится объединение, вложенным в него отрезком $[\max\{\mu^b, \mu^2\}, \mu^t]$, и используя включение $(\zeta - \mu^1)\mathcal{R} \supseteq (\zeta - \mu^2)\mathcal{R}$, получаем $\mathcal{X}(\mu^1) \supseteq \mathcal{X}(\mu^2)$. Из монотонности по включению операции $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Q})$ следует, что $\tilde{\mathcal{P}}(\mu^1) \supseteq \tilde{\mathcal{P}}(\mu^2)$. Значит, сечения \mathcal{Z} и $\tilde{\mathcal{Z}}$ не возрастают и функции $\gamma_j^{(+)}(\mu)$ ($\gamma_j^{(-)}(\mu)$) монотонно не

²⁴В отличие от леммы 6.2 не делается предположений о невозрастании сечений Π и о $\underline{\mu}$.

возрастают (не убывают). Ввиду замечания 6.2 и следствия 6.3 сечения политопа Π^+ не возрастают. \square

Лемма 6.8 Пусть Π — политоп вида (6.6), а $\mathcal{Y} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$. Тогда внешней оценкой для множества $\mathcal{Z} = \Pi \odot \mathcal{Y} \neq \emptyset$ является политоп Π^+ , построенный по формулам $\Pi^+ = \Pi_{g^{(-)}, g^{(+)}}^+(\tilde{\mathcal{Z}})$, $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathbf{P}_{P^+}^+(\Pi) \odot \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Y})$, каковы бы ни были матрица $P^+ \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и векторы $g^{(-)}$, $g^{(+)}$, допустимые в силу (6.9). Здесь $\tilde{\mathcal{Z}}$ имеет вид (6.11), (6.8), где $\gamma_j^{1(\pm)}(\mu)$ описываются такими же формулами, что и в (6.15), а $\gamma_j^{2(\pm)}(\mu) \equiv \pm \rho(\pm(P^{+^{-1}})^\top e^j | \mathcal{Y})$. В частности, если $\mathcal{Y} = \mathcal{P}(q, Q, \kappa)$ — параллелепипед в \mathbb{R}^n , то $\gamma_j^{2(\pm)} \equiv (d \pm f)_j$. При этом $d = Dq$, $f = \text{Abs}(DQ)\kappa$, $D = P^{+^{-1}}$, $C = \text{Abs}(DP)$. Допуская в (6.11) возможность $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \emptyset$, можно считать, что $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \mu^t$.

Доказательство. Включения $\Pi^+ \supseteq \mathcal{Z}$ следуют из леммы 6.6, так как $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}(\mu)) \cap \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{Y}) \supseteq \mathcal{P}(\mu) \cap \mathcal{Y}$, а функции $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ имеют указанный выше вид в силу леммы 5.2. \square

Следствие 6.7 В условиях леммы 6.8, если сечения Π не возрастают, то таким же свойством обладают множества \mathcal{Z} , $\tilde{\mathcal{Z}}$ и Π^+ . При этом все сечения $\tilde{\mathcal{P}}(\mu)$ и $\mathcal{P}^+(\mu)$ множеств $\tilde{\mathcal{Z}}$ и Π^+ непусты, если положить $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \min\{\mu^t, \min_{1 \leq j \leq n} \tilde{\mu}_j\}$, где $\tilde{\mu}_j$ — корень уравнения $\gamma_j^{(-)}(\mu) = \gamma_j^{(+)}(\mu)$, если он единственный, $\tilde{\mu}_j = +\infty$ в остальных случаях.

Доказательство. Сечения \mathcal{Z} не возрастают ввиду леммы 6.5. Заметим, что $(Dp^i \pm C\pi^i)_j = \pm \rho(\pm(P^{+^{-1}})^\top e^j | \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^i))$, $i = "b", "t"$. Поэтому включения $\mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^b) \supseteq \mathbf{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^t)$ обеспечивают невозрастание (неубывание) функций $\gamma_j^{1(+)}(\mu)$ ($\gamma_j^{1(-)}(\mu)$) из (6.15), а значит, и соответствующее свойство функций $\gamma_j^{2(\pm)}(\mu)$ вида (6.8), поскольку $\gamma_j^{2(\pm)}(\mu)$ постоянны. Ввиду замечания 6.2 и следствия 6.3 сечения $\tilde{\mathcal{Z}}$ и Π^+ не возрастают. Последнее утверждение леммы также вытекает из свойств монотонности функций $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$. \square

Если $\mathcal{Z} = \Pi \odot \mathcal{Y}$, Π — политоп вида (6.5), (6.6), а $\mathcal{Y} = \Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$ — гиперполоса, то несколько внешних оценок Π^+ можно найти в явном

виде, выбрав матрицы ориентации P^+ специальным образом.

Рассмотрим множество $\mathcal{V}^4 = \mathcal{V}(\mathcal{P}^b \cap \Sigma^0)$ (см. с.47) неособых матриц, состоящее не более, чем из $n+1$ элементов $P^{(l)}$, $l=0, \dots, n$. Здесь $P^{(0)} = P = \{p^1 \dots p^n\}$, а $P^{(l)}$, $l \in \{1, \dots, n\}$, определена при условии $(p^l, s^0) \neq 0$ и равна $P^{(l)} = (S^{(l)\top})^{-1}$, где матрица $S^{(l)}$ получена из $S = (P^{-1})^\top$ заменой l -о столбца на s^0 . Ввиду леммы А1.5 столбцы матрицы $P^{(l)}$ имеют вид

$$p^{(l),i} = p^i - (p^i, s^0)(p^l, s^0)^{-1}p^l, \quad i=1, \dots, n, \quad i \neq l; \quad p^{(l),l} = (p^l, s^0)^{-1}p^l.$$

Лемма 6.9 Пусть Π – политоп (6.6), а $\mathcal{Y} = \Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$. Тогда внешней оценкой для $\mathcal{Z} = \Pi \circledast \mathcal{Y} \neq \emptyset$ является политоп, построенный по формулам $\Pi^+ = \Pi_{g^{(-)}, g^{(+)}}^+(\tilde{\mathcal{Z}})$, $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_{P^+}^+(\mathcal{Z})$, каковы бы ни были матрица $P^+ = P^{(l)} \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^b \cap \Sigma^0)$ ($l \in \{0, \dots, n\}$) и векторы $g^{(-)}$, $g^{(+)}$, допустимые в силу (6.9). Здесь $\tilde{\mathcal{Z}}$ имеет вид (6.11), (6.8), где

$$\begin{aligned} \gamma_j^{1(\pm)}(\mu) &= (P^{-1}p(\mu))_j \pm \pi_j(\mu), \\ \gamma_j^{2(\pm)}(\mu) &= \begin{cases} (P^{-1}p(\mu))_j + |\omega_j|^{-1}(\zeta_j^{(\pm)}(\mu) \pm \sigma_0) \mp \pi_j(\mu), & \omega_j \neq 0, \\ \pm \infty, & \omega_j = 0, \end{cases} \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, n, \quad j \neq l, \end{aligned}$$

$$\gamma_l^{1(\pm)}(\mu) = c_0 \pm \sigma_0, \quad \gamma_l^{2(\pm)}(\mu) = c_0 + \zeta_0^{(\pm)}(\mu),$$

$p(\mu)$, $\pi(\mu)$ – такие же, как в (6.6), а

$$\omega_\alpha = (p^\alpha, s^0), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad \omega_0 = -1;$$

$$\zeta_\alpha^{(\pm)}(\mu) = \pm \text{Abs}(\omega)^\top \pi(\mu) - (\text{sign } \omega_\alpha)((p(\mu), s^0) - c_0), \quad \alpha = 0, \dots, n.$$

Допуская пустые $\tilde{\mathcal{P}}(\mu)$, можно считать, что $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \mu^t$.

Доказательство. Включения $\Pi^+ \supseteq \mathcal{Z}$ следуют из леммы 6.6. Формулы для $\gamma_j^{(\pm)}$ получены эквивалентным преобразованием формул леммы 5.4, определяющих оценки $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \Sigma^0)$, $V \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P} \cap \Sigma^0)$, проведенным для выявления явного вида линейных функций $\gamma_j^{i(\pm)}(\mu)$. \square

Следствие 6.8 Лемме 6.9 соответствуют утверждения, аналогичные следствию 6.7, где следует положить $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \min\{\mu^t, \mu^{(-)}, \mu^{(+)}\}$,

где $\mu^{(\pm)}$ — корень уравнения $\rho(\pm s^0 | \mathcal{P}(\mu)) = \pm c_0 - \sigma_0$, если он единственный, и $\mu^{(\pm)} = +\infty$ в остальных случаях.

Доказательство аналогично доказательству следствия 6.7. При этом нужную монотонность $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ можно установить, заметив, что

$$\gamma_j^{2(\pm)}(\mu) = \text{Const}_j^{2(\pm)} \pm |\omega_j|^{-1} \rho(\pm (|\omega_j| (P^{-1})^\top e^j - (\text{sign } \omega_j) s^0) | \mathcal{P}(\mu))$$

при $\omega_j \neq 0$,

$$\gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = \rho(\pm (P^{-1})^\top e^j | \mathcal{P}(\mu)), \quad j = 1, \dots, n, j \neq l,$$

$$\gamma_l^{2(\pm)}(\mu) = \text{Const}_l^{2(\pm)} \pm \rho(\pm s^0 | \mathcal{P}(\mu)), \quad \gamma_l^{1(\pm)}(\mu) = \text{Const}_l^{1(\pm)},$$

где константы не зависят от μ . Выражение для $\mu^{+,t}$ вытекает с учетом монотонности из того, что $\mathcal{P}(\mu) \cap \Sigma^0 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\zeta_0^+(\mu) \geq -\sigma_0$ и $-\zeta_0^-(\mu) \geq -\sigma_0$ (см. лемму 5.4). \square

Глава II

Полиэдральные аппроксимации множеств достижимости при геометрических ограничениях на управление

В данной главе разрабатываются методы двусторонней аппроксимации множеств достижимости линейных динамических систем (как с дискретным, так и с непрерывным временем) без фазовых ограничений, основанные на конструкциях, описанных в гл. I. Построены семейства касающихся (тугих) внешних (внутренних) оценок, в ряде случаев — минимальных (максимальных) по включению, обеспечивающих точные представления искомых множеств. Основная часть результатов главы опубликована в [65, 66, 69, 73, 188].

7 Многошаговые системы

Построим полиэдральные аппроксимации множеств достижимости многошаговых систем (1.1), (1.2), (1.8). Постановка задачи описана в § 1.

Если $\Phi[k, l]$ — фундаментальная матрица для системы (1.1): $\Phi[k, l] = A[k]A[k-1] \cdots A[l+1]$ при $k > l$ и $\Phi[k, l] = I$ при $k = l$, то ввиду (1.7)

$$\mathcal{X}[k] = \Phi[k, 0]\mathcal{X}_0 + \sum_{j=1}^k \Phi[k, j]\mathcal{R}[j], \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.1)$$

При выполнении предположений 1.1 и (1.8) $\mathcal{X}[k]$ – это сумма $k+1$ параллелепипеда. Пользуясь теоремой 3.1 и вычисляя $P_V^+(\mathcal{Q})$ для $\mathcal{Q} = \mathcal{X}[k]$ при различных V , можно получить внешние аппроксимации, обеспечивающие точные представления (1.19) для $\mathcal{X}[k]$ и позволяющие распараллеливать вычисления. Однако это будут "статические" аппроксимации, не обладающие полугрупповым свойством, присущим множествам $\mathcal{X}[k]$.

Построим оценки $\mathcal{P}^+[k]$, удовлетворяющие (1.13), (1.15), (1.19). В эволюционных уравнениях на каждом шаге k будет присутствовать операция вычисления внешних оценок (3.7) для суммы двух параллелепипедов. А пересечение в (1.19) будет братья по некоторым конечным множествам \mathcal{V}_N^γ начальных матриц $P^+[0]$, вводимым ниже.

Пусть $F[\mathcal{X}[N]] = \{f^\mu\}_{\mu=1}^{M[N]}$ и $C[\mathcal{X}[N]] = \{c^\alpha\}_{\alpha=1}^{\omega[N]}$ – системы векторов, введенные для $\mathcal{X}[N]$, как указано в (3.2) и лемме 3.4, а $Z_N = \{z^\mu\}_{\mu=1}^{M[N]}$ и $Y_N = \{y^\alpha\}_{\alpha=1}^{\omega[N]}$ – множества векторов, определяемых соотношениями $z^\mu = z[0]$, $y^\alpha = y[0]$,

$$z[j-1] = \text{Nrv}(A[j]^{-1}z[j]), \quad y[j-1] = \text{Nrv}(A[j]^\top y[j]), \quad (7.2)$$

$j = N, \dots, 1$, $z[N] = f^\mu$, $y[N] = c^\alpha$. Очевидно, Z_N есть подмножество множества $Z'_N = \{z'^\mu\}_{\mu=1}^{M'[N]}$ векторов z'^μ , для каждого из которых существуют такие $k \in \{0, \dots, N\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\rho_i[k] > 0$, при этом z'^μ находится по формулам $z'^\mu = z[0]$, (7.2) при $j = k, \dots, 1$, $z[k] = r^i[k]$.

Если $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$, то $\text{int } \mathcal{X}[N] \neq \emptyset$. Несложно заметить, что при выполнении предположения 1.1 $\text{Lin } \mathcal{X}[k]$ при каждом $k \in \{0, \dots, N\}$ совпадает с подпространством, натянутым на столбцы матрицы $T[k]$, где

$$T[k] = \text{Ort} \{A[k]T[k-1], \bar{R}[k]\}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \bar{R}[k] = R[k] \text{diag } \rho[k], \quad (7.3)$$

$T[0]$ образована ненулевыми столбцами $\bar{R}[0]$ либо, если таковых нет, $T[0] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Здесь символом $\text{Ort } A$ для $A = \{a^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ обозначена

матрица, составленная из ненулевых векторов, получающихся в процессе ортогонализации Грамма-Шмидта [101, с. 70] столбцов a^i , $i = 1, \dots, m$, и $\text{Ort } A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ для $A = 0$. Пусть $\text{rank } T[k] = n - \omega[k]$. Очевидно, $n \geq \omega[0] \geq \omega[1] \geq \dots \geq \omega[N] \geq 0$. Таким образом, $\text{int } \mathcal{X}[k] \neq \emptyset$ если и только если $\omega[k] = 0$. Для простоты обозначений положим $\omega[N] = \omega$. В качестве $C[\mathcal{X}[N]] = \{c^\alpha\}_{\alpha=1}^\omega$ можно взять произвольную максимальную систему линейно независимых векторов, каждый из которых ортогонален всем $n - \omega$ столбцам $T[N]$, например, взять последние ω столбцов матрицы $\text{Ort } \{T[N], B\}$ при любой $B \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, в частности, при $B = I$.

Обозначим через \mathcal{V}_N^γ , $\gamma=1, 3$, множества матриц, построенных по Z_N и Y_N так же, как строились \mathcal{V}^γ по F и C в § 3, и пусть $\mathcal{V}_N^2 = \{\text{Ort } V \mid V \in \mathcal{V}_N^1\}$.

Теорема 7.1 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости для системы (1.1), (1.2), (1.8). Если

$$\mathcal{P}^+[k] = \mathbf{P}_{\mathcal{P}^+[k]}^+(A[k] \mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad k=1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^+[0] = \mathbf{P}_{\mathcal{P}^+[0]}^+(\mathcal{X}_0), \quad (7.4)$$

то $\mathcal{P}^+[k]$ обладают "верхним" полугрупповым (1.13) и эволюционным (1.15) свойствами при любой последовательности матриц $P^+[k] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$. Пусть к тому же выполнено предположение 1.1, а столбцы матриц $P^+[k] = \{p^{+,i}[k]\}$ находятся с помощью вспомогательных матриц $H[k] = \{h^i[k]\}$:

$$h^i[k] = \text{Nrv}(A[k]h^i[k-1]), \quad i=1, \dots, n-\omega, \quad (7.5)$$

$$h^i[k] = \text{Nrv}(A^\top[k]^{-1}h^i[k-1]), \quad i=n-\omega+1, \dots, n, \quad k=1, \dots, N,$$

$H[0] = P^+[0]$, в соответствии с одним из следующих трех правил:

1) $p^{+,i}[k] = h^i[k]$ для всех $i \neq n-\omega$, а $p^{+,n-\omega}[k]$ определяется из условий $(p^{+,n-\omega}[k], h^i[k]) = 0$, $i=1, \dots, n$, $i \neq n-\omega$, $\|p^{+,n-\omega}[k]\| = 1^1$; $P^+[0] \in \mathcal{V}_N^1$;

2) $P^+[k] = \text{Ort}(H[k])$; $P^+[0] \in \mathcal{V}_N^2$;

3) $P^+[0] \in \mathcal{V}_N^3$;

$$p^{+,i}[k] = h^i[k] \text{ при всех } i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.6)$$

¹ В частности, $p^{+,n}[k] = \text{Nrv } A^\top[k]^{-1}p^{+,n}[k-1]$, $k = 1, \dots, N$, при $Y_N = \emptyset$.

Тогда для $\mathcal{X}[N]$ справедливы представления (1.19), где пересечение берется по всем $P^+[0] \in \mathcal{V}_N^\gamma$, $\gamma=1, 2, 3$, соответственно. Во всех случаях

$$\pi_i^+[k] = 0, \quad i = n-\omega+1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Кроме того,

$$\rho(\pm p^{+\pm i}[k] | \mathcal{P}^+[k]) = \rho(\pm p^{+\pm i}[k] | \mathcal{X}[k]), \quad (7.8)$$

где $i = n-\omega, \dots, n$ в случаях 1, 2, и $i = 1, \dots, n$ в случае 3 ($k = 0, \dots, N$)². Наконец, в случае 3 $\mathcal{P}^+[k]$ являются минимальными по включению внешними параллелепипедами оценками для $\mathcal{X}[k]$ при $k = N$, а также при $k \in \{0, \dots, N-1\}$, если $\omega[k] = \omega$.

Явные формулы для центров и величин полуосей параллелепипедов $\mathcal{P}^+[k]$ в (7.4) (и центров вводимых ниже оценок $\mathcal{P}^-[k]$) имеют вид

$$p^\pm[k] = A[k] p^\pm[k-1] + r[k], \quad k = 1, \dots, N; \quad p^\pm[0] = r[0]; \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \pi^+[k] &= \text{Abs}(P^+[k]^{-1} A[k] P^+[k-1]) \pi^+[k-1] + \text{Abs}(P^+[k]^{-1} R[k]) \rho[k], \\ k &= 1, \dots, N; \quad \pi^+[0] = \text{Abs}((P^+[0])^{-1} P_0) \pi_0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Отметим, что правила 1 и 2 совпадают при размерности $n = 2$.

Доказательство. Равенства (7.7) вытекают из формул (7.10) с учетом лемм A1.8, A1.1 и A1.6. Включения (1.12), (1.15) доказываются последовательным применением к (1.7) первой части теоремы 3.1³. Обратные включения $\mathcal{X}^\gamma[N] \stackrel{\Delta}{=} \cap \mathcal{P}[N] \subseteq \mathcal{X}[N]$, $\gamma=1, 2, 3$, докажем от противного. Пусть $x^* \in \mathcal{X}^\gamma[N]$, но $x^* \notin \mathcal{X}[N]$. В силу (7.7) все $\mathcal{P}[N]$ содержатся в $\text{Lin } \mathcal{X}[N]$. Поэтому x^* можно отделить от $\mathcal{X}[N]$ при помощи некоторой крайней опоры для $\mathcal{X}[N]$: $(x^*, l^*) > \rho(l^* | \mathcal{X}[N])$. В каждом из случаев 1–3 найдется такая матрица $P^+[0] \in \mathcal{V}_N^\gamma$, $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, что если построить $P^+[\cdot]$ и $\pi^+[\cdot]$, то l^* окажется либо параллельным $(n - \omega)$ -у

²То есть оценки $\mathcal{P}^+[k]$ оказываются тугими в $\omega+1$ направлениях для случаев 1, 2 и касающимися — для случая 3.

³При нарушении предположения 1.1 эта теорема применима в силу замечания 3.5.

столбцу матрицы $P^+[N]$ (в случаях 1 и 2), либо ортогональным последним ω и каким-то $n - \omega - 1$ из остальных столбцов $P^+[N]$ (в случае 3). При этом $(x^*, l^*) \leq \rho(l^* | \mathcal{P}^+[N])$. Вычисляя правую часть этого неравенства по лемме 2.1 и последовательно преобразуя ее с использованием (7.10), (7.7) и лемм A1.1, A1.6 – A1.8, можно получить противоречие с неравенством, приведенным выше. Равенства (7.8) доказываются аналогичными выкладками. Минимальность по включению следует из построения $P^+[k]$ и леммы 2.8. Равенства (1.13) вытекают из формул для $\mathcal{P}^+[k]$. \square

Замечание 7.1 Если $P^+[k] \equiv I$, то трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$ образована параллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, как в классическом интервальном анализе. Но численное моделирование показывает, что такая трубка может оказаться слишком грубой оценкой для $\mathcal{X}[\cdot]$ (это объясняется известным эффектом "обертывания"). Оценки из теоремы 7.1, несмотря на рекуррентность формул, позволяют избежать накопления неопределенностей для $2(\omega + 1)$ направлений в случаях 1 и 2 (в случае 2 $\mathcal{P}^+[k]$ являются ортогональными параллелепипедами) и для $2n$ направлений — в случае 3.

Рассмотрим теперь касающиеся оценки, которые не требуют знания Y_N и могут быть построены и для множеств достижимости систем с ограничивающими множествами более общего вида.

Обозначим через \mathcal{V}^0 произвольное множество матриц $P \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, обладающее тем свойством, что для каждого вектора $l \in \mathbb{R}^n$, $\|l\| = 1$, в этом множестве найдется такая матрица P , что l коллинеарен какому-либо из столбцов P^{-1} .

Теорема 7.2 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (1.1), (1.2) с $\mathcal{X}_0 \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}[k] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$. Если параллелепипеды $\mathcal{P}^+[k]$ построены по формулам (7.4), то $\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$, $k = 0, \dots, N$, каковы бы ни были матрицы $P^+[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$. Если выполнено предположение 1.1, $P \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ — произвольная матрица и

$$P^+[k] = A[k] P^+[k - 1], \quad k = 1, \dots, N; \quad P^+[0] = P,$$

то $\mathcal{P}^+[k]$ оказываются касающимися оценками для $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{X}[k] = \cap\{\mathcal{P}^+[k] \mid P \in \mathcal{V}^0\}$, $k = 1, \dots, N$.

Доказательство. Включения $\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$ вытекают из рекуррентных формул для $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{P}^+[k]$ и свойства монотонности по включению оценок $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$. Равенства $\rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i \mid \mathcal{P}^+[k]) = \rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i \mid \mathcal{X}[k])$, $i = 1, \dots, n$, доказываются индукцией по $k = 0, \dots, N$ с учетом аддитивности опорной функции суммы множеств и свойства оценок $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$ быть касающимися для \mathcal{Q} . Представления (1.19) вытекают из леммы А1.4, поскольку $\forall l \in \mathbb{R}^n$ можно подобрать такую матрицу $P \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, что $(P^+[k]^{-1})^\top e^1$ будет коллинеарен l . \square

Рассмотрим теперь внутренние аппроксимации МД.

Введем конечное семейство внутренних параллелепипедозначных оценок $\mathcal{P}^-[N]$ для множества достижимости $\mathcal{X}[N]$ системы (1.1), (1.2), (1.8), обеспечивающее точное представление (1.20). Рассмотрим всевозможные параллелепипеды $\mathcal{P}^-[N]$, которые могут быть рекуррентно построены следующим образом. Положим $\mathcal{P}^-[0] = \mathcal{X}_0$. Пусть $\mathcal{P}^-[k-1]$ уже построен. Для множества $\mathcal{Q}[k] = A[k]\mathcal{P}^-[k-1] + \mathcal{R}[k]$ — суммы двух параллелепипедов, как и в §3, находим системы векторов $C[\mathcal{Q}[k]] = \{c^\alpha[k]\}_{\alpha=1}^{\omega[k]}$ и $F[\mathcal{Q}[k]] = \{f^\mu[k]\}_{\mu=1}^{M[k]}$ и числа $\{\varphi^\mu[k]\}_{\mu=1}^{M[k]}$. В качестве $\mathcal{P}^-[k]$ берем произвольный внутренний для $\mathcal{Q}[k]$ параллелепипед из леммы 3.7.

Поскольку для любых множеств $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ и матрицы $A \in \mathcal{M}^{n \times n}$ верно равенство $A \cdot (\cup \mathcal{X}_i) + \mathcal{Y} = \cup(A\mathcal{X}_i + \mathcal{Y})$, то справедлива

Теорема 7.3 *Для множества достижимости $\mathcal{X}[N]$ системы (1.1), (1.2), (1.8) имеет место представление (1.20), где объединение берется по всевозможным $\mathcal{P}^-[N]$, построенным, как описано выше.*

Замечание 7.2 Число множеств, участвующих в таком объединении, очень велико (если $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$, для всех $F[\mathcal{Q}[k]]$ выполнено предположение 3.1 и $M(F[\mathcal{Q}[k]])=2n$, оно равно $(C_{2n}^{n-1})^N$). Ниже показано, что при некоторых предположениях $\mathcal{X}[N]$ представимо в виде объединения значительно меньшего числа параллелепипедов (не превосходящего $C_{(N+1)n}^{n-1}$).

Предварительно введем обозначение: если $w \in \mathbb{R}^n$, то

$$\sigma(w, \mathcal{P}(p, P, \pi)) = \begin{cases} \pi_\alpha, & \text{если существуют } \alpha \in \{1, \dots, n\}, \beta \in \{0, 1\} \\ & \text{такие, что } w = (-1)^\beta p^\alpha, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 7.4 Пусть выполнены предположения 1.1 и (1.8). Пусть $p^-[k]$ удовлетворяют (7.9), вспомогательные матрицы $P^+[k]$ — соотношениям случая 1 теоремы 7.1, дополненным условиями $(p^{+,n-\omega}[k], A[k]p^{+,n-\omega}[k-1]) > 0$, $k = 1, \dots, N$, матрицы $P^-[k]$ совпадают с ними за исключением $(n-\omega)$ -о столбца: $p^{-,i}[k] = p^{+,i}[k]$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq n-\omega$, $k = 0, \dots, N$, последние ω полуосей $\pi_i^-[k]$, $i = n-\omega+1, \dots, n$, параллелепипедов $\mathcal{P}^-[k]$ при каждом $k = 0, \dots, N$ равны нулю, а остальные параметры находятся из формул

$$\pi_i^-[k] = \|A[k]p^{-,i}[k-1]\| \pi_i^-[k-1] + \sigma(p^{-,i}[k], \mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\pi_i^-[0] = \sigma(p^{-,i}[0], \mathcal{X}_0), \quad (i = 1, \dots, n-\omega-1);$$

$$p^{-,n-\omega}[k] = \begin{cases} p^{+,n-\omega}[k], & \text{если } u[k] = 0, \\ \text{Nrv } u[k], & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad k = 0, \dots, N,$$

$$u[k] = A[k]u[k-1] + \sum_{j=1}^n r^j[k] \rho_j[k] \text{sign}(r^j[k], p^{+,n-\omega}[k]), \quad k = 1, \dots, N;$$

$$u[0] = \sum_{j=1}^n r^j[0] \rho_j[0] \text{sign}(r^j[0], p^{+,n-\omega}[0]);$$

$$\pi_n^-[k] = \|u[k]\|, \quad k = 0, \dots, N.$$

Тогда $P^-[k] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$, и имеют место включения (1.12). Если к тому же для Z_N выполнено предположение 3.1, то для $\mathcal{X}[N]$ справедливо представление (1.20), где объединение берется по всевозможным $P^+[0] \in \mathcal{V}_N^1$.

Доказательство следует из леммы 3.6. В частности, $\mathcal{X}[N] = \cup_\beta \mathcal{Q}^\beta$, где объединение соответствует перебору всех $d^\beta \in D[\mathcal{X}[N]]$. Каждый d^β можно заменить на столбец $p^{+,n-\omega}[N]$ некоторой матрицы $P^+[N]$ случая 1 теоремы 7.1. Используя леммы A1.1, A1.6 – A1.8, можно заметить,

что вектор u^β из определения множества \mathcal{Q}^β совпадает с $u[N]$ из теоремы 7.4. Аналогично рассматриваются другие параметры \mathcal{Q}^β . \square

К сожалению, введенное в теореме 7.4 семейство внутренних оценок обеспечивает (1.20) только при указанном дополнительном предположении. Введем еще одно семейство оценок $\mathcal{P}^-[\cdot]$. Оно также гарантирует (1.20) для $\mathcal{X}[N]$ при не слишком большом числе трубок.

Теорема 7.5 Пусть выполнено предположение 1.1 и $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (1.1), (1.2), (1.8). Пусть $H[0] \in M_*^{n \times n}$ — это матрица со столбцами $h^i[0] \in Z_N, i = 1, \dots, n-\omega, h^i[0] \in Y_N, i = n-\omega+1, \dots, n$, матрицы $H[k] = \{h^i[k]\}, B[k] = \{b^i[k]\}, U[k] = \{u^i[k]\}$, удовлетворяют соотношениям $H[k] = A[k]H[k-1], B[k] = \text{Ort } H[k]$, и

$$\begin{aligned} u^i[k] &= A[k]u^i[k-1] + f^i(R[k], \rho[k], B[k]); \\ u^i[-1] &= 0 \in \mathbb{R}^n; \quad i = 1, \dots, n-\omega, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где функции f^i задаются формулами

$$\begin{aligned} f^i(R, \rho, B) &= \sum_{j \in J_i} r^j \rho_j \text{sign}(r^j, b^i), \\ J_i &= \{j \in \{1, \dots, n\} \mid (r^j, b^\alpha) = 0, \alpha = i+1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Если параллелепипеды $\mathcal{P}^-[k]$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} p^-[k] &= A[k]p^-[k-1] + r[k]; \quad p^-[-1] = 0 \in \mathbb{R}^n; \\ p^{-,i}[k] &= \text{Nrv } u^i[k], \quad \pi_i^-[k] = \|u^i[k]\|, \quad \text{если } u^i[k] \neq 0, \quad \text{и} \\ p^{-,i}[k] &= b^i[k], \quad \pi_i^-[k] = 0, \quad \text{в противном случае, } i=1, \dots, n-\omega; \\ p^{-,i}[k] &= b^i[k], \quad \pi_i^-[k] = 0, \quad i=n-\omega+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$k = 0, \dots, N$, то $\mathcal{P}^-[k]$ удовлетворяют (1.16) и, кроме того,

$$\rho(\pm b^i[k] \mid \mathcal{P}^-[k]) = \rho(\pm b^i[k] \mid \mathcal{X}[k]), \quad i = n-\omega, \dots, n, \quad k = 0, \dots, N. \quad (7.13)$$

Более того, $\mathcal{P}^-[N]$ является максимальным по включению параллелепипедом для $\mathcal{X}[N]$, $\mathcal{P}^-[k]$ обладают тем же свойством по отношению

к $\mathcal{X}[k]$, если $\dim \mathcal{P}^-[k] = \dim \mathcal{X}[k]$, ($k \in \{0, \dots, N-1\}$), и для $\mathcal{X}[N]$ справедливо (1.20), где объединение взято по всем различным $\mathcal{P}^-[N]$, которые могут быть построены, как описано выше. Утверждения теоремы остаются верными, если матрицы $H[k]$ находятся из соотношений (7.5), а $B[k]$ — по формулам $B[k] = \text{Ort} \{ \{h^i[k]\}_{i=1}^{n-\omega}, \{h^i[k]\}_{i=n-\omega+1}^n \}$.

Доказательство. В силу (7.12) и лемм A1.2, A1.13 все $\mathcal{P}^-[k] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Имеем $\mathcal{P}^-[k] = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{n-\omega} u^i[k] \alpha_i, |\alpha_i| \leq 1\}$. Прямым вычислением можно проверить, что если $x \in \mathcal{P}^-[k]$, то $x \in A[k] \mathcal{P}^-[k-1] + \mathcal{R}[k]$, то есть (1.16) верно. Поскольку по формуле Коши (7.1) $\mathcal{X}[k]$ есть сумма $k+1$ параллелепипедов, минимальность $\mathcal{P}^-[k]$ и (1.20) будут следовать из теоремы 3.2, если мы покажем, что $u^i[k] = \tilde{u}^i[k]$, $i = 1, \dots, n-\omega$, $k = 0, \dots, N$, где

$$u^i[k] = \sum_{l=0}^k \sum_{j \in J_i[l]} \Phi[k, l] r^j[l] \rho_j[l] \gamma^{ji}[l], \quad \gamma^{ji}[l] = \text{sign}(r^j[l], b^i[l]);$$

$$\tilde{u}^i[k] = \sum_{l=0}^k \sum_{j \in \tilde{J}_i[k, l]} \tilde{r}^j[k, l] \rho_j[l] \tilde{\gamma}^{ji}[k, l], \quad \tilde{r}^j[k, l] = \Phi[k, l] r^j[l],$$

$J_i[l] = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid (r^j[l], b^\alpha[l]) = 0, \alpha = i+1, \dots, n\}$; $\tilde{\gamma}^{ji}[k, l]$, $\tilde{J}_i[k, l]$ подобны величинам $\gamma^{ji}[l]$, $J_i[l]$ с заменой $r^j[l]$ на $\tilde{r}^j[k, l]$. По лемме A1.9 $J_i[l] = \tilde{J}_i[k, l]$, а с учетом лемм A1.10, A1.11 $\gamma^{ji}[l] = \tilde{\gamma}^{ji}[k, l]$. Соотношения (7.13) проверяются прямым вычислением. Последнее утверждение вытекает из неединственности представления вырожденного параллелепипеда и леммы A1.6. \square

Замечание 7.3 Семейство оценок $\mathcal{P}^-[\cdot]$ с параметрами (7.12) содержит семейство, введенное в теореме 7.4, если выполнено последнее предположение этой теоремы.

Учитывая замечание 3.3, имеет смысл ввести также более широкое семейство внутренних параллелотопозначных оценок.

Теорема 7.6 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (1.1), (1.2), где $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0)$, $\mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]]$, $\bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

Если параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-[k] &= \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}[k], \Gamma^{(2)}[k]}^-(A[k] \mathcal{P}^-[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N, \\ \mathcal{P}^-[0] &= \mathbf{P}_{\Lambda}^-(\mathcal{X}_0),\end{aligned}\tag{7.14}$$

где матрицы Λ , $\Gamma^{(1)}[k]$ и $\Gamma^{(2)}[k]$ удовлетворяют условиям

$$\Lambda \in \mathcal{G}^{n \times n}, \quad \Gamma^{(1)}[k] \in \mathcal{G}^{n \times n}, \quad \Gamma^{(2)}[k] \in \mathcal{G}^{r \times n}, \quad k = 1, \dots, N,\tag{7.15}$$

множества $\mathcal{G}^{n \times n}$, $\mathcal{G}^{r \times n}$ определены в (3.10), то $\mathcal{P}^-[k]$ являются внутренними оценками для $\mathcal{X}[k]$, т.е. при всех $k=0, \dots, N$ имеют место включения (1.12). Кроме того, справедливы точные представления $\mathcal{X}[k] = \cup\{\mathcal{P}^-[k] \mid \Lambda = I, \Gamma^{(1)}[j] = I, \Gamma^{(2)}[j] \in \mathcal{G}^{r \times n}, j = 1, \dots, k\}$.

Доказательство. Включения $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k]$ следуют из леммы 3.8. Проверка второго утверждения аналогична доказательству леммы 3.8, а также теоремы 8.4 для систем с непрерывным временем. \square

Выделим в указанном семействе оценок тугие.

Следствие 7.1 Пусть задан вектор $l_0 \in \mathbb{R}^n$, и

$$l[k] = A[k]^{-1\top} l[k-1], \quad k = 1, \dots, N, \quad l[0] = l_0.$$

Если условиях теоремы 7.6 имеем $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[k] \equiv I$, а $\Gamma^{(2)}[k]$ построены в соответствии со следствием 3.1, где в формулах (3.17) следует положить $c^{(1)} = \bar{P}_0^\top l_0$, $c^{(2)} = \bar{R}[k]^\top l[k]$ (причем множества J и I тоже могут зависеть от k), то $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются тугими (в направлении $l[k]$) внутренними оценками для $\mathcal{X}[k]$, $k=1, \dots, N$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.8 и следствия 3.1 путем сравнения значений $\rho(\pm l[k] \mid \mathcal{X}[k])$ и $\rho(\pm l[k] \mid \mathcal{P}^-[k])$ с использованием для $x[\cdot]$, $p^-[\cdot]$ и $P^-[\cdot]$ того факта, что, если векторная или матричная функция $y[\cdot]$ удовлетворяет системе типа (1.1) с $y[0] = y_0$, а $l[\cdot]$ — указанным выше соотношениям, то

$$l[k]^\top y[k] = l_0^\top y_0 + \sum_{j=1}^k l[j]^\top w[j], \quad k = 1, \dots, N$$

(см. подобные рассуждения при доказательстве следствия 21.1). \square

Замечание 7.4 Оценки $\mathcal{P}^\pm[k]$, построенные как описано в теоремах 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 и 7.6 (при фиксированных значениях параметров, определяющих семейства оценок), обладают "нижним" полугрупповым (1.14) и эволюционным (1.16) свойствами.

8 Системы с непрерывным временем

Пусть состояние $x(t) \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$\dot{x} = A(t)x + w(t), \quad t \in T = [0, \theta], \quad (8.1)$$

где $A(t)$ — известная непрерывная $n \times n$ -матрица. Начальное состояние $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и входное воздействие $w(\cdot)$, являющееся измеримой (по Лебегу) n -мерной функцией времени t , стеснены ограничениями

$$x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad w(t) \in \mathcal{R}(t) \quad \text{при п.в. } t \in T, \quad (8.2)$$

где $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(t)$ — заданные выпуклые компактные множества в \mathbb{R}^n , причем многозначное отображение $\mathcal{R}(t)$ непрерывно.

Эти соотношения могут быть дополнены фазовыми ограничениями. В последнем случае (который рассмотрен в §11) будем предполагать, что они наложены в известные дискретные моменты времени t_k :

$$x(t_k) \in \mathcal{Y}(t_k), \quad k = 1, \dots, N_c, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_c} < t_{N_c+1} = \theta. \quad (8.3)$$

ФО могут, в частности, порождаться уравнением измерений

$$y(t_k) = G(t_k)x(t_k) + \eta(t_k), \quad \eta(t_k) \in \Theta(t_k) \subset \mathbb{R}^m, \quad k = 1, \dots, N_c, \quad (8.4)$$

где $G(t_k)$ — заданные $m \times n$ матрицы ранга m , $\eta(t_k)$ — неизвестные помехи, $\Theta(t_k) \in \text{conv } \mathbb{R}^m$ — известные множества, $y(t_k)$ — данные измерений.

Определения 8.1 [201] Множеством достижимости $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, 0, \mathcal{X}_0)$ системы (8.1), (8.2) ((8.1) – (8.3)) при $t \geq 0$ называется множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют x_0 и

$w(\cdot)$, удовлетворяющие (8.2) и порождающие решение $x(\cdot)$ системы (8.1) такое, что $x(t) = x$ (и выполняется (8.3)). Многозначная функция $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, известна как *трубка траекторий* $\mathcal{X}(\cdot)$ или *трубка достижимости*, а при наличии фазовых ограничений — как *трубка выживающих траекторий*. Если ограничения (8.3) порождаются измерениями, то $\mathcal{X}(t)$ известны как *информационные области*.

Исследованию свойств множеств достижимости дифференциальных систем посвящена обширная литература; основные свойства для линейных систем можно найти, например, в [77, 102, 151, 155]. Известно, в частности, что МД обладают *полугрупповым свойством*

$$\mathcal{X}(t, 0, \mathcal{X}_0) = \mathcal{X}(t, \tau, \mathcal{X}(\tau, 0, \mathcal{X}_0)), \quad \forall \tau, t: \quad 0 \leq \tau \leq t \leq \theta. \quad (8.5)$$

Далее будем полагать, что \mathcal{X}_0 и $\mathcal{R}(t)$ являются параллелепипедами

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0) \equiv \mathcal{P}[p_0, \bar{P}_0], \quad \mathcal{R}(t) = \mathcal{P}(r(t), R(t), \rho(t)) \equiv \mathcal{P}[r(t), \bar{R}(t)], \quad (8.6)$$

где r, R, ρ непрерывны по t , а множества в (8.3) — параллелепипедами

$$\mathcal{Y}(t_k) = \mathcal{P}(q(t_k), Q(t_k), \kappa(t_k)) \quad (8.7)$$

или полосами

$$\mathcal{Y}(t_k) = \mathcal{S}(c(t_k), S(t_k), \sigma(t_k), m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i(t_k). \quad (8.8)$$

При этом множества $\mathcal{X}(t)$ параллелепипедами, вообще говоря, не будут.

Будем искать внешние $\mathcal{P}^+(\cdot)$ и внутренние $\mathcal{P}^-(\cdot)$ оценки для $\mathcal{X}(\cdot)$:

$$\mathcal{P}^\pm(t) = \mathcal{P}(p^\pm(t), P^\pm(t), \pi^\pm(t)) \quad \text{или} \quad \mathcal{P}^\pm(t) = \mathcal{P}[p^\pm(t), \bar{P}^\pm(t)],$$

обладающие *полугрупповым* и *эволюционным свойствами*, которые являются аналогами (8.5). Как будет видно ниже, $\mathcal{P}^\pm(t)$ могут быть найдены из эволюционных уравнений с начальными условиями $\mathcal{P}^\pm(0)$, так что по аналогии с МД можно ввести обозначения $\mathcal{P}^\pm(t) = \mathcal{P}^\pm(t, 0, \mathcal{P}^\pm(0))$, где символами $\mathcal{P}^\pm(t, \tau, \mathcal{P}_\tau^\pm)$ обозначаем значения решений упомянутых уравнений в момент t с начальными условиями $\mathcal{P}^\pm(\tau) = \mathcal{P}_\tau^\pm$.

Определение 8.2 [93, 201] Говорят, что оценки $\mathcal{P}^+(t)$ и $\mathcal{P}^-(t)$ обладают "верхним" и "нижним" полугрупповым свойством, если

$$\mathcal{P}^+(t, 0, \mathcal{P}^+(0)) = \mathcal{P}^+(t, \tau, \mathcal{P}^+(\tau, 0, \mathcal{P}^+(0))), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq \theta, \quad (8.9)$$

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}^+(0);$$

$$\mathcal{P}^-(t, 0, \mathcal{P}^-(0)) = \mathcal{P}^-(t, \tau, \mathcal{P}^-(\tau, 0, \mathcal{P}^-(0))), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq \theta, \quad (8.10)$$

$$\mathcal{P}^-(0) \subseteq \mathcal{X}_0.$$

Определение 8.3 [155] Говорят, что оценки $\mathcal{P}^+(t)$ и $\mathcal{P}^-(t)$ обладают эволюционным свойством, если

$$\mathcal{X}(t, \tau, \mathcal{P}^+(\tau)) \subseteq \mathcal{P}^+(t), \quad \forall \tau, t: 0 \leq \tau \leq t \leq \theta; \quad \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}^+(0); \quad (8.11)$$

$$\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{X}(t, \tau, \mathcal{P}^-(\tau)), \quad \forall \tau, t: 0 \leq \tau \leq t \leq \theta; \quad \mathcal{P}^-(0) \subseteq \mathcal{X}_0. \quad (8.12)$$

Соотношения (8.11), (8.12) гарантируют включения

$$\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{X}(t) \subseteq \mathcal{P}^+(t), \quad \forall t \in T. \quad (8.13)$$

Более того, нашей целью будет ввести целые семейства таких трубок $\mathcal{P}^\pm(\cdot)$, обеспечивающие, при каждом $t \in T$, точные представления $\mathcal{X}(t)$:

$$\mathcal{X}(t) = \bigcap \mathcal{P}^+(t), \quad (8.14)$$

$$\mathcal{X}(t) = \bigcup \mathcal{P}^-(t). \quad (8.15)$$

Оценки желательно строить таким образом, чтобы они были как можно ближе к МД, например, были тугими или касающимися.

Иногда может быть также полезно выделить элементы семейств, *оптимальные* в некотором смысле. В качестве критерия оптимальности можно рассмотреть, например, объем оценки в конечный момент времени θ , и в семействах внешних и внутренних оценок поставить экстремальные задачи вида

$$\text{vol } \mathcal{P}^+(\theta) \rightarrow \min, \quad (8.16)$$

$$\text{vol } \mathcal{P}^-(\theta) \rightarrow \max. \quad (8.17)$$

В литературе используются также "локальные" критерии оптимальности [155, с. 127], [201, с. 169]⁴.

Напомним, что с помощью известной замены переменных

$$x = \Phi(t, 0) \tilde{x}, \quad (8.18)$$

где $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, удовлетворяющая соотношениям

$$\partial\Phi(t, \tau)/\partial t = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I, \quad (8.19)$$

мы приходим к более простой системе с нулевой матрицей $A(t) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{w}(t), & \tilde{x}(0) &\in \mathcal{X}_0, \\ \tilde{w}(t) &\in \tilde{\mathcal{R}}(t) = \Phi(t, 0)^{-1}\mathcal{R}(t) = \mathcal{P}(\tilde{r}(t), \tilde{R}(t), \tilde{\rho}(t)). \end{aligned} \quad (8.20)$$

При этом выполнены равенства

$$\mathcal{P}^\pm(t) = \Phi(t, 0)\tilde{\mathcal{P}}^\pm(t), \quad (8.21)$$

где $\tilde{\mathcal{P}}^\pm(t)$ — это внешние (внутренние) оценки для множеств достижимости $\tilde{\mathcal{X}}(t)$ системы (8.20).

Построим вначале внешние параллелепипедозначные оценки $\mathcal{P}^+(t)$ для $\mathcal{X}(t)$, задавшись непрерывно-дифференцируемой матричной функцией $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, такой что

$$\det P(t) \neq 0, \quad t \in T. \quad (8.22)$$

($P(t)$ будет определять динамику матриц ориентации).

Рассуждаем аналогично [155, с.128], [201, с.183], где строятся эллипсоидальные оценки. Зафиксируем $t \in (0, \theta)$ и рассмотрим разбиение \mathcal{T}_N отрезка $[0, t]$ точками $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i$, $k = 1, \dots, N$, $\tau_N = t$, где

⁴Например, следуя [155] применительно к нашему случаю, трубку $\mathcal{P}^+(\cdot)$ можно было бы назвать *локально оптимальной в смысле объема внешней оценкой* для $\mathcal{X}(\cdot)$, если при каждом $\tau \in T$ имеем $\frac{d}{dt} \text{vol } \mathcal{P}^+(t)|_{t=\tau} \leq \frac{d}{dt} \text{vol } \mathcal{P}(t)|_{t=\tau}$ для любой трубки $\mathcal{P}(\cdot)$ (с дифференцируемыми параметрами $p(t)$, $P(t)$, $\pi(t)$), определенной для $t \geq \tau$, обладающей эволюционным свойством (8.11) и удовлетворяющей начальному условию $\mathcal{P}(\tau) = \mathcal{P}^+(\tau)$.

$\sigma_i > 0$. Используем простейшую конечно-разностную аппроксимацию системы (8.1):

$$x[k] = A[k]x[k-1] + w[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (8.23)$$

$$A[k] = I + \sigma_k A(\tau_{k-1}), \quad x[0] \in \mathcal{X}_0, \quad w[k] \in \mathcal{R}[k] = \sigma_k \mathcal{R}(\tau_{k-1}).$$

Если, задавшись матрицами $P[k]$, построить параллелепипеды $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}(p^+[k], P[k], \pi[k])$:

$$\mathcal{P}^+[0] = \mathbf{P}_{P[0]}^+(\mathcal{X}_0), \quad \mathcal{P}^+[k] = \mathbf{P}_{P[k]}^+(A[k]\mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad k=1, \dots, N, \quad (8.24)$$

то $\mathcal{P}^+[k]$ будут внешними оценками для МД $\mathcal{X}[k]$ системы (8.23).

В качестве $P[k]$ возьмем матрицы $P[k] = P(\tau_k)$. Тогда

$$P[k] = P[k-1] + \sigma_k \dot{P}(\tau_{k-1}) + o(\sigma), \quad k = 1, \dots, N, \quad (8.25)$$

где $\sigma = \max\{\sigma_i \mid i = 1, \dots, N\}$. Так как P^{-1} удовлетворяет уравнению

$$dP^{-1}/dt = -P^{-1}\dot{P}P^{-1} \quad (8.26)$$

(получающемуся дифференцированием тождества $PP^{-1} = I$), то

$$P[k]^{-1} = P[k-1]^{-1} - \sigma_k P[k-1]^{-1} \dot{P}(\tau_{k-1}) P[k-1]^{-1} + o(\sigma). \quad (8.27)$$

Конкретизируя формулы (8.24), имеем

$$p^+[k] = (I + \sigma_k A(\tau_{k-1}))p^+[k-1] + \sigma_k r[k], \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \pi[k] = \text{Abs}(P[k]^{-1}(I + \sigma_k A(\tau_{k-1}))P[k-1])\pi[k-1] \\ + \sigma_k \text{Abs}(P[k]^{-1}R[k])\rho[k]. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Вычтем $p^+[k-1]$ и $\pi[k-1]$ из обеих частей (8.28) и (8.29) соответственно, выделим члены до 1-го порядка малости относительно σ включительно, поделим на σ_k и перейдем к пределу при $\sigma \rightarrow 0$. При этом воспользуемся непрерывностью A , равенством (8.27), оценками типа $||a+\varepsilon| - |a|| \leq 3|\varepsilon|$, $|\max\{a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2\} - \max\{a_1, a_2\}| \leq \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$ и равенством

$$\text{Abs}(I + D) - I = \text{Ab } D, \quad \forall D = \{d_i^j\} : |d_i^i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где символом $\text{Ab } B$ обозначена операция замены всех элементов матрицы B , за исключением диагональных, соответствующими абсолютными величинами. В результате приходим к системе ОДУ

$$\dot{p}^+ = A(t)p^+ + r(t), \quad t \in T; \quad p^+(0) = p_0; \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= \text{Ab}(P(t)^{-1}(A(t)P(t) - \dot{P}(t)))\pi + \text{Abs}(P(t)^{-1}R(t))\rho(t), \\ \pi(0) &= \text{Abs}(P(0)^{-1}P_0)\pi_0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Теорема 8.1 Пусть $\mathcal{X}(t)$ — множества достижимости системы (8.1), (8.2), (8.6). И пусть задана произвольная непрерывно-дифференцируемая матричная функция $P(t)$, удовлетворяющая (8.22). Если параметры параллелепипедов $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}(p^+(t), P^+(t), \pi^+(t))$ при $t \in T$ определяются равенствами

$$P^+(t) = P(t) \text{diag} \{ \|p^i(t)\| \}^{-1}, \quad \pi^+(t) = \text{diag} \{ \|p^i(t)\| \} \pi(t); \quad (8.32)$$

и ОДУ (8.30), (8.31), то $\mathcal{P}^+(t)$ обладают свойствами (8.9) и (8.11) и являются внешними оценками для $\mathcal{X}(t)$.

При $P(t) \equiv I$, $p_0 = 0$, $P_0 = I$, $r(t) \equiv 0$, $R(t) \equiv I$ теорема 8.1 дает оценку, приведенную в [230].

Доказательство аналогично приведенному в книге [155, п.8.3] для случая эллипсоидального оценивания (но без замены переменных [155, с.129]). Для проверки включения (8.11) используется включение $\mathcal{X}(\tau_k, \tau_j, \mathcal{P}[j]) \subseteq \mathcal{P}[k] + o(1)\mathcal{B}(0, 1)$, $\tau_k, \tau_j \in \mathcal{T}_N$, где $\mathcal{P}[k]$ строятся по формулам (8.24), $o(1) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, величина $o(1)$ равномерно мала на T и не зависит от \mathcal{T}_N . Для доказательства последнего включения устанавливается, с использованием уравнения интегральной воронки [118, 220], что $h_+(\mathcal{X}(\tau_{i+1}, \tau_i, \mathcal{P}[i]), \mathcal{P}[i+1]) \leq o(\sigma)$, где $h_+(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \min\{\gamma \geq 0 \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} + \gamma\mathcal{B}(0, 1)\}$ — хаусдорфово полурасстояние, и проводятся рассуждения, аналогичные проделываемым при оценке погрешности одношаговых методов решения ОДУ [10, гл. VIII, §4]. \square

Рассмотрим оценки, соответствующие случаю, когда

$$\dot{P} = A(t) P, \quad P(0) = P_0^+. \quad (8.33)$$

Уравнение (8.26) при этом превращается в $dP^{-1}/dt = -P^{-1}A$.

Теорема 8.2 Пусть $\mathcal{X}(t)$ — множества достижимости системы (8.1), (8.2), (8.6). Пусть $P_0^+ \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ — произвольная матрица. Если параметры параллелепипедов $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}(p^+(t), P^+(t), \pi^+(t))$ при $t \in T$ определяются соотношениями (8.30), (8.32), (8.33) и

$$\dot{\pi} = \text{Abs}(P(t)^{-1}R(t))\rho(t), \quad \pi(0) = \text{Abs}((P_0^+)^{-1}P_0)\pi_0, \quad (8.34)$$

то $\mathcal{P}^+(t)$ являются внешними касающимися оценками для $\mathcal{X}(t)$ ⁵. Кроме того, при каждом $t \geq 0$ справедливо представление

$$\mathcal{X}(t) = \bigcap \{\mathcal{P}^+(t) \mid P_0^+ \in \mathcal{V}^0\}, \quad (8.35)$$

где \mathcal{V}^0 — произвольное множество матриц, удовлетворяющее условиям, сформулированным на с. 97.

Доказательство. Воспользовавшись заменой переменных (8.18), приходим к системе (8.20). Пусть $\tilde{\mathcal{P}}^+(t)$ — это трубка с параметрами

$$\dot{\tilde{p}}^+ = \tilde{r}(t), \quad \dot{\tilde{P}}^+ = 0, \quad \dot{\tilde{\pi}}^+ = \text{Abs}(\tilde{P}^+(t)^{-1}\tilde{R}(t))\tilde{\rho}(t); \quad \tilde{\mathcal{P}}^+(0) = \mathbf{P}_{P_0^+}^+(\mathcal{X}_0). \quad (8.36)$$

Поскольку $\tilde{\mathcal{P}}^+(t) \equiv \tilde{\mathcal{P}}^+(0)$, то прямым вычислением с использованием формулы для опорной функции параллелепипеда, соотношений (8.36) и дифференциального уравнения для опорной функции множества достижимости $\tilde{\mathcal{X}}(t)$ системы (8.20) (см., например, [119, с.], [155, с.28]) несложно проверить, что $\rho(\pm \tilde{p}^{+\perp i}(t) \mid \tilde{\mathcal{X}}(t, \tau, \tilde{\mathcal{P}}^+(\tau))) = \rho(\pm \tilde{p}^{+\perp i}(t) \mid \tilde{\mathcal{P}}^+(t))$, $i = 1, \dots, n$. Эти соотношения обеспечивают эволюционное свойство (8.11) для $\tilde{\mathcal{P}}^+(\cdot)$ (которое следует также из теоремы 8.1). Аналогично

⁵Используя замечание 3.4, можно также убедиться, что если $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$, то трубка $\mathcal{P}^+(\cdot)$ является локально-оптимальной в смысле объема оценкой для $\mathcal{X}(\cdot)$ [188].

закключаем, что $\tilde{\mathcal{P}}^+(t)$ являются внешними касающимися оценками для $\tilde{\mathcal{X}}(t)$. Следовательно, для каждого $l \in \mathbb{R}^n$, $\|l\| = 1$, существует трубка $\tilde{\mathcal{P}}^+(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, такая что $\tilde{p}^{+\perp n}(t) = l$ и $\rho(l|\tilde{\mathcal{X}}(t)) = \rho(l|\tilde{\mathcal{P}}^+(t))$. Этот факт обеспечивает представление $\tilde{\mathcal{X}}(t)$ в виде пересечения оценок. Параллелепипеды $\mathcal{P}^+(t) = \Phi(t, 0)\tilde{\mathcal{P}}^+(t)$ обеспечивают такие же свойства оценок в системе (8.1). Легко убедиться, что параметры $\mathcal{P}^+(t)$ удовлетворяют (8.30), (8.32), (8.33), (8.34). \square

Замечание 8.1 Задача (8.16) в рассматриваемом семействе оценок является задачей нелинейного программирования в \mathbb{R}^{n^2} .

Замечание 8.2 Если параллелепипеды $\mathcal{P}^+(t)$ рассматривать как параллелотопы $\mathcal{P}[p^+(t), \bar{P}^+(t)]$, то при условии $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$ и (8.33) несложно выписать дифференциальные уравнения для $\bar{P}^+(t)$. Так как $\bar{P}^+ = P^+ \cdot \text{diag } \pi^+ = P \cdot \text{diag } \pi$, то прямым дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}}^+ &= A(t)\bar{P}^+ + \bar{P}^+ \cdot \text{diag} (\text{Abs} ((\bar{P}^+)^{-1} R(t)) \rho(t)), \\ \bar{P}^+(0) &= P_0^+ \cdot \text{diag} (\text{Abs} ((P_0^+)^{-1} P_0) \pi_0). \end{aligned}$$

Замечание 8.3 Пусть множества $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(t) \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ и $\rho(l|\mathcal{R}(t))$ непрерывна по t . Тогда (с учетом леммы 2.7 для \mathcal{X}_0 и $\mathcal{R}(t)$) теорема 8.2 верна, если в дифференциальных уравнениях для параметров $\mathcal{P}^+(t)$ заменить \mathcal{X}_0 и $\mathcal{R}(t)$ на $\mathbf{P}_{P(0)}^+(\mathcal{X}_0)$ и $\mathbf{P}_{P(t)}^+(\mathcal{R}(t))$.

Рассмотрим теперь внутренние аппроксимации множеств достижимости. Сначала построим внутренние оценки, аналогичные описанным в теореме 7.5 для многошаговых систем. Положим

$$\dot{p}^- = A(t)p^- + r(t), \quad t \in T, \quad p^-(0) = p_0. \quad (8.37)$$

Теорема 8.3 Пусть $\mathcal{X}(t)$ — множества достижимости системы (8.1), (8.2), (8.6), матрица $H(0) \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, а параметры параллелепипедов $\mathcal{P}^-(t)$ определяются соотношениями (8.37) и

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= A(t) H; & B(t) &= \{b^i(t)\} = \text{Ort } H(t); \\
\dot{u}^i &= A(t) u^i + f^i(R(t), \rho(t), B(t)); & u^i(0) &= f^i(P_0, \pi_0, B(0)); \\
p^{-,i}(t) &= \text{Nrv } u^i(t), & \pi_i^-(t) &= \|u^i(t)\|, \text{ если } u^i(t) \neq 0, \\
p^{-,i}(t) &= b^i(t), & \pi_i^-(t) &= 0, \text{ в противном случае, } i=1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{8.38}$$

где функции $f^i(R, \rho, B)$ — те же, что и в теореме 7.5. Тогда $\mathcal{P}^-(t)$ являются внутренними параллелепипедами для $\mathcal{X}(t)$, удовлетворяющими соотношениям (8.10), (8.12), и $\rho(\pm b^n(t)|\mathcal{P}^-(t)) = \rho(\pm b^n(t)|\mathcal{X}(t))$. Кроме того, если $\text{int } \mathcal{X}(t) \neq \emptyset$, то $\mathcal{X}(t) = \overline{\cup\{\mathcal{P}^-(t) \mid H(0) \in \mathcal{M}_*^{n \times n}\}}$, $\forall t \in T$ (черта означает замыкание).

Доказательство. Зафиксируем $t = \theta$ (для $t < \theta$ доказательство аналогично). Заметим, что $F^i(\tau) \triangleq f^i(R(\tau), \rho(\tau), B(\tau)) = \sum_{j=1}^n r^j(\tau) \rho_j(\tau) \cdot \text{sign } d^{ji}(\tau) \prod_{\alpha=i+1}^n \chi^{j\alpha}(\tau)$. Здесь $d^{ji}(\tau) = (r^j(\tau), b^i(\tau))$; $\chi^{j\alpha}(\tau)$ — это характеристическая функция⁶ множества нулей функции $d^{j\alpha}(\tau)$. Ввиду непрерывности $R(\tau), \rho(\tau)$ функции $F^i(\tau)$ измеримы. По формуле Коши $u^i(\theta) = \Phi(\theta, 0)u^i(0) + \int_0^\theta \Phi(\theta, \tau)F^i(\tau)d\tau$ и лемме A1.9 (в которой A заменено на $\Phi(\theta, 0), \Phi(\theta, \tau)$) получаем, что $(u^i(\theta), b^\alpha(\theta)) = 0$, $\alpha = i+1, \dots, n$. Вычисляя $(u^i(\theta), b^i(\theta))$ и используя леммы A1.10, A1.11, видим, что $(u^i(\theta), b^i(\theta))=0 \iff u^i(\theta)=0$ ($i=1, \dots, n$). По лемме A1.2 $\mathcal{P}^-(\theta) \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Если $x(\theta) \in \mathcal{P}^-(\theta)$, то $x(\tau) = p^-(\tau) + \sum_{i=1}^n u^i(\tau)\xi_i$ для $\tau = \theta$ и некоторого ξ , удовлетворяющего $\text{Abs } \xi \leq e$. Прямым вычислением можно проверить, что для траектории $x(\tau)$ с постоянным ξ имеем $\dot{x}(\tau) - A(\tau)x(\tau) \in \mathcal{R}(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, т.е. $x(\theta) \in \mathcal{X}(\theta)$ и $\mathcal{P}^-(\theta) \subseteq \mathcal{X}(\theta)$. Аналогично, $\mathcal{P}^-(0) \subseteq \mathcal{X}_0$. Соотношения для $\rho(\pm b^n(\theta)|\mathcal{P}^-(\theta))$ и (8.12) проверяются прямым вычислением с использованием лемм A1.10, A1.11; (8.10) — очевидно.

Пусть $\text{int } \mathcal{X}(\theta) \neq \emptyset$ и $x(\theta) \in \mathcal{X}(\theta)$. Введем сетку $\tau_k = k h_N$, $k = 0, \dots, N$, где $h_N = \theta/N$, и рассмотрим систему (1.1) с $A[k] = I + h_N A(\tau_k)$. Пусть $\mathcal{X}[N]$ — множество достижимости системы (1.1), (1.2) с $\mathcal{R}[k] =$

⁶Характеристической функцией множества \mathcal{X} называется функция $\chi(x)$, для которой $\chi(x) = 1$ при $x \in \mathcal{X}$, $\chi(x) = 0$ в противном случае.

$h_N \mathcal{R}(\tau_k)$. Поскольку $h(\mathcal{X}(\theta), \mathcal{X}[N]) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то найдется точка $x[N] \in \mathcal{X}[N]$ такая, что $|x(\theta) - x[N]| \leq O(h_N)$, $O(h_N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. По теореме 7.5 $x[N] \in \mathcal{P}^-[N]$, где параметры параллелепипеда $\mathcal{P}^-[N]$ определяются соотношениями, приведенными в этой теореме $\omega = 0$ и при некоторой начальной матрице $H[0] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Таким образом, $x[N] = p^-[N] + \sum_{i=1}^n u^i[N] \zeta_i$, $\text{Abs } \zeta \leq e$. Пусть $\mathcal{P}^-(\theta)$ определяется с помощью (8.37), (8.38) с $H(0) = H[0]$. Рассмотрим точку $\tilde{x} = p^-(\theta) + \sum_{i=1}^n u^i(\theta) \zeta_i$ с теми же ζ_i , что и выше. Для того, чтобы доказать последнее утверждение теоремы, достаточно проверить, что $|\tilde{x} - x[N]| \leq O(h_N)$. Это можно сделать, используя формулы Коши для многошаговых систем и систем с непрерывным временем и сравнивая кусочно-постоянные восполнения функций дискретного времени с соответствующими функциями непрерывного времени (напомним, что $f_N(t)$, $t \in T$, есть кусочно-постоянное восполнение функции $f[k]$, $k=1, \dots, N$, если $f_N(t) = f[k]$, $\tau_{k-1} < t \leq \tau_k$, $k=1, \dots, N$). А именно, требуемое соотношение вытекает из следующих фактов: восполнения $\Phi_N(\theta, t)$, $r_N(t)$, $R_N(t)$, $\rho_N(t)$ функций $\Phi[N, k]$, $r(\tau_k)$, $R(\tau_k)$, $\rho(\tau_k)$ сходятся равномерно к $\Phi(\theta, t)$, $r(t)$, $R(t)$, $\rho(t)$ соответственно; восполнения $d_N^{ji}(t)$ функций $d^{ji}[k] \triangleq (r^j(\tau_k), b^i[k])$ сходятся к $d^{ji}(t)$ равномерно и, тем более, по мере; $\|\chi_N^{ji} - \chi^{ji}\|_{L_1(T)} \leq O(h_N)$, где $\chi_N^{ji}(t)$ есть характеристическая функция множества нулей для $d_N^{ji}(t)$; все упомянутые функции ограничены. \square

К сожалению, внутренность параллелепипедов $\mathcal{P}^-(\theta)$ из теоремы 8.3 может быть пустой, даже если $\text{int } \mathcal{X}(\theta) \neq \emptyset$. Но если $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$, то имеется конечное число трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$ с $\text{int } \mathcal{P}^-(t) \neq \emptyset$, $t \in T$, которые соответствуют матрице $H(0)$, либо совпадающей с P_0 , либо полученной из P_0 путем перестановки ее столбцов. Кроме того, можно получить некоторые трубки с $\text{int } \mathcal{P}^-(t) \neq \emptyset$ по формулам (8.37), (8.38), где \mathcal{X}_0 заменено на произвольный параллелепипед $\tilde{\mathcal{P}}_0 \subseteq \mathcal{X}_0$ (для таких трубок утверждение теоремы 8.3, касающееся $\rho(\pm b^n(t) | \mathcal{P}^-(t))$, неверно).

Рассмотрим теперь семейство трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$, образованных параллело-

топами, параметры которых удовлетворяют системе ОДУ

$$\begin{aligned} \dot{p}^- &= A(t) p^- + r(t), & p^-(0) &= p_0; \\ \dot{\bar{P}}^- &= A(t) \bar{P}^- + \bar{R}(t) \Gamma(t), & \bar{P}^-(0) &= \bar{P}_0 \Lambda. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Здесь Λ и $\Gamma(t)$ — соответственно $n \times n$ -матрица и измеримая $n \times n$ -матричная функция — это параметры, которые определяют семейство трубок, могут варьироваться и стеснены ограничениями

$$\begin{aligned} \Lambda &\in \mathcal{G}, & \Gamma(\cdot) &\in \mathbf{G} = \{\Gamma(\cdot) \mid \Gamma(t) \in \mathcal{G} \text{ при п.в. } t \in T\}; \\ \mathcal{G} &= \{\Gamma = \{\gamma_i^j\} \mid \|\Gamma\| \leq 1\} = \mathcal{G}^{n \times n}, & \|\Gamma\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\gamma_i^j|. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Теорема 8.4 Пусть $\mathcal{X}(t)$ — множества достижимости системы (8.1), (8.2), (8.6). Параллелотопы $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$, параметры которых удовлетворяют соотношениям (8.39), (8.40), обладают свойствами (8.10), (8.12) и являются внутренними оценками для $\mathcal{X}(t)$. Более того, при каждом $t \geq 0$ справедливо представление

$$\mathcal{X}(t) = \bigcup \{\mathcal{P}^-(t) \mid \Lambda = I, \Gamma(\cdot) \in \mathbf{G}\}. \quad (8.41)$$

Доказательство. Проверим (8.12). Зафиксируем $t \in T$. Если $x^* \in \mathcal{P}^-(t)$, то найдутся такие $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, $|\xi_i| \leq 1$, что $x^* = p^-(t) + \sum_{i=1}^n \bar{p}^i(t) \xi_i$. Обозначив правую часть через $x^*(t)$, рассмотрим ее как функцию t (зафиксировав ξ). Тогда, очевидно, при произвольном $\vartheta \leq t$ имеем $x^*(\vartheta) \in \mathcal{P}^-(\vartheta)$ и непосредственным вычислением легко проверить, что при выполнении соотношений (8.39), (8.40) $\dot{x}^*(\tau) - A(\tau)x^*(\tau) \in \mathcal{P}[r(\tau), \bar{R}(\tau)]$, $\tau \in [\vartheta, t]$. Таким образом, $x^* = x^*(t) \in \mathcal{X}(t, \vartheta, \mathcal{P}^-(\vartheta))$, и, значит, $\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{X}(t, \vartheta, \mathcal{P}^-(\vartheta))$. Аналогично, $\mathcal{P}^-(0) \subseteq \mathcal{X}_0$.

В силу формулы Коши соотношение $x \in \mathcal{X}(t)$ для системы (8.1), (8.2), (8.6) означает, что $x = x(t)$, где

$$x(t) = \Phi(t, 0)(p_0 + \bar{P}_0 \zeta) + \int_0^t \Phi(t, \tau)(r(\tau) + \bar{R}(\tau) \xi(\tau)) d\tau \quad (8.42)$$

при некоторых $\zeta, \xi(\cdot)$, стесненных условиями

$$|\zeta_i| \leq 1, \quad |\xi_i(\tau)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.43)$$

Для доказательства (8.41) проверим, что для любых ζ и $\xi(\cdot)$, стесненных (8.43), найдутся $\Gamma(\cdot)$ из (8.40) и $\alpha \in \mathbb{R}^n$ с условием $\text{Abs } \alpha \leq \epsilon$ такие, что

$$x(t) = \Phi(t, 0)p_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)r(\tau)d\tau + \left(\Phi(t, 0)\bar{P}_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)\bar{R}(\tau)\Gamma(\tau)d\tau \right) \alpha.$$

Рассуждаем аналогично доказательству леммы 3.8. Если $x(t) \in \partial\mathcal{X}(t)$, то у ζ хотя бы одна (пусть i_* -я) компонента по модулю равна 1, и достаточно положить $\alpha = \zeta$, а в качестве $\Gamma(\tau)$ взять матрицу, у которой i_* -й столбец равен $\text{sign } \zeta_{i_*} \cdot \xi(\tau)$, а остальные — нулевые. Общий случай сводится к рассмотренному с учетом выпуклости оценок. \square

Отметим, что введенное семейство $\mathcal{P}^-(\cdot)$ включает в себя семейство параллелепипедозначных оценок для $\mathcal{X}(\cdot)$, описанное в теореме 8.3.

Пользуясь следствием 3.1, выделим в семействе оценок (8.41) тугие.

Следствие 8.1 Пусть задан вектор $l_0 \in \mathbb{R}^n$ и $l(\cdot)$ удовлетворяет системе ОДУ $\dot{l} = -A(t)^\top l$, $t \in T$, $l(0) = l_0$. Если в условиях теоремы 8.4 имеем $\Lambda = I$, а $\Gamma(t) = \{\gamma^j(t)\}$ — произвольная измеримая матричная функция, столбцы которой удовлетворяют соотношениям $\gamma^j(t) = \beta_j(t)e^{i_j}$, $j = 1, \dots, n$, где $\{i_1, \dots, i_n\}$ — произвольная перестановка чисел $\{1, \dots, n\}$ ⁷, $\beta_j(t)$ определяются формулами (3.17), где следует положить $J = \{1, \dots, n\}$, $c^{(1)} = \bar{P}_0^\top l_0$, $c^{(2)} = \bar{R}(t)^\top l(t)$, то $\mathcal{P}^-(t)$ оказывается тугой (в направлении $l(t)$) внутренней оценкой для $\mathcal{X}(t)$ при любом $t \in T$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 7.1 и использует тот факт, что, если векторная или матричная функция $y(\cdot)$ удовлетворяет ОДУ $\dot{y} = A(t)y + f$, $y(0) = y_0$, то $d(l^\top y)/dt = l^\top f$, и в силу формулы Ньютона-Лейбница $l(t)^\top y(t) = l_0^\top y_0 + \int_0^t l(\tau)^\top f(\tau)d\tau$. \square

Заметим также, что в качестве внешних оценок мы брали параллелепипеды, а в качестве внутренних — параллелотопы, которые могут и не быть параллелепипедами. Однако справедлива

Лемма 8.1 Если $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$ и удовлетворяющие (8.40) Λ и $\Gamma(\cdot)$ таковы,

⁷Которая тоже, вообще говоря, может зависеть от времени.

что

$$\det \bar{P}^-(0) > 0, \quad (8.44)$$

$$\text{tr} ((\Phi(t, 0)^{-1} \bar{P}^-(t))^{\vee} \Phi(t, 0)^{-1} \bar{R}(t) \Gamma(t)) \geq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T, \quad (8.45)$$

то $\mathcal{P}^-(t)$ оказываются невырожденными параллелепипедами.

Символом B^{\vee} в (8.45) обозначена матрица, присоединенная к B [101, с.39]. Заметим, что нам важно только условие $\text{int } \mathcal{P}^-(0) \neq \emptyset$, т.е. $\det \bar{P}^-(0) \neq 0$, поскольку положительности в (8.44) можно добиться, например, умножением какого-либо столбца матрицы Λ либо \bar{P}_0 на -1 .

Доказательство. В результате замены переменных (8.18) приходим к системе с нулевой матрицей $A(t) \equiv 0$:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{w}(t), \quad \tilde{x}(0) \in \mathcal{X}_0, \quad \tilde{w}(t) \in \mathcal{P}[\tilde{r}(t), \tilde{R}(t)],$$

где $\tilde{r} = \Phi(t, 0)^{-1} r$, $\tilde{R} = \Phi(t, 0)^{-1} \bar{R}$. Семейство внутренних оценок $\tilde{\mathcal{P}}^-(\cdot)$ для МД $\tilde{\mathcal{X}}(\cdot)$ этой системы определяется соотношениями

$$\dot{\tilde{p}}^- = \tilde{r}(t), \quad \tilde{p}^-(0) = p_0, \quad \dot{\tilde{P}}^- = \tilde{R}(t) \Gamma(t), \quad \tilde{P}^-(0) = \bar{P}_0 \Lambda \quad (8.46)$$

и (8.40) и связано с исходным семейством $\mathcal{P}^-(\cdot)$ формулами $p^- = \Phi(t, 0) \cdot \tilde{p}^-$, $\bar{P}^- = \Phi(t, 0) \tilde{P}^-$. Для матрицы \tilde{P}^- , удовлетворяющей (8.46), имеют место [101, с.183] равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \tilde{P}^- &= \text{tr} ((\tilde{P}^-)^{\vee} \tilde{R} \Gamma); \\ \frac{d}{dt} \det \tilde{P}^- &= \det \tilde{P}^- \cdot \text{tr} ((\tilde{P}^-)^{-1} \tilde{R} \Gamma), \quad \text{если } \det \tilde{P}^-(t) \neq 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Соотношения (8.44), (8.45) обеспечивают неубывание функции $\det \tilde{P}^-(t)$ и ее положительность. Так как $\det \Phi(t, 0) > 0$, то и $\det \bar{P}^-(t) > 0, \forall t \in T$. \square

Как видно из доказательства, условие (8.45) можно заменить следующим

$$\text{tr} (\bar{P}^-(t)^{-1} \bar{R}(t) \Gamma(t)) \geq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (8.48)$$

Замечание 8.4 Условие (8.45) (так же, как и (8.48)) не очень конструктивно (за исключением тривиального случая $\Gamma(t) \equiv 0$). Однако

на его основе можно предложить следующий способ построения невырожденных внутренних оценок.

Пусть параметр $\Lambda \in \mathcal{G}$ зафиксирован, причем выполнено неравенство (8.44). Введем множество \mathcal{T}_N точек $\tau_k = kh$, $k = 0, \dots, N$, $h = \theta/N$. Рассмотрим класс \mathbf{G}_N кусочно-постоянных функций $\Gamma(\cdot)$: $\mathbf{G}_N = \{\Gamma(\cdot) \mid \Gamma(t) \equiv \Gamma(\tau_k) \in \mathcal{G}, t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), k = 0, \dots, N-1\}$ и N задач оптимизации

$$\left. \frac{d}{dt} \text{vol } \mathcal{P}^-(t) \right|_{t=\tau} \rightarrow \max_{\Gamma(\tau) \in \mathcal{G}}, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_N. \quad (8.49)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} \det \bar{P}^- = \frac{d}{dt} \det \Phi(t, 0) \cdot \det \tilde{P}^- + \det \Phi(t, 0) \cdot \frac{d}{dt} \det \tilde{P}^-; \quad \det \Phi(t, 0) > 0, \quad (8.50)$$

получаем, при условии $\det \tilde{P}^-(t) > 0$, $\forall t \in [0, \tau]$, что задача (8.49) при фиксированном $\tau \in \mathcal{T}_N$ эквивалентна максимизации по Γ правых частей соотношений (8.47), или, иначе, задаче

$$\text{tr} (\Xi(\tau) \Gamma) \rightarrow \max_{\Gamma \in \mathcal{G}}, \quad \Xi(\tau) = \{\xi_i^j(\tau)\} = \bar{P}^-(\tau)^{-1} \bar{R}(\tau). \quad (8.51)$$

Решение $\Gamma^*(\tau) = \{\gamma_i^{*j}(\tau)\}$ этой задачи (не обязательно единственное), как мы уже видели в § 3, может быть найдено по формулам (3.29).

Трубку $\mathcal{P}^-(\cdot)$ будем строить пошагово. Пусть для $\tau \in \mathcal{T}_N$ матрица $P^-(t)$ уже определена на промежутке $\tau_0 \leq t \leq \tau$. Продолжим ее на $(\tau, \tau + h]$. Если при $\Gamma(t) \equiv \Gamma^*(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h)$, для матрицы $P^-(t)$, найденной в силу (8.39), оказывается

$$\det \bar{P}^-(t) > 0, \quad \forall t \in (\tau, \tau + h], \quad (8.52)$$

то удовлетворяемся взятыми $\Gamma(t)$ и построенными на этом промежутке $P^-(t)$. Иначе полагаем $\Gamma(t) \equiv 0$, $t \in [\tau, \tau + h)$ и находим в силу (8.39) соответствующие $P^-(t)$. Полученная таким образом трубка $\mathcal{P}^-(\cdot)$ образована невырожденными параллелепипедами.

Очевидно, что если $\text{int } \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$ и $\bar{R}(t) \neq 0$, то, выбирая N достаточно большим, этим способом можно построить $\Gamma(t)$, отличные от тождественного нуля. Аналогично можно строить невырожденные внутренние оценки $\mathcal{P}^-(\cdot)$, если на каждом шаге вместо $\Gamma^*(\tau)$, решающего задачу (8.51), брать $\Gamma^*(\tau)$ просто из условия $\text{tr}(\Xi(\tau)\Gamma^*(\tau)) > 0$.

Достаточными условиями для выполнения (8.52) являются, в силу (8.47), неравенства $\text{tr}(\Xi(t)\Gamma^*(\tau)) \geq 0, \forall t \in [\tau, \tau + h]$.

Если на промежутке $[\tau, \tau + h]$ найти оценку $|\phi(t) - \phi(\tau)| \leq \Delta$, где $\phi(t) = \frac{d}{dt} \det \tilde{P}^-(t)$ — функция, стоящая в правой части формул (8.47), то еще одно, более грубое, достаточное условие для выполнения (8.52) можно записать в виде

$$\det \tilde{P}^-(\tau) \cdot \text{tr}(\Xi(\tau)\Gamma^*(\tau)) - \Delta \geq 0. \quad (8.53)$$

При $n \geq 2$ в качестве грубой оценки Δ могут служить, например, величины (при записи которых мы, во избежание громоздкости, использовали новые переменные)

$$\Delta_1 = n! n \|\tilde{P}^-\|^{n-1} \mu_{\tilde{R}}(h) + n! n (n-1) (C_{\tilde{R}})^2 (\|\tilde{P}^-\| + C_{\tilde{R}} h)^{n-2} h,$$

$$\Delta_2 = \det \tilde{P}^- a(h) \exp(a(h)C_{\tilde{R}}h) (\mu_{\tilde{R}}(h) + 2a(h)(C_{\tilde{R}})^2 h),$$

$$\text{если } h < (C_{\tilde{R}} \|\tilde{P}^-\|)^{-1}, \text{ где } a(h) = \|\tilde{P}^-\|^{-1} (1 - \|\tilde{P}^-\|^{-1} C_{\tilde{R}} h)^{-1}.$$

Здесь фигурирует та же матричная норма, что и в (8.40), аргумент τ у всех величин для простоты записи опущен, и использованы следующие обозначения, введенные для произвольной непрерывной матричной функции $F(t)$: $\mu_F(\tau, h) = \max_{\tau \leq t \leq \tau+h} \|F(t) - F(\tau)\|$, $C_F = \max_{t \in T} \|F(t)\|$. Оценку Δ_1 несложно получить, вводя в правую часть первой из формул (8.47) перекрестные члены, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница для \tilde{P}^- и выражением $\dot{\tilde{P}}^-$ из (8.46), а также грубыми неравенствами типа

$$\begin{aligned} |\text{tr } A - \text{tr } B| &\leq n \|A - B\|, \\ |\det A - \det B| &\leq n! n \|A - B\| \max\{\|A\|, \|B\|\}^{n-1}, \\ \|A^\vee - B^\vee\| &\leq n! (n-1) \|A - B\| \max\{\|A\|, \|B\|\}^{n-2}, \\ \|A^\vee\| &\leq n! \|A\|^{n-1}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Оценку Δ_2 можно получить, вводя перекрестные члены в правую часть второй из формул (8.47), учитывая вытекающее (8.47) равенство $\det \tilde{P}^-(t) = \det \tilde{P}^-(\tau) \exp(\int_\tau^t \text{tr}((\tilde{P}^-)^{-1} \tilde{R} \Gamma) d\xi)$, используя оценку $\|\tilde{P}^-(t)^{-1}\| \leq a(h)$, получаемую из соотношения $\frac{d}{dt} X^{-1} = -X^{-1} \frac{d}{dt} X X^{-1}$ для $X = \tilde{P}^-$ с помощью леммы Бихари [40, с.112] и используя неравенства типа $|\text{tr}(ABC)| \leq \|A\| \|B\| \|C\|$.

Замечание 8.5 Если $\det \bar{P}_0 \geq 0$, то задача (8.17) в семействе (8.41) является задачей оптимального программного управления с терминальным критерием качества $\det \bar{P}^-(\theta)$, где роль управлений играет $\Gamma(t)$, стесненная ограничениями (8.40). Эта задача имеет решение в классе измеримых функций $\Gamma(\cdot)$, и необходимое условие оптимальности для нее можно записать в виде принципа максимума Л.С. Понтрягина следующим образом. Если $\Gamma(\cdot)$ — оптимальное управление, а $\bar{P}^-(\cdot)$ — соответствующее решение системы (8.39), то

$$\text{tr}(\Psi(t)^\top \bar{R}(t) \Gamma(t)) = \max_{\Gamma \in \mathcal{G}} \text{tr}(\Psi(t)^\top \bar{R}(t) \Gamma) \quad \text{при п.в. } t \in T, \quad (8.55)$$

где матричная функция $\Psi(t)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\Psi} = -A(t)^\top \Psi, \quad t \in T; \quad \Psi(\theta) = (\bar{P}^-(\theta)^\top)^\vee.$$

Доказательство. Существование оптимального управления следует из компактности $\mathcal{X}(\theta)$, вытекающей из линейности системы и компактности множества \mathcal{G} [102, с.178]. Соотношения принципа максимума следуют из [163] (в частности, условие трансверсальности принимает указанную форму ввиду формулы $\frac{\partial}{\partial X} \det X = \det X \cdot (X^{-1})^\top$). \square

Заметим, что при $A(t) \equiv 0$ и $\det \bar{P}_0 > 0$ соотношение (8.55) переходит в $\text{tr}(\bar{P}^-(\theta)^{-1} \bar{R}(t) \Gamma(t)) = \max_{\Gamma \in \mathcal{G}} \text{tr}(\bar{P}^-(\theta)^{-1} \bar{R}(t) \Gamma)$, что напоминает условие (8.51), но отличается от него аргументом у матрицы \bar{P}^- .

Замечание 8.6 Каждая из введенных трубок $\mathcal{P}^+(\cdot)$, $\mathcal{P}^-(\cdot)$ описывается своей системой ОДУ, не зависящей от других. Поэтому конечное число таких оценок можно найти путем параллельных вычислений.

9 Численные алгоритмы и программная реализация. Численное моделирование

Пользуясь теоремой 7.1, можно предложить следующий алгоритм для вычисления $\mathcal{X}[N]$. С использованием (7.2), (7.3) находим Y_N . Из совокупности всех положительных величин $\rho_i[k]$ ($i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{0, \dots, N\}$) выбираем какие-то $n - \omega - 1$ (либо $n - \omega$) элементов и по формулам (7.2) находим соответствующие $n - \omega - 1$ ($n - \omega$) векторов из Z'_N . Если они оказываются линейно независимыми, то дополнив их (при $Y_N \neq \emptyset$) векторами из Y_N , строим матрицу $P^+[0]$ аналогично случаям 1 или 2 (либо 3) теоремы 7.1, и далее по соответствующим формулам вычисляем $\mathcal{P}^+[N]$. Аналогично, независимо друг от друга, можно найти другие внешние для $\mathcal{X}[N]$ параллелепипеды. Если мощность ЭВМ позволяет перебрать все возможные комбинации, то в результате $\mathcal{X}[N]$ определяется в виде (1.19) точно. В противном случае ограничиваемся нахождением внешней мажоранты для $\mathcal{X}[N]$ (например, перебрав матрицы $P^+[0]$ из некоторого подмножества множества \mathcal{V}_N^γ). Алгоритмы для построения внутренних аппроксимаций на основе теорем 7.4, 7.5 аналогичны.

Рассмотрим алгоритмы с точки зрения их эффективности, считая выполненными (1.8) и предположения 1.1 и 3.1 для Z_N , когда $M(Z_N) = (N+1)n$.

Оценим число операций M^* , которые необходимо произвести для точного нахождения $\mathcal{X}[N]$ в виде (1.19), пользуясь, как описано выше, теоремой 7.1 при $\gamma = 1, 2$. Для простоты под операцией будем понимать любую арифметическую операцию, а также функцию \sqrt{x} . Для перехода от $\mathcal{P}^+[k-1]$ к $\mathcal{P}^+[k]$ требуется порядка n^3 операций, для каждого $\mathcal{P}^+[N]$ надо сделать N таких шагов, а всего достаточно построить $C_{(N+1)n}^{n-1}$ таких параллелепипедов $\mathcal{P}^+[N]$. Формулы для вычисления $P^+[0]$ по трудоемкости не сложнее рассмотренных. Поэтому для нахождения $\mathcal{X}[N]$ в каждом из случаев 1–2 теоремы 7.1 достаточно произвести $M^* \leq \text{Const} n^3 N C_{(N+1)n}^{n-1} < \text{Const} n^{n+2} (N+1)^n / (n-1)!$ операций (здесь использо-

вано одно из грубых неравенств $k^{n-1} < C_{(k+1)n}^{n-1} (n-1)! / n^{n-1} < (k+1)^{n-1}$.

Верхняя оценка для числа M^* достаточно велика. В частности, при больших n , если считать с учетом формулы Стирлинга [150, Т.2, с.371], что $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, эта оценка сводится к $\approx \text{Const } n^{5/2} (N+1)^n e^n$. Но здесь надо иметь в виду три обстоятельства.

Во-первых, трудоемкость решения задачи определяется тем фактом, что существуют системы (1.1), (1.2), (1.8), для которых $\mathcal{X}[N]$ имеет $C_{(N+1)n}^{n-1}$ различных крайних опор.

Во-вторых, вычисление каждой трубки не зависит от остальных. Поэтому на многопроцессорных ЭВМ можно проводить одновременный расчет нескольких трубок.

А, в-третьих, покажем, что при больших N предложенные алгоритмы могут быть более эффективны по числу операций, чем известный алгоритм [103], в котором множество достижимости ищется в виде системы линейных неравенств, причем эффективность возрастает с ростом N даже при решении задачи на одном процессоре.

Действительно, согласно [103] множества $\mathcal{X}[k]$ задаются в виде систем $C_k x \geq c_k$. Мы оценим (снизу) только число операций, необходимых для перехода от матриц C_{k-1} к C_k по формулам $C_k = V_k^1 C_{k-1} A[k]^{-1}$ (т.е. путем перемножения трех матриц размера $m_k \times m_{k-1}$, $m_{k-1} \times n$ и $n \times n$ соответственно, где m_k — это число неравенств, определяющих $\mathcal{X}[k]$), оставляя в стороне вопрос о трудоемкости нахождения V_k^1 . В условиях предположения 3.1 m_k оценивается величиной $2C_{(k+1)n}^{n-1}$. Поэтому только для перемножения матриц возрастающей от шага к шагу размерности требуется $M^{**} > \text{Const} \cdot n \sum_{k=1}^N C_{(k+1)n}^{n-1} C_{kn}^{n-1} > \text{Const} \cdot n \sum_{k=1}^N (C_{kn}^{n-1})^2 > \text{Const} \cdot n^{2n-1} (2n-1)^{-1} ((n-1)!)^{-2} (N-1)^{2n-1}$ операций. При больших значениях N алгоритмы, основанные на теореме 7.1, дают выигрыш по числу операций: $M^{**}/M^* > \text{Const} \cdot (n^{n-4}/(n-1)!) \cdot ((N-1)/(N+1))^n \cdot (N-1)^{n-1} \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Этот выигрыш обусловлен тем, что при наших предположениях множества в (1.2) имеют специальный вид (1.8) (в [103] допускаются

произвольные выпуклые многогранники).

Трудоёмкость алгоритма, основанного на теореме 7.4, такая же. Рассмотрим его с точки зрения расхода памяти. Если бы мы "в лоб" вычисляли всевозможные суммы вершин суммируемых параллелепипедов (а $\mathcal{X}[N]$ есть выпуклая оболочка полученных таким образом точек), то информация обо всех этих точках из \mathbb{R}^n представляла бы собой, вообще говоря, $L^{**} = n2^{(N+1)n}$ чисел. Поскольку для описания параллелепипеда достаточно $2n+n^2$ (фактически даже $n+n^2$) чисел, то согласно теореме 7.4 $\mathcal{X}[N]$ может быть описано с помощью $L^* = (2n + n^2)C_{(N+1)n}^{n-1} < ((2n+n^2)/(n-1)!)2^{(n-1)\log_2(Nn+n)}$ чисел. Эта оценка с ростом N растёт значительно медленнее, чем L^{**} .

В заключение приведем грубые верхние оценки числа трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-[\cdot]$ в рассматриваемых семействах (в скобках — при больших n):

в теореме 7.1 ($\gamma = 1, 2$): $C_{(N+1)n}^{n-1} (< \approx n^{-1/2}e^n(N+1)^{n-1})$;

в теореме 7.1 ($\gamma = 3$): $C_{(N+1)n}^n (< \approx n^{-1/2}e^n(N+1)^n)$;

в теореме 7.3: $(C_{2n}^{n-1})^N (< \approx 2^{3nN})$;

в теореме 7.4: $C_{(N+1)n}^{n-1}$;

в теореме 7.5: $A_{(N+1)n}^{n-1} < (N+1)^{n-1}n^{n-1}$, где $A_k^r = \frac{k!}{(k-r)!}$ — число различных размещений из k элементов по r .

Ряд алгоритмов для построения полиэдральных аппроксимаций множеств достижимости реализован в виде пакета программ BOXES в системе MATLAB 5. Краткие сведения о нем приведены в Приложении В.

Ряд алгоритмов реализован в виде программы на языке С для многопроцессорного вычислительного комплекса МВС-100 (который описан, например, в [137]). Программа представляет собой процессорную ферму и может работать при любой физической топологии сети процессоров. Задача-мастер, выполняющаяся на одном из процессоров, занимается распределением и посылкой заданий для идентичных задач-рабочих, приемом результатов счета от них и записью результатов в файл. Задачи-рабочие, выполняющиеся на остальных, "рабочих", процессорах, рассчи-

тывают отдельные трубки $\mathcal{P}^\pm[\cdot]$. В задаче-мастере организован цикл по рабочим процессорам, в котором производится анализ их состояния, и при освобождении "рабочего" производится посылка ему очередного задания. Оно начинается с флага, который определяет, что либо далее будут передаваться общие параметры системы, либо информация для расчета очередной трубки, либо что все посчитано и рабочий процессор следует остановить. Информация для расчета трубки $\mathcal{P}^\pm[\cdot]$ содержит, в частности, флаг метода построения и либо матрицу ориентации для начального момента времени, либо информацию о способе ее построения.

В программе предусмотрен графический вывод на экран РС. Графические процедуры написаны с помощью многопроцессорной графической библиотеки, разработанной Д.В.Манаковым в отделе системного обеспечения ИММ УрО РАН на основе библиотеки Microsoft. В нижней части экрана каждый из рабочих процессоров рисует проекции найденных им оценок для $\mathcal{X}[N]$ на заданные координатные плоскости (1–3 шт.), а в верхней части экрана один из рабочих процессоров показывает в динамике эволюцию (по k) проекций $\mathcal{P}^\pm[k]$ для тех трубок, расчетом которых он занят (примеры изображений доставляют рис. 9.2, 9.4, 12.1, 12.2). Проекция параллелепипеда строится как выпуклая оболочка в двумерном пространстве для проекций вершин параллелепипеда. Алгоритмы построения выпуклой оболочки описаны, например, в [99, 128].

Эффективность распараллеливания исследовалась на модельном примере, где внешние оценки МД строились для системы без ФО ($n=6$, $N=200$). В качестве характеристики эффективности был взят коэффициент ускорения $k_{acc}(i) = T(1)/T(i)$, где $T(i)$ — время счета задачи на i процессорах. Ниже в таблице приведены результаты вычислительного эксперимента. В первой строке указано число задействованных процессоров, в следующих двух приведены значения $k_{acc}(i)$, полученные при расчете на сети из 16 процессоров, соединенных в двойную линейку: когда задача-мастер выполняется на нулевом процессоре (2-я строка) и в

середине линейки (3-я строка) (нумерация процессоров последовательная, начиная с корневого):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	2.9	3.8	4.5	5.2	5.5	6	6.6	7	7.4	7.4	5.7	5.7	5.5
1	1	2	2.9	3.8	4.7	5.2	6	6.6	7.4	7.9	7.9	7.9	6.3	6.3	6.3
1	1	1.9	2.8	3.8	4.3	4.9	5.8	6.4	6.4	7.5	7.5	8	8.5	8.5	9.1

Произведенная на МВС-100 замена физической конфигурации сети на "конверт" (с нумерацией процессоров типа "дерево") привела к увеличению $k_{acc}(i)$ до 9.1 на 16 процессорных элементах (см. 4-ю строку). Вычисления на системе из 32 процессоров, соединенных в два "конверта", существенного выигрыша для данного примера не дали: наибольшее значение $k_{acc}(i) = 9.8$ получено при $i = 18$, а при дальнейшем увеличении i значения $k_{acc}(i)$ колеблются от 8 до 8.5.

Приведенная во второй строке зависимость k_{acc} от i качественно согласуется с известной теоретической оценкой времени счета задач типа процессорной фермы на линейке процессоров [59]: $T(1) = K\omega$, а при $i > 1$ $T(i) = K(\omega/(i-1) + ci/2)$, где K — число вариантов, которые надо посчитать, ω — время счета одного варианта, c — время обмена данных между двумя соседними процессорами, $i-1$ — число процессоров, где считаются рабочие задачи. При этом $k_{acc}(i)$ оказывается унимодальной функцией с максимумом в точке $i_* = (2\omega/c)^{1/2} + 1$, и $k_{acc}(i_*) = (i_* - 1)/(2 + 1/(i_* - 1))$. Для рассматриваемого класса алгоритмов ω пропорционально n^3N , так как для выполнения одного шага по k в требуется порядка n^3 операций. При оценивании $\mathcal{X}[N]$ в задачу-мастер пересылаются $\mathcal{P}^+[k]$ только для $k = N$ и c пропорционально n^2 . Следовательно, i_* и $k_{acc}(i_*)$ пропорциональны $(nN)^{1/2}$ и можно ожидать, что с увеличением размерности системы и (или) числа шагов по времени эти значения будут возрастать.

Приведем результаты численного моделирования построения оценок множеств достижимости для систем, полученных дискретизацией систем (8.1), (8.2), (8.6) с непрерывным временем. А именно, рассмотрим систе-

му (1.1), (1.2), (1.8), где \mathcal{X}_0 — то же, что и в (8.2), а

$$\begin{aligned} A[k] &= I + h_N A((k-1)h_N), \quad k = 1, \dots, N; \quad h_N = \theta N^{-1}; \\ \mathcal{R}[k] &= h_N \mathcal{R}(kh_N), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Пример 9.1 Пусть $A(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p_0 = (0, 0)^\top$, $P_0 = I$, $\pi_0 = (0, 0)^\top$, $r(t) \equiv (0, 0)^\top$, $R(t) \equiv I$, $\rho(t) \equiv (0, 1)^\top$, $\theta = 1$, $N = 200$. Множество достижимости $\mathcal{X}(\theta)$ для такой системы (8.1) известно в явном виде (см. [155]); его площадь равна $S = 2/3$. На рис. 9.1 показаны внешние оценки $\mathcal{P}^+[N]$ для МД $\mathcal{X}[N]$ системы (1.1), (1.2), (9.56). Они получены для 20 выбранных случайным образом матриц $P[0]$ в соответствии со случаями 1 и 3 теоремы 7.1 (см. 9.1(a) и 9.1(b) соответственно). Минимальные из площадей упомянутых параллелепипедов соответственно приблизительно равны $1.5S$ и $1.2S$; обе величины меньше, чем площадь ($\approx 1.9S$) локально-оптимальной внешней эллипсоидальной оценки для $\mathcal{X}(\theta)$, построенной в [155, с.153].

Пример 9.2 Пусть $A(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$, $p_0 = (-0.5, 0)^\top$, $P_0 = I$, $\pi_0 = (0.5, 0.5)^\top$, $r(t) \equiv (0, 0)^\top$, $R(t) \equiv I$, $\rho(t) \equiv (0, 1)^\top$, $\theta = 2$, $N = 500$. В нижних частях рис. 9.2 (a) и 9.2 (b) показаны множество \mathcal{X}_0 и $\mathcal{P}^+[N]$, построенные, как описано выше (см. также рис. 9.3 (a) и 9.3 (c)). В нижней части рис. 9.2 (c) показаны \mathcal{X}_0 и параллелепипеды $\mathcal{P}^-[N]$, полученные по формулам теоремы 7.5. В верхних частях этих рисунков показаны некоторые реализации внешних $\mathcal{P}^+[\cdot]$ (внутренних $\mathcal{P}^-[\cdot]$) трубок соответствующих семейств (показаны сечения через каждые 10 шагов k для $\mathcal{P}^+[k]$ и через 20 шагов для $\mathcal{P}^-[k]$). Для лучшего сравнения внешних и внутренних оценок нижние части рис. 9.2 (b) и 9.2 (c) объединены на рис. 9.2 (d). На рис. 9.3 (d) показано несколько тугих внутренних для $\mathcal{X}[N]$ оценок $\mathcal{P}^-[N]$, найденных в соответствии со следствием 7.1.

Пример 9.3 Пусть система (8.1) описывает положение и скорость двух независимых осцилляторов (подсистемы связаны через ограниче-

ния; в [201] построены эллипсоидальные оценки $\mathcal{X}[k]$ для аналогичной системы). Пусть $\theta = 5$, $N = 500$,

$$A(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} p_0 &= (1, 0, 1, 0)^\top, & P_0 &= I, & \pi_0 &= (1, 1, 1, 1)^\top, \\ r(t) &\equiv (0, 0, 0, 0)^\top, & R &\equiv I, & \rho(t) &\equiv (1, 0.1, 1, 0.1)^\top. \end{aligned}$$

Поскольку параллелепипеды, возникающие в этой задаче — четырехмерные, мы показываем их двумерные проекции на плоскости $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_4\}$. В нижних частях рис. 9.4 (а) и 9.4 (b) показаны проекции \mathcal{X}_0 и 25 параллелепипедов $\mathcal{P}^+[N]$, построенных в соответствии со случаями 3 и 1 теоремы 7.1 соответственно. В верхних частях этих рисунков для некоторых трубок из соответствующих семейств показаны проекции сечений $\mathcal{P}^+[k]$ на упомянутые выше координатные плоскости через каждые 10 шагов k .

Глава III

Полиэдральные оценки множеств достижимости систем с фазовыми ограничениями и информационных областей

В данной главе разрабатываются методы построения двусторонних оценок множеств достижимости линейных динамических систем (как с дискретным, так и с непрерывным временем) при наличии фазовых ограничений в дискретные моменты времени. Алгоритмы, разработанные для таких систем, применимы для аппроксимации информационных областей, возникающих в задачах гарантированного оценивания в системах, где производятся неточные измерения в дискретные моменты времени. Основная часть результатов главы опубликована в [67, 68, 73, 188, 193].

10 Многошаговые системы

Рассмотрим способы построения внешних параллелепипедозначных аппроксимаций МД $\mathcal{X}[k]$ для системы (1.1), (1.2), (1.8) с фазовыми ограничениями (1.3) в виде параллелепипедов (1.9) или полос (1.10).

Две следующие теоремы относятся к системе (1.1) – (1.3), (1.8), (1.9). Первая использует подход [75, 201] и основывается на применении тео-

ремы 7.1 к системам без ФО, но с матричными параметрами $T[\cdot]$:

$$\begin{aligned}\bar{x}[k] &= T[k]A[k]\bar{x}[k-1] + T[k]w[k] + (I - T[k])\zeta[k], \quad k = 1, \dots, N, \\ \bar{x}[0] &\in \mathcal{X}_0, \quad w[k] \in \mathcal{R}[k], \quad \zeta[k] \in \mathcal{Y}[k], \quad k = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{10.1}$$

где $T[k] \in \mathcal{M}_{00}^{n \times n} \triangleq \{M \in \mathcal{M}_0^{n \times n} \mid \det(I - M) \neq 0\}$, $k = 1, \dots, N$.

Теорема 10.1 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (1.1) – (1.3), (1.8), (1.9), все $\mathcal{X}[k] \neq \emptyset$ и выполнено предположение 1.1. Если $\mathcal{P}^+[\cdot]$ удовлетворяют соотношениям $\mathcal{P}^+[0] = \mathbf{P}_{\mathcal{P}^+[0]}^+(\mathcal{X}_0)$,

$$\mathcal{P}^+[k] = \mathbf{P}_{\mathcal{P}^+[k]}^+(T[k]A[k]\mathcal{P}^+[k-1] + T[k]\mathcal{R}[k] + (I - T[k])\mathcal{Y}[k]), \quad k = 1, \dots, N,$$

то при любых $\mathcal{P}^+[k] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$, и $T[k] \in \mathcal{M}_{00}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$, справедливы включения (1.12). Кроме того, если матрицы $\mathcal{P}^+[k]$ определяются в соответствии с любым из трех правил, аналогичным описанным в теореме 7.1 с заменой $A[k]$ на $T[k]A[k]$ и \mathcal{V}_N^γ на $\mathcal{V}_N^\gamma(T[\cdot])$ (где множества $\mathcal{V}_N^\gamma(T[\cdot])$ построены для системы (10.1) при фиксированной $T[\cdot]$ аналогично \mathcal{V}_N^γ для (1.1), (1.2), (1.8)), то $\mathcal{X}[N] = \bigcap_{T[\cdot]} \bigcap_{\mathcal{P}^+[0] \in \mathcal{V}_N^\gamma(T[\cdot])} \mathcal{P}^+[N]$, $\gamma = 1, 2, 3$, где в первом пересечении достаточно перебрать все последовательности $T[\cdot]$ диагональных матриц, удовлетворяющих $T[k] \in \mathcal{M}_{00}^{n \times n}$.

Доказательство проводится модификацией рассуждений из [98, 148] (см. также похожее доказательство теоремы 20.2). \square

К сожалению, численное моделирование показало, что параллелепипеды $\mathcal{P}^+[N]$, построенные как описано в теореме 10.1, могут оказаться слишком грубыми оценками для $\mathcal{X}[N]$.

Следующая теорема использует формулы леммы 5.2.

Теорема 10.2 Пусть $\mathcal{X}[k] \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, N$, — множества достижимости системы (1.1) – (1.3), (1.8), (1.9). Если

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(0)+}[k] &= \mathbf{P}_{P^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N, \\
\mathcal{P}^+[k] &= \mathbf{P}_{P^{(1)+}[k]}^+(\mathcal{P}^{(0)+}[k]) \cap \mathbf{P}_{P^{(1)+}[k]}^+(\mathcal{Y}[k]), \quad k = 1, \dots, N, \\
\mathcal{P}^+[0] &= \mathbf{P}_{P^{(0)+}[0]}^+(\mathcal{X}_0),
\end{aligned} \tag{10.2}$$

то при любых $P^{(0)+}[k] \in M_*^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$, $P^{(1)+}[k] \in M_*^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$ справедливы включения (1.15). Более того, имеют место представления (1.19), где пересечение взято по некоторому конечному множеству последовательностей $P^{(0)+}[\cdot]$, $P^{(1)+}[\cdot]$.

Доказательство. Включения очевидны. Обозначим через $\Pi[k]$ множество всевозможных последовательностей матриц $P^{(0)+}[j]$, $j = 0, \dots, k$, $P^{(1)+}[j]$, $j = 1, \dots, k$, которые удовлетворяют соотношениям $P^{(0)+}[j] \in \mathcal{V}^4(A[j] \mathcal{P}^+[j-1] + \mathcal{R}[j])$, $P^{(1)+}[j] \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^{(0)+}[j] \cap \mathcal{Y}[j])$, $j = 1, \dots, k$, $P^{(0)+}[0] = P_0$. Докажем по индукции, что

$$\rho(l|\mathcal{X}[j]) = \inf\{\rho(l|\mathcal{P}^+[j]) \mid P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[j]\}, \quad \forall l \in \mathbb{R}^n, \tag{10.3}$$

для $j = 0, \dots, N$. Это справедливо для $j = 0$, поскольку $\Pi[0]$ состоит из единственной матрицы $P^{(0)+}[0] = P_0$, при которой $\mathcal{P}^+[0] = \mathbf{P}_{P^{(0)+}[0]}^+(\mathcal{X}_0) = \mathcal{X}_0$. Предположим, что (10.3) верно для $j = 0, \dots, k-1$, и докажем его для $j = k$. Вводя обозначение $\mathcal{X}^0[k] = A[k] \mathcal{X}[k-1] + \mathcal{R}[k]$ и используя предположение индукции (10.3) при $j = k-1$, аддитивность опорной функции для суммы двух множеств и замечание 5.1, имеем

$$\begin{aligned}
\rho(l|\mathcal{X}^0[k]) &= \rho(A[k]^\top l|\mathcal{X}[k-1]) + \rho(l|\mathcal{R}[k]) \\
&= \inf\{\rho(A[k]^\top l|\mathcal{P}^+[k-1]) \mid P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[k-1]\} + \rho(l|\mathcal{R}[k]) \\
&= \inf\{\rho(l|A[k] \mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{R}[k]) \mid P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[k-1]\} \\
&= \inf\{\rho(l|\mathcal{P}^{(0)+}[k]) \mid P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[k-1], \\
&\quad P^{(0)+}[k] \in \mathcal{V}^4(A[k] \mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{R}[k])\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\rho(l|\mathcal{X}[k]) &= \rho(l|\mathcal{X}^0[k] \cap \mathcal{Y}[k]) = \inf_{l^1, l^2: l^1 + l^2 = l} \{\rho(l^1|\mathcal{X}^0[k]) + \rho(l^2|\mathcal{Y}[k])\} \\
&= \inf_{l^1, l^2} \inf_{P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[k-1], P^{(0)+}[k]} \{\rho(l^1|\mathcal{P}^{(0)+}[k]) + \rho(l^2|\mathcal{Y}[k])\} \\
&= \inf_{P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[k-1], P^{(0)+}[k]} \{\rho(l|\mathcal{P}^{(0)+}[k] \cap \mathcal{Y}[k])\} = \inf_{P^{(\cdot)+}[\cdot] \in \Pi[k]} \rho(l|\mathcal{P}^+[k]),
\end{aligned}$$

где использована лемма 5.2. Равенства (1.19) следуют из (10.3). \square

Рассмотрим теперь внешние аппроксимации для МД $\mathcal{X}[k]$ системы (1.1) – (1.3), (1.8) с фазовыми ограничениями в виде полос (1.10).

Теорема 10.3 Пусть $\mathcal{X}[k] \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, N$, – множества достижимости системы (1.1) – (1.3), (1.8), (1.10), где $\mathcal{Y}[k] = \cap_{i=1}^{m[k]} \Sigma^i[k]$. Если

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(0)+}[k] &= \mathbf{P}_{P^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}^+[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N, \\
\mathcal{P}^{(i)+}[k] &= \mathbf{P}_{P^{(i)+}[k]}^+(\mathcal{P}^{(i-1)+}[k] \cap \Sigma^i[k]), \quad i = 1, \dots, m[k], \\
\mathcal{P}^+[k] &= \mathcal{P}^{(m[k])+}[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{P}^+[0] = \mathbf{P}_{P^{(0)+}[0]}^+(\mathcal{X}_0),
\end{aligned} \tag{10.4}$$

то включения (1.15) верны при любых матрицах $P^{(0)+}[k] \in M_*^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$, $P^{(i)+}[k] \in M_*^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m[k]$, $k = 1, \dots, N$. Справедливы представления (1.19), где пересечение берется по некоторому конечному множеству последовательностей $P^{(\cdot)+}[\cdot]$.

Доказательство. Рассуждениями, подобными приведенным при доказательстве теоремы 10.2, получаем, $\forall l \in \mathbb{R}^n$, что $\rho(l|\mathcal{X}[k]) = \inf\{\rho(l|\mathcal{P}^+[k]) | P^{(\cdot)+}[\cdot]\}$, где $P^{(0)+}[j]$, $j = 0, \dots, k$, – такие же, как в упомянутом доказательстве, и $P^{(i)+}[j] \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^{(i-1)+}[j] \cap \Sigma^i[j])$, $i = 1, \dots, m[j]$, $j = 1, \dots, k$. \square

К сожалению, число элементов $\mathcal{P}^+[\cdot]$ в упомянутом семействе очень велико. При условиях $m[k] = m$, $\mathcal{P}^+[0] = \mathcal{X}_0$ и $\text{int } \mathcal{X}[j] \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, N$, это число можно оценить сверху величиной $(C_r^n)^N (C_{n+1}^n)^{mN} = \left(\frac{r!}{n!(r-n)!}\right)^N (n+1)^{mN}$, где $r \leq (C_{2n}^{n-1}) = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

Укажем, как можно выбирать матрицы ориентации, чтобы иметь возможность получать оценки в виде вырожденных параллелепипедов.

Замечание 10.1 Пусть в условиях теоремы 10.3 матрицы ориентации $P^{(i)+}[k]$ строятся следующим образом. Определяется множество векторов $Y_N = \{y^i\}_{i=1}^\omega$, как описано перед теоремой 7.1¹. Матрица $P^{(0)+}[0]$ выбирается таким образом, что ее столбцы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} p^{(0)+,\alpha}[0] &\in (\text{Lin } Y_N)^\perp, & \alpha = 1, \dots, n - \omega, \\ p^{(0)+,\alpha}[0] &\in \text{Lin } Y_N, & \alpha = n - \omega + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и при $i = 0$ и $k = 0$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \pi_\alpha^{(i)+}[k] &= 0, & \alpha \in I_0[k], \\ (p^{(i)+,\alpha}[k], p^{(i)+,\beta}[k]) &= 0, & \forall \alpha, \beta : \alpha \in I_0[k], \beta \in I_1[k], \\ \text{где } I_0[k] \cup I_1[k] &= \{1, \dots, n\}, & \{n - \omega + 1, \dots, n\} \subseteq I_0[k]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Столбцы матриц $P^{(0)+}[k]$ при $k = 1, \dots, N$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} p^{(0)+,j}[k] &= \text{Nrv}(A[k]p^{(m[k-1])+,j}[k-1]), & j \in I_1[k-1], \\ p^{(0)+,j}[k] &= \text{Nrv}((A[k]^\top)^{-1}p^{(m[k-1])+,j}[k-1]), & j \in I_0[k-1], \end{aligned}$$

где считается $m[0] = 0$, а параметры параллелепипедов $\mathcal{P}^{(i)+}[k] = \mathcal{P}(p^{(i)+}[k], P^{(i)+}[k], \pi^{(i)+}[k])$ при $i = 1, \dots, m[k]$, $k = 1, \dots, N$ вычисляются в соответствии с замечанием 5.5 и леммой 5.5². Тогда соотношения (10.5) выполняются при всех $i = 0, \dots, m[k]$, $k = 0, \dots, N$, и на подшагах $i = 1, \dots, m[k]$ ($k \in \{1, \dots, N\}$) параллелепипеды $\mathcal{P}^{(i)+}[k]$ имеют наименьший объем среди всех параллелепипедов, внешних для $\mathcal{P}^{(i-1)+}[k] \cap \Sigma^i[k]$.

Построим теперь внутренние оценки для МД при ФО в виде полос.

Теорема 10.4 Пусть $\mathcal{X}[k]$, $k = 0, \dots, N$, — множества достижимости системы (1.1) – (1.3), (1.8), (1.10). Пусть

$$\mathcal{P}^-[0] = \mathbf{P}_\Lambda^-(\mathcal{X}_0), \quad (10.6)$$

$$\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}^{(\bar{m}[k])^-}[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (10.7)$$

¹ Допускается случай $Y_N = \emptyset$ (т.е. $\omega = 0$), который имеет место, если у множества достижимости в момент N для системы (1.1), (1.2), (1.8) без фазовых ограничений есть внутренние точки.

² В случае неединственности можно брать любой из описанных там параллелепипедов.

где

$$\mathcal{P}^{(0)-}[k] = \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}[k], \Gamma^{(2)}[k]}^{-}(A[k] \mathcal{P}^{-}[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad (10.8)$$

$$\mathcal{P}^{(i)-}[k] = \begin{cases} \mathcal{P}^{(i-1)-}[k], & \text{если } \mathcal{P}^{(i-1)-}[k] \subseteq \mathcal{Z}^{(i)}[k], \\ \mathbf{P}_{p^{(i)-}[k], P^{(i)-}[k]}^{-}(\mathcal{Q}^{(i)-}[k]) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (10.9)$$

$$\mathcal{Q}^{(i)-}[k] = \mathcal{P}^{(i-1)-}[k] \cap \mathcal{Z}^{(i)}[k], \quad i = 1, \dots, \bar{m}[k],$$

причем в приведенных выше формулах либо

$$\bar{m}[k] = 1, \quad \mathcal{Z}^{(1)}[k] = \mathcal{Y}[k], \quad (10.10)$$

либо

$$\bar{m}[k] = m[k], \quad \mathcal{Z}^{(i)}[k] = \Sigma^i[k]. \quad (10.11)$$

Здесь все матрицы $\Lambda, \Gamma^{(j)}[k] \in \mathcal{G}$ (множества \mathcal{G} определены в (8.40)), матрицы $P^{(i)-}[k] \in M_*^{n \times n}$, а $p^{(i)-}[k]$ — произвольные векторы, принадлежащие $\mathcal{Q}^{(i)-}[k]$ ³. Если в процессе построения оказывается, что все $\mathcal{Q}^{(i)-}[k] \neq \emptyset$, то параллелотопы $\mathcal{P}^{-}[k]$ являются внутренними оценками для $\mathcal{X}[k]$, $k=0, \dots, N$. Справедливы точные представления (1.20), где объединения взяты при $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[k] \equiv I$ и какой-либо фиксированной последовательности матриц $P^{(\cdot)-}[\cdot]$ по всевозможным значениям $\Gamma^{(2)}[k] \in \mathcal{G}$, $p^{(i)-}[k] \in \mathcal{Q}^{(i)-}[k]$. Формулы (10.6)–(10.9) конкретизируются с помощью (3.11), (2.23).

Доказательство. Включения $\mathcal{P}^{-}[k] \subseteq \mathcal{X}[k]$ следуют из рекуррентных соотношений (1.7) для $\mathcal{X}[k]$ и лемм 3.8, 5.6. Пусть $x^*[\cdot]$ — произвольная траектория из трубки $\mathcal{X}[\cdot]$. Трубку $\mathcal{P}^{-}[\cdot]$ вида (10.6)–(10.9), содержащую $x^*[\cdot]$, построим по индукции. Положим $\mathcal{P}^{-}[0] = \mathcal{X}_0$ (это параллелепипед). Пусть уже имеем $\mathcal{P}^{-}[k-1] \ni x^*[k-1]$. Если $\mathcal{P}^{-}[k-1]$ — параллелепипед, то по лемме 3.8 при $\Gamma^{(1)}[k] = I$ найдется такая $\Gamma^{(2)}[k] \in \mathcal{G}$, что $x^*[k] \in \mathcal{P}^{(0)-}[k]$, где $\mathcal{P}^{(0)-}[k]$ имеет вид (10.8). По условию $x^*[k] \in \mathcal{Y}[k]$. Поэтому можно положить $p^{(i)-}[k] = x^*[k]$, $i = 1, \dots, \bar{m}[k]$, и взять, например, $P^{(i)-}[k] = I$. В результате получим $x^*[k] \in \mathcal{P}^{-}[k]$, где $\mathcal{P}^{-}[k]$ —

³В частности, описанные в замечании 2.4 или лемме 5.7.

параллелепипед (при условии, что $x^*[k] \in \text{int } \mathcal{Q}^{(\bar{m}[k])^-}[k]$, он невырожден ввиду леммы 2.15, а в противном случае вырождается в точку в силу (2.23)), $k = 1, \dots, N$. \square

Ввиду леммы 3.5 имеет место также

Теорема 10.5 *Первое утверждение теоремы 10.4 остается верным, если вместо (10.6), (10.8) воспользоваться формулами*

$$\mathcal{P}^-[0] = \mathbf{P}_{p_0, P^{(0)^-}[0]}^-(\mathcal{X}_0), \quad (10.12)$$

$$\mathcal{P}^{(0)^-}[k] = \mathbf{P}_{A[k]p^-[k-1]+r[k], P^{(0)^-}[k]}^-(A[k]\mathcal{P}^-[k-1] + \mathcal{R}[k]), \quad (10.13)$$

при любых $P^{(0)^-}[k] \in M_*^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$. Здесь p_0 , $r[k]$ и $p^-[k]$ — это центры параллелепипедов \mathcal{X}_0 , $\mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ соответственно.

Можно заметить, однако, что при неудачном выборе параметров Λ , $\Gamma^{(\cdot)}[\cdot]$, $p^{(\cdot)^-}[\cdot]$, $P^{(\cdot)^-}[\cdot]$ в теоремах 10.4 и 10.5 не исключается неприятный случай, когда в приведенных формулах, начиная с некоторого шага, могут получиться пустые оценки $\mathcal{P}^-[k]$, а брать объединения по всевозможным $p^{(i)^-}[k] \in \mathcal{Q}^{(i)^-}[k]$ не очень конструктивно.

Замечание 10.2 Все введенные в этом параграфе оценки $\mathcal{P}^+[k]$ ($\mathcal{P}^-[k]$) обладают "верхним" ("нижним") полугрупповым и эволюционным свойствами.

11 Системы с непрерывным временем

Пусть $\mathcal{X}(t)$ — множества достижимости системы (8.1), (8.2), (8.6) с фазовыми ограничениями (8.3), где t_k — заданные моменты времени. Множества $\mathcal{X}(t)$, вообще говоря, испытывают разрывы (скачки) в моменты t_k . Для определенности будем считать, что $\mathcal{X}(t)$ непрерывно меняется слева от точек $t = t_k$. Тогда $\mathcal{X}(t_k)$ — это множество значений $x(t_k)$, совместимых с ФО $\mathcal{Y}(t_j)$ при $j < k$, а $\mathcal{X}(t_k + 0)$ — множество значений $x(t_k)$, совместимых с ФО $\mathcal{Y}(t_j)$ при $j \leq k$.

Теорема 11.1 Пусть $\mathcal{X}(t)$ — МД системы (8.1), (8.2), (8.6) с ФО (8.3), где $\mathcal{Y}(t_k)$ — заданные параллелепипеды (8.7) или полосы (8.8). Тогда параллелепипеды $\mathcal{P}^+(t)$ являются внешними оценками для $\mathcal{X}(t)$, обладающими свойствами (8.9), (8.11), если их параметры при $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N_c$, удовлетворяют ОДУ, описанным в теореме 8.1, а начальные условия $\mathcal{P}^+(t_k + 0)$ для этих уравнений обеспечивают включения $\mathcal{P}^+(t_k) \cap \mathcal{Y}(t_k) \subseteq \mathcal{P}^+(t_k + 0)$ ⁴. Справедливы точные представления (8.14), где $\mathcal{P}^+(t)$ — параллелепипеды, параметры которых на интервалах $(t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N_c$, удовлетворяют ОДУ, описанным в теореме 8.2, с начальными условиями $\mathcal{P}^+(t_0 + 0) = \mathbf{P}_{P^{(0)+}(t_0)}^+(\mathcal{X}_0)$ и $\mathcal{P}^+(t_k + 0) = \mathbf{P}_{P^{(\bar{m}+1)+}(t_k)}^+(\mathcal{P}^{(\bar{m})+}(t_k))$, $k \geq 1$, где матрицы $P^{(0)+}(t_0), P^{(\bar{m}+1)+}(t_k) \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, параллелепипеды $\mathcal{P}^{(\bar{m})+}(t_k)$ построены по следующим формулам: если $\mathcal{Y}(t_k)$ имеют вид (8.7), то $\bar{m} = 1$,

$$\mathcal{P}^{(1)+}(t_k) = \mathbf{P}_{P^{(1)+}(t_k)}^+(\mathcal{P}^+(t_k)) \cap \mathbf{P}_{P^{(1)+}(t_k)}^+(\mathcal{Y}(t_k)),$$

$P^{(1)+}(t_k) \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^+(t_k) \cap \mathcal{Y}(t_k))$, а если $\mathcal{Y}(t_k)$ имеют вид (8.8), то $\bar{m} = m$,

$$\mathcal{P}^{(i)+}(t_k) = \mathbf{P}_{P^{(i)+}(t_k)}^+(\mathcal{P}^{(i-1)+}(t_k) \cap \Sigma^i(t_k)), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\mathcal{P}^{(0)+}(t_k) = \mathcal{P}^+(t_k),$$

$P^{(i)+}(t_k) \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^{(i-1)+}(t_k) \cap \Sigma^i(t_k))$. Здесь пересечение взято по всевозможным упомянутым значениям матриц $P^{(0)+}(t_0), P^{(i)+}(t_k)$, $i = 1, \dots, \bar{m}+1$, $k = 1, \dots, j$, где j таково, что $t_j \leq t < t_{j+1}$ ⁵.

Доказательство включений основывается на известных рекуррентных соотношениях для $\mathcal{X}(t)$, подобных (1.7), где первое соотношение определяет $\mathcal{X}(t)$ в промежутках между ФО, а второе учитывает очередное ФО (см., например, [155, с. 255]), и на результатах § 5 и § 8. Представления (8.14) вытекают из соотношений $\rho(l|\mathcal{X}(t)) = \inf \rho(l|\mathcal{P}^+(t))$, которые получаются при помощи рассуждений, аналогичных доказательству

⁴Построить такие $\mathcal{P}^+(t_k + 0)$ можно, как описано в §5.

⁵При $t = t_j$ пересечение по $P^{(\bar{m}+1)+}(t_j)$ брать излишне.

теоремы 10.2 с учетом равенств для опорных функций, описанных в доказательстве теоремы 8.2. \square

Теорема 11.2 Пусть $\mathcal{X}(t)$ — множества достижимости системы (8.1) – (8.3), (8.6), (8.8). Пусть $\mathcal{P}^-(t)$, $t \in T$, — параллелограммы, параметры которых при $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N_c$, удовлетворяют ОДУ (8.39), где функция $\Gamma(\cdot)$ подчинена (8.40), причем начальные условия $\mathcal{P}^-(t_k + 0)$ для этих уравнений построены по формулам $\mathcal{P}^-(t_0 + 0) = \mathbf{P}_{\Lambda(t_0)}^-(\mathcal{X}_0)$ и $\mathcal{P}^-(t_k + 0) = \mathbf{P}_{\Lambda(t_k)}^-(\mathcal{P}^{(\bar{m})-}(t_k))$, $k \geq 1$, где $\mathcal{P}^{(0)-}(t_k) = \mathcal{P}^-(t_k)$, а $\mathcal{P}^{(i)-}(t_k)$, $i = 1, \dots, \bar{m}$, построены по формулам, полученным из (10.9) – (10.11) заменой аргумента k (в квадратных скобках) на t_k (в круглых скобках) и $m[k]$ на m . Здесь все матрицы $\Lambda(t_k) \in \mathcal{G}$, $P^{(i)-}(t_k) \in M_*^{n \times n}$, а $p^{(i)-}(t_k)$ — произвольные векторы, принадлежащие $\mathcal{Q}^{(i)-}(t_k)$. Если в процессе построения оказывается, что $\mathcal{Q}^{(i)-}(t_k) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, \bar{m}$, $k = 1, \dots, N_c$, то параллелограммы $\mathcal{P}^-(t)$ являются внутренними оценками для $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, обладающими свойствами (8.10), (8.12). Справедливы точные представления (8.15), где объединения взяты при $\Lambda(t_k) \equiv I$ и какой-либо фиксированной последовательности матриц $P^{(i)-}(t_k)$, $i = 1, \dots, \bar{m}$, $k = 1, \dots, j$, по всевозможным упомянутым значениям параметров $\Gamma(\cdot)$ и $p^{(i)-}(t_k)$, $i = 1, \dots, \bar{m}$, $k = 1, \dots, j$, где j таково, что $t_j \leq t < t_{j+1}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.4 с учетом теоремы 8.4. \square

12 Численное моделирование

Рассмотрим примеры построения оценок множеств достижимости многошаговых систем, полученных дискретизацией систем (8.1), (8.2), (8.6) с непрерывным временем с фазовыми ограничениями

$$x(t_j) \in \mathcal{Y}(t_j), \quad j = 1, \dots, N_c,$$

где $0 < t_1 < \dots < t_{N_c} \leq \theta$ — известные моменты времени⁶, $\mathcal{Y}(t_j)$ имеют вид параллелепипедов (8.7) или полос (8.8). Фазовые ограничения могут порождаться уравнением

$$\begin{aligned} y(t_j) &= G(t_j) x(t_j) + \eta(t_j), \\ \eta(t_j) &\in \mathcal{P}(0, I, \bar{\eta}(t_j)) \subset \mathbb{R}^m, \quad j = 1, \dots, N_c. \end{aligned} \quad (12.1)$$

А именно, рассмотрим систему (1.1) – (1.3), (1.8), (9.56), где \mathcal{X}_0 — то же, что и в (8.2), а

$$\mathcal{Y}[k_j] = \mathcal{Y}(t_j), \quad k_j = [t_j h_N^{-1}], \quad j=1, \dots, N_c; \quad \mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^m \quad \text{при } k \neq k_j$$

(символом $[a]$ обозначена целая часть числа a).

Пример 12.1 На рис. 12.1 показаны внешние оценки для $\mathcal{X}[k]$ для системы из примера 9.2, дополненной фазовыми ограничениями (8.7), где $q \equiv (0, 0)^\top$, $Q \equiv I$, $\kappa \equiv (100, 1)^\top$, $N_c = N$. Фактически, существенные ограничения наложены только на координату x_2 , и ФО сводилось к виду (8.7) путем введения фиктивной гиперполосы, заведомо содержащей МД системы без ФО. Все оценки получены по формулам теоремы 10.2, где $P^{(1)+}[k] = P^{(0)+}[k]$, $k = 1, \dots, N$, а матрицы $P^{(0)+}[\cdot]$ построены в соответствии со случаями 1 и 3 теоремы 7.1 при $P^{(0)+}[0] \in \mathcal{V}_N^\gamma$, $\gamma = 1$ и 3 (см. рис. 12.1 (а) и 12.1 (б) соответственно). Масштаб тот же самый, что и на рис. 9.2. При этом нет гарантии, что полученное при таком выборе матриц $P^{(i)+}[\cdot]$, $i = 0, 1$, семейство оценок $\mathcal{P}^+[N]$ обеспечивает (1.19). Но сравнение рис. 12.1 с рис. 9.2 и 9.3 показывает, что такие оценки позволяют учитывать фазовые ограничения.

Пример 12.2 Рассмотрим систему из примера 9.3, дополненную фазовыми ограничениями (8.7) с $q \equiv (0, 0, 0, 0)^\top$, $Q \equiv I$, $\kappa \equiv (100, 4, 100, 5)^\top$, $N_c = N$. Рис. 12.2 по смыслу аналогичен рис. 9.4, масштаб — тот же. В нижних частях рис. 12.2 (а) и 12.2 (б) показаны проекции \mathcal{X}_0 и оценок $\mathcal{P}^+[N]$, построенных, как описано в примере 12.1 для 25 матриц

⁶В данном параграфе будем допускать возможность наличия ФО (8.3) и в конечный момент времени, когда $t_{N_c} = \theta$.

$P^{(0)+}[0] \in \mathcal{V}_N^\gamma$, $\gamma = 3$ и 1 соответственно. Оценки оказываются меньше, чем для систем без фазовых ограничений.

Приведем теперь результаты моделирования для случая, когда фазовые ограничения имеют вид полос (8.8). Для построения внешних оценок используем формулы (10.4), дополненные соотношениями из теоремы 3.1, лемм 3.9, 5.4, 5.5 и замечания 5.4. В случае неединственности в лемме 5.5 выбор j для построения оценки $\bar{\mathcal{P}}^{(j)}$ производим случайным образом среди всех $j \in I^*$ или $j \in \{I^* \cup 0\}$. В качестве матриц ориентации $P^{(0)+}[0]$ в рассматриваемых ниже примерах случайным образом берем несколько ортогональных матриц.

Пример 12.3 Пусть $A(t)$, \mathcal{X}_0 , $\mathcal{R}(t)$ — такие же, как в примере 9.2, $m=1$, $c(t) \equiv 0$, $S^\top(t) \equiv (0, 1)$, $\sigma(t) \equiv 1$, $\theta=2$, $N=500$, $t_j = j\theta N_c^{-1}$, $N_c=500$. На рис. 12.3(а) показаны множество \mathcal{X}_0 (штриховой линией) и 10 внешних оценок для МД в конечный момент времени, построенных, как описано выше, на рис. 12.3(б) — динамика во времени одной из трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$ (изображены сечения $\mathcal{P}^+[k]$ через каждые 10 шагов k). Сравнение с результатами из примера 12.1 показывает, что оценки, показанные на рис. 12.3, оказываются лучше (в частности меньше).

Построим несколько внутренних трубок, пользуясь формулами из теорем 10.4 и 10.5 при $m[k] = 1$, $P^-[k] = P^{(1)-}[k] = P^{(0)-}[k]$, $k = 1, \dots, N$. Сначала воспользуемся формулами (10.6) – (10.10), где $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[k] \equiv I$, и выбраны четыре параметризации $\Gamma^{(2)}[\cdot]$ (аналогичные рассматриваемым ниже в примере 16.1⁷). Воспользуемся также формулами (10.12), (10.13), где либо $P^{(0)-}[k] \equiv I$, либо в качестве $P^{(0)-}[k]$ взяты матрицы ориентации внешних оценок $\mathcal{P}^+[k]$, построенных как описано выше. При каждом выбранном способе расчета матриц ориентации рассмотрим пять способов построения точек $p^{(1)-}[k]$ (по формулам (2.24), или (2.25), или (2.26), или (5.24), (5.25), или (2.27). На рис. 12.4(а) показано множество \mathcal{X}_0 и непустые внутренние оценки для МД в конечный момент

⁷При этом в формулах (16.4) – (16.6) полагаем $\Xi[k] = (A[k]\bar{P}^-[k-1])^{-1}\bar{R}[k]$.

Таблица 12.1:

Способ построения матриц ориентации:	Формулы, используемые для построения центров:				
	(2.24)	(2.25)	(2.26)	(5.24) или (5.25)	(2.27)
Формулы типа (16.4)	\emptyset	0.5126	\emptyset	\emptyset	0.7331
(16.5) – (16.6), $\tilde{\Gamma}^1$	0.1988	0.3167	\emptyset	\emptyset	0.6349
(16.5) – (16.6), $\tilde{\Gamma}^2$	0.4622	0.0290	\emptyset	\emptyset	0.5019
(16.5) – (16.6), $\tilde{\Gamma}^3$	\emptyset	0.1741	\emptyset	\emptyset	0.3585
$P^-[k] \equiv I$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$P^-[k] \equiv P^+[k]$, $P^+[0] = P_0$	0.0064	0.0314	\emptyset	\emptyset	0.0346
$P^-[k] \equiv P^+[k]$, $P^+[0] = P_0^1 \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$	\emptyset	0.0008	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$P^-[k] \equiv P^+[k]$, $P^+[0] = P_0^2 \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$	0.0080	\emptyset	0.0016	0.0002	0.0099
$P^-[k] \equiv P^+[k]$, $P^+[0] = P_0^3 \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$	0.0140	0.0001	0.0226	\emptyset	0.0210

времени, на рис. 12.4(b) — ряд сечений трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, соответствующей (16.4), (2.27). На рис. 12.4(a) тонкими линиями для сравнения изображены также внешние оценки $\mathcal{P}^+[N]$, использовавшиеся при построении части внутренних оценок. В табл. 12.1 для каждого описанного способа построения оценки указано, получается ли оценка $\mathcal{P}^-[N]$ пустой, и, если нет, то приведен ее объем. Колонки соответствуют способу построения точек $p^{(1)-}[k]$, а строки — матриц ориентации.

Внутренние оценки оказались значительно меньше внешних. Отношение объемов (наименьшего из четырех использованных внешних оценок $\mathcal{P}^+[N]$ к наибольшему из построенных внутренних оценок $\mathcal{P}^-[N]$) равно 2.7507. Наилучшая (в смысле объема) оценка $\mathcal{P}^-[N]$ получилась при использовании формул (16.4) и (2.27). Данные о непустоте оценок из табл. 12.1, относятся к данному примеру, и для других систем, как по-

казывает моделирование, могут оказаться иными.

Пример 12.4 Рис. 12.5 – 12.8 иллюстрируют внешнее оценивание информационных областей для колебательной системы в четырехмерном пространстве по результатам неточного измерения координат x_2 и x_4 , когда $\theta = 5$, $N = 500$, $t_j = j\theta N_c^{-1}$, $N_c = 100$, $A(t)$, \mathcal{X}_0 , $\mathcal{R}(t)$ — такие же, как в примере 9.3, а G и $\bar{\eta}$ из (12.1) имеют вид

$$G(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta}(t) \equiv (4, 5)^\top.$$

Моделируемая траектория и измеряемый сигнал порождены начальным значением $x_0 = (2, 1, 2, 1)^\top$ и возмущениями $w(t)$ и $\eta(t)$ экстремального "bang-bang" типа (см. [201, с.284])⁸. Для $w(t)$ длина интервала постоянства возмущения $w(t)$ взята равной 0.25, а для $\eta(t)$ — равной 5 и 0.15 (точнее, $\eta(t_j) \equiv \eta$ для $j = 1, \dots, N_c$ и $\eta(t_j) = \eta(t_{j+1}) = \eta(t_{j+2})$ для $j = 1, 4, 7, \dots$ соответственно). Соответствующие внешние оценки представлены на рис. 12.5 – 12.8, где показаны двумерные проекции четырехмерных параллелепипедов на плоскости $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_4\}$. На рис. 12.6, 12.8 штриховыми линиями показаны проекции начального множества и сплошными линиями — проекции десяти оценок для информационной области в конечный момент времени, а на рис. 12.5, 12.7 — динамика во времени одной из трубок внешних оценок (изображены проекции сечений $\mathcal{P}^+[k]$ через каждые 10 шагов). Из рисунков видно, что при постоянной помехе $\eta(\cdot)$ оценки получаются хуже, чем при помехе типа "bang-bang" с большим числом переключений. Сравнение с результатами из примера 9.3 показывает, что и при "плохой" помехе $\eta(\cdot)$ построенные оценки оказываются меньше, чем оценки МД системы без учета данных измерений.

⁸При этом T покрывается интервалами одинаковой длины. На первом интервале полагается $w(t) \equiv w^1$, где значение w^1 выбрано случайным образом на границе допустимой области \mathcal{R} , а на втором полагается $w(t) \equiv -w^1$. Затем выбирается новое значение $w^2 \in \partial\mathcal{R}$ и процедура повторяется для следующей пары интервалов, и т.д. Возмущения $\eta(\cdot)$ строятся аналогично.

Глава IV

Полиэдральные оценки в задаче целевого синтеза стратегий управления без неопределенности и в условиях неопределенности

Глава посвящена задаче нелинейного синтеза управлений в системах с исходной линейной структурой и геометрическими ограничениями. Пути решения данного класса задач указаны в [80, 88]. Известно, что если построена так называемая трубка разрешимости $\mathcal{W}(\cdot)$, то решение задачи управления может быть найдено с помощью экстремальных стратегий Н.Н. Красовского. В [95, 111] показано, что многозначная функция $\mathcal{W}(\cdot)$ может быть рассмотрена в качестве решения некоторого эволюционного уравнения. Это решение дается интегралом Аумана (в случае без неопределенности) или альтернированным интегралом Понтрягина (в условиях неопределенности). Точное нахождение $\mathcal{W}(\cdot)$ представляет собой нетривиальную задачу (особенно в последнем случае). Численному построению альтернированных сумм Понтрягина посвящены, например, работы [16, 44, 109]. В [93, 94, 201] разработана схема "эллипсоидального синтеза", при которой стратегии управления строятся на основе эллипсоидальных аппроксимаций трубки $\mathcal{W}(\cdot)$, и подчеркнута, что такая схема

позволяет представить решение задачи синтеза в виде аналитических, а не алгоритмических конструкций, как этого требует "точная" теория. В данной главе разрабатываются конструктивные схемы решения задачи синтеза, основанные на полиэдральных аппроксимациях трубки разрешимости. При этом вместо $\mathcal{W}(\cdot)$ используются семейства параллелепипедозначных оценок, которые могут быть найдены как решения некоторых параметризованных систем ОДУ. Результаты главы описаны в [189,191].

13 Постановка задачи синтеза

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + u(t) + v(t), \quad t \in T = [0, \theta], \quad (13.1)$$

с входными воздействиями $u(t)$ (управление) и $v(t)$ (неизвестное, но ограниченное возмущение), стесненными заданными ограничениями

$$u(t) \in \mathcal{R}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t) \quad \text{при п.в. } t \in T, \quad (13.2)$$

и с данным целевым ("терминальным") множеством \mathcal{M} . Будем предполагать, что ограничения имеют форму параллелепипедов:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \mathcal{P}(r(t), R(t), \rho(t)) \equiv \mathcal{P}[r(t), \bar{R}(t)], \\ \mathcal{Q}(t) &= \mathcal{P}(q(t), Q(t), \kappa(t)) \equiv \mathcal{P}[q(t), \bar{Q}(t)], \\ \mathcal{M} &= \mathcal{P}(p_\theta, P_\theta, \pi_\theta) \equiv \mathcal{P}[p_\theta, \bar{P}_\theta], \end{aligned} \quad (13.3)$$

где $r(t)$, $R(t)$, $\rho(t)$, $q(t)$, $Q(t)$, $\kappa(t)$, $A(t)$ — непрерывные векторные и матричные функции.

Определение 13.1 [93] *Задача целевого синтеза управлений при неопределенности* состоит в нахождении множества разрешимости $\mathcal{W}(\tau, \theta, \mathcal{M})$ и такой многозначной позиционной стратегии управления $u = \mathcal{U}(t, x)$, $\mathcal{U}(\cdot, \cdot) \in U_{\mathcal{R}}^c$, чтобы все решения $x(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + \mathcal{U}(t, x) + \mathcal{Q}(t), \quad t \in T, \quad (13.4)$$

выпущенные из любой позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}(\tau, \theta, \mathcal{M})$, $\tau \in [0, \theta)$, достигали терминального множества \mathcal{M} в момент θ : $x(\theta) \in \mathcal{M}$.

Множество разрешимости $\mathcal{W}(t) \triangleq \mathcal{W}(t, \theta, \mathcal{M})$ — это множество всех состояний $x_t \in \mathbb{R}^n$, для которых решение задачи синтеза вообще существует. Здесь класс $U_{\mathcal{R}}^c$ допустимых стратегий управления состоит из многозначных отображений $\mathcal{U}(t, x)$, измеримых по t , полунепрерывных сверху по x , значения которых представляют собой выпуклые компактные множества $\mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{R}(t)$, $t \in T$. Условие $\mathcal{U}(\cdot, \cdot) \in U_{\mathcal{R}}^c$ гарантирует [147], что включение (13.4) имеет решение, т.е. для любого $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, $t \in T$, обеспечивающая включение (13.4) при почти всех $t \in T$.

Многозначную функцию $\mathcal{W}(t)$ принято называть [93] *трубкой разрешимости* или "*мостом Красовского*". Функция $\mathcal{W}(t)$ является ключевым элементом построения решения задачи.

Известно [95, 111], решение задачи синтеза из начальной позиции $\{\tau, x_\tau\}$ существует тогда и только тогда, когда на интервале $[\tau, \theta]$ существует такое h_+ -решение $\mathcal{Z}(\cdot)$ уравнения интегральной воронки

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h_+(\mathcal{Z}(t - \sigma) + \sigma \mathcal{Q}(t), (I - \sigma A(t))\mathcal{Z}(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) = 0 \quad (13.5)$$

с краевым условием

$$\mathcal{Z}(\theta) \subseteq \mathcal{M}, \quad (13.6)$$

что $x_\tau \in \mathcal{Z}(\tau)$. Напомним, что h_+ -решение уравнения (13.5), (13.6) на T определяется как h_+ -абсолютно непрерывное¹ отображение $\mathcal{Z}(\cdot): T \mapsto \text{conv } \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее равенству (13.5) при п.в. $t \in T$ и краевому условию (13.6). Отображение $\mathcal{W}(t)$ является единственным максимальным решением² уравнения (13.5), $\mathcal{W}(\theta) = \mathcal{M}$.

Известно также [95, 201], что если найдена трубка $\mathcal{Z}(\cdot)$, удовлетворяющая (13.5), (13.6), то стратегию $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x)$ можно построить на основе

¹Многозначное отображение $\mathcal{Z}(t)$ со значениями в $\text{conv } \mathbb{R}^n$ называется h_+ -абсолютно непрерывным (слева) на интервале T , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \sum_i (t_i'' - t_i') < \delta \Rightarrow \sum_i h_+(\mathcal{Z}(t_i'), \mathcal{Z}(t_i'')) < \varepsilon$ для любой конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов $(t_i', t_i'') \subseteq T$.

²Это означает, что для любого h_+ -решения (13.5), (13.6) выполняется $\mathcal{Z}(t) \subseteq \mathcal{W}(t)$, $\forall t \in T$.

правила "экстремального прицеливания" Н.Н. Красовского:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x) = \begin{cases} \mathcal{R}(t), & \text{если } x \in \mathcal{Z}(t), \\ \text{Argmax} \{(-l^0, u) \mid u \in \mathcal{R}(t)\}, & \text{если } x \notin \mathcal{Z}(t), \end{cases} \quad (13.7)$$

где $l^0 = l^0(t, x)$ — решение (оно единственно) задачи

$$(l^0, x) - \rho(l^0 \mid \mathcal{Z}(t)) = \max\{(l, x) - \rho(l \mid \mathcal{Z}(t)) \mid \|l\| = 1\}. \quad (13.8)$$

Указанная стратегия $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x)$ оказывается допустимой, и любое решение $x(\cdot)$ включения (13.4) (где $\mathcal{U}(t, x)$ заменено на $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(t, x)$), начинающееся в $x(\tau) = x_\tau \in \mathcal{Z}(\tau)$, удовлетворяет включению $x(t) \in \mathcal{Z}(t)$, $\tau \leq t \leq \theta$, и, следовательно, достигает целевого множества в момент θ : $x(\theta) \in \mathcal{M}$.

Будем различать *две задачи*: задачу синтеза управлений для случая *без неопределенности*, когда $v(t)$ — известная функция (т.е. в (13.3) имеем $\kappa(t) \equiv 0$ и $\bar{Q}(t) \equiv 0$), и задачу *в условиях неопределенности*.

Для первой задачи $\mathcal{W}(t)$ сводится к интегралу Аумана [165] и совпадает с *множеством достижимости* системы (13.1), (13.2) в момент t из множества \mathcal{M} , вычисленному *в обратном времени*, от θ к t . А именно, $\mathcal{W}(\tau)$ совпадает с множеством всех состояний $x_\tau \in \mathbb{R}^n$, для которых существует управление $u(t) \in \mathcal{R}(t)$, $\tau \leq t \leq \theta$, переводящее систему из x_τ в \mathcal{M} по соответствующей траектории $x(t)$, $\tau \leq t \leq \theta$, так что $x(\tau) = x_\tau$, и $x(\theta) \in \mathcal{M}$. Очевидно, в этом случае $\mathcal{W}(t) \neq \emptyset$, $t \in T$.

Вторую задачу будем рассматривать, считая выполненным

Предположение 13.1 Для случая с неопределенностью предполагаем, что $\mathcal{W}(t) \neq \emptyset$, $t \in T$, и, более того, что трубка разрешимости $\mathcal{W}(t)$ невырождена, т.е. существуют абсолютно непрерывные функции $x^*(t)$ и $\beta(t) > 0$ такие, что $x^*(t) + \beta(t)\mathcal{B}(0, 1) \subseteq \mathcal{W}(t)$, $t \in T$.

Известно [95, 201], что для второй задачи $\mathcal{W}(\tau)$ сводится к альтернированному интегралу Понтрягина $J(\tau, \theta, \mathcal{M})$ [124, 125], который вводится как предел следующих интегральных сумм. Пусть (без ограничения общности) $A(t) \equiv 0$. Пусть \mathcal{T}_m есть разбиение интервала $[\tau, \theta]$ точками

$\tau = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = \theta$ с $\Delta_m = \max\{|\tau_i - \tau_{i-1}| \mid i=1, \dots, m\}$, и пусть

$$\mathcal{W}_m(\mathcal{T}_m, \mathcal{M}) = \mathcal{M};$$

$$\mathcal{W}_{i-1}(\mathcal{T}_m, \mathcal{M}) = \left[- \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{R}(t) dt + \mathcal{W}_i(\mathcal{T}_m, \mathcal{M}) \right] \dot{-} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{Q}(t) dt,$$

где $\dot{-}$ — знак геометрической разности. Известно, что в условиях предположения 13.1 хаусдорфов предел $J(\tau, \theta, \mathcal{M}) = \lim_{m \rightarrow \infty, \Delta_m \rightarrow 0} \mathcal{W}_0(\mathcal{T}_m, \mathcal{M})$ существует, не зависит от способа разбиения \mathcal{T}_m и $\mathcal{W}(\tau) = J(\tau, \theta, \mathcal{M})$.

Напомним, что с помощью замены переменных

$$x = \Phi(t, \theta) \tilde{x}, \quad (13.9)$$

где $\Phi(t, \tau)$ — это фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, мы действительно приходим к системе с нулевой матрицей $A(t) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{u}(t) + \tilde{v}(t), \quad \tilde{x}(\theta) \in \mathcal{M}, \\ \tilde{u}(t) \in \tilde{\mathcal{R}}(t) &= \Phi(t, \theta)^{-1} \mathcal{R}(t) \triangleq \mathcal{P}(\tilde{r}(t), \tilde{R}(t), \tilde{\rho}(t)), \\ \tilde{v}(t) \in \tilde{\mathcal{Q}}(t) &= \Phi(t, \theta)^{-1} \mathcal{Q}(t) \triangleq \mathcal{P}(\tilde{q}(t), \tilde{Q}(t), \tilde{\kappa}(t)). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Для обеих задач трубка разрешимости обладает полугрупповым свойством

$$\mathcal{W}(t, \theta, \mathcal{M}) = \mathcal{W}(t, \tau, \mathcal{W}(\tau, \theta, \mathcal{M})), \quad \forall t, \tau : 0 \leq t \leq \tau \leq \theta. \quad (13.11)$$

Ниже мы вводим семейства оценок для трубки разрешимости, обладающие обобщенными полугрупповыми свойствами (точные определения, аналогичные определениям 8.2, 8.3, но в обратном времени, приведены ниже в §§ 14, 15). Будем искать *внешние параллелепипедозначные оценки* $\mathcal{P}^+(\cdot)$ для $\mathcal{W}(\cdot)$, т.е. такие, что

$$\mathcal{W}(t) \subseteq \mathcal{P}^+(t), \quad \forall t \in T, \quad (13.12)$$

и *внутренние параллелотопозначные оценки* $\mathcal{P}^-(\cdot)$, т.е., по определению, параллелотопозначные решения для (13.5), (13.6). Трубки $\mathcal{P}^+(\cdot)$

дают внешние оценки для множеств тех позиций, для которых задача синтеза стратегий управления разрешима. Если же известна внутренняя трубка $\mathcal{P}^-(\cdot)$, то стратегия управления может быть построена по формулам (13.7), (13.8), где \mathcal{Z} заменено на \mathcal{P}^- . Отметим, что

$$\mathcal{P}^\pm(t) = \Phi(t, \theta) \tilde{\mathcal{P}}^\pm(t), \quad (13.13)$$

где $\tilde{\mathcal{P}}^\pm(t)$ — это внешние (внутренние) оценки множеств разрешимости $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ для системы (13.10).

14 Внешние оценки трубки разрешимости

Пусть параметры параллелепипедов $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}(p^+(t), P^+(t), \pi^+(t))$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{p}^+ &= A(t) p^+ + r(t) + q(t), & p^+(\theta) &= p_\theta; \\ \dot{P} &= A(t) P, & P(\theta) &= P_\theta^+; \\ \dot{\pi} &= -\text{Abs}(P^{-1}R(t))\rho(t) + \text{Abs}(P^{-1}Q(t))\kappa(t), & & \\ & & \pi(\theta) &= \text{Abs}((P_\theta^+)^{-1}P_\theta)\pi_\theta; \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$P^+(t) = P(t) \text{diag} \{ \|p^i(t)\| \}^{-1};$$

$$\pi^+(t) = \text{diag} \{ \|p^i(t)\| \} \pi(t),$$

где $P_\theta^+ \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ — матричный параметр, который можно варьировать и который определяет целое семейство трубок $\mathcal{P}^+(\cdot)$.

Теорема 14.1 Пусть выполнены все упомянутые предположения. Для обеих задач при каждом $P_\theta^+ \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ система (14.1) имеет на отрезке T единственное решение, и соответствующая трубка $\mathcal{P}^+(\cdot)$ есть внешняя оценка для трубки разрешимости $\mathcal{W}(\cdot)$ (т.е. справедливы включения (13.12)). Если $A(t) \equiv 0$, то $P^+(t) \equiv P_\theta^+$, $\forall t \in T$, и

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho(\pm(P^+)^{-1\top} e^i | \mathcal{P}^+(t)) \\ &= \rho(\pm(P^+)^{-1\top} e^i | \mathcal{Q}(t)) - \rho(\pm(P^+)^{-1\top} e^i | -\mathcal{R}(t)) \\ &\leq \frac{\partial}{\partial t} \rho(\pm(P^+)^{-1\top} e^i | \mathcal{W}(t)), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Доказательство. Сделаем замену переменных (13.9). Пусть $\tilde{\mathcal{W}}(\cdot)$ — трубка разрешимости для (13.10), а $\tilde{\mathcal{P}}(\cdot)$ — такая трубка, что

$$\begin{aligned} \dot{p}^+ &= \tilde{r}(t) + \tilde{q}(t), & \dot{P}^+ &= 0, \\ \dot{\pi}^+ &= -\text{Abs}((\tilde{P}^+)^{-1}\tilde{R}(t))\tilde{\rho}(t) + \text{Abs}((\tilde{P}^+)^{-1}\tilde{Q}(t))\tilde{\kappa}(t), \\ \tilde{p}^+(\theta) &= p_\theta, & \tilde{P}^+(\theta) &= P_\theta^+, & \tilde{\pi}^+(\theta) &= \text{Abs}((P_\theta^+)^{-1}P_\theta)\pi_\theta. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Имеем $\tilde{P}^+(t) \equiv P_\theta^+, \forall t \in T$. Существование и единственность решения для (14.3) очевидна, поскольку $\det P_\theta^+ \neq 0$.

Предположим временно, что имеют место неравенства

$$\tilde{\pi}^+(t) \geq 0, \quad \forall t \in T. \quad (14.4)$$

Тогда $\tilde{\mathcal{P}}^+(t)$ есть параллелепипед и $\rho(l|\tilde{\mathcal{P}}^+(t)) = (\tilde{p}^+(t), l) + \sum_{i=1}^n |(p_\theta^{+,i}, l)| \cdot \tilde{\pi}_i^+(t)$. Дифференцируя это равенство по t и используя соотношения (14.3), приходим к выражению для $\partial\rho(l|\tilde{\mathcal{P}}^+(t))/\partial t$. Вычисляя его при $l = \pm l^j$ ($j=1, \dots, n$), где $l^j = (P_\theta^+)^{-1\top} e^j$, используя соотношения $(p_\theta^{+,i}, l^j) = \delta_{ij}$ и выражение для опорной функции параллелепипеда, получаем

$$\partial\rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{P}}^+(t))/\partial t = \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{Q}}(t)) - \rho(\mp l^j|\tilde{\mathcal{R}}(t)). \quad (14.5)$$

С другой стороны, из (13.5) следует (см., например, [201, с.201]), что

$$\partial\rho(l|\tilde{\mathcal{W}}(t))/\partial t \geq \rho(l|\tilde{\mathcal{Q}}(t)) - \rho(-l|\tilde{\mathcal{R}}(t)), \quad \forall l \in \mathbb{R}^n. \quad (14.6)$$

Ввиду (14.5) и (14.6) соотношения (14.2) доказаны.

Выражения для $\tilde{p}^+(\theta)$, $\tilde{\pi}^+(\theta)$ обеспечивают, что $\tilde{\mathcal{P}}^+(\theta) \supseteq \mathcal{M} = \tilde{\mathcal{W}}(\theta)$. Поэтому, используя (14.5), (14.6), имеем

$$\begin{aligned} \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{W}}(t)) &= \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{W}}(\theta)) - \int_t^\theta \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{W}}(\tau)) d\tau \\ &\leq \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{P}}^+(\theta)) - \int_t^\theta \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{P}}^+(\tau)) d\tau = \rho(\pm l^j|\tilde{\mathcal{P}}^+(t)), \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, n$. Выпуклость $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ и лемма 2.3 обеспечивают $\tilde{\mathcal{W}}(t) \subseteq \tilde{\mathcal{P}}^+(t)$. Вместе с (13.9), (13.13) это дает (13.12).

Вернемся к нашему предположению (14.4). Если $\tilde{\kappa}(t) \equiv 0$, то (14.4) верно, поскольку в (14.3) $\tilde{\pi}^+(\theta) \geq 0$ и $\dot{\tilde{\pi}}^+(t) \leq 0$. Рассмотрим случай с неопределенностью. Ввиду предположения 13.1, $\tilde{\pi}^+(t) > 0$ при $t = \theta$ и при всех t в некоторой окрестности θ . Допустим, что t^* есть первый (считая справа) момент, для которого оказывается $\tilde{\pi}_{i^*}^+(t^*) = 0$ при некотором $i^* \in \{1, \dots, n\}$. Соотношения (14.4) все еще верны для $t \in [t^*, \theta]$, и, значит, $\tilde{\mathcal{W}}(t^*) \subseteq \mathcal{P}^+(t^*)$. Ввиду предположения 13.1 это означает, что $\tilde{\pi}^+(t^*) > 0$. Полученное противоречие показывает, что такого момента t^* не существует и (14.4) действительно имеет место.

Уравнения (14.1) легко получить из (14.3) с помощью формулы для аффинного преобразования параллелепипеда. \square

Следствие 14.1 Трубки $\mathcal{P}^+(\cdot)$ с параметрами (14.1) удовлетворяют следующим эволюционным уравнениям

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h(\mathcal{P}^+(t-\sigma), \Phi(t-\sigma, \theta) \Phi(t, \theta)^{-1} (\mathbf{P}_{P^+(t)}^+ (\mathcal{P}^+(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t))) = 0; \quad (14.7)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h(\mathcal{P}^+(t-\sigma), \Phi(t-\sigma, \theta) \Phi(t, \theta)^{-1} \mathbf{P}_{P^+(t)}^+ ((\mathcal{P}^+(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t))) = 0; \quad (14.8)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h_+(((I - \sigma A(t)) \mathcal{P}^+(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}^+(t-\sigma)) \quad (14.9)$$

с краевым условием $\mathcal{P}^+(\theta) = \mathbf{P}_{P^+(\mathcal{M})}^+$. Здесь $P^+(t)$ удовлетворяют (14.1), а $\Phi(t, \theta)$ — фундаментальная матрица решений (см. (13.9)).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $A(t) \equiv 0$. Тогда соотношение (14.7) получается путем сравнения формул для параметров $\mathcal{P}^+(t - \sigma)$, которые следуют из (14.1), и формул для параметров второго члена в (14.7), которые следуют из теоремы 3.1 и следствия 4.1. Соотношение (14.8) есть следствие (14.7) ввиду леммы 4.4. Вычитая (в смысле $\dot{-}$) $\sigma \mathcal{Q}(t)$ из обеих частей очевидного включения $\mathcal{P}^+(t) - \sigma \mathcal{R}(t) \subseteq \mathbf{P}_{P^+(t)}^+ (\mathcal{P}^+(t) - \sigma \mathcal{R}(t))$ и используя (14.7), получаем (14.9). Если $A(t) \neq 0$, то (14.7) – (14.9) верны для системы (13.10). Возвращаясь к исходным переменным и используя соотношения (13.10), (13.13) и (3.8), получаем

(14.7), (14.8). Из (8.19) следует, что $\Phi(t-\sigma, \theta) = \Phi(t, \theta) - \sigma A(t)\Phi(t, \theta) + o(\sigma)$. Следовательно, $\Phi(t-\sigma, \theta)\Phi(t, \theta)^{-1} = I - \sigma A(t) + o(\sigma)$, что приводит к (14.9). \square

Заметим, что соотношения (14.7), (14.8) могут быть упрощены путем замены множителя $\Phi(t-\sigma, \theta)\Phi(t, \theta)^{-1}$ какой-нибудь из его аппроксимаций, например, $I - \sigma A(t)$, как и выше, или

$$(I + \sigma A(t - \sigma))^{-1}, \quad (14.10)$$

или какой-либо еще.

Замечание 14.1 Пусть $\mathcal{P}^+(t, \tau, \mathcal{P}_\tau; P_\tau^+) = \mathcal{P}(p^+(t, \tau, p_\tau), P^+(t, \tau, P_\tau^+), \pi^+(t, \tau, \pi_\tau, P_\tau, P_\tau^+))$ обозначает параллелепипед, параметры p^+ , P^+ , π^+ которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (14.1) с граничными условиями (в момент τ), определяемыми параллелепипедом $\mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}(p_\tau, P_\tau, \pi_\tau)$ и свободным матричным параметром $P_\tau^+ \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, т.е. $p^+(\tau, \tau, p_\tau) = p_\tau$, $P^+(\tau, \tau, P_\tau^+) = P_\tau^+$, $\pi^+(\tau, \tau, \pi_\tau, P_\tau, P_\tau^+) = \text{Abs}((P_\tau^+)^{-1}P_\tau)\pi_\tau$. Тогда несложно заметить, что

$$\mathcal{P}^+(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; P_\theta^+) = \mathcal{P}^+(t, \tau, \mathcal{P}^+(\tau, \theta, \mathcal{P}_\theta; P_\theta^+); P^+(\tau, \theta, P_\theta^+)), \quad (14.11)$$

$$\forall t, \tau : 0 \leq t \leq \tau \leq \theta; \quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}^+(\theta, \theta, \mathcal{P}_\theta; P_\theta^+), \quad \forall P_\theta^+ \in \mathcal{M}_*^{n \times n}.$$

Эти соотношения определяют "*верхнее*" *полугрупповое свойство* [93], [201, с.208] для параллелепипедозначных оценок $\mathcal{P}^+(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; P_\theta^+)$. Это свойство подобно (13.11) и в других обозначениях может быть записано в виде, аналогичном (8.9).

Будем говорить, что внешние $\mathcal{P}^+(\cdot)$ и внутренние $\mathcal{P}^-(\cdot)$ оценки для $\mathcal{W}(\cdot)$ обладают *эволюционным свойством*, если

$$\mathcal{W}(t, \tau, \mathcal{P}^+(\tau)) \subseteq \mathcal{P}^+(t), \quad \forall t, \tau : 0 \leq t \leq \tau \leq \theta; \quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}^+(\theta); \quad (14.12)$$

$$\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{W}(t, \tau, \mathcal{P}^-(\tau)), \quad \forall t, \tau : 0 \leq t \leq \tau \leq \theta; \quad \mathcal{P}^-(\theta) \subseteq \mathcal{M}. \quad (14.13)$$

Доказывая теорему 14.1, мы фактически использовали обозначение $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}^+(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; P_\theta^+)$ и доказали, что $\mathcal{P}^+(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; P_\theta^+) \supseteq \mathcal{W}(t, \theta, \mathcal{P}_\theta)$. Аналогично можно видеть, что $\mathcal{P}^+(t, \tau, \mathcal{P}_\tau; P_\tau^+) \supseteq \mathcal{W}(t, \tau, \mathcal{P}_\tau)$, $\forall t, \tau : 0 \leq t \leq \tau \leq \theta$, $\forall \mathcal{P}_\tau, \forall P_\tau^+ \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$. Объединяя это с (14.11), получаем

Замечание 14.2 В условиях теоремы 14.1 оценки $\mathcal{P}^+(\cdot)$ обладают эволюционным свойством (14.12)³.

Замечание 14.3 Пусть теперь

$$\text{int } \mathcal{M} \neq \emptyset. \quad (14.14)$$

Считая параллелепипеды $\mathcal{P}^+(t)$ параллелотопами $\mathcal{P}[p^+(t), \bar{P}^+(t)]$, выпишем ОДУ для $\bar{P}^+(t)$. Поскольку $\bar{P}^+ = P^+ \text{diag } \pi^+ = P \text{diag } \pi$, то прямым дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}}^+ &= A(t) \bar{P}^+ - \bar{P}^+ \text{diag} (\text{Abs} ((\bar{P}^+)^{-1} R(t)) \rho(t)) \\ &\quad + \bar{P}^+ \text{diag} (\text{Abs} ((\bar{P}^+)^{-1} Q(t)) \kappa(t)); \\ \bar{P}^+(\theta) &= P_\theta^+ \text{diag} (\text{Abs} ((P_\theta^+)^{-1} P_\theta) \pi_\theta). \end{aligned}$$

Теорема 14.2 Пусть имеет место случай без неопределенности (т.е. $\kappa(t) \equiv 0$). Если параллелепипеды $\mathcal{P}^+(t)$ определяются соотношениями (14.1), то $\mathcal{P}^+(t)$ оказываются внешними касающимися оценками для $\mathcal{W}(t)$, и справедливо точное представление

$$\mathcal{W}(t) = \bigcap \{ \mathcal{P}^+(t) \mid P_\theta^+ \in \mathcal{V}^0 \}, \quad \forall t \in T,$$

аналогичное (8.35) (с заменой P_0^+ на P_θ^+).

Доказательство проводится как и в теореме 8.2. □

15 Внутренние оценки трубки разрешимости. Построение стратегий управления

Рассмотрим параллелотопозначные трубки $\mathcal{P}^-(\cdot) = \mathcal{P}[p^-(\cdot), \bar{P}^-(\cdot)]$, параметры которых удовлетворяют следующей системе ОДУ

$$\begin{aligned} \dot{p}^- &= A(t) p^- + r(t) + q(t), & p^-(\theta) &= p_\theta; \\ \dot{\bar{P}}^- &= A(t) \bar{P}^- + \bar{R}(t) \Gamma(t) + \bar{P}^- \text{diag} (\text{Abs} ((\bar{P}^-)^{-1} \bar{Q}(t)) e), & & (15.1) \\ & & \bar{P}^-(\theta) &= \bar{P}_\theta \Lambda_\theta. \end{aligned}$$

³И в случае $\text{int } \mathcal{M} \neq \emptyset$ являются, как можно убедиться [191] с помощью леммы 4.4, локально-оптимальными в смысле объема оценками для $\mathcal{W}(\cdot)$.

Здесь Λ_θ и $\Gamma(\cdot)$ — это свободные параметры ($n \times n$ -матрица и измеримая $n \times n$ -матричная функция), которые определяют целое семейство трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$ и которые стеснены следующими ограничениями:

$$\Lambda_\theta \in \mathcal{G}, \quad \Gamma(\cdot) \in \mathbf{G} = \{\Gamma(\cdot) \mid \Gamma(t) \in \mathcal{G} \text{ при п.в. } t \in T\}, \quad (15.2)$$

где множество \mathcal{G} введено в (8.40).

Теорема 15.1 Пусть $\bar{Q}(t) \equiv 0$ (случай без неопределенности). Тогда при любых значениях параметров (15.2) на всем промежутке T определено единственное решение системы (15.1) и соответствующая трубка $\mathcal{P}^-(\cdot) = \mathcal{P}[p^-(\cdot), \bar{P}^-(\cdot)]$ удовлетворяет (13.6), (13.5) при $t \in T$, являясь внутренней оценкой для трубки разрешимости $\mathcal{W}(\cdot)$. В случае с неопределенностью, если $\det \bar{P}^-(\theta) \neq 0$, сказанное справедливо, по крайней мере, для некоторого промежутка $T_1 = [t_1, \theta]$, где $0 \leq t_1 < \theta$.

Здесь T_1 может зависеть от Λ_θ и $\Gamma(\cdot)$. Ниже для случая без неопределенности также будем обозначать $T_1 = T$.

Доказательство. Предположим, $A(t) \equiv 0$. Если $\bar{Q}(t) \equiv 0$, то (15.1) — это система линейных ОДУ. Из (15.1) заключаем, что $\mathcal{P}^-(t-\sigma) = \mathbf{P}_{I, \bar{\Gamma}(t)}^-(\mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) + o(\sigma)$, где $\bar{\Gamma}(t) = \sigma^{-1} \int_{t-\sigma}^t \Gamma(\tau) d\tau$. Следовательно, по лемме 3.8 $\mathcal{P}^-(t-\sigma) \subseteq \mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t) + o(\sigma)$, и имеем (13.5), (13.6).

При $\bar{Q}(t) \neq 0$ в любой замкнутой ограниченной области $D \subset D_\delta \triangleq \{(t, \bar{P}^-) \mid t \in T, |\det \bar{P}^-| \geq \delta\}$, где число $0 < \delta < |\det \bar{P}^-(\theta)|$ сколь угодно мало, выполнены условия существования и единственности решения системы (15.1) [147, теорема 4, с.10, и теорема 2, с.8]. При этом теорема 4 обеспечивает существование промежутка $T_1 = [t_1, \theta]$, где $0 \leq t_1 < \theta$, на котором решение $\bar{P}^-(t)$ определено и $|\det \bar{P}^-(t)| \geq \delta$. Убедимся, что соответствующая трубка $\mathcal{P}^-(\cdot)$ удовлетворяет (13.5) при $t \in T_1$. Во избежание громоздкости положим $r(t) \equiv q(t) \equiv p_\theta = 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} P^I &= \bar{P}^-(t) - \sigma \bar{R}(t) \bar{\Gamma}(t), \\ P^{II} &= P^I - \sigma \bar{P}^-(t) \text{diag} (\text{Abs} (\bar{P}^-(t)^{-1} \bar{Q}(t)) e), \\ P^{III} &= P^I - \sigma P^I \text{diag} (\text{Abs} ((P^I)^{-1} \bar{Q}(t)) e) \end{aligned}$$

(для простоты записи аргумент $t - \sigma$ у P^I , P^{II} и P^{III} опущен). Из (15.1) следует, что

$$\bar{P}^-(t - \sigma) = P^{II} + o(\sigma). \quad (15.3)$$

Ввиду леммы 3.8 и следствия 4.1 имеем

$$\mathcal{P}[0, P^I] = \mathbf{P}_{I, \bar{\Gamma}(t)}^-(\mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) \subseteq \mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t), \quad (15.4)$$

$$\mathcal{P}[0, P^{III}] = \mathcal{P}[0, P^I] \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t). \quad (15.5)$$

Вводя перекрестные члены, можно проверить, что

$$\|P^{II} - P^{III}\| \leq C_1 \sigma^2 (1 + \delta) / (\delta(\delta - C_2 \sigma)), \quad \forall \sigma : 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (15.6)$$

Здесь константы $C_1, C_2 > 0$ зависят от n и от максимумов значений $\|\bar{R}(t)\|$, $\|\bar{Q}(t)\|$, $\|\bar{P}^-(t)\|$ на T_1 (максимумы существуют в силу непрерывности на T_1 соответствующих матриц). При доказательстве (15.6) были использованы последние три из неравенств (8.54). Здесь матричная норма $\|\cdot\|$ — та же, что и в (8.40). В соответствии с (15.3), (15.6) имеем

$$\bar{P}^-(t - \sigma) = P^{III} + o(\sigma). \quad (15.7)$$

Тогда из (15.5) вытекает, что

$$\mathcal{P}^-(t - \sigma) \subseteq \mathcal{P}[0, P^{III}] + \mathcal{P}[0, o(\sigma)] = \mathcal{P}[0, P^I] \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t) + \mathcal{P}[0, o(\sigma)]. \quad (15.8)$$

Но если $\mathcal{X}_1 \subseteq (\mathcal{X}_2 \dot{-} \mathcal{X}_3) + \mathcal{X}_4$, то $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3 \subseteq \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_4$. Используя этот факт и включение (15.4), получаем из (15.8), что

$$\mathcal{P}^-(t - \sigma) + \sigma \mathcal{Q}(t) \subseteq \mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t) + \mathcal{P}[0, o(\sigma)], \quad (15.9)$$

а это означает (13.5) для случая $A(t) \equiv 0$.

Если $A(t) \not\equiv 0$, то (13.5) получается из (15.9) аналогично доказательству следствия 14.1, а уравнения (15.1) для $\mathcal{P}^-(t)$ получаются из аналогичных уравнений для $\tilde{\mathcal{P}}^-(t)$ в силу (13.10), (13.13).

Так как и $\mathcal{P}^-(\cdot)$, и $\mathcal{W}(\cdot)$ удовлетворяют (13.5), а $\mathcal{W}(\cdot)$ есть максимальное решение (13.5), имеем $\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{W}(t)$, $\forall t \in T_1$. \square

Следствие 15.1 В условиях теоремы 15.1 трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$ с параметрами (15.1) удовлетворяют следующим эволюционным уравнениям

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h(\mathcal{P}^-(t-\sigma), \Phi(t-\sigma, \theta) \Phi(t, \theta)^{-1} \mathbf{P}_{I, \bar{\Gamma}(t)}^- ((\mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t))) = 0; \quad (15.10)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h_+(\mathcal{P}^-(t-\sigma), ((I - \sigma A(t)) \mathcal{P}^-(t) - \sigma \mathcal{R}(t)) \dot{-} \sigma \mathcal{Q}(t)) = 0 \quad (15.11)$$

(где $\bar{\Gamma}(t) = \sigma^{-1} \int_{t-\sigma}^t \Gamma(\tau) d\tau$) с краевым условием $\mathcal{P}^-(\theta) = \mathbf{P}_{\Lambda_\theta}^-(\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть $A(t) \equiv 0$. Ввиду (4.22) соотношение (15.7) означает (15.10). Равенство (15.11) следует из (15.8) и (15.4). Если $A(t) \not\equiv 0$, то рассуждаем аналогично доказательству следствия 14.1. \square

Замечание 15.1 Обозначим через $\mathcal{P}^-(t, \tau, \mathcal{P}_\tau; \Lambda_\tau, \Gamma(\cdot)) = \mathcal{P}[p^-(t, \tau, p_\tau), \bar{P}^-(t, \tau, \bar{P}_\tau, \Lambda_\tau, \Gamma(\cdot))]$, $t \in T_1$, параллелотоп, параметры p^- , \bar{P}^- которого удовлетворяют ОДУ (15.1) с фиксированной функцией $\Gamma(\cdot)$ и с граничными условиями (в момент τ), определяемыми параллелотопом $\mathcal{P}_\tau = \mathcal{P}[p_\tau, \bar{P}_\tau]$ и фиксированным параметром Λ_τ , т.е. $p^-(\tau, \tau, p_\tau) = p_\tau$, $\bar{P}^-(\tau, \tau, \bar{P}_\tau, \Lambda_\tau, \Gamma(\cdot)) = \bar{P}_\tau \Lambda_\tau$. Несложно видеть, что

$$\mathcal{P}^-(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; \Lambda_\theta, \Gamma(\cdot)) = \mathcal{P}^-(t, \tau, \mathcal{P}^-(\tau, \theta, \mathcal{P}_\theta; \Lambda_\theta, \Gamma(\cdot)); I, \Gamma(\cdot)),$$

$$\forall t, \tau : t \leq \tau \leq \theta, t \in T_1; \mathcal{P}^-(\theta, \theta, \mathcal{P}_\theta; \Lambda_\theta, \Gamma(\cdot)) \subseteq \mathcal{M}, \quad \forall \Lambda_\theta \in \mathcal{G}, \forall \Gamma(\cdot) \in \mathbf{G}.$$

Эти соотношения определяют "нижнее" полугрупповое свойство [93], [201, с.208] параллелотопозначных оценок $\mathcal{P}^-(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; \Lambda_\theta, \Gamma(\cdot))$. В других обозначениях оно может быть записано в виде, аналогичном (8.10).

Так же как и для внешних оценок, имеем

Замечание 15.2 Внутренние оценки $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}^-(t, \theta, \mathcal{P}_\theta; \Lambda_\theta, \Gamma(\cdot))$ из теоремы 15.1 обладают эволюционным свойством (14.13).

Теорема 15.2 В случае без неопределенности (при $\bar{Q}(t) \equiv 0$) справедливы точные представления $\mathcal{W}(t) = \cup \{\mathcal{P}^-(t) | \Lambda_\theta = I, \Gamma(\cdot) \in \mathbf{G}\}, \forall t \in T$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.4. \square

Замечание 15.3 Параллелотопы $\mathcal{P}^-(t)$, удовлетворяющие (15.1), не обязаны быть параллелепипедами. Однако аналогично лемме 8.1 несложно заметить, что если Λ_θ и $\Gamma(\cdot)$ таковы, что $\det \bar{P}^-(\theta) > 0$ и

$$\begin{aligned} \text{tr} (\Xi(t)\Gamma(t)) + e^\top \text{Abs} (\bar{P}^-(t)^{-1}\bar{Q}(t)) e &\leq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T_1, \\ \Xi(t) &= \bar{P}^-(t)^{-1}\bar{R}(t), \end{aligned} \quad (15.12)$$

то сечения трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$ оказываются невырожденным параллелепипедами. Если $A(t) \equiv 0$, то указанные условия обеспечивают, что функция $\det \bar{P}^-(t)$ не возрастает. Условие (15.12) может быть использовано для построения функции $\Gamma(\cdot)$, обеспечивающей, чтобы сечениями соответствующей трубки $\mathcal{P}^-(t)$, $t \in T_1$, были параллелепипеды.

Действительно, можно, например, воспользоваться конструкциями, аналогичными описанным за замечанием 8.4. В частности, используя формулы типа (3.29), в пределе (при сгущении сетки \mathcal{T}_N) приходим к нелинейному матричному дифференциальному включению

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}}^- &\in A(t)\bar{P}^- + \bar{R}(t)\Gamma(t, \bar{P}^-) + \bar{P}^- \text{diag} (\text{Abs} ((\bar{P}^-)^{-1}\bar{Q}(t)) e), \\ \bar{P}^-(\theta) &= \bar{P}_\theta \Lambda_\theta. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma(t, P) &= \{\gamma_k^j(t, P)\}, \quad \gamma_k^j(t, P) = -\text{sign} (\xi_j^k(t, P)) l_k^j, \quad k, j = 1, \dots, n, \\ \Xi(t, P) &= \{\xi_j^k(t, P)\} = P^{-1}\bar{R}(t), \quad L = \{l_k^j\} \in \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

\mathcal{L} — множество $n \times n$ -матриц $L = \{l_k^j\}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} l_k^j &\geq 0, \quad k, j = 1, \dots, n, \\ l_k^j &= 0, \quad \text{если } j \notin J_k(t, P), \quad k, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n l_k^j &= 1, \quad k = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$J_k(t, P) = \text{Argmax} \{|\xi_j^k(t, P)| \mid j = 1, \dots, n\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (15.16)$$

Теорема 15.3 Пусть $\text{int } \mathcal{M} \neq \emptyset$ и $\Lambda_\theta \in \mathcal{G}$ такова, что $\det \bar{P}^-(\theta) > 0$. Если $\bar{Q}(t) \equiv 0$, то существует решение включения (15.13), определенное на интервале $T_1 = T$, и все решения системы (15.13) – (15.16) вместе с $p^-(\cdot)$ из (15.1) определяют трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$, которые оказываются внутренними параллелепипедозначными оценками для $\mathcal{W}(\cdot)$ на T . В противном случае сказанное справедливо, по крайней мере, для некоторого промежутка $T_1 = [t_1, \theta]$, где $0 \leq t_1 < \theta$.

Доказательство. Обозначим правую часть (15.13) через $F(t, \bar{P}^-)$. Положим $D_{\delta^*} = \{(t, P) \mid t \in T, \det P \geq \delta^*\}$, где $\delta^* > 0$ — произвольная малая величина. Для того, чтобы доказать существование решений (15.13), воспользуемся известными результатами и проверим, что в произвольной ограниченной замкнутой области $D \subset D_{\delta^*}$ выполняются все четыре условия теоремы 6 из [147, с.66]. Несложно заметить, что $F(t, P)$ есть непустой выпуклый компакт для всех $(t, P) \in D_{\delta^*}$ и функция $F(t, P)$ ограничена в $D \subset D_{\delta^*}$.

Проверим, что функция $F(t, P)$, $(t, P) \in D_\delta$, является полунепрерывной сверху по включению по переменной P , то есть

$$h_+(F(t, P'), F(t, P)) \rightarrow 0 \text{ при } P' \rightarrow P. \quad (15.17)$$

Вначале заметим, что при всех $(t, P') \in D_{\delta^*}$, достаточно близких к (t, P) ,

$$J_k(t, P') \subseteq J_k(t, P), \quad k = 1, \dots, n. \quad (15.18)$$

Действительно, зафиксируем $k \in \{1, \dots, n\}$ и положим $B_k(t, P) = \max\{|\xi_i^k(t, P)| \mid i = 1, \dots, n\}$, $C_k(t, P) = \max\{|\xi_i^k(t, P)| \mid i = 1, \dots, n, i \notin J_k(t, P)\}$. Тогда $|\xi_i^k(t, P)| = B_k(t, P)$, $\forall i \in J_k(t, P)$. В силу непрерывности $\text{Abs } \Xi(t, P) = \text{Abs}(P^{-1}\bar{R}(t))$ в D_{δ^*} видим, что для каждого ε , $0 < \varepsilon < B_k(t, P) - C_k(t, P)$, существует $\delta > 0$ такое, что для любых (t, P') из δ -окрестности (t, P) имеем $|((P')^{-1}\bar{R}(t))_i^k| > B_k(t, P) - \varepsilon$, $\forall i \in J_k(t, P)$, и $|((P')^{-1}\bar{R}(t))_i^k| < B_k(t, P) - \varepsilon$, $\forall i \notin J_k(t, P)$, а это означает (15.18). Рас-

смотрим произвольный элемент $f(t, P') \in F(t, P')$. Это значит, что

$$f_i^j(t, P') = e^{i\top} A(t) P' e^j - \sum_{k=1}^n \bar{r}_i^k(t) \operatorname{sign}(e^{j\top} (P')^{-1} \bar{r}^k(t)) \alpha_k^j + e^{i\top} P' e^j \sum_{k=1}^n |e^{j\top} (P')^{-1} \bar{q}^k(t)|, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (15.19)$$

где $\{\alpha_k^j\}_{k,j=1}^n$ удовлетворяют условиям $\alpha_k^j \geq 0$, $k, j = 1, \dots, n$; $\alpha_k^j = 0$ при $j \notin J_k(t, P')$, $k, j = 1, \dots, n$; $\sum_{j=1}^n \alpha_k^j = 1$, $k = 1, \dots, n$. Ввиду (15.18), эти числа $\{\alpha_k^j\}_{k,i=1}^n$ удовлетворяют соотношениям (15.15). Следовательно, ненулевыми слагаемыми в первой из сумм по k в (15.19) могут быть только такие, для которых $j \in J_k(t, P)$. Рассмотрим такие члены подробнее. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ может быть две возможности. Пусть $B_k(t, P) > 0$. Если $j \in J_k(t, P)$, то $\operatorname{sign} \xi_j^k(t, P) \neq 0$, и в силу непрерывности $\Xi(t, P)$ при $(t, P) \in D_{\delta^*}$

$$\operatorname{sign}((P')^{-1} \bar{R}(t))_j^k = \operatorname{sign} \xi_j^k(t, P), \quad \forall j \in J_k(t, P), \quad (15.20)$$

для всех P' , достаточно близких к P . Пусть $B_k(t, P) = 0$. Тогда $e^{i\top} P^{-1} \bar{r}^k(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Это означает, что k -й столбец $\bar{R}(t)$ ортогонален n линейно независимым векторам, а потому равен нулю: $\bar{r}^k(t) = 0$. Но тогда $e^{i\top} (P')^{-1} \bar{r}^k(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, и (15.20) снова верно. Если $A(t) \equiv 0$, $\bar{Q}(t) \equiv 0$, то соотношения (15.20) означают $f(t, P') \in F(t, P)$, т.е. $h_+(F(t, P'), F(t, P)) = 0$. В общем случае первое и третье слагаемые в правой части (15.13) — однозначные функции, непрерывные по P в области D . А из приведенных рассуждений следует, что второе слагаемое — многозначная функция, полунепрерывная сверху по включению (по P). Следовательно, функция $F(t, P)$ также полунепрерывна сверху по включению.

Наконец, чтобы проверить существование измеримого однозначного селектора для $F(t, P)$, рассмотрим функцию $f(t, P)$, соответствующую $L = L(t, P) = \{l_k^j(t, P)\}$ с

$$l_k^j(t, P) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j(t, P) = \min\{i \mid i \in \{1, \dots, n\}, i \in J_k(t, P)\}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$k, j = 1, \dots, n$. Зафиксируем $k \in \{1, \dots, n\}$ и введем функции

$$\beta_i^k(t, P) = \begin{cases} i, & \text{если } |\xi_i^k(t, P)| = B_k(t, P), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Все они измеримы по t ввиду измеримости множеств таких t , для которых значения непрерывных по t функций $B_k(t, P) - |\xi_i^k(t, P)|$ неположительны ($i = 1, \dots, n$). Значит, функция $\zeta_k(t, P) \triangleq \min\{\beta_i^k(t, P) \mid 1 \leq i \leq n\}$ измерима по t для каждого фиксированного P и таковы же функции $l_k^j(t, P)$ (так как $l_k^j(t, P)$ есть характеристическая функция множества $\{t \mid \zeta_k(t, P) = j\}$), и, наконец, функция $f(t, P)$ также измерима по t при каждом P .

Все условия теоремы 6 из [147, с.66] выполнены. Следовательно, существует промежуток $T_1 = [t_1, \theta]$, где $0 \leq t_1 < \theta$, на котором определено решение $\bar{P}^-(t)$ включения (15.13) и $\det \bar{P}^-(t) \geq \delta^*$.

Пусть $\bar{Q}(t) \equiv 0$. Вводя функции $\tilde{P}^-(t) = \Phi(t, \theta)^{-1} \bar{P}^-(t)$, получаем эквивалентное (15.13) дифференциальное включение $\dot{\tilde{P}}^- \in \tilde{R}(t) \tilde{\Gamma}(t, \tilde{P}^-)$, $\tilde{P}^-(\theta) = \bar{P}_\theta \Lambda_\theta$, где $\tilde{R}(t) = \Phi(t, \theta)^{-1} \bar{R}(t)$, $\tilde{\Gamma}$ получено из Γ вида (15.14) заменой $\Xi(t, P)$ на $\tilde{\Xi}(t, P) = P^{-1} \tilde{R}(t)$. Для каждого решения этого включения $\det \tilde{P}^-(t)$ оказывается невозрастающей функцией, поскольку ввиду [101, с.183] и (15.14) – (15.16) при $\det \tilde{P}^-(t) \neq 0$ имеем $\frac{d}{dt} \det \tilde{P}^- = \det \tilde{P}^- \operatorname{tr}((\tilde{P}^-)^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{P}^-) = -\det \tilde{P}^- \sum_{k=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} |((\tilde{P}^-)^{-1} \tilde{R})_i^k| \leq 0$. Следовательно, $\tilde{P}^-(t)$ не покидает область, где $\det \tilde{P}^-(t) \geq \det \tilde{P}^-(\theta) > 0$ и, значит, решения (15.13) определены на $T_1 = T$.

Тот факт, что все решения (15.13) удовлетворяют (13.5), (13.6) при $t \in T_1$, проверяется аналогично теореме 15.1. \square

Замечание 15.4 Если известна трубка $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$, $t \in T_1$, то определение стратегии (13.7) конкретизируется в виде

$$\mathcal{U}_{\mathcal{P}^-}(t, x) = \begin{cases} \mathcal{R}(t), & \text{если } x \in \mathcal{P}^-(t), \\ \mathcal{R}_{l^0}(t), & \text{если } x \notin \mathcal{P}^-(t), \end{cases} \quad t \in T_1,$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{l^0}(t) &= \{u \mid u = r(t) - \sum_{i=1}^n \bar{r}^i(t) \alpha_i, \\ \alpha_i &= \text{sign}(\bar{r}^i(t), l^0), \text{ если } (\bar{r}^i(t), l^0) \neq 0, \\ |\alpha_i| &\leq 1, \text{ если } (\bar{r}^i(t), l^0) = 0, \quad i = 1, \dots, n\}, \\ l^0 &= l^0(t, x) = x - s^0(t, x), \\ s^0(t, x) &= \text{argmin} \{\|x - s\| \mid s \in \mathcal{P}^-(t)\}.\end{aligned}$$

Действительно, для определения $\mathcal{R}_{l^0}(t)$ достаточно вспомнить выражение опорной функции параллелотопа. Выражение для l^0 следует из свойств проекции s^0 точки x на $\mathcal{P}^-(t)$ [23, с.193] и аналогично формуле из [201, с.210].

Для $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ имеем $\text{argmin} \{\|x - s\| \mid s \in \mathcal{P}\} = p + \bar{P} \cdot \text{argmin} \{\|x - p - \bar{P} \xi\|^2 \mid \xi \in \mathcal{P}[0, I]\}$.

Замечание 15.5 Если $\mathcal{P}^-(t)$ есть невырожденный параллелепипед, то задача нахождения s^0 эквивалентна задаче минимизации положительно определенной квадратичной функции на единичном кубе и может быть решена за конечное число шагов, например, при помощи модификации метода сопряженных градиентов для случая неотрицательных компонент [182, с.212].

16 Численное моделирование

Представленные здесь результаты получены путем дискретизации. Разобьем отрезок T точками $\tau_k = k h_N$, $k=0, \dots, N$, с шагом $h_N = \theta/N$, и используем следующую дискретную схему для системы (13.1) – (13.3):

$$\begin{aligned}x[k] &= A[k] x[k-1] + u[k] + v[k], \quad k=1, \dots, N; \quad A[k] = I + h_N A(\tau_{k-1}); \\ u[k] &\in \mathcal{R}[k] = h_N \mathcal{R}(\tau_{k-1}), \quad v[k] \in \mathcal{Q}[k] = h_N \mathcal{Q}(\tau_{k-1}), \quad x[N] \in \mathcal{M}.\end{aligned}\tag{16.1}$$

Оценки $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}(p^+[k], P^+[k], \pi^+[k])$ and $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}(p^-[k], \bar{P}^-[k])$ для $\mathcal{W}(\tau_k)$ вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+[k-1] &= A[k]^{-1}(\mathbf{P}_{P^+[k]}^+(\mathcal{P}^+[k] - \mathcal{R}[k]) - \mathcal{Q}[k]), \quad k=N, \dots, 1, \\ \mathcal{P}^+[N] &= \mathbf{P}_{P_\theta^+}^+(\mathcal{M}), \\ P^+[k-1] &= \text{Nrm}(A[k]^{-1}P^+[k]), \quad k=N, \dots, 1, \quad P^+[N] = P_\theta^+; \\ \mathcal{P}^-[k-1] &= A[k]^{-1}(\mathbf{P}_{I, \Gamma[k]}^-(\mathcal{P}^-[k] - \mathcal{R}[k]) - \mathcal{Q}[k]), \quad k=N, \dots, 1, \\ \mathcal{P}^-[N] &= \mathbf{P}_{\Lambda_\theta}^-(\mathcal{M}), \end{aligned} \quad (16.2)$$

где символом $\text{Nrm } A$ обозначена матрица со столбцами $\text{Nrv } a^i, i=1, \dots, n$ (a^i — столбцы A); $P_\theta^+ \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $\Lambda_\theta \in \mathcal{G}$, $\Gamma[k] \in \mathcal{G}$, $k = 1, \dots, N$. Эти формулы согласуются с (14.7), (15.10), когда там используется (14.10).

Вместо многозначной стратегии управления $\mathcal{U}(t, x)$ используем однозначную стратегию (в дискретной версии):

$$u[k] = \mathcal{U}[k, x] = \begin{cases} r[k], & \text{если } x \in \mathcal{P}^-[k], \\ r[k] - \sum_{i=1}^n \bar{r}^i[k] \text{sign}(\bar{r}^i[k], l^0), & \text{если } x \notin \mathcal{P}^-[k], \end{cases} \quad (16.3)$$

где $l^0 = x - s^0$, $s^0 = \text{argmin} \{\|x - s\| \mid s \in \mathcal{P}^-[k]\}$, а $r[k]$, $\bar{R}[k] = \{\bar{r}^i[k]\}$ — это параметры $\mathcal{R}[k]$.

Пример 16.1 Пусть $n=2$, $A(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$, $r(t) \equiv (0, 0)^\top$, $R(t) \equiv I$, $\rho(t) \equiv (0, 1)^\top$, $q(t) \equiv (0, 0)^\top$, $Q(t) \equiv I$, $\kappa(t) \equiv (0, 0)^\top$ или $\kappa(t) \equiv (0.2, 0)^\top$, $p_\theta \equiv (-0.5, 0)^\top$, $P_\theta = I$, $\pi_\theta \equiv (0.5, 0.5)^\top$, $\theta=2$, $N=200$.

Рис. 16.1 соответствует случаю без неопределенности (когда $\kappa(t) \equiv (0, 0)^\top$). Здесь показаны целевое множество \mathcal{M} (штриховой линией), девять параллелепипедов $\mathcal{P}^+[0]$, вычисленных для случайно выбранных ортогональных матриц $P_\theta^+ \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ (рис. 16.1(с)) и параллелотопы $\mathcal{P}^-[0]$, соответствующие $\Lambda_\theta = I$ и четырем различным параметризациям $\Gamma[\cdot]$ (рис. 16.1(d)). "Наибольший" полученный параллелотоп $\mathcal{P}^-[0]$ соответствует такой параметризации $\Gamma[\cdot]$, что элементы матриц $\Gamma[k] =$

$\{\gamma_i^j[k]\}$, $k = N, \dots, 1$, определяются по формулам

$$\Xi[k] = \{\xi_i^j[k]\} = \bar{P}^-[k]^{-1} \bar{R}[k],$$

$$\gamma_i^j[k] = \begin{cases} \text{sign } \xi_i^j[k], & \text{если } i = i_*(l), \\ 0, & \text{если } i \neq i_*(l), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (16.4)$$

где $i_*(l) \in \text{Argmax} \{|\xi_i^l[k]| \mid i = 1, \dots, n\}$, $l = 1, \dots, n$,

(в случае неединственности производится случайный выбор $i_*(l)$ из числа возможных). Три других параллелографа $\mathcal{P}^-[0]$ соответствуют "квазистационарным" параметризациям $\Gamma[\cdot]$, когда фиксируется некоторая матрица $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}_j^i\} \in \mathcal{G}$, а элементы $\Gamma[k]$ определяются формулами

$$\gamma_j^i[k] = \text{sign}(\xi_i^j[k] \tilde{\gamma}_j^i) \cdot \tilde{\gamma}_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (16.5)$$

При этом использованы три значения $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma}^1 = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16.6)$$

Формула (16.4) является частным случаем (3.29), и ее использование мотивировано желанием максимизировать $\text{vol } \mathcal{P}^-[k-1]$, где, как несложно заметить, $\bar{P}^-[k-1] = A[k]^{-1} \cdot \bar{P}^-[k] \cdot (I + \Xi[k] \Gamma[k]) \cdot \text{diag}(e - \text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1} \bar{Q}[k])e) + o(h_N)$; $\Xi[k]$ и $\bar{Q}[k]$ имеют малый множитель h_N .

Формулы (16.5) поясним для случая $A[k] \equiv I$, $\bar{Q}[k] \equiv 0$ следующим образом. Имеем $\bar{P}^-[k-1] = \bar{P}^-[k] + \bar{R}[k] \Gamma[k]$. Зафиксируем матрицу $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{G}$ — одну для всех $k = N, \dots, 1$ ($\tilde{\Gamma}$ будет "распределять вклад" столбцов $\bar{R}[k]$ между столбцами матрицы $\bar{P}^-[k-1]$). Возьмем элементы $\Gamma[k]$ в виде $\gamma_i^j[k] = \tilde{\gamma}_j^i[k] \alpha_i^j[k]$, где $|\alpha_i^j[k]| \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$ (очевидно, $\Gamma[k] \in \mathcal{G}$). Тогда $\Gamma[k]$ из (16.5) решает задачи $e^{l \top} \bar{P}^-[k]^{-1} \bar{P}^-[k-1] e^l \rightarrow \max$ при условиях $|\alpha_i^j[k]| \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$, ($l = 1, \dots, n$), то есть столбцы $\bar{p}^{-,l}[k-1]$ дают наибольшие проекции на соответствующие векторы нормалей к $(n-1)$ -мерным граням $\mathcal{P}^-[k]$.

На рис. 16.1(a) представлена трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$, полученная при $P_\theta^+ = P_\theta$ (показаны сечения через каждые 3 шага k). На рис. 16.1(b) показаны

трубка $\mathcal{P}^{-}[\cdot]$, наиболее подходящая (из четырех построенных) для начальной точки $x(0) = (-0.5, -1)^\top$, а также соответствующая управляемая траектория, то есть решение (16.1) с (16.3), $v[k] \equiv 0$. Интерполяция этой траектории изображена также в фазовой плоскости на рис. 16.1(d). Видно, что объект попадает на целевое множество.

Рис. 16.2 соответствует той же системе, но функционирующей в условиях неопределенности, когда $\kappa(t) \equiv (0.2, 0)^\top$ (масштаб — тот же, что и на рис. 16.1). Множество разрешимости, также как и его внешние и внутренние оценки, меньше, чем для случая без неопределенности. Представленная траектория соответствует $x(0) = (-0.7, 2)^\top$, (16.3), (16.4) и $v[k] = v(\tau_{k-1})$, $k = 1, \dots, N$. Здесь $v(\cdot)$ — некоторое экстремальное возмущение типа "bang-bang" [201, с.234], когда длина интервалов постоянства $v(t)$ равна 0.5. Объект опять попадает на целевое множество.

Пример 16.2 Следующая система описывает позицию и скорость двух осцилляторов ($n = 4$), связанных через ограничения, и аналогична системе из [201, раздел 3.9] с эллипсоидальными ограничениями. Пусть

$$A(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta = 5; \quad N = 500;$$

$$x(0) = (2, -10, 1, -6)^\top;$$

$$r(t) \equiv (0, 0, 0, 0)^\top, \quad R(t) \equiv I, \quad \rho(t) \equiv (3, 1, 3, 1)^\top;$$

$$q(t) \equiv (0, 0, 0, 0)^\top, \quad Q(t) \equiv I, \quad \kappa(t) \equiv (1, 3, 1, 3)^\top;$$

$$p_\theta = (10, 0, 0, 10)^\top, \quad P_\theta = I, \quad \pi_\theta = (10, 10, 10, 10)^\top.$$

Здесь ни управления, ни возмущения не доминируют одно над другим ($\mathcal{R} \dot{-} \mathcal{Q} = \emptyset$ и $\mathcal{Q} \dot{-} \mathcal{R} = \emptyset$).

На рис. 16.3 показаны проекции $\mathcal{P}^{-}[k]$ и $x[k]$ на плоскости $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_4\}$ через каждые 7 шагов k . Здесь $\mathcal{P}^{-}[k]$ получены по формулам (16.2), (16.4) при $\Lambda_\theta = I$, а $x[k]$ — по (16.1), (16.3) при $v[k] = v(\tau_{k-1})$, $k=1, \dots, N$, где $v(\cdot)$ есть некоторое экстремальное возмущение типа "bang-bang", такое что длина интервалов постоянства

$v(t)$ равна 0.5. На рис. 16.4 показаны проекции \mathcal{M} (штриховые линии), параллелотопов $\mathcal{P}^-[0]$ и управляемой траектории. Эта траектория оказывается внутри параллелотопозначной трубки разрешимости $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и достигает \mathcal{M} в момент $t = \theta$.

Сравнение этих результатов с [201, раздел 3.9] показывает возможность построения параллелотопозначных трубок разрешимости, сопоставимых с эллипсоидальнозначными трубками, найденными там.

Приведенные результаты были получены путем численного моделирования с помощью пакета программ BOXES в системе MATLAB 5.

Трубки $\mathcal{P}^+(\cdot)$ и $\mathcal{P}^-(\cdot)$, отвечающие различным значениям параметров, могут быть построены независимо друг от друга. Это обстоятельство позволяет организовать их вычисление на многопроцессорном вычислительном комплексе путем простого распараллеливания ("процессорная ферма"), при котором "рабочие" процессоры рассчитывают отдельные трубки $\mathcal{P}^\pm(\cdot)$. Если для точки x_0 находится трубка $\mathcal{P}^-(\cdot)$, такая что $x_0 \in \mathcal{P}^-(0)$, то с ее помощью производится синтез. Если же хотя бы для одной из построенных трубок $\mathcal{P}^+(\cdot)$ оказывается, что $x_0 \notin \mathcal{P}^+(0)$, то это означает, что для позиции $\{0, x_0\}$ задача синтеза не имеет решения. Приведенные результаты численного моделирования свидетельствуют в пользу возможности использования эффективного распараллеливания для решения задачи синтеза в случае без неопределенности. Для случая с неопределенностью ситуация, к сожалению, оказывается хуже, т.к. внутренние трубки из описанного семейства могут оказаться непродолжимы на весь промежуток T . Поэтому эффективное распараллеливание применимо, вообще говоря, только при построении внешних оценок.

Глава V

Задача гарантированного оценивания состояния параболической системы при "геометрических" ограничениях

В данной главе рассматривается задача гарантированного оценивания состояния параболической системы при "геометрических" ограничениях на неопределенные входные параметры. Исследуется сходимость множеств, получаемых с помощью решений аппроксимирующих задач гарантированного оценивания в конечномерных системах, к искомой информационной области. Обсуждаются возможности использования параллелепипедозначных оценок решений аппроксимирующих задач для нахождения внешних и внутренних оценок искомого множества. Основные результаты главы описаны в [68, 74].

17 Постановка задачи. Конечномерные аппроксимирующие задачи

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) + cf(x, t), \quad f \in L_2(Q), \quad Q = D \times (0, \theta); \\ u(x, t)|_{x \in \partial D} &= 0; \quad u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \in L_2(D), \quad D = (0, l) \subset \mathbb{R}^1, \end{aligned} \quad (17.1)$$

где константа $c = 0$ или $c = 1$. Решение этой задачи понимаем как обобщенное из энергетического класса [100, с.161]. А именно, под решением задачи (17.1) понимаем функцию $u(x, t) \in W_2^{1,0}(Q)$, имеющую в сечениях D_τ цилиндра $Q = Q_{0\theta}$ плоскостью $t = \tau$ следы из $L_2(D)$ при всех $\tau \in [0, \theta]$, непрерывно меняющиеся по t в норме $L_2(D)$, и удовлетворяющую системе (17.1) в смысле интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_D u(x, t) \eta(x, t) dx - \int_D u_0(x, t) \eta(x, 0) dx + \int_{Q_{0t}} (-u \eta_t + a^2 u_x \eta_x) dx dt \\ = \int_{Q_{0t}} c f \eta dx dt, \quad \forall t \in [0, \theta], \quad \forall \eta \in W_{2,0}^1(Q_{0\theta}). \end{aligned}$$

Некоторые свойства обобщенного решения приведены в Приложении А2.

Пусть начальное состояние $u_0(x)$ и функция $f(x, t)$ (при $c = 1$) неизвестны, но стеснены "геометрическими" ограничениями

$$\begin{aligned} u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0 = \{u_0(\cdot) \in L_2(D) \mid |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| \leq \omega_1(x), \text{ п.в. } x \in D\}, \\ f(\cdot, \cdot) \in \mathcal{F} = \{f(\cdot, \cdot) \in L_2(Q) \mid |f(x, t) - \bar{f}(x, t)| \leq \omega_2(x, t), \text{ п.в. } x, t \in Q\}, \end{aligned} \quad (17.2)$$

где $\bar{u}_0, \omega_1 \in L_2(D)$, $\bar{f}, \omega_2 \in L_2(Q)$ — известные функции.

Определение 17.1 [105] *Множеством достижимости $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_a(\theta)$ системы (17.1), (17.2) в момент θ называется множество функций $u(\cdot) \in L_2(D)$, для каждой из которых существуют u_0^* и f^* , удовлетворяющие (17.2) и порождающие решение $u^*(x, t)$ системы (17.1) такое, что $u^*(\cdot, \theta) = u(\cdot)$.*

Пусть теперь о решении $u(x, t)$ доставляется информация в силу уравнения измерений

$$y(t) = G(t) u(\cdot, t) + \xi(t), \quad t \in T = [\delta, \theta], \quad \delta > 0. \quad (17.3)$$

Здесь $y(t)$ — данные измерений, $y(t) \in \mathbb{R}^1$; T — промежуток наблюдения; ξ — неопределенная помеха, которую будем считать элементом пространства $Y = L_\infty(T)$; $G(t)$ — линейный оператор наблюдения ("сенсор"), доставляющий либо точечные наблюдения [92], когда измерения

производятся вдоль некоторой траектории наблюдения, задаваемой измеримой (по Лебегу) функцией $X(t)$:

$$G(t) u(\cdot, t) = u(X(t), t), \quad X(t) \in \bar{D} = [0, l] \text{ при п.в. } t \in T, \quad (17.4)$$

либо пространственно-усредненные [92] с весом $g(x, t) \in L_2(D \times T)$, когда

$$G(t) u(\cdot, t) = \int_D g(x, t) u(x, t) dx, \quad 0 < \|g(\cdot, t)\|_{L_2(D)} \leq C < \infty \text{ при п.в. } t \in T. \quad (17.5)$$

Символом C здесь и ниже обозначаются константы, зависящие только от известных параметров системы (коэффициентов в уравнении, промежутка и оператора наблюдения, параметров ограничений) и не зависящие от начальных условий и возмущений в системе, а также от вводимых ниже шагов дискретизации. При наших предположениях идеальный сигнал $z(t) = G(t) u(\cdot, t)$ определен при п.в. $t \in T$ и $z(\cdot) \in Y$ (см. Приложение А2). Помеха ξ стеснена ограничением

$$\xi(\cdot) \in \Xi = \{\xi(\cdot) \in Y \mid |\xi(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t), \text{ п.в. } t \in T\}, \quad (17.6)$$

где $\bar{\xi}, \omega_3 \in Y$ — известные функции.

Определение 17.2 [92, 198] *Задача гарантированного оценивания* состояния в конечный момент времени θ заключается в нахождении *информационной области* $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ — множества всех состояний $u(\cdot, \theta)$ системы (17.1), совместимых с данными наблюдений $y(\cdot)$ из (17.3) и с ограничениями (17.2), (17.6).

Глава посвящена приближенному построению введенных множеств и нахождению внешних и внутренних оценок для них.

При применении дифференциально-разностной аппроксимации (метод прямых) [13] на множестве D вводится сетка — множество точек (узлов) $x^{mi} = i h_m$, $i = 0, \dots, m + 1$; $h_m = l(m + 1)^{-1}$, $m = 1, 2, \dots$. Внутренние узлы x^{mi} , $i = 1, \dots, m$, образуют сетку D_h . При кусочно-разностной аппроксимации (метод сеток) [134] на множестве T также вводится сетка $t^{nj} = j \tau_n$, $j = 0, \dots, n$; $\tau_n = \theta n^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$

Через d_{ih} и $\theta_{j\tau}$ обозначим элементарные ячейки: $d_{ih} = (x^{mi}, x^{m(i+1)}]$, $\theta_{j\tau} = (t^{n(j-1)}, t^{nj}]$. Введем пространство V^m , образованное сеточными функциями $w^m = (w_1^m, \dots, w_m^m)^\top$, заданными на D_h , со скалярным произведением $(u^m, v^m)_m = h_m \sum_{i=1}^m u_i^m v_i^m$ и нормой $\|u^m\|_m = ((u^m, u^m)_m)^{1/2}$.

Начально-краевая задача (17.1) и уравнение наблюдений (17.3) заменяются последовательностями конечномерных систем

$$\dot{u}^m(t) = B^m u^m(t) + c F^m(t), \quad t \in (0, \theta]; \quad u^m(0) = u_0^m; \quad (17.7)$$

$$y^m(t) = G^m(t) u^m(t) + \xi^m(t), \quad t \in T, \quad (17.8)$$

или соответственно

$$u^\Delta[j] = B^\Delta u^\Delta[j-1] + \tau_n B^\Delta c F^\Delta[j], \quad j = 1, \dots, n; \quad u^\Delta[0] = u_0^m; \quad (17.9)$$

$$y^\Delta[j] = G^\Delta[j] u^\Delta[j] + \xi^\Delta[j], \quad j = p_n, \dots, n; \quad p_n = [\delta \tau_n^{-1}] + 1, \quad (17.10)$$

где $u^m, F^m, u^\Delta, F^\Delta \in \mathbb{R}^m$, $y^m, y^\Delta \in \mathbb{R}^1$. Здесь $[z]$ означает целую часть числа z ; символом Δ обозначена пара индексов $\Delta = (m, n)$; $B^m = a^2 A^m$, $B^\Delta = (I^m - a^2 \tau_n A^m)^{-1}$, A^m — трехдиагональные $m \times m$ -матрицы, на главных диагоналях которых стоят элементы вида $-2h_m^{-2}$, а на прилежащих — вида h_m^{-2} ; I^m — единичные $m \times m$ -матрицы.

Для формализации перехода от функций непрерывного пространственного аргумента к сеточным функциям и обратно введем следующие операторы. Оператор \mathcal{L}^m отображает функцию $w(\cdot) \in L_2(D)$ в вектор $w^m \in V^m$ по правилу $\mathcal{L}^m w(\cdot) = w^m$, где $w_i^m = h_m^{-1} \int_{d_{ih}} w(x) dx$, $i = 1, \dots, m$, а оператор \mathcal{R}^m ставит в соответствие вектору $w^m \in V^m$ кусочно-постоянную функцию $w(\cdot) \in L_2(D)$: $\mathcal{R}^m w^m = w(\cdot)$, где $w(x) = w_i^m$ при $x \in d_{ih}$, $i = 1, \dots, m$, и $w(x) = w_1^m$ при $x \in d_{0h}$. Несложно проверить, что введенные операторы обладают следующими свойствами [60]. Если $w^m = \mathcal{L}^m w(\cdot)$, то $\sum_{k=1}^m (w^m, \Omega^{mk})_m^2 = \|w^m\|_m^2 \leq \|w\|^2$, $|(w, \omega_k) - (w^m, \Omega^{km})_m| \leq C \|w\| kh_m$, $k = 1, \dots, m$, а если $w^h = \mathcal{R}^m w^m$, то $\|w^h\| \leq 2 \|w^m\|_m$, $|(w^h, \omega_k) - (w^m, \Omega^{km})_m| \leq C \|w^m\|_m kh_m$. Здесь и ниже символами (u, v) и $\|u\|$ обозначаются для краткости скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(D)$.

Оператор $\mathcal{M}_{\delta\theta}^n$ ($0 \leq \delta \leq \theta$) отображает функцию $v(t)$, $t \in [\delta, \theta]$, в сеточную функцию $v^n[j]$, $j = p_n, \dots, n$: $\mathcal{M}_{\delta\theta}^n v(\cdot) = v^n[\cdot]$, где $v^n[j] = \tau_n^{-1} \int_{\theta_{j\tau} \cap [\delta, \theta]} v(t) dt$, $j = p_n, \dots, n$, $p_n = [\delta\tau_n^{-1}] + 1$, а оператор $\mathcal{S}_{\delta\theta}^n$, наоборот, отображает функцию $v^n[j]$, $j = p_n, \dots, n$, дискретного аргумента j в кусочно-постоянную функцию $v(t)$, $t \in [\delta, \theta]$: $\mathcal{S}_{\delta\theta}^n v^n[\cdot] = v(\cdot)$, где $v(t) = v^n[j]$ при $t \in \theta_{j\tau} \cap [\delta, \theta]$, $j = p_n, \dots, n$.

В уравнениях (17.8), (17.10), аппроксимирующих (17.3), полагаем

$$y^m(t) \equiv y(t), \quad t \in T; \quad y^\Delta[\cdot] = \mathcal{M}_{\delta\theta}^n y(\cdot),$$

где $y(\cdot)$ — именно тот сигнал, который реализовался в (17.3). Вектор-строчные функции $G^m(t)$, $t \in T$, и $G^\Delta[j]$, $j = p_n, \dots, n$, для точечных наблюдений имеют вид

$$G_k^m(t) = 1, \quad k = k^m(t) = [X(t) h_m^{-1}], \quad G_i^m(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq k^m(t);$$

$$G_k^\Delta[j] = 1, \quad k = k^\Delta[j] = [X(t^{nj}) h_m^{-1}], \quad G_i^\Delta[j] = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad i \neq k^\Delta[j],$$

причем, если оказалось $G^m(t)=0$ или $G^\Delta[j]=0$, то эту нуль-строку заменяем на $(1, 0, \dots, 0)$. Для пространственно-усредненных наблюдений

$$G^m(t)^\top = h_m \mathcal{L}^m g(\cdot, t); \quad (G^\Delta)^\top[\cdot] = \mathcal{M}_{\delta\theta}^n (h_m \mathcal{L}^m g(\cdot, \cdot)).$$

Считаем, что начальные условия и правые части в (17.7), (17.9) стеснены геометрическими ограничениями в виде параллелепипедов

$$u_0^m \in U_0^m = \mathcal{P}(p^m[0], I^m, \pi^m[0]), \tag{17.11}$$

$$p^m[0] = \mathcal{L}^m \bar{u}_0, \quad \pi^m[0] = \mathcal{L}^m \omega_1;$$

$$F^m(t) \in \mathcal{W}^m(t) = \mathcal{P}(r^m(t), I^m, \rho^m(t)), \tag{17.12}$$

$$r^m(t) = \mathcal{L}^m \bar{f}(\cdot, t), \quad \rho^m(t) = \mathcal{L}^m \omega_2(\cdot, t);$$

$$F^\Delta[j] \in \mathcal{W}^\Delta[j] = \mathcal{P}(r^\Delta[j], I^m, \rho^\Delta[j]), \tag{17.13}$$

$$r^\Delta = \mathcal{M}_{0\theta}^n \mathcal{L}^m \bar{f}, \quad \rho^\Delta = \mathcal{M}_{0\theta}^n \mathcal{L}^m \omega_2,$$

а помехи в уравнениях измерений (17.8), (17.10) — ограничениями

$$|\xi^m(t) - \bar{\xi}^m(t)| \leq \sigma^m(t), \quad t \in T, \quad \bar{\xi}^m(t) \equiv \bar{\xi}(t), \quad \sigma^m(t) = \omega_3(t) + \delta_m; \tag{17.14}$$

$$|\xi^\Delta[j] - \bar{\xi}^\Delta[j]| \leq \sigma^\Delta[j], \quad j = p_n, \dots, n, \quad \bar{\xi}^\Delta = \mathcal{M}_{\delta\theta}^n \bar{\xi}, \quad \sigma^\Delta = \mathcal{M}_{\delta\theta}^n \omega_3 + \delta_\Delta. \tag{17.15}$$

Добавки δ_m и δ_Δ будут конкретизированы ниже.

Обозначим через $U_a^m(\theta)$ и $U_a^\Delta[n]$ соответственно МД систем (17.7), (17.11), (17.12) и (17.9), (17.11), (17.13), а через $U^m(\theta; y^m(\cdot))$ и $U^\Delta[n; y^\Delta[\cdot]]$ соответственно информационные области тех же систем, дополненных соотношениями (17.8), (17.14) и (17.10), (17.15). Для аппроксимации \mathcal{U}_a и \mathcal{U} используем кусочно-постоянные восполнения введенных множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a^m &= \mathcal{U}_a^m(\theta) = \mathcal{R}^m U_a^m(\theta), & \mathcal{U}_a^\Delta &= \mathcal{U}_a^\Delta(\theta) = \mathcal{R}^m U_a^\Delta[n], \\ \mathcal{U}^m &= \mathcal{U}^m(\theta; y(\cdot)) = \mathcal{R}^m U^m(\theta; y^m(\cdot)), & \mathcal{U}^\Delta &= \mathcal{U}^\Delta(\theta; y(\cdot)) = \mathcal{R}^m U^\Delta[n; y^\Delta[\cdot]]. \end{aligned}$$

Аргументы θ , $y(\cdot)$, $y^m(\cdot)$, n , $y^\Delta[\cdot]$ будем далее для краткости опускать.

Множества U^m и U^Δ можно рассматривать как множества достижимости аппроксимирующих систем (17.7), (17.11), (17.12) и (17.9), (17.11), (17.13) при соответствующих фазовых ограничениях в виде гиперполос

$$u^m(t) \in \Sigma^m(t) = \Sigma(c^m(t), G^m(t)^\top, \sigma^m(t)), \quad c^m(t) = y(t) - \bar{\xi}(t); \quad (17.16)$$

$$u^\Delta[j] \in \Sigma^\Delta[j] = \Sigma(c^\Delta[j], G^\Delta[j]^\top, \sigma^\Delta[j]), \quad c^\Delta[\cdot] = \mathcal{M}_{\delta\theta}^n(y(\cdot) - \bar{\xi}(\cdot)). \quad (17.17)$$

18 Сходимость при аппроксимации множеств достижимости и информационных областей

Утверждения о сходимости сформулируем в терминах хаусдорфова полурасстояния h_+ в $L_2(D)$: $h_+(\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2) = \min\{\gamma \geq 0 \mid \mathcal{U}^1 \subseteq \mathcal{U}^2 + \gamma \mathcal{B}(0, 1)\}$ ($\mathcal{B}(0, 1)$ — единичный шар в $L_2(D)$).

Предположение 18.1 При использовании конечно-разностных аппроксимаций считаем функции $X(t)$, $g(x, t)$ кусочно-гладкими по t .

Теорема 18.1 При сделанных предположениях найдутся такие константы C , что при выборе добавок δ_m и δ_Δ в (17.14), (17.15) в виде

$$\delta_m = C(h_m + c h_m^\lambda), \quad \delta_\Delta = C(h_m + \tau_n + c(h_m^\lambda + \tau_n^\lambda)), \quad (18.1)$$

где $\lambda = 1/4$ в случае точечных наблюдений и $\lambda = 1/2$ в случае пространственно-усредненных, информационные области U^m и U^Δ в ап-

проксимирующих задачах непусты. При этом имеют место оценки

$$h_+(\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_a^m) \leq \varepsilon_m, \quad h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^m) \leq \varepsilon_m, \quad h_+(\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_a^\Delta) \leq \varepsilon_\Delta, \quad h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\Delta) \leq \varepsilon_\Delta, \quad (18.2)$$

где $\varepsilon_m = C(h_m + c h_m^{1/2})$, $\varepsilon_\Delta = C(h_m + \tau_n + c(h_m^{1/2} + \tau_n^{1/2}))$.

Значения упомянутых констант C не выписываем во избежание громоздкости. Для доказательства нам потребуется

Лемма 18.1 Пусть $u(x, t)$, $u^m(t)$ и $u^\Delta[j]$ — решения систем (17.1), (17.7) и (17.9), в которых входные данные связаны соотношениями

$$u_0^m = \mathcal{L}^m u_0(\cdot), \quad c F^m(t) = \mathcal{L}^m(c f(\cdot, t)), \quad \text{н.в. } t \in [0, \theta], \quad c F^\Delta = \mathcal{M}_{0\theta}^n \mathcal{L}^m(c f). \quad (18.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \theta) - \mathcal{R}^m u^m(\theta)\| &\leq C(h_m \|u_0\| + h_m^{1/2} \|c f\|_{L_2(Q)}); \\ \|G(t) u(\cdot, t) - G^m(t) u^m(t)\|_Y &\leq C(h_m \|u_0\| + h_m^\lambda \|c f\|_{L_2(Q)}); \\ \|u(\cdot, \theta) - \mathcal{R}^m u^\Delta[n]\| &\leq C((h_m + \tau_n) \|u_0\| + (h_m^{1/2} + \tau_n^{1/2}) \|c f\|_{L_2(Q)}); \\ |\mathcal{M}_{\delta\theta}^n(G u)[j] - G^\Delta[j] u^\Delta[j]| &\leq C((h_m + \tau_n) \|u_0\| + (h_m^\lambda + \tau_n^\lambda) \|c f\|_{L_2(Q)}), \\ & j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Доказательство основано на представлении решений в виде бесконечного и конечных рядов Фурье и проводится путем добавления и вычитания перекрестных членов и прямых оценок с использованием соотношений из § 17 и Приложения А2 аналогично [60, лемма 1.3.1]. \square

Доказательство теоремы 18.1. Докажем, к примеру, четвертое из неравенств (18.2). Любой функции $u_* \in \mathcal{U}$ соответствует такая тройка $\{u_0, c f, \xi\}$ (возможно, не единственная), удовлетворяющая (17.2), (17.6), что для соответствующего решения $u(x, t)$ системы (17.1)

$$u(\cdot, \theta) = u_*(\cdot); \quad y(t) = G(t) u(\cdot, t) + \xi(t). \quad (18.4)$$

Построим соответствующие в силу (18.3) значения u_0^m и $c F^\Delta[\cdot]$ и рассмотрим соответствующее им решение $u^\Delta[\cdot]$ системы (17.9). Значения

u_0^m и $c F^\Delta[\cdot]$ удовлетворяют включениям (17.11), (17.13), т.к., например, $|F^\Delta[j] - r^\Delta[j]| \leq \mathcal{M}_{0\theta}^n \mathcal{L}^m(|f - \bar{f}|) \leq \mathcal{M}_{0\theta}^n \mathcal{L}^m \omega_2 = \rho^\Delta[j]$, $j = 1, \dots, n$. Далее, имеем (17.10), где $\xi^\Delta = \mathcal{M}_{\delta\theta}^n(Gu) - G^\Delta u^\Delta + \mathcal{M}_{\delta\theta}^n \xi$, причем в силу последней оценки из леммы 18.1 выполнено ограничение (17.15): $|\xi^\Delta[j] - \bar{\xi}^\Delta[j]| \leq \delta_\Delta + \mathcal{M}_{\delta\theta}^n(|\xi - \bar{\xi}|) \leq \sigma^\Delta[j]$, $j = p_n, \dots, n$. Таким образом, $u^\Delta[n] \in U^\Delta$. Соотношение $\|u(\cdot, \theta) - \mathcal{R}^m u^\Delta[n]\| \leq \varepsilon_\Delta$, имеющее место также в силу леммы 18.1, означает, что $h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\Delta) \leq \varepsilon_\Delta$. \square

При сформулированных ниже дополнительных условиях можно гарантировать сходимость аппроксимирующих множеств к исходным не только в смысле полурасстояния h_+ , но и в хаусдорфовой метрике.

Предположение 18.2 Функции \bar{u}_0 , ω_1 , \bar{f} , ω_2 , а при конечно-разностных аппроксимациях и функции $\bar{\xi}$, ω_3 и y — кусочно-гладкие.

Предположение 18.3 Имеет место следующая сходимость

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_+(\mathcal{U}^{(\alpha)}, \mathcal{U}) = 0, \quad (18.5)$$

где $\mathcal{U}^{(\alpha)} = \mathcal{U}^{(\alpha)}(\theta; y(\cdot))$ — информационная область в задаче гарантированного оценивания $u(\cdot, \theta)$ в системе (17.1), (17.3) при ограничениях (17.2) и

$$\xi(\cdot) \in \Xi^{(\alpha)} \triangleq \{\xi(\cdot) \in Y \mid |\xi(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) + \alpha, \text{ п.в. } t \in T\}, \text{ где } \alpha \geq 0. \quad (18.6)$$

Поскольку $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{(\alpha)}$, то $h_+(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{(\alpha)}) = 0$, и соотношение (18.5) означает сходимость $\mathcal{U}^{(\alpha)}$ к \mathcal{U} в метрике Хаусдорфа. Сформулируем некоторые достаточные условия, обеспечивающие (18.5).

Замечание 18.1 Предположим, что

$$c = 0, \quad u_0(\cdot) \in L_2(D), \quad (18.7)$$

$$\xi(t) \equiv 0, \quad t \in T, \quad (18.8)$$

и система (17.1), (17.3), (18.7), (18.8) или, короче, система (17.1), (18.9):

$$z(t) = G(t) u(\cdot, t), \quad t \in T, \quad (c = 0), \quad (18.9)$$

непрерывно наблюдаема в конечный момент времени θ [181], т.е. существует такая константа $K > 0$, что для любого решения $u(x, t)$ задачи

(17.1) справедливо неравенство $\|u(\cdot, \theta)\| \leq K \|z\|_Y$, где $Y = L_\infty(T)$. Иначе говоря, $\|\mathcal{C}^{-1}z\| \leq K \|z\|_Y$, где \mathcal{C} — оператор, ставящий в соответствие функции $u(\cdot, \theta)$ сигнал $z(\cdot)$. В этом случае $h_+(\mathcal{U}^{(\alpha)}, \mathcal{U}) \leq K \alpha$.

Действительно, если $u_* \in \mathcal{U}^{(\alpha)}$, то найдутся $u_0 \in L_2(D)$ и $\xi \in \Xi^{(\alpha)}$ такие, что для соответствующего решения u системы (17.1) имеем (18.4). Тогда для расстояния (в $L_2(D)$) между u_* и \mathcal{U} справедливы соотношения $\rho(u_*, \mathcal{U}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|u_* - u\| = \inf_{\zeta \in \Xi} \|\mathcal{C}^{-1}(y - \xi) - \mathcal{C}^{-1}(y - \zeta)\| \leq K \cdot \inf_{\zeta \in \Xi} \|\xi - \zeta\|_Y \leq K \alpha$, и, значит, выполнено указанное неравенство.

Замечание 18.2 Известно (см., например, [136]), что непрерывная наблюдаемость эквивалентна *сильной наблюдаемости* системы (17.1), (17.3), (18.7), состоящей [198] в том, что множество $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ в задаче оценивания (17.1), (18.7), (17.3) с условием $\|\xi\|_Y \leq 1$ ограничено в $L_2(D)$ при любом наблюдаемом сигнале $y(\cdot)$. Операторы $G(\cdot)$, обеспечивающие непрерывную (сильную) наблюдаемость, существуют. Например, в случае точечных наблюдений достаточно рассмотреть стационарные с $X(t) \equiv X$, где $X l^{-1}$ — алгебраическое иррациональное число какой-либо степени ≥ 2 , либо взять в качестве траектории наблюдения непрерывную функцию $X(t)$, область значений которой совпадает с \bar{D} [198].

Замечание 18.3 Пусть $\omega_3(t)$ такова, что $\min_{t \in T} \omega_3(t) = \omega_3^* > 0$, и сигнал $y(\cdot)$ — *регулярный* [198], т.е. найдутся число β , $\omega_3^* > \beta > 0$, и хотя бы одна тройка функций $\{\hat{u}_0, c \hat{f}, \hat{\xi}\}$, порождающих этот сигнал в силу (17.1) – (17.3), такая, что $|\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) - \beta$, п.в. $t \in T$. Тогда

$$h_+(\mathcal{U}^{(\alpha)}, \mathcal{U}) \leq C (\|\omega_1\| + \|c \omega_2\|_{L_2(Q)}) \alpha (\alpha + \beta)^{-1}. \quad (18.10)$$

Действительно, если $u_* \in \mathcal{U}^{(\alpha)}$, то найдутся $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $f \in \mathcal{F}$ и $\xi \in \Xi^{(\alpha)}$, дающие (18.4). Функции $u_0^\lambda = \lambda \hat{u}_0 + (1-\lambda)u_0 \in \mathcal{U}_0$, $f^\lambda = \lambda \hat{f} + (1-\lambda)f \in \mathcal{F}$ порождают решение u^λ задачи (17.1), для которого $G(t)u^\lambda(\cdot, t) = y(t) - \xi^\lambda(t)$, $\xi^\lambda = \lambda \hat{\xi} + (1-\lambda)\xi$, причем $|\xi^\lambda(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \lambda |\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t)| + (1-\lambda) |\xi(t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) - \lambda\beta + (1-\lambda)\alpha$. Полагая $\lambda = \alpha/(\beta + \alpha)$, получаем $\xi^\lambda \in \Xi$, и, значит, $u^\lambda(\cdot, \theta) \in \mathcal{U}$. Но $\|u_0 - u_0^\lambda\| = \lambda \|\hat{u}_0 - u_0\| \leq \lambda (\|\hat{u}_0 - \bar{u}_0\| + \|\bar{u}_0 - u_0\|) \leq 2 \lambda \|\omega_1\|$ и аналогично для $\|f - f^\lambda\|_{L_2(Q)}$. Теперь из (A2.2) следует оценка

сверху для $\|u(\cdot, \theta) - u^\lambda(\cdot, \theta)\|$, обеспечивающая (18.10).

Теорема 18.2 Пусть выполнены все условия, сформулированные в § 17, предположения 18.1 и 18.2. Тогда

$$\begin{aligned} h_+(\mathcal{U}_a^m, \mathcal{U}_a) &\leq \varepsilon_m, & h_+(\mathcal{U}^m, \mathcal{U}) &\leq \varepsilon_m + h_+(\mathcal{U}^{(\delta_m)}, \mathcal{U}), \\ h_+(\mathcal{U}_a^\Delta, \mathcal{U}_a) &\leq \varepsilon_\Delta, & h_+(\mathcal{U}^\Delta, \mathcal{U}) &\leq \varepsilon_\Delta + h_+(\mathcal{U}^{(\delta_\Delta)}, \mathcal{U}), \end{aligned} \quad (18.11)$$

где $\delta_m, \delta_\Delta, \varepsilon_m$ и ε_Δ имеют такую же форму, как в теореме 18.1.

Для доказательства нам потребуется две леммы. Доказательство первой аналогично доказательству леммы 18.1, вторая проверяется с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Лемма 18.2 Пусть $u^m(t)$ и $u^\Delta[j]$ — решения систем (17.7) и (17.9), а $u^h(x, t)$ и $u^{h\tau}(x, t)$ — решения системы (17.1), в которой входные данные равны, соответственно,

$$\begin{aligned} u_0^h &= \mathcal{R}^m u_0^m, & c f^h(\cdot, t) &= \mathcal{R}^m(c F^m(t)) \text{ при н.в. } t \in [0, \theta]; \\ u_0^h &= \mathcal{R}^m u_0^m, & c f^{h\tau}(\cdot, \cdot) &= \mathcal{S}_{0\theta}^n \mathcal{R}^m(c F^\Delta[\cdot]). \end{aligned} \quad (18.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u^h(\cdot, \theta) - \mathcal{R}^m u^m(\theta)\| &\leq C (h_m \|u_0^m\|_m + h_m^{1/2} (\int_0^\theta \|c F^m(t)\|_m^2 dt)^{1/2}); \\ \|G(t) u^h(\cdot, t) - G^m(t) u^m(t)\|_Y &\leq C (h_m \|u_0^m\|_m + h_m^\lambda (\int_0^\theta \|c F^m(t)\|_m^2 dt)^{1/2}); \\ \|u^{h\tau}(\cdot, \theta) - \mathcal{R}^m u^\Delta[n]\| &\leq C ((h_m + \tau_n) \|u_0^m\|_m + (h_m^{1/2} + \tau_n^{1/2}) (\tau_n \sum_{j=1}^n \|c F^\Delta[j]\|_m^2)^{1/2}); \\ \|G u^{h\tau} - \mathcal{S}_{\delta\theta}^n(G^\Delta u^\Delta)\|_Y &\leq C ((h_m + \tau_n) \|u_0^m\|_m + (h_m^\lambda + \tau_n^\lambda) (\tau_n \sum_{j=1}^n \|c F^\Delta[j]\|_m^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

Лемма 18.3 Пусть $u_0^m, F^m(\cdot), F^\Delta[\cdot], \xi^m(\cdot)$ и $\xi^\Delta[\cdot]$ удовлетворяют включениям (17.11) – (17.15), функции $u_0^h, f^h, f^{h\tau}$ имеют вид (18.12),

а $\xi^h(t) \equiv \xi^m(t)$, $\xi^{h\tau}(\cdot) = \mathcal{S}_{\delta\theta}^n \xi^\Delta[\cdot]$. Тогда при выполнении предположения 18.2

$$u_0^h \in \mathcal{U}_0^{(\beta_m)}, \quad f^h \in \mathcal{F}^{(\beta_m)}, \quad f^{h\tau} \in \mathcal{F}^{(\beta_\Delta)}, \quad \xi^h \in \Xi^{(\delta_m + \gamma_n)}, \quad \xi^{h\tau} \in \Xi^{(\delta_\Delta + \gamma_n)},$$

где $\beta_m = Ch_m$, $\beta_\Delta = C(h_m + \tau_n)$, $\gamma_n = C\tau_n$, δ_m и δ_Δ введены выше, $\Xi^{(\alpha)}$ определено в (18.6),

$$\mathcal{U}_0^{(\alpha)} = \{u_0(\cdot) \in L_2(D) \mid |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| \leq \omega_1(x) + \alpha, \text{ н.в. } x \in D\},$$

$$\mathcal{F}^{(\alpha)} = \{f(\cdot, \cdot) \in L_2(Q) \mid |f(x, t) - \bar{f}(x, t)| \leq \omega_2(x, t) + \alpha, \text{ н.в. } x, t \in Q\}.$$

Доказательство теоремы 18.2. Докажем, например, четвертое из неравенств (18.11). Любой функции $u_* \in \mathcal{U}^\Delta$ соответствует некоторая тройка $\{u_0^m, cF^\Delta, \xi^\Delta\}$, удовлетворяющая (17.11), (17.13), (17.15), такая, что для соответствующего решения $u^\Delta[\cdot]$ системы (17.9) имеем $\mathcal{R}^m u^\Delta[n] = u_*(\cdot)$ и (17.10). Построим в силу (18.12) функции u_0^h и $c f^{h\tau}$ и рассмотрим соответствующее им решение $u^{h\tau}$ системы (17.1). По лемме 18.3 $u_0^h \in \mathcal{U}_0^{(\beta_m)}$, $f^{h\tau} \in \mathcal{F}^{(\beta_\Delta)}$. Далее, можно заметить, что $y(t) = G(\cdot) u^{h\tau}(\cdot, t) + \xi^{h\tau}(t)$, где $\xi^{h\tau}(t) = \mathcal{S}_{\delta\theta}^n \xi^\Delta + \mathcal{S}_{\delta\theta}^n G^\Delta u^\Delta - Gu^{h\tau} + y - \mathcal{S}_{\delta\theta}^n y^\Delta$, причем ввиду лемм 18.2, 18.3 и кусочной гладкости $y(\cdot)$ получаем, что $\xi^{h\tau} \in \Xi^{(\delta_\Delta + \gamma_n + \delta_\Delta + C\tau_n)} = \Xi^{(\delta_\Delta)}$ (здесь и далее для краткости используется условная запись для добавок, отражающая порядок их малости). Таким образом, $u^{h\tau}(\cdot, \theta) \in \mathcal{U}^{\beta_m, c\beta_\Delta, \delta_\Delta}$, где символом $\mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\theta; y(\cdot))$ обозначена информационная область системы (17.1), (17.3) с неопределенностями из $\mathcal{U}_0^{(\alpha_1)}$, $c\mathcal{F}^{(\alpha_2)}$ и $\Xi^{(\alpha_3)}$. Соотношение $\|u^{h\tau}(\cdot, \theta) - u_*(\cdot)\| \leq \varepsilon_\Delta$, имеющее место ввиду леммы 18.2, означает, что $h_+(\mathcal{U}^\Delta, \mathcal{U}^{\beta_m, c\beta_\Delta, \delta_\Delta}) \leq \varepsilon_\Delta$.

Докажем теперь оценку типа $h_+(\mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}, \mathcal{U}^{0, 0, \alpha_3 + C_1(\alpha_1 + \alpha_2)}) \leq C_2(\alpha_1 + \alpha_2)$. В самом деле, каждой функции $u_* \in \mathcal{U}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ соответствуют некоторые $u_0 \in \mathcal{U}_0^{(\alpha_1)}$, $f \in \mathcal{F}^{(\alpha_2)}$, $\xi \in \Xi^{(\alpha_3)}$, такие что для соответствующего решения u имеем (18.4). Построим \tilde{u}_0 по правилу $\tilde{u}_0(x) = u_0(x)$ при $|u_0(x) - \bar{u}_0(x)| \leq \omega_1(x)$, $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) + \omega_1(x)$ при $u_0(x) > \bar{u}_0(x) + \omega_1(x)$, и $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) - \omega_1(x)$ при $u_0(x) < \bar{u}_0(x) - \omega_1(x)$. Тогда $\tilde{u}_0 \in \mathcal{U}_0$ и $|\tilde{u}_0(x) - u_0(x)| \leq \alpha_1$. Аналогично построим $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, $|\tilde{f} - f| \leq \alpha_2$.

Неравенства (A2.1), (A2.2) обеспечивают, что для порождаемого функциями \tilde{u}_0 и \tilde{f} решения \tilde{u} имеем $\|\tilde{u}(\cdot, \theta) - u(\cdot, \theta)\| \leq C_2(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $|y(t) - G(t)\tilde{u}(\cdot, t) - \bar{\xi}(t)| \leq \omega_3(t) + \alpha_3 + C_1(\alpha_1 + \alpha_2)$. Значит, $\tilde{u}(\cdot, \theta) \in \mathcal{U}^{0,0,\alpha_3+C_1(\alpha_1+\alpha_2)}$, и упомянутая оценка верна.

Используя полученные оценки и неравенство треугольника для h_+ , учитывая вид β_m и β_Δ , а также вспоминая, что $\mathcal{U}^{0,0,\delta_\Delta} = \mathcal{U}^{(\delta_\Delta)}$, получаем четвертое из неравенств (18.11). \square

19 Полиэдральные оценки. Результаты численного моделирования

Для нахождения оценок множеств \mathcal{U}_a и \mathcal{U} можно использовать параллелепипедозначные оценки решений аппроксимирующих задач. Действительно, если построены параллелепипеды

$$\mathcal{P}^{\Delta-}[k] \subseteq U^\Delta[k] \subseteq \mathcal{P}^{\Delta+}[k], \quad k = 0, \dots, n,$$

то согласно изложенному имеем:

$$\mathcal{R}^m \mathcal{P}^{\Delta-}[n] \subseteq \mathcal{U} + \tilde{\varepsilon}_\Delta \mathcal{B}(0, 1), \quad \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^m \mathcal{P}^{\Delta+}[n] + \varepsilon_\Delta \mathcal{B}(0, 1),$$

где $\varepsilon_\Delta, \tilde{\varepsilon}_\Delta = \varepsilon_\Delta + h_+(\mathcal{U}^{(\delta_\Delta)}, \mathcal{U})$ — величины из теорем 18.1, 18.2.

Рассмотрим сначала внешние оценки $\mathcal{P}^{\Delta+}[k] = \mathcal{P}(p^{\Delta+}[k], P^{\Delta+}[k], \pi^{\Delta+}[k])$ для множеств $U_a^\Delta[k]$ и $U^\Delta[k]$ в системах (17.9), (17.11), (17.13) и (17.9), (17.11), (17.13), (17.17). Ниже для краткости индексы m, n и Δ в обозначениях будем опускать. Оценки $\mathcal{P}^+[k]$ строим по рекуррентным формулам из теоремы 10.3:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(0)+}[k] &= \mathbf{P}_{P^{(0)+}[k]}^+(B \mathcal{P}^+[k-1] + c\tau B\mathcal{W}[k]), \quad k = 1, \dots, n, \\ \mathcal{P}^+[k] &= \begin{cases} \mathcal{P}^{(0)+}[k], & \text{при оценивании } U_a[k], \\ \mathbf{P}_{P^{(1)+}[k]}^+(\mathcal{P}^{(0)+}[k] \cap \Sigma[k]), & \text{при оценивании } U[k], \end{cases} \\ \mathcal{P}^+[0] &= \mathbf{P}_{P^{(0)+}[0]}^+(U_0). \end{aligned} \tag{19.1}$$

Варьируя $P^{(0)+}[k]$ и $P^{(1)+}[k]$, получаем семейства внешних оценок.

Полагая $P^{(0)+}[k] \equiv P^{(1)+}[k] \equiv I$, несложно построить внешние поординатные оценки (обозначим их $\mathcal{P}_I^{a+}[k]$ и $\mathcal{P}_I^+[k]$) для $U_a[k]$ и $U[k]$. При этом вычисление $\mathcal{P}^+[k]$ на основе $\mathcal{P}^{(0)+}[k]$ в (19.1) будем производить с помощью следующего замечания, вытекающего из леммы 5.4.

Замечание 19.1 Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$, $\Sigma = \Sigma(c, s, \sigma)$ и $\mathcal{P} \cap \Sigma \neq \emptyset$. Тогда $\mathbf{P}_P^+(\mathcal{P} \cap \Sigma) = \mathcal{P}(\tilde{p}, P, \tilde{\pi})$, где

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p + P \operatorname{diag} \nu \operatorname{diag} ((r^{(+)} - r^{(-)})/2) \pi; & \tilde{\pi} &= \operatorname{diag} ((r^{(+)} + r^{(-)})/2) \pi; \\ r_j^{(\pm)} &= \begin{cases} \min\{1, \gamma^{(\pm)}/\alpha_j - 1\}, & \text{если } \alpha_j \neq 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} & j &= 1, \dots, m; \\ \alpha &= \operatorname{Abs}(s^\top P \operatorname{diag} \pi), & \gamma^{(\pm)} &= \sigma \mp s^\top p \pm c + \sum_{i=1}^m \alpha_i, \end{aligned}$$

$\nu_i = 1$, если $s^\top p^i \pi_i \geq 0$, и $\nu_i = -1$, если $s^\top p^i \pi_i < 0$, $i=1, \dots, m$. Пересечение $\mathcal{P} \cap \Sigma$ непусто тогда и только тогда, когда $\gamma^{(+)} \geq 0$ и $\gamma^{(-)} \geq 0$.

Рассмотрим теперь касающиеся оценки для $U_a[k]$. Фиксируя $P^{(0)+}[0]$ и выбирая по теореме 7.2 матрицы $P^{(0)+}[k]=P^+[k]$, $k=1, \dots, n$, "в силу системы", конкретизируем формулы (19.1) с учетом (17.11), (17.13):

$$\begin{aligned} p^+[k] &= B(p^+[k-1] + \operatorname{ctr}[k]), \quad k=1, \dots, n, \quad p^+[0] = p[0]; \\ P[k] &= B P^+[k-1], \quad N[k] = \operatorname{diag} \{\|p^i[k]\|\}, \quad P^+[k] = P[k] N[k]^{-1}, \\ Q[k] &= N[k] Q[k-1] B^{-1} = N[k] Q[k-1] (I - a^2 \tau A), & (19.2) \\ \pi^+[k] &= N[k] (\pi^+[k-1] + \operatorname{ct} \operatorname{Abs}(Q[k-1]) \rho[k]), \quad k=1, \dots, n, \\ Q[0] &= P^+[0]^{-1}, \quad \pi^+[0] = \operatorname{Abs}(Q[0]) \pi[0]. \end{aligned}$$

Здесь $\|p^i[k]\|$ — значения евклидовой нормы столбцов матрицы $P[k]$; матрицы $Q[k]$ — обратные к $P^+[k]$. Вычисление произведений типа $Bv = (I - a^2 \tau A)^{-1}v$ можно проводить экономичным способом (методом прогонки [134]). Однако из-за уравнений для $Q[k]$ схема (19.2) оказывается неустойчивой по начальным данным¹.

¹Напомним, что согласно одному из определений [10, с.520] разностная схема устойчива по начальным данным, если собственные числа матрицы (оператора) перехода от слою к слою лежат в круге радиуса $1 + C\tau$.

Поэтому рассмотрим оценки, построенные по формулам, вытекающим из (19.2), когда $P^{(0)+}[k] \equiv P^+[0]$, а в качестве столбцов $P^+[0]$ взяты собственные векторы матрицы A : $P^+[0] = h^{1/2} \{\Omega^1 \dots \Omega^m\}$. При этом $P^+[k] \equiv P^+[0]$, $Q[k] \equiv Q[0] = P^+[0]^\top$, и упрощаются формулы для $\pi^+[k] = \pi^{(0)+}[k]$: $\pi^{(0)+}[k] = \text{diag} \{\mu_i\} (\pi^+[k-1] + \tau \text{Abs}(Q[k-1])\rho[k])$, $k=1, \dots, n$, где μ_i — собственные числа матрицы B (см. Приложение А2). При построении оценок $\mathcal{P}^+[k]$ для информационных областей $U[k]$ в соотношениях (19.1) полагаем $P^{(1)+}[k] \equiv P^{(0)+}[k] \equiv P^+[0]$ и опять используем замечание 19.1. Величины полуосей параллелепипедов $\mathcal{P}^+[k]$ дают в этом случае оценки для коэффициентов разложения решения аппроксимирующей системы в конечный ряд Фурье по системе векторов $\{\Omega^s\}_{s=1}^m$. Далее будем для краткости называть такие параллелепипеды оценками "по Фурье".

Внутренние оценки для $U[k]$, $U_a[k]$ находим по рекуррентным формулам из теоремы 10.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(0)-}[k] &= \mathbf{P}_{I,\Gamma[k]}^-(B \mathcal{P}^-[k-1] + c\tau B\mathcal{W}[k]), \quad k = 1, \dots, n, \\ \mathcal{P}^-[k] &= \begin{cases} \mathcal{P}^{(0)-}[k], & \text{при оценивании } U_a[k], \\ \mathbf{P}_{p^-[k], P^-[k]}^-(\mathcal{P}^{(0)-}[k] \cap \Sigma[k]), & \text{при оценивании } U[k], \end{cases} \\ \mathcal{P}^-[0] &= U_0. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Здесь матрицы $\Gamma[k]$ строятся по формулам типа (16.4); матрицы $P^-[k]$ берутся такими же, как матрицы ориентации параллелепипедов $\mathcal{P}^{(0)-}[k]$, а центр $p^-[k]$ вычисляется по формулам (5.24), (5.25).

Пример 19.1 Рассмотрим систему (17.1) - (17.4), (17.6), в которой $a = 0.1$; $l = 1$; $c = 1$; $\delta = 0.5$; $\theta = 10$; $X(t) \equiv l/2$; $\bar{u}_0(x) = \sin(\pi x)$; $\omega_1(x) = 0.6 \sin(\pi x)$; $\bar{f}(x, t) \equiv 1.1$ при $0.8 \leq x \leq 0.9$ и $\bar{f}(x, t) \equiv 0$ при остальных значениях $x \in D$; $\omega_2(x, t) \equiv 0.13$; $\bar{\xi}(t) \equiv 0$; $\omega_3(t) \equiv 0.1$; сигнал $y(t)$ порожден решением u системы (17.1), соответствующим u_0 и f , где $u_0(x)$ — это отрезок ряда Фурье (30 первых членов) кусочно-линейной функции \tilde{u}_0 : $\tilde{u}_0(x) = x/\lambda$ при $0 \leq x \leq \lambda$, $\tilde{u}_0(x) = (l-x)/(l-\lambda)$ при $\lambda \leq x \leq l$, $\lambda = 0.25$, а не зависящая от t функция f также строится в виде суммы первых 30 членов ряда Фурье функции $\tilde{f}(x, t) \equiv 1$ при $0.8 \leq x \leq 0.9$

и $\tilde{f}(x, t) \equiv 0$ для остальных x ; помеха $\xi(t) = 0.05 \cos(\pi t)$. Заметим, что полученный при этом сигнал $y(\cdot)$ оказывается регулярным в силу замечания 18.3. На рис. 19.1 для наглядности показаны исходные данные для рассматриваемой системы. Требуется оценить возможные значения температуры в момент θ . Положим $n = 5(m+1)$.

Были построены внешние² и внутренние оценки для множества достижимости \mathcal{U}_a и для информационной области \mathcal{U}_a в конечный момент времени $t = \theta$. Для изучения качественной картины добавки δ_Δ в (17.15) взяты в виде (18.1), где число $C = 0.5$ подобрано так, чтобы обеспечить непустоту оценок $\mathcal{P}^+[k]$, а значения $\varepsilon_\Delta, \tilde{\varepsilon}_\Delta$ взяты равными нулю.

На рис. 19.3(а) показаны моделируемое решение u при $t = \theta$ (крестиками), а также границы и центры внешних по координатным осям оценок для информационной области $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$, построенные при $m = 49$, $m = 99$ и $m = 199$ (соответственно, точечными, штриховыми и сплошными линиями). На рис. 19.3(б) изображены для сравнения границы и центры внешних по координатным осям оценок для множества достижимости $\mathcal{U}_a(\theta)$ и информационной области $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$, полученные при $m = 199$ (серым и черным цветом соответственно), а также $u(\cdot, \theta)$.

Рис. 19.3(с) и 19.3(д), которые аналогичны по содержанию рис. 19.3(а) и 19.3(б), иллюстрируют внешние оценки "по Фурье". Здесь значения верхней и нижней границ для $u(x, \theta)$ в узлах сетки x^{mi} равны значениям опорной функции $\rho(l|\mathcal{P}^+[n])$ на соответствующих i -х ортах $l = \pm e^i$ в пространстве \mathbb{R}^m . Таким образом, построены простые внешние оценки для \mathcal{U}_a и \mathcal{U} и очерчены границы для возможных значений $u(x, t)$ при $t = \theta$. Видно, что учет результатов измерений позволил сузить границы возможных значений. К сожалению, оказалось, что в параллелепипедах $\mathcal{P}^{a+}[n]$ и $\mathcal{P}^+[n]$, соответствующих оцениванию "по Фурье", величины полуосей $\pi_i^+[n] \approx 7.8322 < \pi_i^{a+}[n] \approx 12.7544$ только для $i = 1$, а для остальных значений $i = 2, \dots, m$ имеют место равенства $\pi_i^+[n] = \pi_i^{a+}[n]$.

²Построение внешних оценок проводилось совместно с Л.В. Сташковой.

По-видимому, это является следствием жесткости системы (17.9) (большой разброс собственных чисел матрицы B приводит к большому разбросу величин полуосей $\pi_1^+[n] \gg \pi_2^+[n] \gg \dots \gg \pi_m^+[n]$, затрудняющему оценивание).

Хотя области, показанные на рис. 19.3(b), кажутся "меньше", чем на рис. 19.3(d), следует иметь ввиду, что параллелепипеды $\mathcal{P}^+[n]$ и $\mathcal{P}_I^+[n]$ имеют разные матрицы ориентации, а на рисунках показан результат проектирования на орты в \mathbb{R}^m . В качестве критериев для сравнения "величины" ортогональных параллелепипедов в \mathbb{R}^m рассмотрим $\mu_h(\mathcal{P}(p, P, \pi)) = (\sum_{i=1}^m (\pi_i)^2)^{1/2}$ и $\mu_{\text{vol}}(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})$. В случае $m=199$ получилось, что $\mu_h(\mathcal{P}_I^+[n]) \approx 7.6837 < \mu_h(\mathcal{P}^+[n]) \approx 9.2005$, $\mu_{\text{vol}}(\mathcal{P}_I^+[n]) \approx 1.5037 \cdot 10^{-9} > \mu_{\text{vol}}(\mathcal{P}^+[n]) \approx 0$ (машинный нуль), то есть $\mathcal{P}_I^+[n]$ "меньше", чем $\mathcal{P}^+[n]$, в смысле критерия μ_h ($\mu_h(\mathcal{P}_I^+[n])/\mu_h(\mathcal{P}^+[n]) \approx 0.8351$) и "больше" — в смысле критерия μ_{vol} .

Итак, внешние оценки "по Фурье" вычисляются значительно быстрее, и они оказались лучше по координатных в смысле объема. Они могут быть использованы для "отбраковки" функций, которые не нарушают границы, изображенные на рис. 19.3(a), (b), но не принадлежат искомому множеству (МД или информационной области).

На рис. 19.2(a) и 19.2(b) сплошными линиями изображены границы и центры внутренних оценок для $\mathcal{U}_a(\theta)$ и $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$, а штриховыми линиями — внешних по координатных оценок (границы внутренних оценок для МД практически наложились на границы внешних). Смысл границ, показанных сплошными линиями, грубо говоря, состоит в том, что всевозможные кривые распределения температуры в момент θ заполняют всю область между ними (а возможно, и "вылезают" за нее).

Моделирование проводилось с помощью пакета программ BOXES в системе MATLAB 5.

Глава VI

Полиэдральные оценки множеств достижимости многошаговых систем при интегральных ограничениях на управление

Для линейных многошаговых систем с интегральными неквадратичными ограничениями на управление и неопределенностью в начальных условиях, включая системы с фазовыми ограничениями, исследуются возможности аппроксимаций (оценок) множеств достижимости в исходном и "расширенном" пространствах, соответственно, при помощи семейств параллелепипедов и политопов специального вида. Результаты главы опубликованы в [71, 72, 192].

20 Постановка задачи. Точное описание множеств достижимости $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ в исходном и "расширенном" пространстве

На промежутке $[i, N]$ ($0 \leq i < N$) рассмотрим многошаговую систему

$$x[j] = A[j]x[j-1] + B[j]u[j] + v[j], \quad j = i + 1, \dots, N. \quad (20.1)$$

Здесь $x[j] \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $A[j] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и $B[j] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ — известные матрицы, $v[j] \in \mathbb{R}^n$ — известные входные воздействия. Начальное состояние $x[i]$ и управления $u[j] \in \mathbb{R}^r$ стеснены ограничениями

$$x[i] = x_i \in \mathcal{X}_i; \quad (20.2)$$

$$\sum_{j=i+1}^N \|u[j]\|_\infty \leq \mu_i; \quad (20.3)$$

$$u[j] \in \mathcal{K}[j], \quad j = i + 1, \dots, N, \quad (20.4)$$

где $\mathcal{X}_i \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ — заданное множество; $\mu_i > 0$ — известное число; $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq \alpha \leq r} |u_\alpha|$ — норма вектора $u \in \mathbb{R}^r$; $\mathcal{K}[j] \subseteq \mathbb{R}^r$ — заданные выпуклые замкнутые конусы [129]. На состояние системы могут быть наложены ФО

$$x[j] \in \mathcal{Y}[j], \quad j = i + 1, \dots, N, \quad (20.5)$$

где $\mathcal{Y}[j]$ — выпуклые замкнутые множества (считаем $\mathcal{Y}[j] = \mathbb{R}^n$, если ФО отсутствуют).

Определение 20.1 Множеством достижимости $\mathcal{X}(k, i, \mathcal{X}_i)$ системы (20.1) – (20.5) в момент $k \in \{i, \dots, N\}$ называется множество всех тех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют такие $x[i]$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (20.2)–(20.4), что порождаемое ими в силу (20.1) решение $x[\cdot]$ будет удовлетворять условиям $x[k] = x$ и (20.5) для $j = i + 1, \dots, k$. Далее считаем, что в системе (20.1) – (20.5) $i = 0$ и используем обозначение $\mathcal{X}[k] = \mathcal{X}(k, 0, \mathcal{X}_0)$. Если ограничения (20.5) порождаются измерениями (1.4), то $\mathcal{X}[k]$ известны как *информационные области* [75, 201].

Введенные МД для систем с интегральными ограничениями, вообще говоря, не обладают полугрупповым свойством (1.6), и для них не удается получить рекуррентные соотношения типа (1.7), имеющие место для многошаговых систем с геометрическими ограничениями. Ниже будут приведены "полурекуррентные" соотношения для МД (системы рекуррентных формул, с помощью которых можно находить МД) систем без фазовых ограничений и соотношения, описывающие МД систем с ФО.

Добавим к фазовым переменным $x[j]$ переменную $\mu[j]$, характеризующую текущий запас управления и удовлетворяющую уравнению

$$\mu[j] = \mu[j-1] - \|u[j]\|_\infty, \quad j = i + 1, \dots, N; \quad (20.6)$$

$$\mu[i] = \mu_i. \quad (20.7)$$

Несложно проверить (см. также [39]), что интегральное ограничение (20.3) на управление эквивалентно фазовым ограничениям

$$\mu[j] \geq 0, \quad j = i, \dots, N. \quad (20.8)$$

В "расширенном" фазовом пространстве точек $z = (x^\top, \mu)^\top \triangleq \{x, \mu\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим систему (20.1), (20.4), (20.6) с начальными условиями

$$z[i] = z_i \in \mathcal{Z}_i \quad (20.9)$$

и с фазовыми ограничениями (20.5), (20.8).

Определение 20.2 Множеством достижимости $\mathcal{Z}(k, i, \mathcal{Z}_i)$ системы (20.1), (20.4) – (20.6), (20.8), (20.9) в момент $k \in \{i, \dots, N\}$ называем множество всех тех точек $z = \{x, \mu\} \in \mathbb{R}^{n+1}$, для каждой из которых существуют такие $z[i] = \{x[i], \mu[i]\}$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (20.4) при $j = i + 1, \dots, k$ и (20.9), что порождаемое ими в силу (20.1), (20.6) решение $z[\cdot] = \{x[\cdot], \mu[\cdot]\}$ будет удовлетворять условиям $z[k] = z$ и (20.5), (20.8) при $j = i + 1, \dots, k$. Далее рассматриваем систему на промежутке $[0, N]$ и используем обозначение $\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}(k, 0, \mathcal{Z}_0)$. Многозначная функция $\mathcal{Z}[k]$, $k=1, \dots, N$, известна как *трубка траекторий* $\mathcal{Z}[\cdot]$ [201].

Рассуждения, аналогичные [155, с.18–19], показывают, что МД $\mathcal{Z}[k]$ обладают полугрупповым свойством типа (1.6), где символ \mathcal{X} следует заменить на \mathcal{Z} . Ниже будут выписаны рекуррентные соотношения для $\mathcal{Z}[k]$, исследованы их свойства и указана связь между множествами $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ при специальном выборе множества \mathcal{Z}_0 .

Будем полагать, что множество \mathcal{X}_0 является параллелепипедом

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0) \equiv \mathcal{P}[p_0, \bar{P}_0], \quad (20.10)$$

а $\mathcal{Y}[j]$ в ограничениях (20.5) (при $\mathcal{Y}[j] \neq \mathbb{R}^n$) — параллелепипедами

$$\mathcal{Y}[j] = \mathcal{P}(q[j], Q[j], \kappa[j]) \equiv \mathcal{P}[q[j], \bar{Q}[j]] \quad (20.11)$$

или полосами

$$\mathcal{Y}[j] = \mathcal{S}(c[j], S[j], \sigma[j], m[j]) = \bigcap_{i=1}^{m[j]} \Sigma^i[j] \quad (m[j] \leq n). \quad (20.12)$$

Далее предполагаем также, что конусы $\mathcal{K}[j]$ таковы, что параллелепипедами являются множества $\mathcal{R}[j]$ ¹:

$$\mathcal{R}[j] = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[j], \quad \mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r, \quad (20.13)$$

а именно, считаем, что

$$\mathcal{R}[j] = \mathcal{P}(r[j], R[j], \rho[j]) \equiv \mathcal{P}[r[j], \bar{R}[j]], \quad \text{где } R[j] = I, \bar{R}[j] = \text{diag } \rho[j]. \quad (20.14)$$

В соответствии с принятым подходом будем искать внешние параллелепипедозначные $\mathcal{P}^+[k]$ и внутренние параллелотопозначные $\mathcal{P}^-[k]$ оценки для $\mathcal{X}[k]$, стараясь, по-возможности, обеспечить точные представления (1.19), (1.20) и свойство быть касающимися или тугими.

Нашей целью будет также найти внешние для $\mathcal{Z}[k]$ оценки в виде политопов $\Pi^+[k]$ (см. определение 6.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[k] \subseteq \Pi^+[k] &= \Pi(\{\mathcal{P}^{+,b}[k], \mu^{+,b}[k]\}, \{\mathcal{P}^{+,t}[k], \mu^{+,t}[k]\}), \quad k = 0, \dots, N; \\ \mathcal{P}^{+,i}[k] &= \mathcal{P}(p^{+,i}[k], P^{+,i}[k], \pi^{+,i}[k]), \quad i = \text{''b''}, \text{''t''}, \quad P^{+,b}[k] = P^{+,t}[k] = P^+[k], \end{aligned} \quad (20.15)$$

обладающие обобщенным полугрупповым и эволюционным свойствами, аналогичными (1.13), (1.15), и, более того, ввести семейства таких трубок $\Pi^+[\cdot]$, что обеспечит более точные включения $\mathcal{Z}[k] \subseteq \Pi^+[k]$. На основе указанных оценок будут введены семейства внешних параллелепипедозначных оценок $\mathcal{P}^+[k]$ для МД $\mathcal{X}[k]$: $\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$, $\mathcal{X}[k] \subseteq \Pi^+[k]$.

Приведем сначала точные описания множеств $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$.

Описание МД $\mathcal{X}[k]$ для систем без фазовых ограничений дает

¹Столь специальное по форме ограничение позволяет охватить, например, ситуацию, когда $\mathcal{K}[j]$ — положительный ортант или полупространство, ограниченное координатной плоскостью.

Теорема 20.1 Множества достижимости $\mathcal{X}[k]$, $k = 1, \dots, N$, системы (20.1) – (20.4) удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{X}[k] = \mathcal{X}^0[k] + \tilde{\mathcal{X}}[k], \quad k = 1, \dots, N; \quad (20.16)$$

$$\mathcal{X}^0[k] = A[k]\mathcal{X}^0[k-1] + v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{X}^0[0] = \mathcal{X}_0; \quad (20.17)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}[k] = \text{co} \{A[k]\tilde{\mathcal{X}}[k-1] \cup \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k]\}, \quad \tilde{\mathcal{X}}[0] = \{0\}, \quad (20.18)$$

где $\mathcal{R}[k]$ определены в (20.13). При этом, если $\mathcal{X}^0[k]$ находятся по формулам (20.17), $\mathcal{X}[0] = \mathcal{X}_0$, то при $k = 1, \dots, N$

$$\mathcal{X}[k] = \text{co} \{(A[k]\mathcal{X}[k-1] + v[k]) \cup (\mu_0 B[k]\mathcal{R}[k] + \mathcal{X}^0[k])\}. \quad (20.19)$$

Доказательство. Ввиду формулы Коши $\mathcal{X}[k]$ представимо в виде (20.16), где множества

$$\mathcal{X}^0[k] = \Phi[k, 0]\mathcal{X}_0 + \sum_{j=1}^k \Phi[k, j]v[j] \quad (20.20)$$

удовлетворяют соотношениям (20.17), а

$$\tilde{\mathcal{X}}[k] = \{x \mid x = \sum_{j=1}^k \Psi[k, j]u[j]; \sum_{j=1}^k \|u[j]\|_\infty \leq \mu_0; u[j] \in \mathcal{K}[j], j=1, \dots, k\}. \quad (20.21)$$

Здесь $\Phi[k, l]$ — та же фундаментальная матрица однородной системы для (20.1), что и в (7.1), а $\Psi[k, l] = \Phi[k, l]B[l]$. В силу леммы А1.14

$$\tilde{\mathcal{X}}[k] = \mu_0 \text{co} \left\{ \bigcup_{j=1}^k \Psi[k, j](\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[j]) \right\}. \quad (20.22)$$

Учитывая вид $\Psi[k, j]$, имеем $\tilde{\mathcal{X}}[k] = \mu_0 \text{co} \{A[k](\bigcup_{j=1}^{k-1} \Psi[k-1, j]\mathcal{R}[j]) \cup B[k]\mathcal{R}[k]\}$, что ввиду формулы (20.22) для $\tilde{\mathcal{X}}[k-1]$ приводит к (20.18).

Равенство (20.19) при $k \in \{1, \dots, N\}$ получается, если в соотношение (20.16) подставить выражение (20.18) для $\tilde{\mathcal{X}}[k]$, а затем, пользуясь леммой А1.15, внести $\mathcal{X}^0[k]$ под знак со и учесть выражение (20.17) для $\mathcal{X}^0[k]$ и формулу (20.16) при $k-1$. \square

Для систем с ФО стандартными процедурами выпуклого анализа [88] получается следующее выражение для опорной функции МД.

Лемма 20.1 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множество достижимости в момент $k \in \{1, \dots, N\}$ системы (20.1)–(20.5) с $\mathcal{Y}[j] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, N$. Тогда

$$\rho(l | \mathcal{X}[k]) = \inf_{\lambda[\cdot]} H(l, \lambda[\cdot]), \quad \text{где } \lambda[j] \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, k, \quad (20.23)$$

$$H(l, \lambda[\cdot]) = \sum_{j=1}^k \rho(\lambda[j] | \mathcal{Y}[j]) + \rho(\Phi[k, 0]^\top l - \sum_{\alpha=1}^k \Phi[\alpha, 0]^\top \lambda[\alpha] | \mathcal{X}_0) + \\ \sum_{j=1}^k v[j]^\top (\Phi[k, j]^\top l - \sum_{\alpha=j}^k \Phi[\alpha, j]^\top \lambda[\alpha]) + \\ \sup_{u[\cdot]} \left\{ \sum_{j=1}^k u[j]^\top (\Psi[k, j]^\top l - \sum_{\alpha=j}^k \Psi[\alpha, j]^\top \lambda[\alpha]) \mid \sum_{j=1}^k \|u[j]\|_\infty \leq \mu_0, u[j] \in \mathcal{K}[j] \right\}.$$

Пользуясь подходом [75, 98, 201], можно свести описание множеств достижимости систем с фазовыми ограничениями к построению семейства МД вспомогательных систем без ФО, но с матричными параметрами $T[\cdot]$:

$$\begin{aligned} \check{x}[j] &= T[j]A[j]\check{x}[j-1] + (I - T[j])\zeta[j] + T[j]v[j], \quad j = 1, \dots, N; \\ \check{x}[0] &\in \mathcal{X}_0; \quad \zeta[j] \in \mathcal{Y}[j]; \end{aligned} \quad (20.24)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}[j] &= T[j]A[j]\hat{x}[j-1] + T[j]B[j]u[j], \quad j = 1, \dots, N; \\ \hat{x}[0] &= 0; \quad \sum_{j=1}^k \|u[j]\|_\infty \leq \mu_0; \quad u[j] \in \mathcal{K}[j]. \end{aligned} \quad (20.25)$$

Ограничения в них — соответственно, геометрические (типа рассмотренных в гл. III) и интегральные (типа (20.2) – (20.4)).

Теорема 20.2 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (20.1) – (20.5), где $\mathcal{Y}[j] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, N$, а $\check{\mathcal{X}}(k; T[\cdot])$ и $\hat{\mathcal{X}}(k; T[\cdot])$ — множества достижимости систем (20.24) и (20.25). Тогда при любых $T[j] \in \mathcal{M}_{00}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, справедливы включения $\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{X}(k; T[\cdot]) = \check{\mathcal{X}}(k; T[\cdot]) + \hat{\mathcal{X}}(k; T[\cdot])$, $k = 1, \dots, N$, и $\mathcal{X}[k] = \bigcap_{T[\cdot]} \mathcal{X}(k; T[\cdot])$, где в пересечении достаточно перебрать все последовательности $T[j]$, $j = 1, \dots, k$, диагональных матриц, удовлетворяющих $T[j] \in \mathcal{M}_{00}^{n \times n}$.

Доказательство проведем модификацией рассуждений из [98, 148]. Рассмотрим $\mathcal{X}[k]$ при произвольном фиксированном $k \in \{1, \dots, N\}$.

Пусть $M[j] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, k$ — матричные параметры, которые связаны с $\lambda[\cdot]$ соотношениями $\lambda[j] = M[j]^\top l$, $j = 1, \dots, k$. Так как при любых $a \in \Lambda \triangleq \{l \in \mathbb{R}^n \mid l_i \neq 0, i = 1, \dots, n\}$ и $b \in \mathbb{R}^n$ матричное уравнение $b = Xa$ имеет решение $X = \text{diag} \{b_i a_i^{-1}\}$ в классе $\mathcal{M}_d^{n \times n}$ диагональных матриц, то из (20.23) вытекает, что

$$\rho(l|\mathcal{X}[k]) = \inf_{M[\cdot]} H(l, M^\top[\cdot]l), \quad \forall l \in \Lambda, \quad (20.26)$$

где \inf взят по всем $M[j] \in \mathcal{M}_d^{n \times n}$, $j=1, \dots, k$. Равенство (20.26) сохраняется, если \inf брать по всем $M[j] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j=1, \dots, k$, поскольку при таком расширении множество всевозможных значений $M[j]^\top l$, $j=1, \dots, k$, не становится шире. Кроме того, \inf в (20.26) можно брать по множествам матриц $M[j] \in \mathcal{M}_d^{n \times n}$, $j=1, \dots, k$, удовлетворяющих

$$\det K[j] \neq 0, \quad K[j] \triangleq \Phi[k, j] - \sum_{\alpha=j+1}^k M[\alpha] \Phi[\alpha, j], \quad j=1, \dots, k. \quad (20.27)$$

Действительно, если $\tilde{M}_\varepsilon[\cdot]$ обеспечивает соотношение

$$H(l, \tilde{\lambda}_\varepsilon[\cdot]) < \rho(l|\mathcal{X}[k]) + \varepsilon/2, \quad (20.28)$$

где $\tilde{\lambda}_\varepsilon[j] = \tilde{M}_\varepsilon[j]^\top l$, то при нарушении (20.27) функцию $\tilde{M}_\varepsilon[\cdot]$ можно "немного подправить" (пользуясь непрерывностью опорных функций выпуклых компактных множеств), заменив ее, например, на $M_\varepsilon[\cdot]$, где $M_\varepsilon[j] = \tilde{M}_\varepsilon[j]$, $j=1, \dots, k-1$, $M_\varepsilon[k] = \tilde{M}_\varepsilon[k] + \mu I$, так, чтобы было $|H(l, \tilde{\lambda}_\varepsilon[\cdot]) - H(l, M_\varepsilon^\top[\cdot]l)| < \varepsilon/2$. При этом "малое" μ можно выбрать так, чтобы оно не совпадало ни с одним из собственных значений k матриц $G(j, \tilde{M}_\varepsilon[\cdot]) = \Phi[k, j]^{-1} K(j, \tilde{M}_\varepsilon[\cdot])$, $j=1, \dots, k$, где обозначение $K(j, M[\cdot])$ подчеркивает зависимость $K[j]$ от $M[\cdot]$. Тогда получится, что $\det K(j, M_\varepsilon[\cdot]) = \det(K(j, \tilde{M}_\varepsilon[\cdot]) - \mu \Phi[k, j]) = \det \Phi[k, j] \cdot \det(G(j, \tilde{M}_\varepsilon[\cdot]) - \mu I) \neq 0$.

Покажем теперь, что для любой функции $M[\cdot]$, удовлетворяющей (20.27), найдется такая матричная функция $L[\cdot]$, что

$$H(l, M^\top[\cdot]l) = \rho(l|\mathcal{X}^*(k; L[\cdot])), \quad (20.29)$$

где символом $\mathcal{X}^*(k; L[\cdot])$ обозначено МД в момент k системы

$$\begin{aligned} x[j] &= (A[j] - L[j])x[j-1] + (I - L[j]A[j]^{-1})(v[j] + B[j]u[j]) \\ &\quad + L[j]A[j]^{-1}\zeta[j], \quad j = 1, \dots, N; \\ x[0] &\in \mathcal{X}_0; \quad \sum_{j=1}^N \|u[j]\|_\infty \leq \mu_0; \quad u[j] \in \mathcal{K}[j]; \quad \zeta[j] \in \mathcal{Y}[j]. \end{aligned} \quad (20.30)$$

Действительно, построим $L[\cdot]$ по формулам

$$L[j] = K[j]^{-1}M[j]A[j], \quad j = 1, \dots, k. \quad (20.31)$$

Несложно проверить, что матрицы $K[j]$ из (20.27) удовлетворяют соотношениям $K[j] = I$, $K[j-1] = K[j](A[j] - L[j])$, $j = k, \dots, 1$. Теперь, сравнивая формулу для $H(l, M^\top[\cdot]l)$, куда подставлены выражения для $M[j]$, полученные из (20.31), с выражением для $\rho(l | \mathcal{X}^*(k; L[\cdot]))$, вытекающим из формулы Коши для системы (20.30), приходим к (20.29).

При выполнении предположения 1.1 соотношения (20.31), как несложно проверить, разрешимы относительно $M[\cdot]$. Поэтому и, обратно, для любой $L[\cdot]$ найдется такая $M[\cdot]$, что выполняется (20.29).

Следовательно, имеем

$$\rho(l | \mathcal{X}[k]) = \inf_{L[\cdot]} \rho(l | \mathcal{X}^*(k; L[\cdot])), \quad \forall l \in \Lambda, \quad (20.32)$$

где \inf можно брать либо по множеству $L[\cdot]$, связанных с $M[\cdot]$ условиями (20.31), либо по всевозможным $L[\cdot]$. Из (20.32) ввиду леммы А1.4 вытекает, что

$$\mathcal{X}[k] = \bigcap_{L[\cdot]} \mathcal{X}^*(k; L[\cdot]). \quad (20.33)$$

Заметим теперь, что \inf в (20.23) можно брать по $\lambda[\cdot] \in \Lambda$, где через Λ обозначено множество всевозможных $\lambda[\cdot]$, стесненных условиями

$$\Phi[k, j]^\top l - \sum_{\alpha=j+1}^k \Phi[\alpha, j]^\top \lambda[\alpha] \in \Lambda, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (20.34)$$

В самом деле, если $\tilde{\lambda}_\varepsilon[\cdot]$ обеспечивает (20.28), то при нарушении (20.34) функцию $\tilde{\lambda}_\varepsilon[\cdot]$ можно "подправить" (снова пользуясь непрерывностью

опорных функций выпуклых компактных множеств), заменив ее на $\lambda_\varepsilon[\cdot]$, где $\lambda_\varepsilon[j] = \tilde{\lambda}_\varepsilon[j] + \mu_\varepsilon[j]$, а "малые" добавки $\mu_\varepsilon[j]$ могут быть последовательно подобраны для $j = k-1, \dots, 1$ так, чтобы было выполнено конечное число соотношений

$$(\Phi[j+1, j]^\top \lambda_\varepsilon[j+1])_i \neq (\Phi[k, j]^\top l - \sum_{\alpha=j+2}^k \Phi[\alpha, j]^\top \lambda_\varepsilon[\alpha])_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Покажем теперь, что для любых $l \in \Lambda$ и $\lambda[\cdot] \in \mathbf{\Lambda}$ можно найти такую функцию $L[\cdot]$, что

$$H(l, \lambda[\cdot]) = \rho(l | \mathcal{X}^*(k; L[\cdot])), \quad \text{где} \quad (20.35)$$

$$L[\cdot] \in \mathcal{L} \triangleq \{L[\cdot] | L[j] = S[j]A[j], S[j] \in \mathcal{M}_d^{n \times n}, j=1, \dots, k\}.$$

В самом деле, при $l \in \Lambda$, $\lambda[\cdot] \in \mathbf{\Lambda}$ найдутся диагональные $S[j]$ такие, что

$$\lambda[j] = S[j]^\top (\Phi[k, j]^\top l - \sum_{\alpha=j+1}^k \Phi[\alpha, j]^\top \lambda[\alpha]), \quad j = k, \dots, 1. \quad (20.36)$$

Подставляя $L[j] = S[j]A[j]$ в (20.31), получаем, что можно найти $M[\cdot]$, удовлетворяющую соотношениям

$$M[j]^\top = S[j]^\top (\Phi[k, j]^\top - \sum_{\alpha=j+1}^k \Phi[\alpha, j]^\top M[\alpha]^\top), \quad j = k, \dots, 1,$$

и при этом будем иметь (20.29). Умножая последние матричные равенства справа на l и вспоминая (20.36), несложно проверить индукцией по $j = k, \dots, 1$, что $M[j]^\top l = \lambda[j]$, $j = k, \dots, 1$, и, значит, имеем (20.35).

Таким образом, соотношения (20.32), (20.33) могут быть обеспечены варьированием $L[\cdot] \in \mathcal{L}$.

Для окончания доказательства достаточно заметить, что, если ввести матрицы $T[j] = I - L[j]A[j]^{-1}$ (а они будут диагональными при $L[\cdot] \in \mathcal{L}$), то уравнения из (20.30) принимают вид

$$x[j] = T[j]A[j]x[j-1] + T[j](v[j] + B[j]u[j]) + (I - T[j])\zeta[j],$$

и в силу линейности системы $\mathcal{X}^*(k; L[\cdot]) = \check{\mathcal{X}}(k; T[\cdot]) + \hat{\mathcal{X}}(k; T[\cdot])$. \square

Замечание 20.1 Очевидно, что $\mathcal{X}[k] \subseteq \bigcap_{i=0}^k \mathcal{X}[k, i]$, где использованы обозначения $\mathcal{X}[k, 0] = \mathcal{X}(k, 0, \mathcal{X}_0)$, $\mathcal{X}[k, i] = \mathcal{X}(k, i, \mathcal{Y}[i])$. Множества $\mathcal{X}[k, i]$ формально можно получить, положив $\mathcal{X}[k, i] = \mathcal{X}(k; T[\cdot])$, где $T[j] = 0$ при $j = 1, \dots, i$, $T[j] = I$ при $j = i + 1, \dots, k$.

Описание $\mathcal{X}[k]$ можно свести также к построению семейства МД вспомогательных систем с геометрическими ограничениями, задаваемого набором скалярных параметров $h[\cdot]$.

Теорема 20.3 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД в момент k системы (20.1)–(20.5). Если $h[j]$ — произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$h[j] \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N h[j] \leq \mu_0, \quad (20.37)$$

а $\mathcal{X}(k; h[\cdot])$ — МД системы (20.1), (20.2), (20.5) с ограничениями

$$u[j] \in h[j] \mathcal{R}[j], \quad j = 1, \dots, N, \quad (20.38)$$

где $\mathcal{R}[j]$ — множества (20.13), то при $k = 1, \dots, N$ имеем

$$\mathcal{X}(k; h[\cdot]) \subseteq \mathcal{X}[k] \quad (20.39)$$

и справедливы равенства

$$\mathcal{X}[k] = \bigcup \{ \mathcal{X}(k; h[\cdot]) \mid h[\cdot] \text{ подчинены (20.37)} \}. \quad (20.40)$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{X}(k; h[\cdot])$. Тогда найдутся такие $x[0] \in \mathcal{X}_0$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (20.38), что для соответствующего решения системы (20.1) имеем $x[k] = x$ и выполнены соотношения (20.5). Имеем $u[j] \in h[j] \mathcal{K}[j] \subseteq \mathcal{K}[j]$ ($j = 1, \dots, k$). Кроме того, $\sum_{j=1}^N \|u[j]\|_\infty \leq \sum_{j=1}^N h[j] \leq \mu_0$. Следовательно, $x \in \mathcal{X}[k]$, что доказывает (20.39).

Пусть $x \in \mathcal{X}[k]$, причем x соответствует $x[0]$ и $u[\cdot]$. Полагая $u[j] = 0$, $j = k+1, \dots, N$, $h[j] = \|u[j]\|_\infty$, $j = 1, \dots, N$, несложно заметить, что выполняются соотношения (20.37), (20.38) и $x \in \mathcal{X}(k; h[\cdot])$. \square

Множества $\mathcal{Z}[k]$ ввиду (20.6) – (20.8) можно искать в виде

$$\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{\mu^b[k] \leq \mu \leq \mu^t[k]} \{ \mathcal{X}(\mu, k), \mu \}, \quad k=0, \dots, N, \quad \text{где } 0 \leq \mu^b[k] \leq \mu^t[k]. \quad (20.41)$$

Теорема 20.4 Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (20.1), (20.4) — (20.6), (20.8), (20.9), $\mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0$ представлено в виде (20.41), и $\mathcal{Z}[k] \neq \emptyset$ при $k = 1, \dots, N$. Тогда $\mathcal{Z}[k]$ представимы в виде (20.41) и удовлетворяют рекуррентным соотношениям (где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$)²:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[k] &= ((A[k] \odot \mathcal{Z}[k-1] \oplus v[k]) \uplus B[k](\partial \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])) \odot \mathcal{Y}[k], \\ &k = 1, \dots, N; \quad \mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0. \end{aligned} \quad (20.42)$$

Доказательство. Ввиду полугруппового свойства достаточно найти формулы, конкретизирующие равенство $\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}(k, k-1, \mathcal{Z}[k-1])$. Для $\mathcal{Z}[k-1]$ имеем (20.41) при $k-1$. Из позиции $z = \{x, \mu\}$ с фиксированным $z_{n+1} = \mu$ и $x \in \mathcal{X}(\mu, k-1)$ можно попасть в позиции \tilde{z} с $\tilde{z}_{n+1} = \tilde{\mu}$, где $0 \leq \tilde{\mu} \leq \mu$, тогда и только тогда, когда выберем управление $u[k]$ с $\|u[k]\|_\infty = \mu - \tilde{\mu}$, причем должно выполняться ограничение (20.4), т.е. $u[k] \in (\mu - \tilde{\mu})\partial \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k] = (\mu - \tilde{\mu})(\partial \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])$. Перебирая всевозможные $x \in \mathcal{X}(\mu, k-1)$, можно, с учетом ФО (20.5), попасть в точки множества $\tilde{\mathcal{X}}(\mu, \tilde{\mu}) \triangleq (A[k] \mathcal{X}(\mu, k-1) + v[k] + (\mu - \tilde{\mu})B[k](\partial \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])) \cap \mathcal{Y}[k]$. Ввиду (20.41) $\mu^b[k-1] \leq \mu \leq \mu^t[k-1]$, и имеем $\tilde{\mu} \in [0, \mu]$. Обозначим множество таких $(\mu, \tilde{\mu})$ через \mathcal{F} . Тогда $\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{\mu} \bigcup_{\tilde{\mu}} \{ \tilde{\mathcal{X}}(\mu, \tilde{\mu}), \tilde{\mu} \mid (\mu, \tilde{\mu}) \in \mathcal{F} \}$. Несложно заметить, что при нашем предположении $\mathcal{Z}[k] \neq \emptyset$ множество \mathcal{F} представимо в виде $\mathcal{F} = \{(\mu, \tilde{\mu}) \mid 0 \leq \tilde{\mu} \leq \mu^t[k-1], \max\{\mu^b[k-1], \tilde{\mu}\} \leq \mu \leq \mu^t[k-1]\}$. Поменяем местами объединения по μ и $\tilde{\mu}$ в выражении для $\mathcal{Z}[k]$ и переобозначим $\tilde{\mu}$ на μ , а μ — на ζ . Тогда получаем представление $\mathcal{Z}[k]$ в виде (20.41) и с учетом определений 6.1 имеем (20.42). \square

Вследствие нелинейности (по u) системы в расширенном пространстве МД $\mathcal{Z}[k]$ из выпуклого множества \mathcal{Z}_0 могут быть невыпуклы.

Пример 20.1 Пусть $n=1, k=N=1, A[1]=B[1]=1, v[1]=0, \mathcal{K}[1] = \mathbb{R}^1$,

²Допуская в системе возможность получения дополнительной информации о $\mu[j]$ (например, путем неточных измерений), можно ввести и более общие ФО на $\mu[j]$: $\underline{\mu}[j] \leq \mu[j] \leq \overline{\mu}[j]$, $j = i+1, \dots, N$, где $0 \leq \underline{\mu}[j] \leq \overline{\mu}[j]$ — заданные числа (при этом (20.8) получаются, как частный случай при $\underline{\mu}[j] \equiv 0, \overline{\mu}[j] \equiv +\infty$). Тогда МД $\mathcal{Z}[k]$ соответствующей системы удовлетворяют рекуррентным соотношениям (20.42), где \uplus надо заменить на $\uplus_{\underline{\mu}[k]}^{\overline{\mu}[k]}$, и с использованием результатов §6 можно построить внешние для $\mathcal{Z}[k]$ оценки $\Pi^+[k]$, аналогичные описанным ниже в §22.

$\mathcal{Z}_0 = \{0, \mu_0\}$. Тогда в силу системы $x[1] = u[1]$, $\mu[1] = \mu_0 - |u[1]|$. МД $\mathcal{Z}[1]$ системы (20.1), (20.4), (20.6), (20.8), (20.9), показанное на рис. 20.1, представляет собой два отрезка АВ и АС и, очевидно, невыпукло.

Выпуклость $\mathcal{Z}[k]$ можно гарантировать, наложив дополнительные условия на \mathcal{Z}_0 . Из теоремы 20.4 и лемм 6.2 – 6.5 получаем

Следствие 20.1 В условиях теоремы 20.4, если $\mu^b[0] = 0$, а \mathcal{Z}_0 выпукло, и его сечения не возрастают, то такими же свойствами обладают множества $\mathcal{Z}[k]$ и при их построении в формулах (20.42) можно заменить $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k]$ на $\mathcal{R}[k]$.

Из определений множеств достижимости, теоремы 20.4 и следствия 20.1 вытекает следующая связь между $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$.

Следствие 20.2 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (20.1) – (20.5), а $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (20.1), (20.4) – (20.6), (20.8), (20.9) из множества $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\} = \{z = \{x, \mu\} \mid x \in \mathcal{X}_0, \mu = \mu_0\}$ либо $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0] = \{z = \{x, \mu\} \mid x \in \mathcal{X}_0, \mu \in [0, \mu_0]\}$, представленные в виде (20.41), причем все $\mathcal{Z}[k] \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{X}[k] = \cup\{\mathcal{X}(\mu, k) \mid 0 \leq \mu \leq \mu^t[k]\}$, $k = 1, \dots, N$, $\mathcal{X}[0] = \mathcal{X}_0$. Если $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$, то $\mathcal{X}[k] = \mathcal{X}(0, k)$, $k = 1, \dots, N$, причем при построении $\mathcal{Z}[k]$ в формулах (20.42) можно заменить $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k]$ на $\mathcal{R}[k]^3$.

21 Внешние и внутренние оценки для $\mathcal{X}[k]$

Начнем с построения внешних оценок для МД $\mathcal{X}[k]$ систем без ФО.

Теорема 21.1 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (20.1) – (20.4). Если

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{0+}[k] &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(A[k]\mathcal{P}^{0+}[k-1] + v[k]), \quad k = 1, \dots, N; \\ \tilde{\mathcal{P}}^+[k] &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(A[k]\tilde{\mathcal{P}}^+[k-1] \cup \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \dots, N; \\ \mathcal{P}^{0+}[0] &= \mathbf{P}_{P^+[0]}^+(\mathcal{X}_0); \quad \tilde{\mathcal{P}}^+[0] = \mathbf{P}_{P^+[0]}^+(\{0\}), \end{aligned} \quad (21.1)$$

³При этом для систем без ФО (20.5) множества $\mathcal{X}(\mu_0, k)$, как видно из определений 6.1, совпадают с множествами $\mathcal{X}^0[k]$ из теоремы 20.1, так что формулы (20.17) и (20.19) описывают динамику "верхнего" и "нижнего" сечений МД $\mathcal{Z}[k]$.

то

$$\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}^{0+}[k] + \tilde{\mathcal{P}}^+[k], \quad k = 0, \dots, N, \quad (21.2)$$

каковы бы ни были матрицы ориентации $P^+[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$.

Если $P \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ — произвольная матрица и

$$P^+[k] = A[k]P^+[k-1], \quad k = 1, \dots, N, \quad P^+[0] = P, \quad (21.3)$$

то $\mathcal{P}^+[k]$ являются внешними касающимися оценками для $\mathcal{X}[k]$ и

$$\mathcal{X}[k] = \bigcap \{ \mathcal{P}^+[k] \mid P \in \mathcal{V}^0 \}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (21.4)$$

где множество матриц \mathcal{V}^0 удовлетворяет условиям, сформулированным на с. 97.

Доказательство. Множества $\mathcal{P}^+[k]$ являются параллелепипедами, так как $\mathcal{P}^{0+}[k]$ и $\tilde{\mathcal{P}}^+[k]$ имеют одинаковые матрицы ориентации $P^+[k]$. Включения (21.2) получаются сопоставлением формул (20.16)–(20.18) и (21.1). Свойство $\tilde{\mathcal{P}}^+[k]$ быть касающимися для $\tilde{\mathcal{X}}[k]$, $k = 1, \dots, N$, то есть

$$\rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i | \tilde{\mathcal{P}}^+[k]) = \rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i | \tilde{\mathcal{X}}[k]), \quad i = 1, \dots, n, \quad (21.5)$$

докажем индукцией по k . При $k = 0$ равенства выполняются. Пусть они справедливы при $k - 1$. Учитывая формулы (21.1), свойство оценок $\mathcal{P}_V^+(\mathcal{Q})$ быть касающимися для \mathcal{Q} , соотношения (6.1), (21.3), (20.18) и предположение индукции, можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} \rho(\pm P^+[k]^{-1\top} e^i | \tilde{\mathcal{P}}^+[k]) &= \rho(\pm P^+[k]^{-1\top} e^i | A[k]\tilde{\mathcal{P}}^+[k-1] \cup \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k]) \\ &= \max\{\rho(\pm P^+[k-1]^{-1\top} e^i | \tilde{\mathcal{P}}^+[k-1]), \rho(\pm P^+[k]^{-1\top} e^i | \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k])\} \\ &= \max\{\rho(\pm P^+[k-1]^{-1\top} e^i | \tilde{\mathcal{X}}[k-1]), \rho(\pm P^+[k]^{-1\top} e^i | \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k])\} \\ &= \rho(\pm P^+[k]^{-1\top} e^i | \tilde{\mathcal{X}}[k]). \end{aligned}$$

Равенства (21.5) доказаны. Поскольку оценки $\mathcal{P}^{0+}[k]$ являются касающимися для $\mathcal{X}^0[k]$ (см. теорему 7.2), то $\mathcal{P}^+[k]$ оказываются касающимися для $\mathcal{X}[k]$. Это свойство вместе с варьированием P обеспечивает (21.4). \square

Опишем теперь параллелепипедозначные оценки МД систем с ФО.

Пользуясь теоремой 20.2 и свойствами оценок для МД систем без ФО (см. теорему 7.2 по поводу систем с геометрическими ограничениями и теорему 21.1), заключаем, что справедлива

Теорема 21.2 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (20.1) – (20.5), где $\mathcal{Y}[j] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ и все $\mathcal{X}[k] \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, N$. Если параллелепипеды $\check{\mathcal{P}}^+[k]$ и $\hat{\mathcal{P}}^+[k]$, $k = 1, \dots, N$, построены по формулам

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{P}}^+[k] &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(T[k]A[k]\check{\mathcal{P}}^+[k-1] + (I - T[k])\mathcal{Y}[k] + T[k]v[k]); \\ \hat{\mathcal{P}}^+[k] &= \mathbf{P}_{P^+[k]}^+(T[k](A[k]\hat{\mathcal{P}}^+[k-1] \cup \mu_0 B[k]\mathcal{R}[k])); \\ \check{\mathcal{P}}^+[0] &= \mathbf{P}_{P^+[0]}^+(\mathcal{X}_0); \quad \hat{\mathcal{P}}^+[0] = \mathbf{P}_{P^+[0]}^+(\{0\}),\end{aligned}\tag{21.6}$$

то

$$\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k] = \check{\mathcal{P}}^+[k] + \hat{\mathcal{P}}^+[k]\tag{21.7}$$

при любых $T[k] \in \mathcal{M}_{00}^{n \times n}$, $k=1, \dots, N$, $P^+[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k=0, \dots, N$. Если

$$P^+[k] = T[k]A[k]P^+[k-1], \quad k = 1, \dots, N, \quad P^+[0] = P \in \mathcal{M}_0^{n \times n},\tag{21.8}$$

то $\check{\mathcal{P}}^+[k]$, $\hat{\mathcal{P}}^+[k]$ оказываются касающимися оценками для множеств $\check{\mathcal{Z}}[k]$, $\hat{\mathcal{Z}}[k]$, описанных в теореме 20.2, и $\mathcal{X}[k] = \bigcap_{T[\cdot]} \{ \bigcap_P \{ \mathcal{P}^+[k] | (21.8) \} \}$, где пересечения по $T[\cdot]$ и P — такие же, как в теоремах 20.2 и 21.1.

Если \mathcal{X}_0 , $\mathcal{R}[k]$, $\mathcal{Y}[k]$ — параллелепипеды, то операции в рекуррентных формулах теорем 21.1, 21.2 производятся по явным формулам из гл. I.

Рассмотрим теперь внутренние оценки для МД $\mathcal{X}[k]$ систем без ФО.

Теорема 21.3 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множество достижимости системы (20.1) – (20.4), (20.10), (20.13), (20.14). Пусть $h[j]$, $j = 1, \dots, N$, — произвольные числа, удовлетворяющие (20.37), Λ , $\Gamma^{(1)}[j]$ и $\Gamma^{(2)}[j]$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\Lambda, \Gamma^{(1)}[j] \in \mathcal{G}^{n \times n}, \quad \Gamma^{(2)}[j] \in \mathcal{G}^{r \times n}, \quad j = 1, \dots, N,\tag{21.9}$$

и параллелотопы $\mathcal{P}^-[j]$ построены по формулам

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-[j] &= \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}[j], \Gamma^{(2)}[j]}^-(A[j]\mathcal{P}^-[j-1] + h[j]B[j]\mathcal{R}[j]) + v[j], \\ & \quad j = 1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^-[0] = \mathbf{P}_{\Lambda}^-(\mathcal{X}_0).\end{aligned}\tag{21.10}$$

Тогда при всех $k = 1, \dots, N$ имеют место включения

$$\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k] \quad (21.11)$$

и справедливы точные представления

$$\mathcal{X}[k] = \bigcup \{ \mathcal{P}^-[k] \mid \Lambda = I, \Gamma^{(1)}[j] \equiv I, h[\cdot], \Gamma^{(2)}[\cdot] \text{ подчинены (20.37), (21.9)} \}. \quad (21.12)$$

Доказательство. Включение (21.11) следует из теоремы 20.3, рекуррентных соотношений типа (1.7) для $\mathcal{X}(k; h[\cdot])$ и леммы 3.8. Теорема 20.3 обеспечивает равенство (20.40). А при каждом фиксированном $h[\cdot]$ в силу теоремы 7.6 справедливы представления $\mathcal{X}(k; h[\cdot]) = \bigcup \mathcal{P}^-[k]$, где $\mathcal{P}^-[k]$ построены по формулам (21.10). \square

Если

$$\mathcal{K}[j] = \mathbb{R}^r, \quad j = 1, \dots, N, \quad (21.13)$$

то в семействе оценок $\mathcal{P}^-[k]$ вида (21.10) имеются тугие. Действительно, зафиксируем $l_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть

$$l[j] = A[j]^{-1\top} l[j-1], \quad j = 1, \dots, k, \quad l[0] = l_0. \quad (21.14)$$

Тогда с учетом (20.16), (20.20), (20.22) и вида $\Phi[k, j]$ и $\Psi[k, j]$ имеем

$$\rho(l[k] \mid \mathcal{X}[k]) = \rho(l_0 \mid \mathcal{X}_0) + \sum_{j=1}^k l[j]^\top v[j] + \mu_0 \max_{1 \leq j \leq k} \rho(l[j] \mid B[j] \mathcal{R}[j]).$$

При $\Gamma^{(1)}[j] \equiv I$, $\Lambda = I$ формулы (21.10) дают

$$p^-[k] = \Phi[k, 0] p_0 + \sum_{j=1}^k (\Psi[k, j] h[j] r[j] + \Phi[k, j] v[j]),$$

$$\bar{P}^-[k] = \Phi[k, 0] \bar{P}_0 + \sum_{j=1}^k h[j] \Psi[k, j] \bar{R}[j] \Gamma^{(2)}[j],$$

откуда при условии (21.13), означаящем, что $r[j] = 0$, $\bar{R}[j] = I$, имеем

$$\rho(l[k] \mid \mathcal{P}^-[k]) = l_0^\top p_0 + \sum_{j=1}^k l[j]^\top v[j] + \text{Abs} \left(l_0^\top \bar{P}_0 + \sum_{j=1}^k h[j] l[j]^\top B[j] \Gamma^{(2)}[j] \right) e.$$

Максимизируя полученное выражение сначала по $\Gamma^{(2)}[\cdot]$ (аналогично лемме 3.8 и следствию 3.1), а затем по $h[\cdot]$, и сравнивая результат со значением $\rho(l[k] \mid \mathcal{X}[k])$, получаем

Следствие 21.1 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (20.1) – (20.4), (20.10), где $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^r$. Пусть задан вектор $l_0 \in \mathbb{R}^n$ и $l[j]$ находятся из (21.14).

Если условиях теоремы 21.3 имеем $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[j] \equiv I$, $\Gamma^{(2)}[j]$ построены в соответствии с (3.17), где следует брать $c^{(1)} = \bar{P}_0^\top l_0$, $c^{(2)} = B[j]^\top l[j]$, а $h[\cdot]$ удовлетворяет (20.37), причем $h[j] = 0$, $j = 1, \dots, k$, $j \notin J[k]$, где $J[k] = \text{Argmax}_{1 \leq j \leq k} \text{Abs}(l[j]^\top B[j])e$, то оценка $\mathcal{P}^-[k]$ является тугой для $\mathcal{X}[k]$ (в направлении $l[k]$). Если j_* — наименьший элемент $J[k]$ и $j_* < k$, а $h[j_*] = \mu_0$, $h[j] = 0$, $j = 1, \dots, k$, $j \neq j_*$, то при всех j : $j_* \leq j \leq k$ оценки $\mathcal{P}^-[j]$ являются тугими для $\mathcal{X}[j]$ (в направлении $l[j]$).

Рассмотрим теперь системы с ФО. Из теорем 20.3, 10.4, 10.5 следуют

Теорема 21.4 Пусть $\mathcal{X}[k]$, $k = 1, \dots, N$, — множества достижимости системы (20.1) — (20.5), (20.12) — (20.14). Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-[j] &= \mathcal{P}^{(\bar{m}[j])^-}[j], \quad j = 1, \dots, k, \quad \mathcal{P}^-[0] = \mathbf{P}_\Lambda^-(\mathcal{X}_0); \\ \mathcal{P}^{(0)^-}[j] &= \mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}[j], \Gamma^{(2)}[j]}^-(A[j] \mathcal{P}^-[j-1] + h[j]B[j]\mathcal{R}[j]) + v[j], \\ \mathcal{P}^{(i)^-}[j] &= \begin{cases} \mathcal{P}^{(i-1)^-}[j], & \text{если } \mathcal{P}^{(i-1)^-}[j] \subseteq \mathcal{Z}^{(i)}[j], \\ \mathbf{P}_{p^{(i)^-}[j], P^{(i)^-}[j]}^-(\mathcal{Q}^{(i)^-}[j]) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (21.15) \\ \mathcal{Q}^{(i)^-}[j] &= \mathcal{P}^{(i-1)^-}[j] \cap \mathcal{Z}^{(i)}[j], \quad i = 1, \dots, \bar{m}[j], \end{aligned}$$

$$\bar{m}[j] = 1, \quad \mathcal{Z}^{(1)}[j] = \mathcal{Y}[j], \quad \text{либо} \quad \bar{m}[j] = m[j], \quad \mathcal{Z}^{(i)}[j] = \Sigma^i[j].$$

Здесь все матрицы $\Lambda, \Gamma^{(1)}[j] \in \mathcal{G}^{n \times n}$, $\Gamma^{(2)}[j] \in \mathcal{G}^{r \times n}$, $P^{(i)^-}[j] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$, $p^{(i)^-}[j]$ — произвольные векторы, принадлежащие $\mathcal{Q}^{(i)^-}[j]$, $h[j]$ — числа, удовлетворяющие (20.37). Если в процессе построения оказывается, что $\mathcal{Q}^{(i)^-}[j] \neq \emptyset$, $i=1, \dots, \bar{m}[j]$, $j=1, \dots, k$, то при всех $k = 1, \dots, N$ имеют место включения (21.11). Справедливы точные представления (1.20), где объединения взяты при $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[j] \equiv I$ и какой-либо фиксированной последовательности матриц $P^{(\cdot)^-}[\cdot]$ по всевозможным значениям $h[j]$ из (20.37), $\Gamma^{(2)}[j] \in \mathcal{G}$, $p^{(i)^-}[j] \in \mathcal{Q}^{(i)^-}[j]$.

Теорема 21.5 Первое утверждение теоремы 21.4 остается верным, если в (21.15) формулы для $\mathcal{P}^{(0)^-}[j]$ заменить на (10.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(0)^-}[j] &= \mathbf{P}_{p^{(0)^-}[j], P^{(0)^-}[j]}^-(A[j] \mathcal{P}^-[j-1] + h[j]B[j]\mathcal{R}[j]) + v[j], \\ p^{(0)^-}[j] &= A[j]p^-[j-1] + h[j]B[j]r[j], \end{aligned}$$

где $P^{(0)-}[j] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ — произвольные матрицы ($j = 0, \dots, k$). Здесь p_0 , $r[j]$ и $p^-[j]$ — это центры параллелепипедов \mathcal{X}_0 , $\mathcal{R}[j]$ и $\mathcal{P}^-[j]$.

Приведем примеры оценок МД для многошаговых систем (20.1) – (20.4), (20.10), (20.13), (20.14) специального вида (полученных дискретизацией систем с непрерывным временем), в которых

$$A[j] \equiv I + h_N A; \quad h_N = \theta N^{-1}; \quad B[j] \equiv B; \quad v[j] \equiv 0. \quad (21.16)$$

Пример 21.1 Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $p_0 = (-0.5, 0)^\top$, $P_0 = I$, $\pi_0 = (0.5, 0.5)^\top$; $\mu_0 = 2$; $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$ (то есть $r[j] \equiv 0$, $R[j] \equiv 1$, $\rho[j] \equiv 1$); $\theta = 2$; $N = 200$. На рис. 21.1(а) показаны множество \mathcal{X}_0 (штриховая линия) и внешние оценки $\mathcal{P}^+[N]$ для $\mathcal{X}[N]$, построенные в соответствии с теоремой 21.1 при $P^+[0] = P_0$ и шести других случайным образом выбранных матрицах $P^+[0]$; на рис. 21.1(б) — динамика во времени внешних для $\mathcal{X}[k]$ оценок $\mathcal{P}^+[k]$, соответствующих $P^+[0] = P_0$ ($\mathcal{P}^+[k]$ изображены через каждые 2 шага k). На рис. 21.1(с) кроме множества \mathcal{X}_0 (штриховая линия) и внешних оценок $\mathcal{P}^+[N]$ (тонкие линии), представленных ранее на рис. 21.1(а), изображены тугие внутренние для $\mathcal{X}[N]$ оценки $\mathcal{P}^-[N]$ (толстые линии), построенные в соответствии со следствием 21.1 для $n_\varphi = 9$ значений вектора l_0 :

$$l_0 = l^i = (\cos \varphi_i, \sin \varphi_i)^\top, \quad \varphi_i = (i - 1)\pi/n_\varphi, \quad i = 1, \dots, n_\varphi. \quad (21.17)$$

На рис. 21.1(д) показана динамика во времени внутренних для $\mathcal{X}[k]$ оценок $\mathcal{P}^-[k]$, определяемых вектором $l_0 = l^{n_\varphi}$.

Пример 21.2 Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, а B , $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0)$, μ_0 , θ и N — такие же, как в примере 21.1. И пусть либо опять $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$ (случай 1), либо $\mathcal{K}[j] \equiv [0, \infty)$, то есть $r[j] \equiv 0.5$, $R[j] \equiv 1$, $\rho[j] \equiv 0.5$ (случай 2). Рис. 21.2(а) соответствует первому случаю, аналогичен рис. 21.1(с) и представляет для множества $\mathcal{X}[N]$ несколько внешних $\mathcal{P}^+[N]$ и несколько тугих внутренних $\mathcal{P}^-[N]$ оценок, построенных для $n_\varphi = 6$ векторов

l_0 вида (21.17). Рис. 21.2(b) соответствует второму случаю. Тонкими линиями показаны внешние для $\mathcal{X}[N]$ оценки $\mathcal{P}^+[N]$. Толстыми линиями показаны несколько внутренних для $\mathcal{X}[N]$ оценок $\mathcal{P}^-[N]$, построенных в соответствии с теоремой 21.3 при $h[j] \equiv \mu_0/N$ и нескольких других случайным образом выбранных значениях $h[\cdot]$, удовлетворяющих (20.37), $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[j] \equiv I$, $\Gamma^{(2)}[j] \in \mathcal{G}^{r \times n}$, вычисленных аналогично (16.4).

22 Внешние оценки для $\mathcal{Z}[k]$ и соответствующие оценки для $\mathcal{X}[k]$

Из теоремы 20.4, включений $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k] \subseteq \mathcal{R}[k]$, леммы 6.7 и следствий 6.4, 6.6 вытекает

Теорема 22.1 Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (20.1), (20.4), (20.6), (20.8), (20.9) без ФО на x и с начальным множеством $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}[0]$, где $\mu^t[0] = \mu_0$ и либо $\mu^b[0] = \mu_0$, либо $\mu^b[0] = 0$. Если при $k = 1, \dots, N$

$$\Pi^+[k] = \mathbf{Z}_{P^+[k]}^+((A[k] \odot \Pi^+[k-1] \oplus v[k]) \uplus B[k] \mathcal{R}[k]), \quad (22.1)$$

где $\mathcal{R}[k]$ определены в (20.13), то $\mathcal{Z}[k] \subseteq \Pi^+[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были матрицы $P^+[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$, и политоп $\Pi^+[0] \supseteq \mathcal{Z}_0$ с $\mu^{+,i}[0] = \mu^i[0]$, $i = \text{”b”}, \text{”t”}$. При этом сечения всех политопов $\Pi^+[k]$ не возрастают.

Теорема 22.2 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — множества достижимости системы (20.1) – (20.4) без ФО, $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы из теоремы 22.1 с начальным множеством $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$, а политопы

$$\Pi^+[k] = \bigcup_{\mu^{+,b}[k] \leq \mu \leq \mu^{+,t}[k]} \{\mathcal{P}^+(\mu, k), \mu\}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (22.2)$$

где $\mu^{+,b}[k] \equiv 0$, $\mu^{+,t}[k] \equiv \mu_0$, находятся из соотношений (22.1), причем $\Pi^+[0] = \mathbf{Z}_{P^+[0]}^+(\mathcal{Z}_0)$. Тогда

$$\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+(0, k) \equiv \mathcal{P}^{+,b}[k], \quad k = 0, \dots, N, \quad (22.3)$$

при любых матрицах $P^+[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k = 0, \dots, N$. Если $P^+[k]$ находятся из соотношений (21.3), то $\mathcal{P}^{+,b}[k]$ и $\mathcal{P}^+(\mu, k)$ являются внешними касающимися оценками, соответственно, для $\mathcal{X}[k]^4$ и сечений $\mathcal{X}(\mu, k)$ множество $\mathcal{Z}[k]$ при любом $\mu \in [0, \mu_0]$ и

$$\mathcal{X}[k] = \bigcap \{\mathcal{P}^{+,b}[k] \mid P \in \mathcal{V}^0\}, \quad \mathcal{Z}[k] = \bigcap \{\Pi^+[k] \mid P \in \mathcal{V}^0\}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (22.4)$$

где пересечение взято по такому же множеству матриц P , как и в теореме 21.1. Соотношения (22.3), (22.4) для $\mathcal{X}[k]$ верны и при $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\}$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$. Включения (22.3) вытекают из теоремы 22.1 и следствия 20.2. Свойство $\mathcal{P}^+(\mu, k)$ быть касающимися для $\mathcal{X}(\mu, k)$, то есть

$$\rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i \mid \mathcal{P}^+(\mu, k)) = \rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i \mid \mathcal{X}(\mu, k)), \quad (22.5)$$

доказывается индукцией по k аналогично теореме 21.1. При этом проводятся выкладки, подобные сделанным при доказательстве леммы 6.7 и учитывается, что ввиду следствия 20.2 в формулах (20.42) можно писать $\mathcal{R}[k]$ вместо $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k]$, и ввиду следствия 6.4 политопы $\Pi^+[k]$ определяются только параметрами $P^+[k]$. Свойство (22.5) для $\mathcal{X}(\mu, k) \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ вместе с варьированием P обеспечивает второе из равенств (22.4), а ввиду следствия 20.2 — и первое. При $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\}$ оценки $\Pi^+[k]$ оказываются такими же ввиду следствия 6.5, а потому верно и последнее утверждение теоремы. \square

Из теоремы 20.4, лемм 6.7, 6.8 и следствий 6.6, 6.7 вытекает

Теорема 22.3 Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (20.1), (20.4), (20.6), (20.8), (20.9) с фазовыми ограничениями (20.5), где $\mathcal{Y}[j] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, и пусть все $\mathcal{Z}[k] \neq \emptyset$. Если политопы $\Pi^+[k]$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{(0)+}[k] &= \mathbf{Z}_{P^{(0)+}[k]}^+((A[k] \odot \Pi^+[k-1] \oplus v[k]) \uplus B[k] \mathcal{R}[k]), \\ \Pi^{(0)+}[k] &= \mathbf{\Pi}_{g^{(0)(-)}[k], g^{(0)(+)}[k]}^+(\mathcal{Z}^{(0)+}[k]), \end{aligned} \quad (22.6)$$

⁴И, значит, семейство $\mathcal{P}^{b,+}[\cdot]$ совпадает с семейством оценок, введенных для $\mathcal{X}[\cdot]$ в теореме 21.1.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(1)+}[k] &= \mathbf{Z}_{P^{(1)+}[k]}^+(\Pi^{(0)+}[k]) \odot \mathbf{P}_{P^{(1)+}[k]}^+(\mathcal{Y}[k]), \\ \Pi^+[k] &= \mathbf{\Pi}_{g^{(1)(-)}[k], g^{(1)(+)}[k]}^+(\mathcal{Z}^{(1)+}[k]), \quad k = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{22.7}$$

то $\mathcal{Z}[k] \subseteq \Pi^+[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были матрицы $P^{(i)+}[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и допустимые векторы $g^{(i)(\pm)}[k]$, $i = 0, 1$, $k = 1, \dots, N$, и политоп $\Pi^+[0] \supseteq \mathcal{Z}_0$. При этом сечения политопов $\Pi^+[k]$ не возрастают.

Учитывая следствия 20.2 и 6.4, получаем

Следствие 22.1 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (20.1) – (20.5) с $\mathcal{Y}[j] \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\}$ либо $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$, а политопы $\Pi^+[k]$ находятся из соотношений (22.6), (22.7), где $\Pi^+[0] = \mathbf{Z}_{P^+[0]}^+(\mathcal{Z}_0)$, $\Pi^{(0)+}[k] = \mathcal{Z}^{(0)+}[k]$, $k = 1, \dots, N$. Тогда при любых матрицах $P^+[0]$, $P^{(0)+}[k]$, $P^{(1)+}[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и допустимых векторах $g^{(1)(\pm)}[k]$ имеют место включения (22.3).

Из теоремы 20.4, лемм 6.7, 6.9 и следствий 6.6, 6.8 вытекает

Теорема 22.4 Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (20.1), (20.4), (20.6), (20.8), (20.9) с фазовыми ограничениями (20.5), где $\mathcal{Y}[j]$ — полосы (20.12), и пусть все $\mathcal{Z}[k] \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{Z}^{(0)+}[k]$, $\Pi^{(0)+}[k]$ построены как и в (22.6), а

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(i)+}[k] &= \mathbf{Z}_{P^{(i)+}[k]}^+(\Pi^{(i-1)+}[k] \odot \Sigma^i[k]), \\ \Pi^{(i)+}[k] &= \mathbf{\Pi}_{g^{(i)(-)}[k], g^{(i)(+)}[k]}^+(\mathcal{Z}^{(i)+}[k]), \quad i = 1, \dots, m[k], \\ \Pi^+[k] &= \Pi^{(m[k])^+}[k], \quad k = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{22.8}$$

каковы бы ни были матрицы $P^{(0)+}[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k = 1, \dots, N$, $P^{(i)+}[k] \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^{(i-1)+, b}[k] \cap \Sigma^i[k])$, $i = 1, \dots, m[k]$, $k = 1, \dots, N$, допустимые векторы $g^{(i)(\pm)}[k]$, $i = 0, \dots, m[k]$, $k = 1, \dots, N$, и политоп $\Pi^+[0] \supseteq \mathcal{Z}_0$. Тогда политопы $\Pi^+[k]$ являются внешними оценками для $\mathcal{Z}[k]$ и сечения $\Pi^+[k]$ не возрастают.

Учитывая следствия 20.2 и 6.4, получаем

Следствие 22.2 Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (20.1) – (20.5), (20.12), а политопы $\Pi^+[k]$ находятся из соотношений (22.8) и (22.1), где $\Pi^+[k]$ и $P^+[k]$ заменены на $\Pi^{(0)+}[k]$ и $P^{(0)+}[k]$, $\Pi^+[0] = \mathbf{Z}_{P^+[0]}^+(\mathcal{Z}_0)$, а $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\}$

либо $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$. Тогда при любых указанных в теореме 22.4 значениях параметров $P^{(\cdot)+}[\cdot]$, $g^{(\cdot)(\pm)}[\cdot]$ и $P^+[0] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ верны включения (22.3).

Замечание 22.1 Если \mathcal{X}_0 , $\mathcal{R}[k]$ — параллелепипеды, $\mathcal{Y}[k]$ — параллелепипеды или полосы, то все операции в рекуррентных формулах в теоремах 22.1 – 22.4 производятся по явным формулам из гл. I.

Замечание 22.2 Политопы $\Pi^+[k]$ из теорем 22.1 – 22.4 обладают "верхним" полугрупповым и эволюционным свойствами.

Приведем примеры оценок МД $\mathcal{X}[N]$ для многошаговых систем (20.1) – (20.5), (20.10), (20.12), (20.14), (21.16). Оценки $\mathcal{P}^+[N]$ построены в соответствии со следствием 22.2 при $P^+[0] = P_0$ и нескольких других случайным образом выбранных матрицах $P^+[0]$. Матрицы $P^{(0)+}[\cdot]$ найдены по формулам $P^{(0)+}[k] = A[k]P^+[k-1]$. Политопы $\Pi^{(i)+}[k]$ при каждом $i \in \{1, \dots, m[k]\}$, $k \in \{1, \dots, N\}$ найдены путем выбора политопы, "наилучшего" в смысле некоторого критерия, среди оценок, определяемых возможными матрицами ориентации $P^{(i)+}[k] \in \mathcal{V}^4(\mathcal{P}^{(i-1)+,b}[k] \cap \Sigma^i[k])$ и найденных минимизацией по $2n$ параметрам $g_j^{(i)(\pm)}[k]$, $j = 1, \dots, n$, которые, в свою очередь, определяются в соответствии с формулами типа приведенных в замечании 6.2 значениями $\alpha_j^{i(\pm)}[k] \in [0, 1]$. Эта минимизация (при фиксированной матрице $P^{(i)+}[k]$) проводилась либо по конечному множеству значений $\alpha_j^{i(\pm)}[k] \in \{0, 1\}$, либо по множеству всевозможных $\alpha_j^{i(\pm)}[k] \in [0, 1]$ с помощью симплексного метода Нелдера – Мида (с бесконечными штрафами вне допустимой области и с начальным приближением в точке $\alpha_j^{i(\pm)}[k] = 0.99$, $j = 1, \dots, n$). В качестве упомянутого критерия оптимальности политопы $\Pi^{(i)+}[k]$ использовался объем параллелепипеда, являющегося "нижним" сечением вспомогательного политопы $\mathbf{Z}_{A[k+1]P^{(i)+}[k]}^+((A[k+1] \odot \Pi^{(i)+}[k]) \uplus B[k+1]\mathcal{R}[k+1])$ (считая при $k = N$, что $A[k+1] = I$, $B[k+1] = 0$)⁵. Для сравнения будут приведены также несколько внутренних для $\mathcal{X}[N]$ оценок $\mathcal{P}^-[N]$, построенных в со-

⁵Некоторые другие опробованные критерии, например, объем политопы $\Pi^{(i)+}[k]$, или объем параллелепипеда, лежащего в его "нижнем" основании, или сумма объемов "верхнего" и "нижнего" оснований, в описанных ниже примерах дали худшие результаты.

ответствии с теоремой 21.4, когда значения фигурирующих там параметров $h[\cdot]$, Λ , $\Gamma^{(1)}[\cdot]$, $\Gamma^{(2)}[\cdot]$ взяты, как и в примере 21.2, $P^{(i)-}[j] \equiv P^{(0)-}[j]$, а параметры $p^{(i)-}[j] \in \text{Argmax} \{ \text{vol } \mathbf{P}_{v, P^{(i)-}[j]}^-(\mathcal{Q}) \mid v \in \mathcal{Q} \}$, где $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(i-1)-}[j] \cap \Sigma^i[j]$, вычислены с помощью метода Нелдера – Мида с начальным приближением, найденным с использованием формул (5.24), (5.25) ($i = 1, \dots, m[k]$).

Пример 22.1 Пусть система из примера 21.1 дополнена ФО (20.12), где $c[j] \equiv 0$, $S[j] \equiv (0, 1)^\top$, $\sigma[j] \equiv 1$. На рис. 22.1(а) и 22.1(б) показаны множество \mathcal{X}_0 (штриховая линия) и семь внешних оценок $\mathcal{P}^+[N]$ для $\mathcal{X}[N]$ (тонкие линии), построенных, как описано выше, соответственно, при первом и втором способах минимизации по $\alpha_j^{i(\pm)}[k]$. Толстыми линиями показаны несколько внутренних для $\mathcal{X}[N]$ оценок $\mathcal{P}^-[N]$. На рис. 22.1(с) показана динамика во времени внешних для $\mathcal{X}[k]$ оценок $\mathcal{P}^+[k]$, соответствующих $P^+[0] = P_0$ и первому способу минимизации по $\alpha_j^{i(\pm)}[k]$, на рис. 22.1(д) — одна из внутренних оценок для трубки $\mathcal{X}[\cdot]$ ($\mathcal{P}^\pm[k]$ изображены через каждые два шага k).

Пример 22.2 Рассмотрим теперь систему из примера 21.2, дополненную ФО (20.12), где $c[j] \equiv 0.5$, $S[j] \equiv (1, 0)^\top$, $\sigma[j] \equiv 0.5$. И пусть опять либо $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$ (случай 1), либо $\mathcal{K}[j] \equiv [0, \infty)$ (случай 2). Указанным случаям соответствуют рис. 22.2(а) и 22.2(б), которые аналогичны рис. 22.1(а) и получены при первом способе минимизации по $\alpha_j^{i(\pm)}[k]$.

Сравнение рис. 22.1(а), 22.1(б); 22.2(а) и 22.2(б) с аналогичными рис. 21.1(с); 21.2(а) и 21.2(б) показывает, что построенные оценки оказываются меньше, чем оценки МД аналогичных систем без ФО.

Заключение

Работа посвящена разработке методов аппроксимации трубок траекторий линейных динамических систем в задачах гарантированного управления и оценивания при помощи параллелепипедов и параллелотопов. Получены следующие основные результаты.

1. Развита элементы "полиэдрального исчисления" — аппарата работы с множествами в рамках выбранного класса областей — параллелепипедов (и иногда более широкого класса — параллелотопов). Изучены способы построения и свойства внешних и внутренних полиэдральных (параллелепипедо- и параллелотопозначных) оценок для выпуклых компактных множеств. Изучены операции над параллелепипедами и параллелотопами (геометрические сумма и разность, пересечение с полосой, выпуклая оболочка объединения) и способы построения, а также свойства оценок результирующих множеств.

2. Разработаны алгоритмы построения внешних и внутренних аппроксимаций множеств достижимости линейных динамических систем (многшаговых и описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, с геометрическими ограничениями на управление) при помощи семейств параллелотопов. Для оценок выведены эволюционные уравнения, независимое интегрирование которых позволяет организовать распараллеливание вычислений. Доказано, что введенные семейства обеспечивают точные представления искомым множеств через операции пересечения и объединения оценок. Изучены свойства оценок, касающиеся неулучшаемости по включению, касания, невырожденности и пр.

3. Введены семейства внешних и внутренних оценок множеств достижимости для тех же классов систем, но стесненных фазовыми ограничениями в дискретные моменты времени. Описана динамика оценок; установлена возможность сколь угодно точной аппроксимации искомых множеств за счет перебора параметров, определяющих семейства.

4. Для задачи о приведении объекта на целевое множество (в том числе в условиях неопределенности) введены семейства внешних и внутренних полиэдральных оценок трубки разрешимости; выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие динамику оценок; разработан алгоритм синтеза допустимой стратегии управления, основанный на использовании внутренних оценок.

5. Для задачи гарантированного оценивания состояния параболической системы при "геометрических" ограничениях доказана сходимость к искомой информационной области множеств, получаемых с помощью решений аппроксимирующих задач оценивания в конечномерных системах, и исследованы возможности использования внешних и внутренних полиэдральных оценок.

6. Для линейных многошаговых систем с интегральными неквадратичными ограничениями на управление, включая системы с фазовыми ограничениями, введены семейства внешних и внутренних оценок множеств достижимости, обеспечивающие точные представления последних. Для множеств достижимости в расширенном фазовом пространстве введены семейства внешних оценок в виде политопов специального вида; выведены рекуррентные уравнения, описывающие динамику этих оценок. С использованием этих оценок найдены параллелепипедозначные оценки множеств достижимости в исходном пространстве, новые для систем с фазовыми ограничениями.

7. Разработан пакет программ полиэдрального оценивания BOXES в виде набора процедур для системы MATLAB.

Приложение А

Некоторые вспомогательные сведения и утверждения

А1 Вспомогательные утверждения

В данном разделе для удобства собраны некоторые вспомогательные леммы из области линейной алгебры, теории матриц и выпуклого анализа, которые используются при доказательстве основных утверждений и для которых автор не нашла ссылок (за исключением указанных).

Лемма А1.1 Пусть столбцы матрицы $P \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ таковы, что имеем $(p^i, p^j) = 0$, $i=1, \dots, s$, $j=s+1, \dots, n$, а $(u^i)^\top$ – строки матрицы P^{-1} . Тогда $u^i \in \text{Lin} \{p^\alpha\}_{\alpha=1}^s$, $i=1, \dots, s$, $u^j \in \text{Lin} \{p^\beta\}_{\beta=s+1}^n$, $j=s+1, \dots, n$. Если, к тому же, $(p^i, p^j) = \delta_i^j$, $i, j=s+1, \dots, n$, то $u^j = p^j$, $j=s+1, \dots, n$.

Доказательство. Ища $\{u^i\}$ в виде $u^i = \sum_{\alpha=1}^s \gamma_\alpha^i p^\alpha$, $i=1, \dots, s$, $u^j = \sum_{\alpha=s+1}^n \gamma_\alpha^j p^\alpha$, $j=s+1, \dots, n$, найдем коэффициенты из условий $(u^i, p^j) = \delta_i^j$, $i, j=1, \dots, s$, $i, j=s+1, \dots, n$. В силу предположения $(u^i, p^j) = 0$ при остальных i, j . Значит, $P^{-1\top} = \{u^i\}$. \square

Лемма А1.2 Пусть $\{w^i\}_{i=1}^n$ и $\{u^i\}_{i=1}^n$ – такие системы векторов, что каждый u^i ($i=1, \dots, n$) ортогонален w^j , $j=i+1, \dots, n$. Если все $(u^i, w^i) \neq 0$, то $\{u\}_{i=1}^n$ линейно независимы. Если $v^i = u^i$ при $(u^i, w^i) \neq 0$ и $v^i = w^i$ в противном случае, причем система $\{w^i\}_{i=1}^n$ ортогональна, то $\{v\}_{i=1}^n$ линейно независимы.

Доказательство. Предположим, что существуют такие $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, не все равные нулю, что $\sum_{i=0}^n \alpha_i u^i = 0$. Скалярно умножим это равенство на w^n . Так как $(u^i, w^j) = 0$, $i = 1, \dots, j-1$, для каждого $j \in \{2, \dots, n\}$, получаем $\alpha_n (u^n, w^n) = 0$, и, значит, $\alpha_n = 0$. Повторяя эту процедуру для w^{n-1}, \dots, w^1 , имеем $\alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = 0$, т.е. приходим к противоречию. Второе утверждение доказывается аналогично. \square

Лемма А1.3 Пусть $\mathcal{Q} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, а $\{w^i\}_{i=1}^n$ — ортонормированные векторы, которые в случае, когда $\dim \mathcal{Q} = n - \omega$, $\omega > 0$, удовлетворяют также условию $(x, w^i) = \rho(w^i | \mathcal{Q})$, $i = n - \omega + 1, \dots, n$, $\forall x \in \mathcal{Q}$. Если точка $x^* \in \mathcal{Q}$ такова, что $(x^*, w^k) = \sup\{(x, w^k) \mid x \in \mathcal{Q}, (x, w^i) = (x^*, w^i), i = k+1, \dots, n - \omega\}$, $k = 1, \dots, n - \omega$, то она является крайней для \mathcal{Q} .

Доказательство. Предположим, что $x^* = (x^1 + x^2)/2$, $x^j \in \mathcal{Q}$. Пусть $\alpha_i^* = (x^*, w^i)$, $\alpha_i^j = (x^j, w^i)$ — координаты точек x^* , x^j в базисе $\{w^i\}$. При $i = n - \omega + 1, \dots, n$ имеем $\alpha_i^* = \rho(w^i | \mathcal{Q}) = \alpha_i^j$, $j = 1, 2$. Равенство координат $\alpha_i^* = \alpha_i^1 = \alpha_i^2$ для $i = n - \omega, \dots, 1$ выводится по индукции, начиная с $i = n - \omega$, из равенств $\alpha_i^* = (\alpha_i^1 + \alpha_i^2)/2$ и неравенств $\alpha_i^* = \sup(x, w^i) \geq \alpha_i^j$, $j = 1, 2$, (справедливых ввиду того, что \sup берется по $x \in \mathcal{Q}$ при условиях $(x, w^\beta) = \alpha_\beta^*$, $\beta = i+1, \dots, n - \omega$, а координаты точек x^1 и x^2 , как оказывается в процессе доказательства, им удовлетворяют). \square

Лемма А1.4 [98, с.1310], [148, с.82] Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{X}_\omega \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, где Ω — произвольное множество параметров ω . Предположим, что для всех $l \in \Lambda \triangleq \{l = (l_1, \dots, l_n)^\top \mid l_i \neq 0, i = 1, \dots, n\}$ имеет место равенство $\rho(l | \mathcal{X}) = \inf_{\omega \in \Omega} \rho(l | \mathcal{X}_\omega)$. Тогда $X = \cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{X}_\omega$.

Лемма А1.5 [233] Пусть S — неособая $n \times n$ -матрица со строками s^j , $j = 1, \dots, n$, $S^{-1} = T = \{t^1, \dots, t^n\}$, и матрица \tilde{S} получена из S заменой j -й строки s^j на s^0 , где $s^0 t^j \neq 0$. Тогда матрица \tilde{S} неособая, и столбцы \tilde{t}^i матрицы \tilde{T} , обратной к \tilde{S} , вычисляются по формулам $\tilde{t}^i = t^i - s^0 t^i (s^0 t^j)^{-1} t^j$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq j$; $\tilde{t}^j = (s^0 t^j)^{-1} t^j$.

Лемма А1.6 Если P – матрица из первой части леммы А1.1, $A \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, а столбцы матрицы Q : $q^i = Ap^i$, $i = 1, \dots, s$, $q^j = (A^\top)^{-1}p^j$, $j = s+1, \dots, n$, то $Q \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ и ее столбцы удовлетворяют таким же условиям, как и столбцы P .

Доказательство. Ортогональность следует из тождества $(x, By) = (B^\top x, y)$. Если $\sum_{i=1}^n \alpha_i q^i = 0$, то умножая это равенство на q^j , $j=1, \dots, n$, и учитывая свойства $\{q^j\}$, получаем, что все $\alpha_i = 0$, т.е. $Q \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$. \square

Лемма А1.7 Пусть A , P и Q – матрицы из леммы А1.6, $\beta \in \{1, \dots, s\}$ и для векторов r и t имеем $(r, p^i) = 0$, $i = s+1, \dots, n$; $(t, q^i) = 0$, $i = 1, \dots, s$, $i \neq \beta$. Тогда $(t, Ap^\beta)(u^\beta, r) = (t, Ar)$, где $(u^\beta)^\top$ – β -я строка матрицы P^{-1} .

Доказательство. Поскольку r представим в виде $r = \sum_{i=1}^s \alpha_i p^i$, то несложно заметить, что $(t, Ap^\beta)(u^\beta, r) = (t, q^\beta)\alpha_\beta = (t, Ar)$. \square

Лемма А1.8 Если $P^+[k]$ строятся как описано в случаях 1–3 теоремы 7.1, то для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{0, \dots, N\}$ либо $\rho_j[k] = 0$, либо $(p^{+,i}[k], r^j[k]) = 0$, $i = n - \omega, \dots, n$.

Доказательство следует из способа построения матриц $P^+[k]$ с учетом (7.2), (7.3) и леммы А1.6. \square

Лемма А1.9 Пусть $\{z^i[k]\}_{i=1}^n$, $k = 0, 1$, – такие системы векторов, что $\text{rank} \{z^i[0]\} = n$, $z^i[1] = Az^i[0]$, где $\det A \neq 0$, и пусть $\{w^i[k]\} = \text{Ort} \{z^i[k]\}$, $k = 0, 1$. Пусть $r \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $(r, w^\alpha[0]) = 0$, $\alpha = i+1, \dots, n$, $\iff (Ar, w^\alpha[1]) = 0$, $\alpha = i+1, \dots, n$.

Доказательство. Посылка импликации \Rightarrow означает (ввиду ортогональности векторов $\{w^j[0]\}$), что $r \in \text{Lin} \{w^\alpha[0]\}_{\alpha=1}^i$, откуда $Ar \in \text{Lin} \{Aw^\alpha[0]\}_{\alpha=1}^i = \text{Lin} \{w^\alpha[1]\}_{\alpha=1}^i$ (это следует из процедуры Грамма-Шмидта [101, с.70] для $\{z^j[0]\}$ и $\{z^j[1]\}$) и, значит, Ar ортогонален $w^\alpha[1]$, $\alpha = i+1, \dots, n$ (ввиду ортогональности $w^j[1]$). Обратное утверждение

вытекает из первого с использованием подходящих переобозначений и невырожденности A . \square

Лемма А1.10 В условиях леммы А1.9, если $(r, w^\alpha[0]) = 0$, $\alpha = i + 1, \dots, n$, то $(Ar, w^i[1]) = (r, w^i[0])(Aw^i[0], w^i[1])$.

Доказательство. Поскольку r представим в виде $r = \sum_{j=1}^i \gamma_j w^j[0]$, а $w^i[1]$ ортогонален $\text{Lin} \{z^j[1]\}_{j=1}^{i-1} = \text{Lin} \{Aw^j[0]\}_{j=1}^{i-1}$, оба выражения сводятся к виду $\gamma_i(Aw^i[0], w^i[1])$. \square

Лемма А1.11 В условиях леммы А1.9 $(Aw^i[0], w^i[1]) > 0$.

Доказательство. Пусть $\{\tilde{w}^i[k]\}$ получены путем ортогонализации $\{z^i[k]\}$ без нормализации:

$$\tilde{w}^i = \det \begin{bmatrix} & & z^1 & \\ & \Gamma_{i-1} & \vdots & \\ & & z^{i-1} & \\ (z^i, z^1) & \dots & (z^i, z^{i-1}) & z^i \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{i-1} = \begin{bmatrix} (z^1, z^1) & \dots & (z^1, z^{i-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (z^{i-1}, z^1) & \dots & (z^{i-1}, z^{i-1}) \end{bmatrix},$$

где использованы условные обозначения [30, с.220] и индекс k опущен. Конкретизируя с помощью этих формул выражения для $A\tilde{w}^i[0]$ и $\tilde{w}^i[1]$ и используя формулу [30, с.55]

$$\det B = \det B_{n-1} \cdot (b_{nn} - B_n \cdot B_{n-1}^{-1} B_n), \quad B = \begin{bmatrix} B_{n-1} & B_n \\ B_n & b_{nn} \end{bmatrix},$$

прямыми вычислениями (с учетом соотношений ортогональности, лежащих в основе процедуры Грамма-Шмидта [30, с.220]) можно проверить, что $(A\tilde{w}^i[0], \tilde{w}^i[1]) = \Gamma_{i-1}\{z^\alpha[0]\} \cdot \Gamma_{i-1}\{z^\alpha[1]\} \|\tilde{w}^i[1]\|^2$, где $\Gamma_{i-1}\{z^\alpha\} > 0$ — определитель Грамма для $\{z^\alpha\}_{\alpha=1}^{i-1}$. \square

Лемма А1.12 Пусть $H[0] \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ и матрицы $H[k]$, $B[k]$, $U[k]$ вычислены как указано в начале теоремы 7.5, и пусть выполнено предположение 1.1. Тогда для всех $i = 1, \dots, n - \omega$, $k = 0, \dots, N$ имеем

- (a) $(u^i[k], b^i[k]) \geq 0$,
- (b) если $(u^i[k-1], b^i[k-1]) > 0$, то $(u^i[k], b^i[k]) > 0$.

Доказательство. Соотношение (а) очевидно для $k = 0$. Из (7.11) с учетом леммы А1.9 получаем $(u^i[k], b^\alpha[k]) = 0$ для $\alpha = i + 1, \dots, n$. Следовательно, учитывая (7.11) и леммы А1.10, А1.11, по индукции имеем $(u^i[k], b^i[k]) \geq (A[k]u^i[k-1], b^i[k]) = (u^i[k-1], b^i[k-1])(A[k]b^i[k-1], b^i[k]) > (u^i[k-1], b^i[k-1])$. \square

Лемма А1.13 В условиях леммы А1.12, $u^i[k]=0 \iff (u^i[k], b^i[k])=0$.

Доказательство. Пусть выполнено второе равенство. По лемме А1.12 $(u^i[k-1], b^i[k-1]) = 0$, $(A[k]u^i[k-1], b^i[k]) = 0$. Тогда ввиду (7.11) $\rho_j[k] |(r^j[k], b^i[k])| = 0$ для всех $j \in J_i[k]$. Таким образом, $u^i[k] = A[k]u^i[k-1]$ и, значит, $u^i[k] = \dots = \Phi[k, 0]u^i[-1] = 0$. \square

Лемма А1.14 Если $A^j \in \mathbb{R}^{n \times r}$, \mathcal{K}^j — выпуклые конусы в \mathbb{R}^r , то множества

$$\mathcal{Q} = \{x \mid x = \sum_{j=1}^k A^j w^j; \sum_{j=1}^k \|w^j\|_\infty \leq \beta; w^j \in \mathcal{K}^j, j = 1, \dots, k\} \quad (\text{A1.1})$$

и $\tilde{\mathcal{Q}} = \beta \text{co} \{ \cup_{j=1}^k A^j(\mathcal{C} \cap \mathcal{K}^j) \}$, где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$, совпадают.

Доказательство. Пусть $x \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Несложно заметить, что это обеспечивает существование таких $\alpha_j \geq 0$ и $\tilde{w}^j \in \mathcal{C} \cap \mathcal{K}^j$, $j = 1, \dots, k$, что

$$x = \beta \sum_{j=1}^k \alpha_j A^j \tilde{w}^j, \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1. \quad (\text{A1.2})$$

Вводя векторы $w^j = \beta \alpha_j \tilde{w}^j$, $j = 1, \dots, k$, видим, что $x = \sum_{j=1}^k A^j w^j$, причем из принадлежности \tilde{w}^j конусу \mathcal{K}^j следует, что и $w^j \in \mathcal{K}^j$, а из неравенства $\|\tilde{w}^j\|_\infty \leq 1$ и свойств $\{\alpha_j\}$ вытекает, что $\sum_{j=1}^k \|w^j\|_\infty \leq \beta$. Таким образом, $x \in \mathcal{Q}$.

Обратно, пусть $x \in \mathcal{Q}$, т.е. для x имеет место указанное в (А1.1) представление. Рассмотрим три возможных случая значений $\gamma = \sum_{j=1}^k \|w^j\|_\infty$. Пусть $\gamma = \beta$. Тогда можно записать x в виде (А1.2), где $\alpha_j = \beta^{-1} \|w^j\|_\infty \geq 0$, а $\tilde{w}^j = 0$, если $\|w^j\|_\infty = 0$, и $\tilde{w}^j = w^j / \|w^j\|_\infty$ в противном случае. При этом получается, что $\|\tilde{w}^j\|_\infty \leq 1$, $\tilde{w}^j \in \mathcal{K}^j$, т.е. $x \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Пусть $\gamma = 0$. Тогда

$w^j = 0$, $j = 1, \dots, k$, и точка $x = 0 \in \tilde{\mathcal{Q}}$, поскольку представима в виде (A1.2), где все $\tilde{w}^j = 0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{K}^j$. Пусть $0 < \gamma < \beta$. Вводя $\hat{w}^j = kw^j$, где $k = \beta/\gamma > 1$, замечаем, что точка $\hat{x} = \sum_{j=1}^k A^j \hat{w}^j \in \mathcal{Q}$, для нее выполнены условия первого из рассматриваемых случаев, и, значит, $\hat{x} \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Ввиду выпуклости $\tilde{\mathcal{Q}}$ получаем, что и $x = k^{-1}\hat{x} + (1 - k^{-1})0 \in \tilde{\mathcal{Q}}$. \square

Лемма A1.15 *Если $\mathcal{X}, \mathcal{Y}^j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, k$, и \mathcal{X} выпукло, то множества $\mathcal{Q}^1 = \mathcal{X} + \text{co } \cup_{j=1}^k \mathcal{Y}^j$ и $\mathcal{Q}^2 = \text{co } \cup_{j=1}^k (\mathcal{X} + \mathcal{Y}^j)$ совпадают.*

Доказательство. Если $x \in \mathcal{Q}^1$, то справедливо представление $x = a + \sum_{i=1}^N \alpha_i x^i = \sum_{i=1}^N \alpha_i (a + x^i)$, где $a \in \mathcal{X}$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, x^i содержится в каком-нибудь из \mathcal{Y}^j , $j = j(i) \in \{1, \dots, k\}$ ($i=1, \dots, N$). Поскольку $a + x^i \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}^j \subseteq \cup_{j=1}^k (\mathcal{X} + \mathcal{Y}^j)$, то $x \in \mathcal{Q}^2$. Значит, $\mathcal{Q}^1 \subseteq \mathcal{Q}^2$.

Если $x \in \cup_{j=1}^k (\mathcal{X} + \mathcal{Y}^j)$, то найдется такое $j \in \{1, \dots, k\}$, что $x \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}^j \subseteq \mathcal{X} + \cup_{j=1}^k \mathcal{Y}^j \subseteq \mathcal{X} + \text{co } \cup_{j=1}^k \mathcal{Y}^j$. Значит, $\cup_{j=1}^k (\mathcal{X} + \mathcal{Y}^j) \subseteq \mathcal{X} + \text{co } \cup_{j=1}^k \mathcal{Y}^j$. Беря выпуклую оболочку обеих частей этого включения, и учитывая выпуклость \mathcal{X} , имеем $\mathcal{Q}^2 \subseteq \text{co } (\mathcal{X} + \text{co } \cup_{j=1}^k \mathcal{Y}^j) = \mathcal{Q}^1$. \square

A2 Некоторые свойства обобщенного решения уравнения теплопроводности и аппроксимирующих систем

Известно [100], что обобщенное решение задачи (17.1) представимо в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} ((u_0, \omega_k) e^{-\lambda_k t} + \int_0^t (c f(\cdot, \tau), \omega_k(\cdot)) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau) \omega_k(x),$$

$$\lambda_k = (a\pi k l^{-1})^2, \quad \omega_k(x) = (2/l)^{1/2} \sin(\pi k l^{-1} x),$$

и его можно считать непрерывной функцией x и t в области $\bar{D} \times (0, \theta]$. Поэтому идеальный сигнал $z(t) = G(t)u(\cdot, t)$ определен при п.в. $t \in T$. Используя представление решения в виде ряда, несложно убедиться, что

при предположениях §17 (при $\delta > 0$) имеем $z(\cdot) \in Y = L_\infty(T)$ и

$$\|z\|_Y \leq C (\|u_0\| + \|cf\|_{L_2(Q)}). \quad (\text{A2.1})$$

Известно также [100, с.163], что при любом $t \in (0, \theta]$

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\| + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq C (\|u_0\| + \|cf\|_{L_2(Q)}). \quad (\text{A2.2})$$

Решения систем (17.7), (17.9) представимы в виде конечных рядов Фурье [13, с.570], [134, с.283]

$$u^m(t) = \sum_{s=1}^m \{(u_0^m, \Omega^{ms})_m e^{-\Lambda^{ms}t} + \int_0^t (cF^m(\tau), \Omega^{ms})_m e^{-\Lambda^{ms}(t-\tau)} d\tau\} \Omega^{ms};$$

$$u^\Delta[j] = \sum_{s=1}^m \{(u_0^m, \Omega^{ms})_m (\mu_s^\Delta)^j + \tau_n \sum_{l=0}^{j-1} (cF^\Delta[l+1], \Omega^{ms})_m (\mu_s^\Delta)^{j-l}\} \Omega^{ms},$$

$$j = 1, \dots, n;$$

$$\Lambda^{ms} = a^2 \Lambda_s^m, \quad \mu_s^\Delta = (1 + \tau_n \Lambda^{ms})^{-1}, \quad \Lambda_s^m = 4h_m^{-2} \sin^2(0.5\pi x^{ms} l^{-1}),$$

$$\Omega_i^{ms} = (2/l)^{1/2} \sin(\pi s x^{mi} l^{-1}), \quad i = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, m,$$

где $\{\Omega^{ms}\}_{s=1}^m$ — система собственных векторов матрицы A^m , образующая в V^m ортонормированный базис: $(\Omega^{ms}, \Omega^{mj})_m = \delta_{ij}$, $s, j = 1, \dots, m$, а $-\Lambda_s^m$, $-\Lambda^{ms}$ и μ_s^Δ — соответствующие им собственные числа матриц A^m , B^m и B^Δ ; $x^{mi} = i h_m$; $h_m = l(m+1)^{-1}$; $\tau_n = \theta n^{-1}$.

Приложение В

Программная реализация алгоритмов в пакете программ BOXES для системы MATLAB 5

Большинство алгоритмов построения полиэдральных оценок реализовано в пакете программ (Toolbox'e) BOXES для системы MATLAB 5. Он представляет собой коллекцию М-файлов и прилагается на дискете в каталоге BOXES. М-функции собраны в каталоге BOXES\BOXES, а примеры их использования — в каталоге BOXES\BOXDEMOS (при работе оба каталога должны быть указаны в пути доступа). Все функции перечислены в файле Contents.m. Подробное описание каждой функции можно получить, выполнив в командном окне системы MATLAB команду `help <функция>` [127]. Ниже приводится список основных функций.

Элементарные операции.

- `affinepd` — Аффинное неособое преобразование параллелепипеда.
- `sumpd` — Найти гиперполосы, определяющие сумму двух параллелепипедов.
- `extsumpd` — Внешняя оценка с заданной матрицей ориентации для суммы двух параллелепипедов.
- `intsumpd` — Внутренняя оценка суммы двух параллелепипедов (из второй части леммы 3.5).

- intsumpp — Внутренняя оценка суммы двух параллелотопов (из леммы 3.8).
- itesumpp — Тугая внутренняя оценка суммы параллелотопов.
- ioesumpp — Внутренняя оценка для суммы двух параллелотопов из семейства $\mathbf{P}_{I,\Gamma}^-(\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)})$, оптимальная в смысле выбранного критерия ((3.27), $\mu_l(\mathcal{P})$ либо $\mu_W(\mathcal{P})$ из леммы 2.6 при $W = (P^{(1)})^{-1})^\top$).
- differ — Геометрическая разность двух параллелепипедов.
- sfpdints — Опорная функция пересечения параллелепипеда и гиперполосы.
- eeforset — Внешняя оценка для множества, задаваемого опорной функцией (из леммы 2.7).
- eintpd1 — Внешняя оценка пересечения двух параллелепипедов (из леммы 5.2).
- eintpd2 — Внешняя оценка пересечения двух параллелепипедов (из леммы 5.1).
- eepdints — Внешние оценки пересечения параллелепипеда и гиперполосы (оценка с той же матрицей ориентации, что и у параллелепипеда; минимальная по объему оценка из леммы 5.5).
- eepdis — Минимальная по объему внешняя оценка пересечения параллелепипеда и гиперполосы (строится с помощью замечания 5.2).
- ieplt — Внутренняя оценка для пересечения полос, построенная с помощью леммы 2.15 при заданных центре и матрице ориентации.
- iepdintz — Внутренняя оценка для пересечения параллелепипеда и полосы, построенная при заданной матрице ориентации одним из нескольких способов (намеченных в замечании 2.4).

- ippdints — Найти внутреннюю точку для пересечения параллелепипеда и гиперполосы (по формулам (5.24), (5.25)).
- iepdints — Внутренняя оценка для пересечения параллелепипеда и гиперполосы (с заданной матрицей ориентации и центром, найденным с помощью `ippdints.m`).
- eecorr — Внешняя оценка для объединения параллелотопов.
- iecorr — Внутренняя оценка для выпуклой оболочки объединения двух параллелотопов (из леммы 6.1).
- suppfun — Опорная функция параллелепипеда.
- volpd — Объем параллелепипеда.
- measpd2 — Функция $\mu_\rho(\mathcal{P})$ (см. лемму 2.6).
- measpd3 — Функция $\mu_W(\mathcal{P})$ (см. лемму 2.6).
- pdtopp — Преобразовать параллелепипед в параллелотоп.
- pptopd — Преобразовать параллелотоп в параллелепипед.
- pdtozone — Преобразовать параллелепипед в полосу $\mathcal{S}(c, S, \sigma, n)$.
- zonetopd — Преобразовать полосу $\mathcal{S}(c, S, \sigma, n)$ в параллелепипед.
- pdtopz — Преобразовать параллелепипед из формы $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ в форму $\mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}, \gamma^{(+)})$.
- pztopd — Преобразовать $\mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}, \gamma^{(+)})$ в $\mathcal{P}(p, P, \pi)$.
- vertpd — Найти все вершины параллелепипеда.
- vertpp — Найти все вершины параллелотопа.
- isxinpд — Проверить, принадлежит ли точка параллелепипеду.
- isxinpp — Проверить, принадлежит ли точка невырожденному параллелотопу.
- isxxinz — Проверить, принадлежат ли точки полосе.
- findproj — Проекция точки на невырожденный параллелотоп.
- chpppr — Выпуклая оболочка двумерной проекции параллелотопа.
- drpdpr — Нарисовать двумерную проекцию параллелепипеда.

- rndxinpd — Выбрать случайным образом точку в параллелепипеде.
- affpi — Преобразование $(A \odot \Pi) \oplus a$ для политопа Π .
- eepiints — Внешняя оценка для $\Pi \odot \Sigma^0$ (из леммы 6.9).
- eepluspp — Внешняя оценка для $\Pi \uplus \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ (из леммы 6.7).
- volpiz — Объем политопа Π , вычисленный с помощью Symbolic Math Toolbox.
- volpizn — Объем политопа Π , вычисленный с помощью квадратных формул.

Оценки множеств достижимости и информационных областей для многошаговых систем и систем с непрерывным временем при геометрических ограничениях на управление.

- eeadz — Внешние оценки трубки достижимости (в том числе при наличии ФО в виде полос).
- eeadz2 — Внешние оценки трубки достижимости систем с билинейной неопределенностью (в том числе при наличии ФО в виде полос).
- eeadbl — Внешние оценки трубки достижимости билинейных неопределенных систем с непрерывным временем.
- eeid — Внешние оценки информационных областей.
- ieadz — Внутренние оценки трубки достижимости (в том числе при наличии ФО в виде полос).
- itead — Тугие внутренние оценки множеств достижимости.
- ieid — Внутренние оценки информационных областей.

Сопутствующие функции.

- model1 — Моделирование фазовых ограничений.
- disturb — Моделирование возмущений.

Оценки множеств достижимости для многошаговых систем при интегральных ограничениях на управление.

- eeadic — Внешние оценки МД $\mathcal{X}[k]$ (из теоремы 21.1).
- eeadiczc — Внешние оценки МД $\mathcal{Z}[k]$ (в том числе при наличии ФО в виде полос) из теоремы 22.2, следствия 22.2.
- ieadic — Внутренние оценки множеств достижимости $\mathcal{X}[k]$ (в том числе при наличии ФО) из теорем 21.3, 21.4.
- iteadic — Тугие внутренние оценки для МД $\mathcal{X}[k]$.

Полиэдральный синтез.

- synt_unc — Полиэдральный синтез.
- ee_su — Внешние оценки для трубки разрешимости.

Сопутствующие функции.

- sedstrb — Моделирование возмущений.
- fbcontrs — Стратегия управления для позиции $\{t, x\}$.

Оценки состояния параболической системы.

- id_heat0 — Внешние оценки (в том числе по координатным).
- id_heat — Внешние оценки "по Фурье".
- ieidheat — Внутренние оценки.

Некоторые вспомогательные функции.

- cgmeth — Минимизация квадратичной функции при ограничениях $\underline{b} \leq x \leq \bar{b}$ модификацией метода сопряженных градиентов.
- chull2d — Выпуклая оболочка точек в двумерном пространстве.

Демонстрационные примеры.

- box_demo — Сценарий для демонстрации функций из Toolbox'a BOXES. Доступны примеры выполнения и описания основных функций.

Приложение С

Рисунки

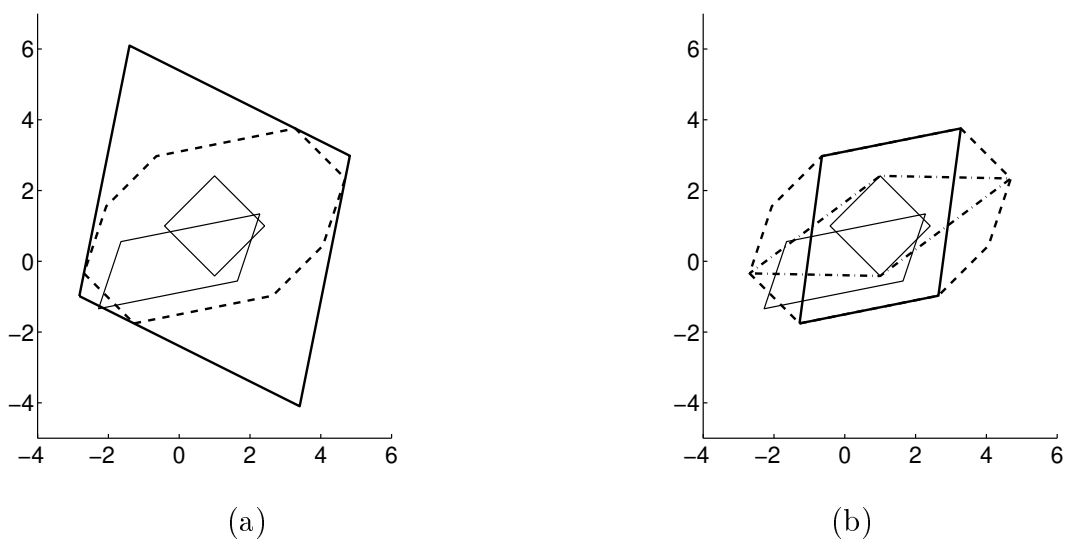
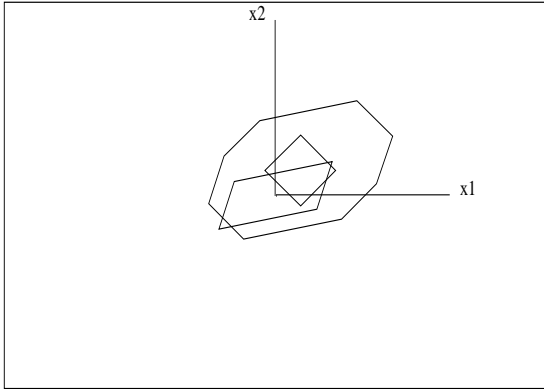
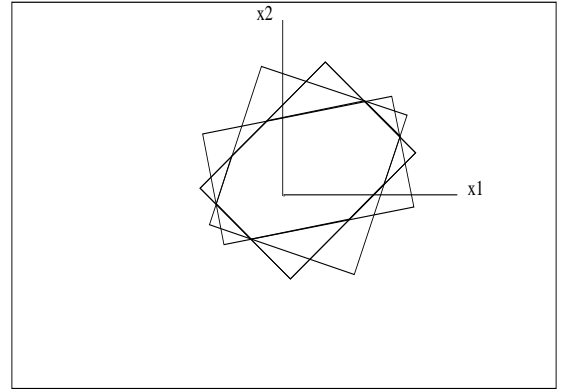


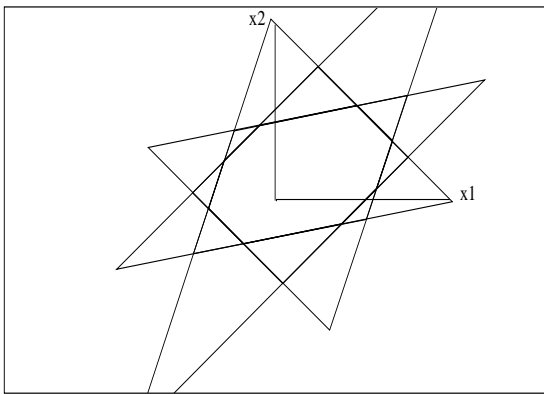
Рис. 3.1: Параллелепипеды $\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{P}^{(2)}$ (тонкие линии, $\mathcal{P}^{(2)}$ — квадрат), их сумма $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$ (штриховая линия) и ее оценки ($n = 2$). (а) Внешняя оценка $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$, соответствующая заданной матрице V (толстая линия); (б) Две внутренних оценки: $\mathbf{P}_{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}}^-(\mathcal{Q})$ (штрихпунктирная линия) и $\mathbf{P}_{L, \Gamma^*}^-(\mathcal{Q})$ (толстая линия).



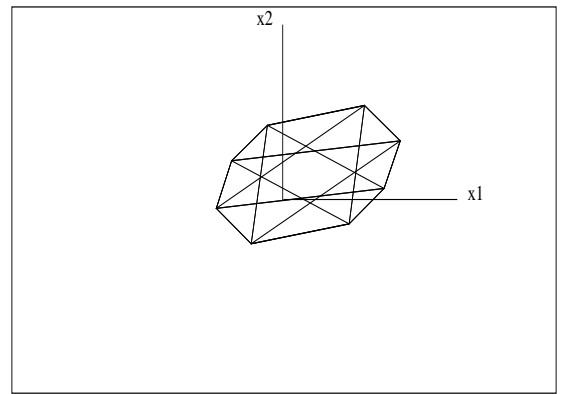
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 3.2: Сумма двух параллелепипедов и ее оценки ($n = 2$). (a) Множества $\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$. (b) Семейство внешних оценок $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$, $V \in \mathcal{V}^1 \equiv \mathcal{V}^2$. (c) Семейство внешних оценок $\mathbf{P}_V^+(\mathcal{Q})$, $V \in \mathcal{V}^3$. (d) Семейство внутренних оценок, описанных в теореме 3.2.

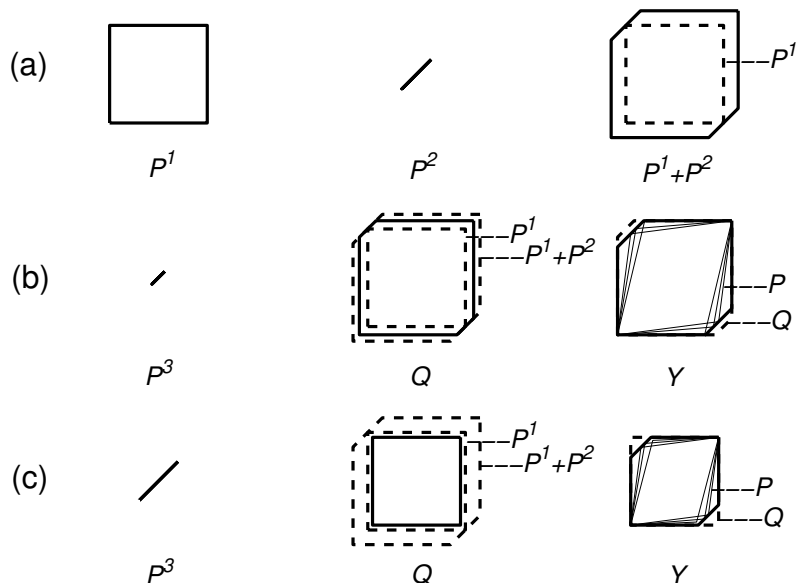


Рис. 4.1: Множество $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}) \dot{-} \mathcal{P}^{(3)}$ и его внутренние оценки ($n = 2$). (а) Множества $\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}$. (б) Множества $\mathcal{P}^{(3)}$, \mathcal{Q} и \mathcal{Y} (толстые сплошные линии) для случая $b \geq c$. (в) Те же множества для случая $b \leq c$. Тонкими линиями показаны по три оценки $\mathcal{P} = \mathbf{P}_{I,\Gamma}^-(\mathcal{Q})$.

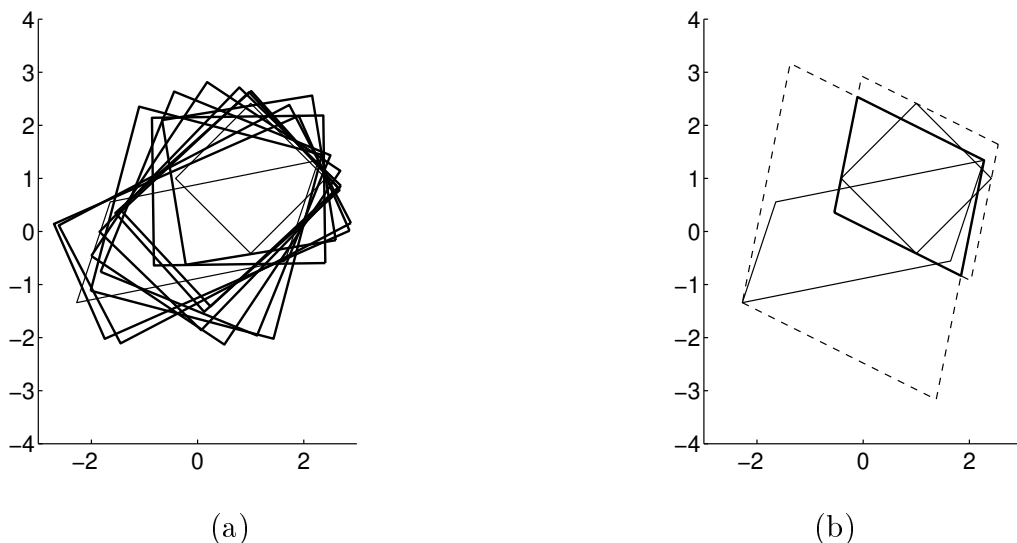


Рис. 5.1: Пересечение двух параллелепипедов (тонкие линии) и его внешние оценки (толстые сплошные линии) ($n = 2$). (а) Несколько оценок из семейства, описанного в лемме 5.1. (б) Оценка $\tilde{\mathbf{P}}_V^+(\mathcal{Q})$ из семейства, описанного в лемме 5.2, построенная для заданной матрицы ориентации V .

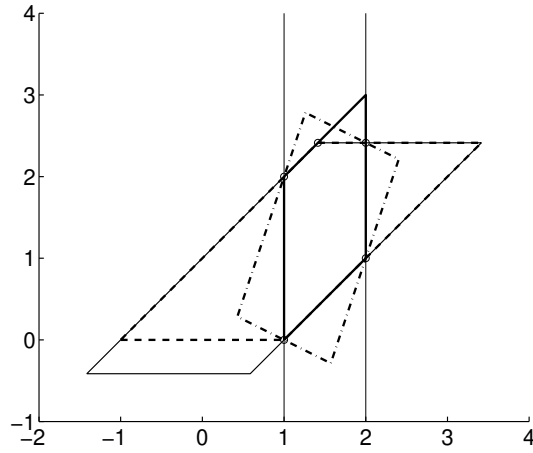


Рис. 5.2: Пересечение $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0$ параллелепипеда и гиперплоскости (тонкие линии) и три внешних оценки для \mathcal{Q} ($n = 2$): с такой же матрицей ориентации, что и \mathcal{P} (штриховая линия), с заданной матрицей ориентации (штрихпунктирная линия), оценка наименьшего объема (толстая сплошная линия). Кружками показаны вершины \mathcal{Q} .

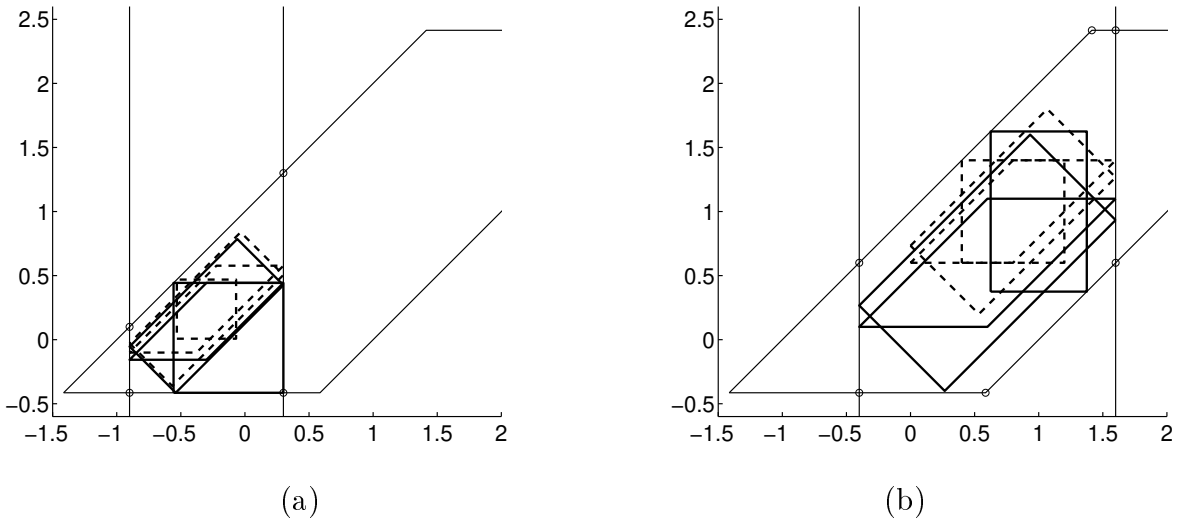


Рис. 5.3: Пересечение $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma^0$ параллелепипеда и гиперплоскости и внутренние оценки $P_{v,V}^-(\mathcal{Q})$, соответствующие трем выбранным матрицам ориентации ($n = 2$). Штриховой линией показаны оценки, соответствующие выбору v в виде (5.24) и (5.25), сплошной — в виде (2.27). (a) Случай $p \notin \text{int } \mathcal{Q}$. (b) Случай $p \in \text{int } \mathcal{Q}$.

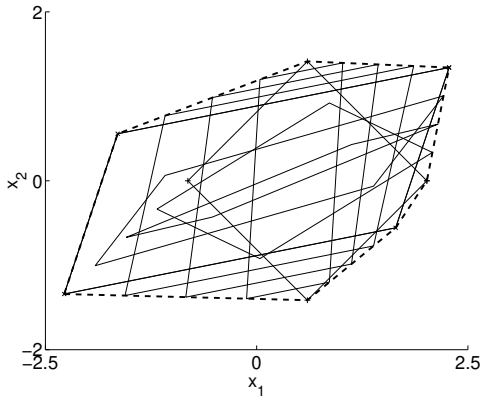


Рис. 6.1: Параллелотопы $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ (вершины отмечены косыми и прямыми крестиками соответственно), $\mathcal{Q} = \text{co}(\mathcal{P}^{(1)} \cup \mathcal{P}^{(2)})$ (штриховая линия) и несколько внутренних оценок $P_{\Gamma, \alpha}^-(\mathcal{Q})$ для \mathcal{Q} ($n = 2$).

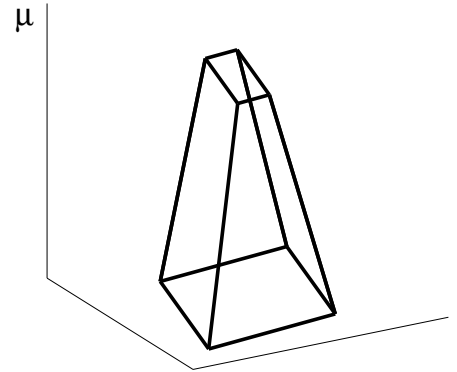
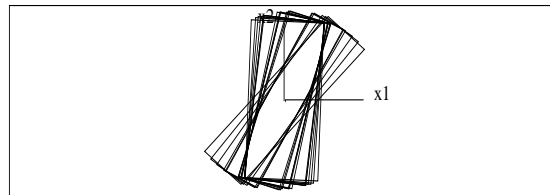
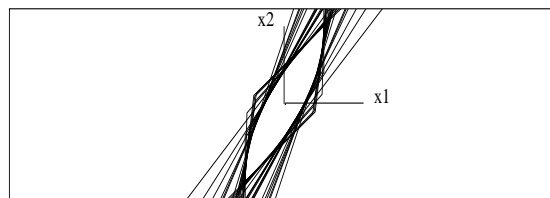


Рис. 6.2: Политоп Π в \mathbb{R}^3 .

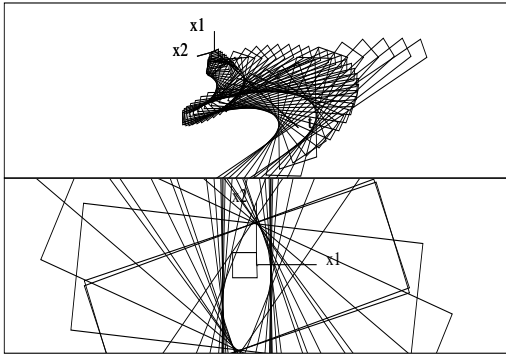


(a)

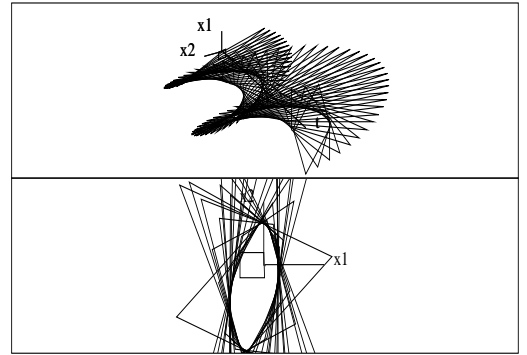


(b)

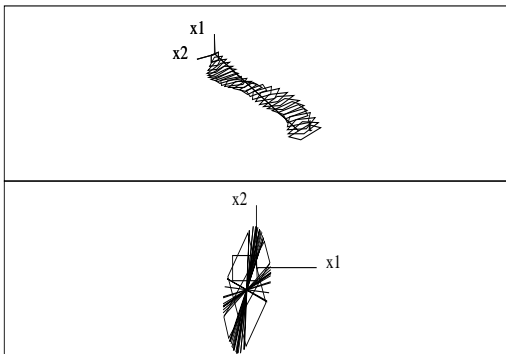
Рис. 9.1: Параллелепипеды $\mathcal{P}^+[N]$ в примере 9.1 ($n = 2$). Получены по формулам теоремы 7.1, случай 1 (a) и случай 3 (b). Пространственные координаты на изображенных отрезках координатных осей изменяются от 0 до 1.



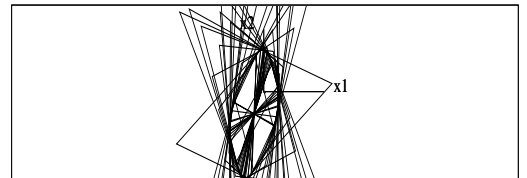
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 9.2: Оценки МД в примере 9.2: случай без фазовых ограничений ($n = 2$).

(a) Одна из трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и несколько оценок $\mathcal{P}^+[N]$, полученных в силу теоремы 7.1, случай 1. (b) То же самое, но с силу теоремы 7.1, случай 3. (c) Одна из трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и несколько оценок $\mathcal{P}^-[N]$, полученных по формулам теоремы 7.5. (d) Результат объединения нижних частей рис. (b) и (c). Пространственные координаты на изображенных отрезках координатных осей изменяются от 0 до 2.5.

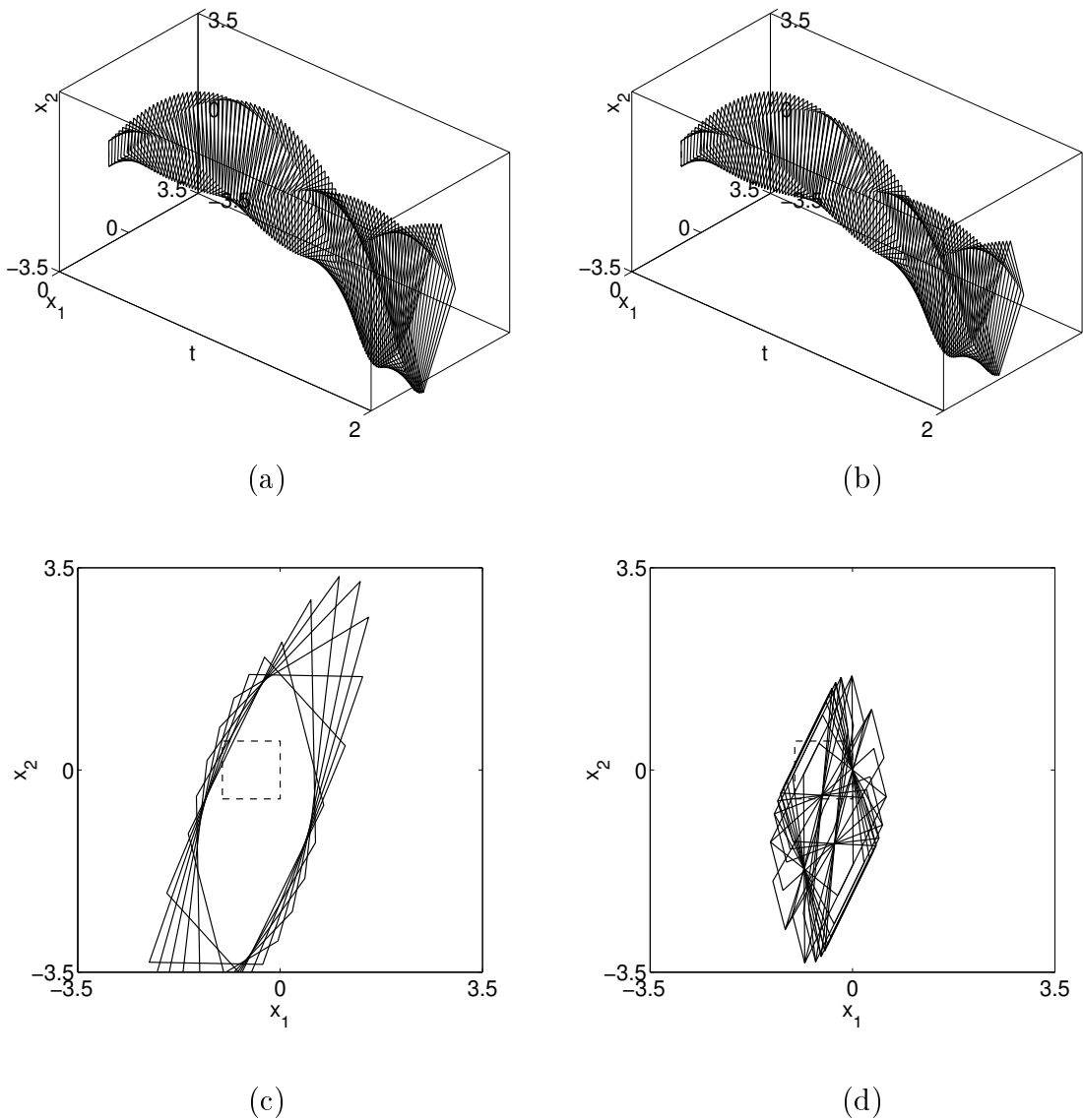
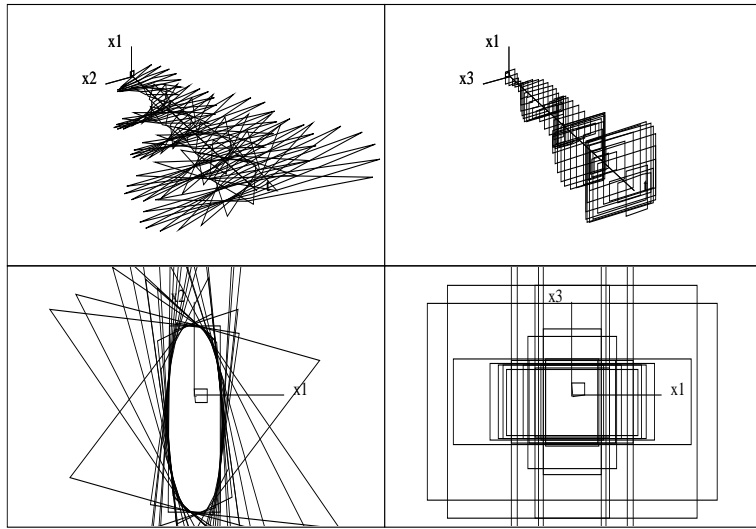
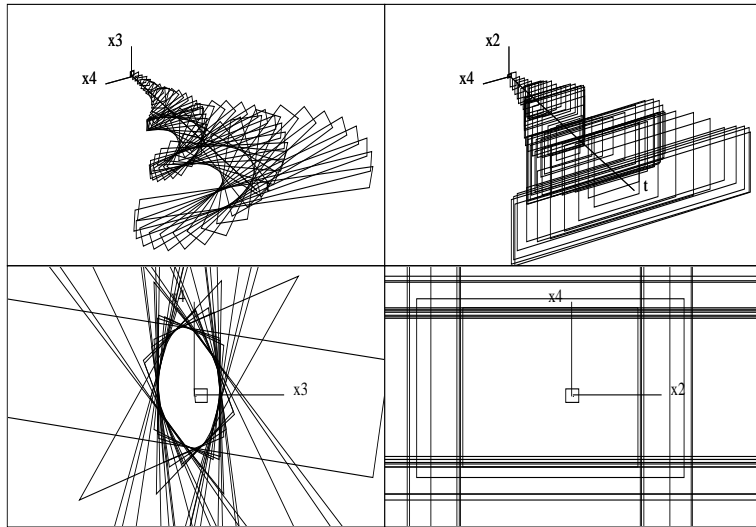


Рис. 9.3: Оценки МД в примере 9.2 ($n = 2$). (a) Трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$, полученная в силу теоремы 7.1, случай 3, при $P^+[0] = P_0$. (b) Трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$, построенная в силу теоремы 7.6 при $\Lambda = I$, $\Gamma^{(1)}[k] \equiv I$, $\Gamma^{(2)}[k]$, найденных из условия (3.27). (c) Оценки $\mathcal{P}^+[N]$, полученные в силу теоремы 7.1, случай 3, при семи ортогональных матрицах $P^+[0]$ с $p^{+,1}[0] = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top$ при $\varphi = i\pi/14$, $i = 0, \dots, 6$. (d) Несколько тугих внутренних оценок $\mathcal{P}^-[N]$, найденных в силу следствия 7.1.

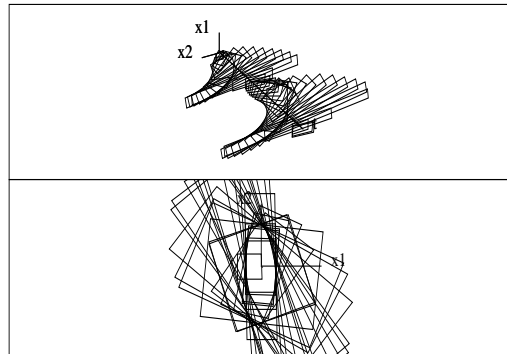


(a)

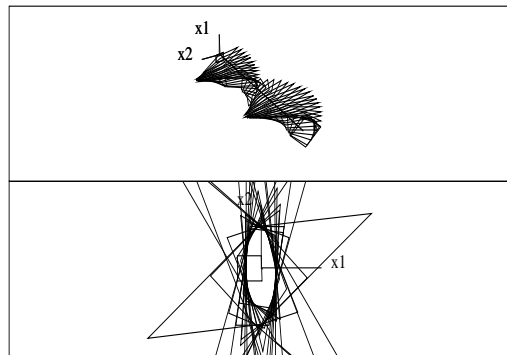


(b)

Рис. 9.4: Проекция $\mathcal{P}^+[\cdot]$ на двумерные плоскости в примере 9.3: случай без фазовых ограничений ($n = 4$). Оценки получены по формулам теоремы 7.1, случай 3 (a) и случай 1 (b). Пространственные координаты на изображенных отрезках координатных осей изменяются от 0 до 14.

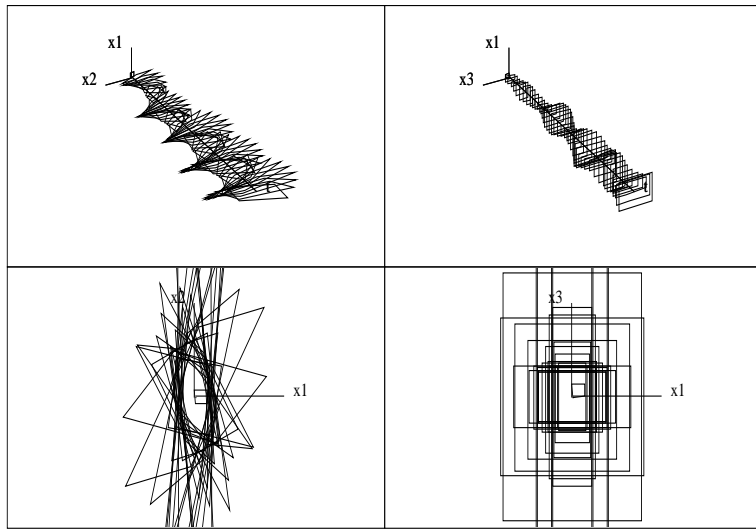


(a)

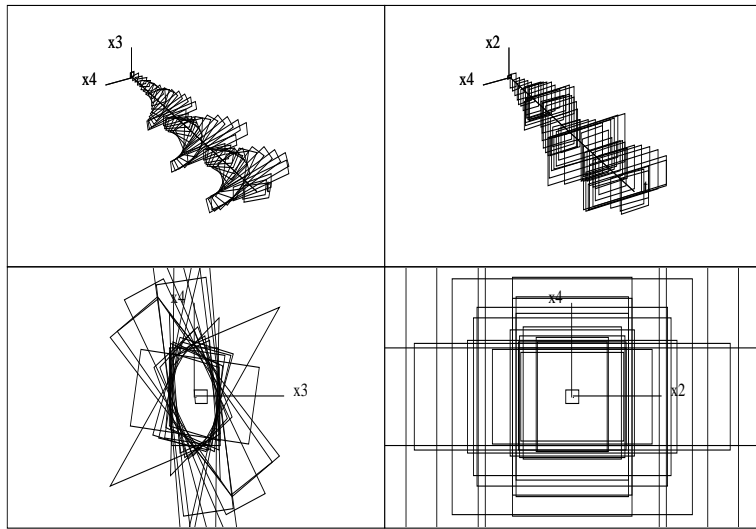


(b)

Рис. 12.1: Внешние оценки МД в примере 12.1: случай с фазовыми ограничениями ($n = 2$). (a) Одна из трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и несколько оценок $\mathcal{P}^+[N]$, полученных с помощью (10.2), где $P^{(1)+}[k] \equiv P^{(0)+}[k]$, а $P^{(0)+}[\cdot]$ найдены по формулам теоремы 7.1, случай 1. (b) То же самое, но $P^{(0)+}[\cdot]$ найдены по формулам теоремы 7.1, случай 3.



(a)



(b)

Рис. 12.2: Проекция $\mathcal{P}^+[\cdot]$ на двумерные плоскости в примере 12.2: случай с фазовыми ограничениями ($n = 4$). Оценки получены с помощью (10.2), где $P^{(1)+}[k] \equiv P^{(0)+}[k]$, а $P^{(0)+}[\cdot]$ найдены по формулам теоремы 7.1, случай 3 (a) и случай 1 (b).

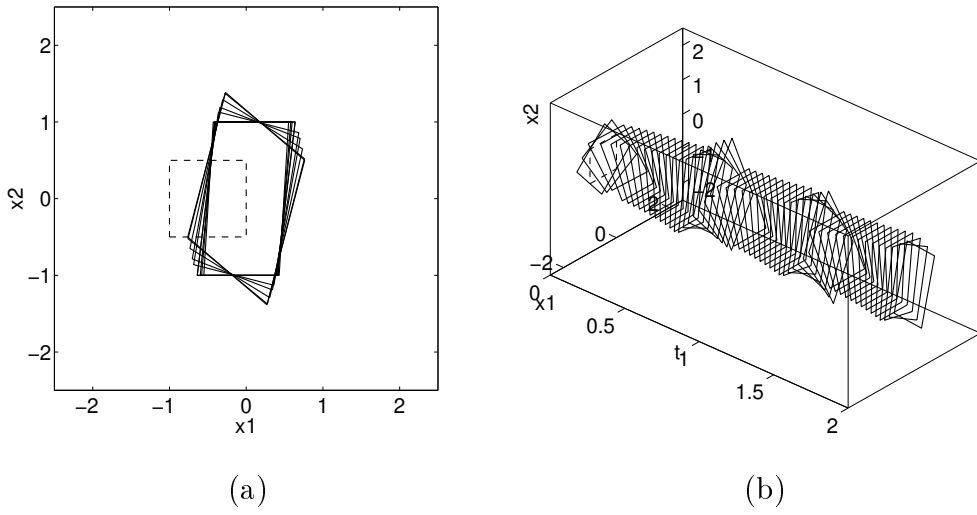


Рис. 12.3: Внешние оценки множеств достижимости при наличии фазовых ограничений в виде гиперполос в примере 12.3 ($n = 2$). Диапазон пространственных координат — от -2.5 до 2.5 .

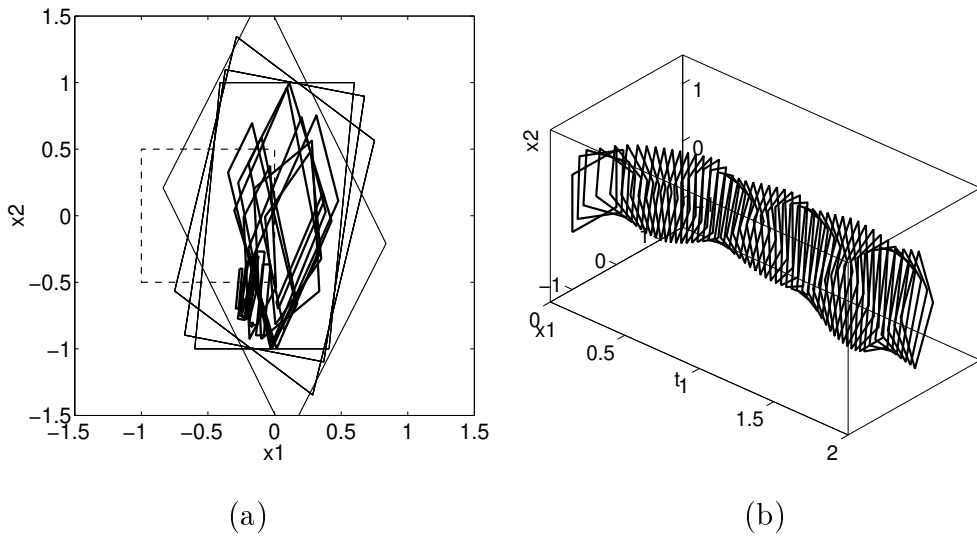


Рис. 12.4: Внутренние оценки множеств достижимости при наличии фазовых ограничений в примере 12.3 ($n = 2$). (a) Множество \mathcal{X}_0 (штриховая линия), внутренние оценки $\mathcal{P}^- [N]$ (толстые линии) и внешние оценки $\mathcal{P}^+ [N]$ (тонкие линии). (b) Одна из трубок $\mathcal{P}^- [\cdot]$.

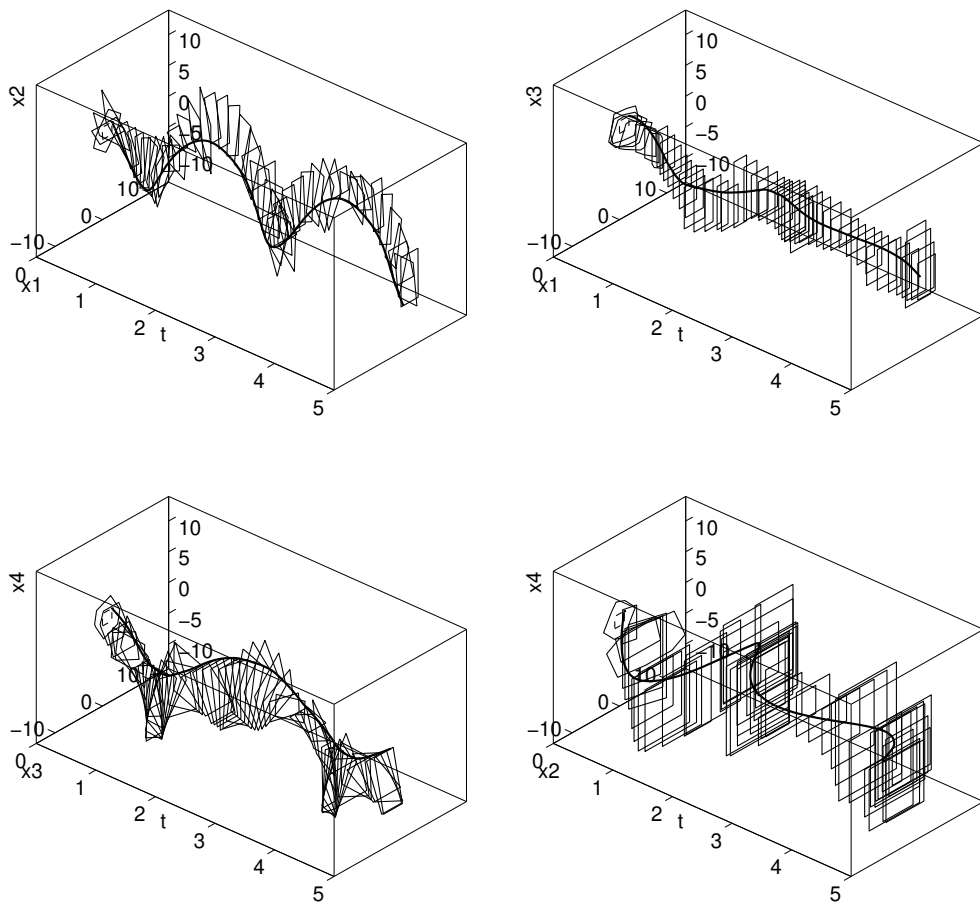


Рис. 12.5: Динамика во времени проекций внешних оценок информационных областей в примере 12.4 ($n = 4$). Помеха $\eta(\cdot)$ — "плохая". Диапазон пространственных координат на рис. 12.5 – 12.8 составляет от -14 до 14 .

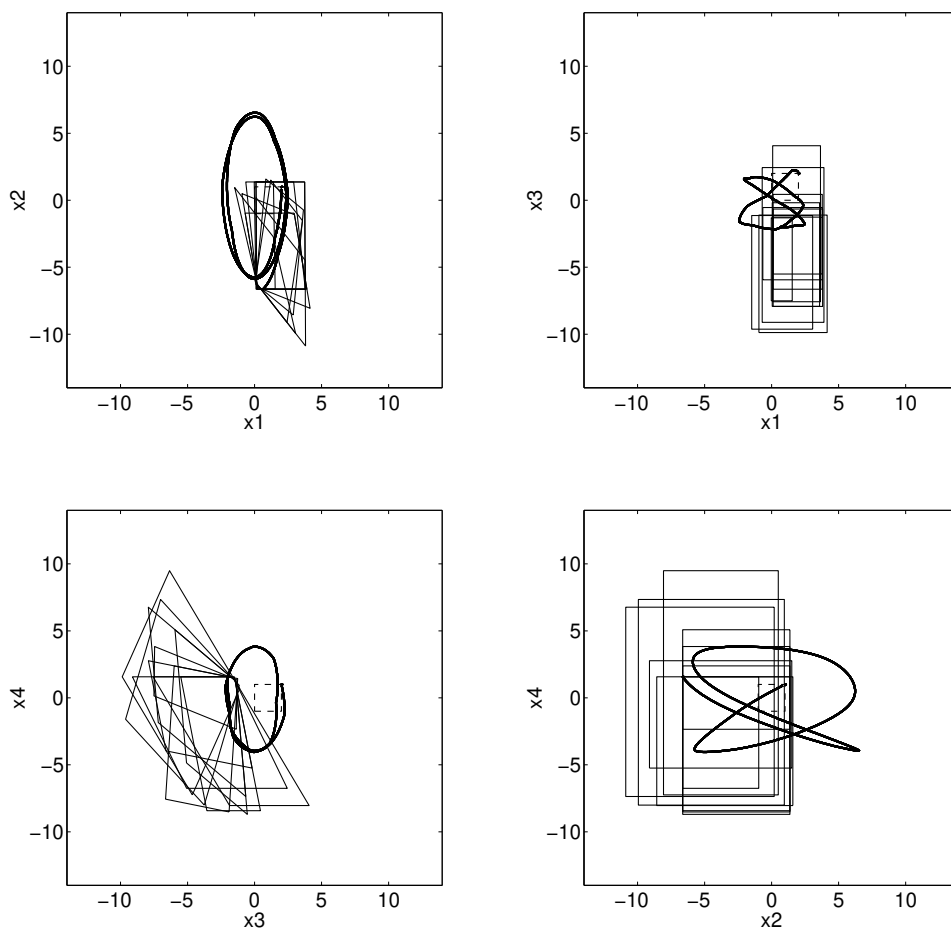


Рис. 12.6: Проекция внешних оценок информационной области в конечный момент времени в примере 12.4 ($n = 4$). Помеха $\eta(\cdot)$ — "плохая".

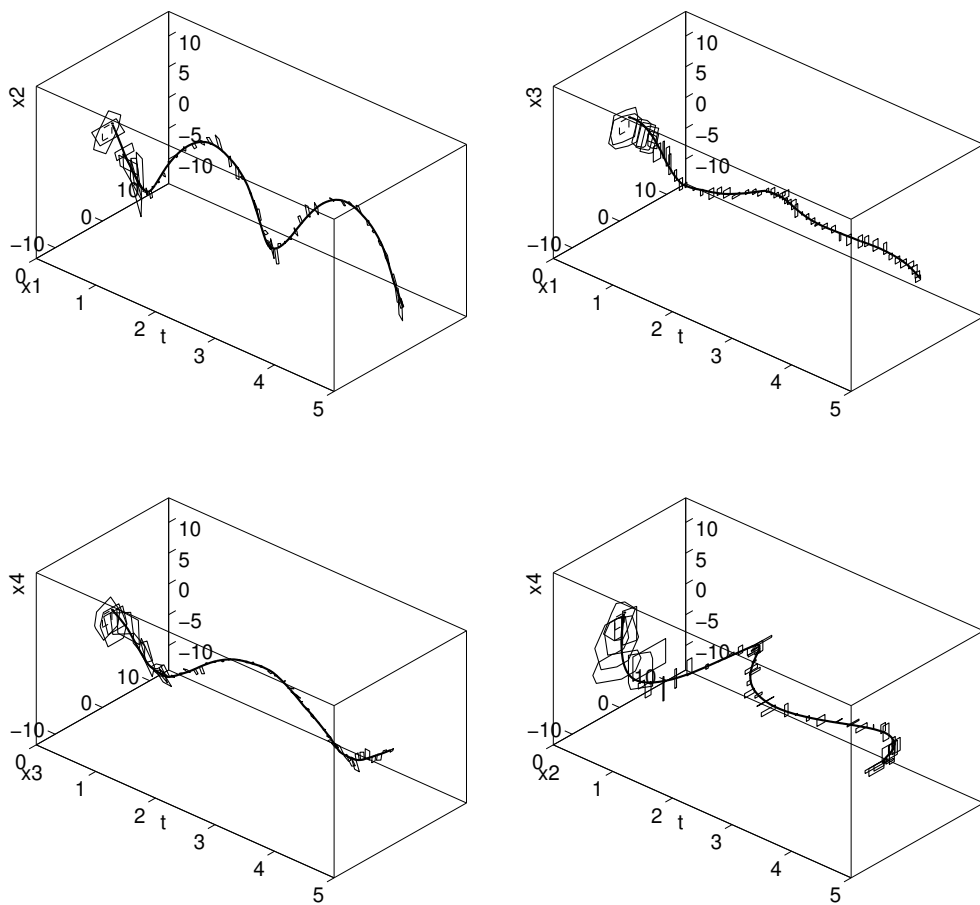


Рис. 12.7: Динамика во времени проекций внешних оценок информационных областей в примере 12.4 ($n = 4$). Помеха $\eta(\cdot)$ — "лучше".

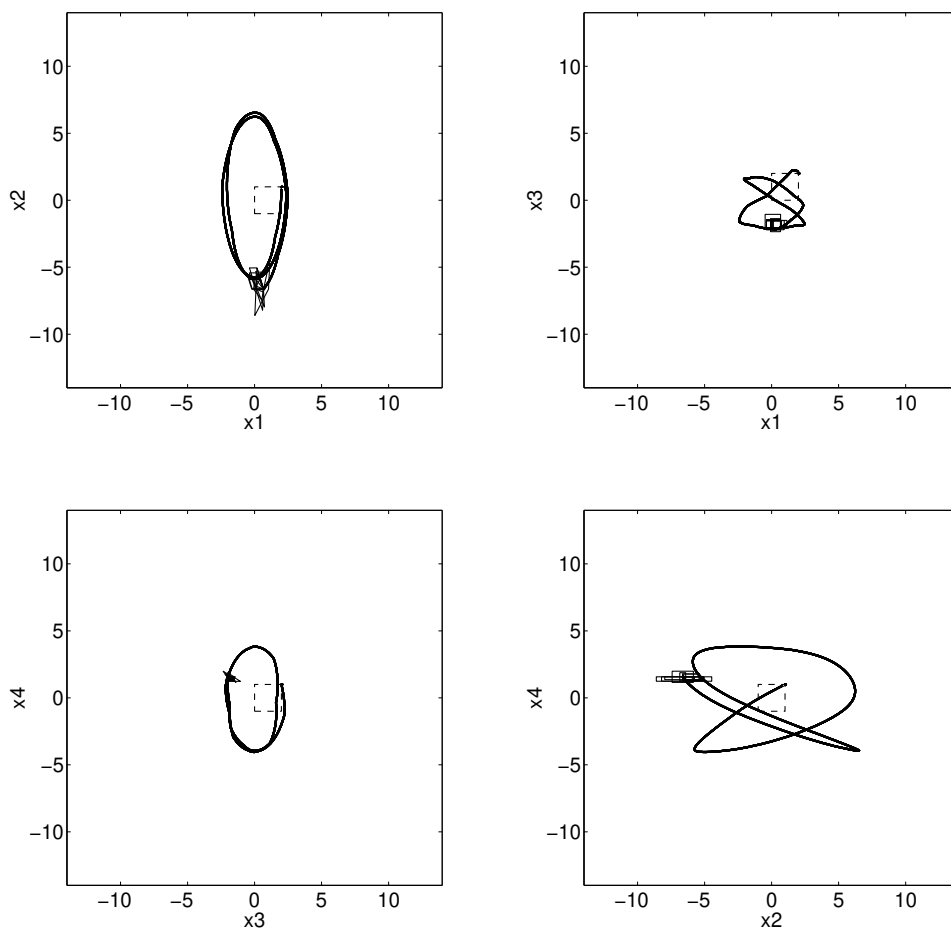
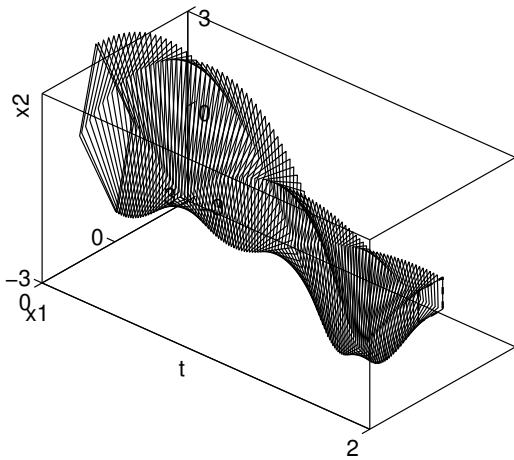
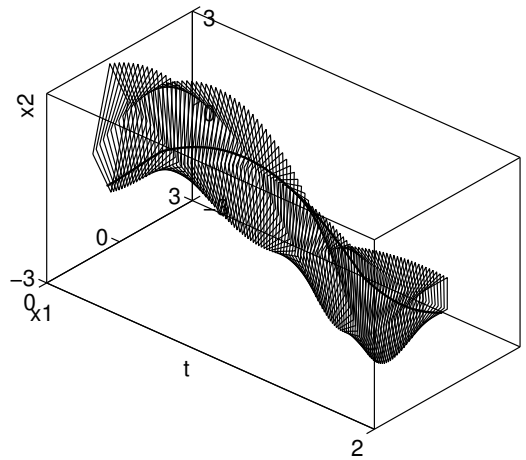


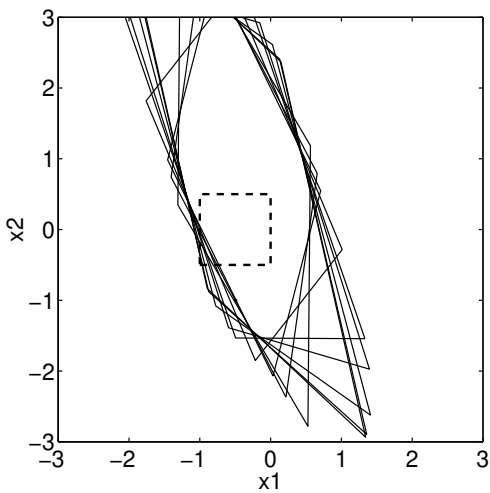
Рис. 12.8: Проекция внешних оценок информационной области в конечный момент времени в примере 12.4 ($n = 4$). Помеха $\eta(\cdot)$ — "лучше".



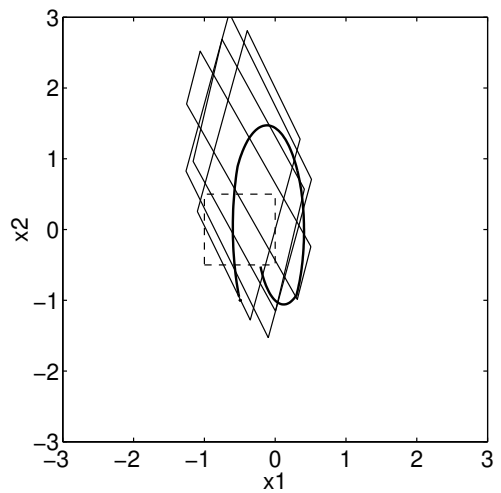
(a)



(b)

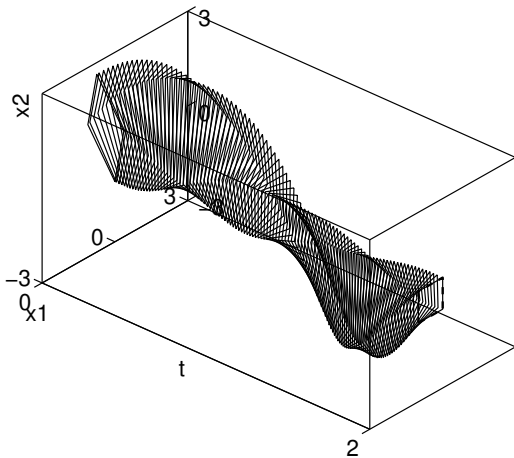


(c)

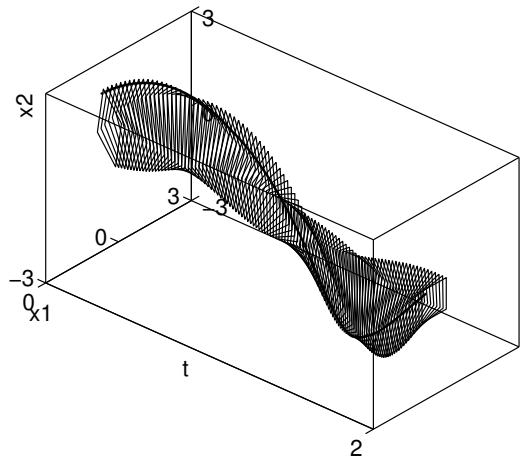


(d)

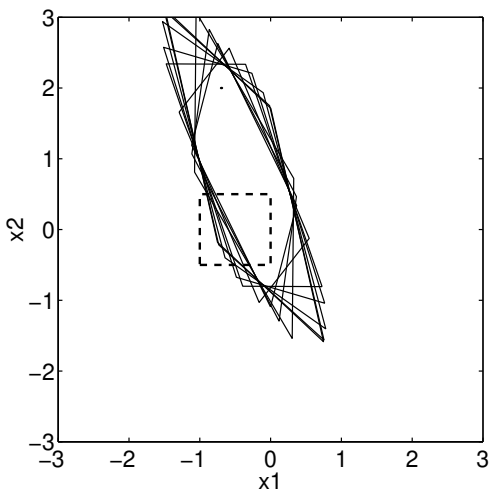
Рис. 16.1: Полиэдральный синтез в примере 16.1: случай без неопределенности ($n=2$). (a) Внешняя трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$, соответствующая $P_\theta^+ = P_\theta$. (b) Одна из внутренних трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и управляемая траектория. (c) \mathcal{M} и несколько параллелепипедов $\mathcal{P}^+[0]$. (d) \mathcal{M} , несколько параллелотопов $\mathcal{P}^-[0]$ и управляемая траектория.



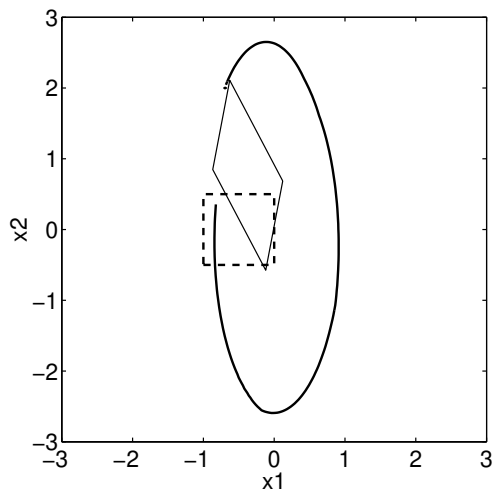
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 16.2: Полиэдральный синтез в примере 16.1: случай с неопределенностью ($n=2$).
 (a) Трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$, соответствующая $P_\theta^+ = P_\theta$. (b) Трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$, соответствующая $\Lambda_\theta = I$ и (16.4), и управляемая траектория. (c) \mathcal{M} и несколько параллелепипедов $\mathcal{P}^+[0]$. (d) \mathcal{M} , сечение $\mathcal{P}^-[0]$ упомянутой трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и управляемая траектория.

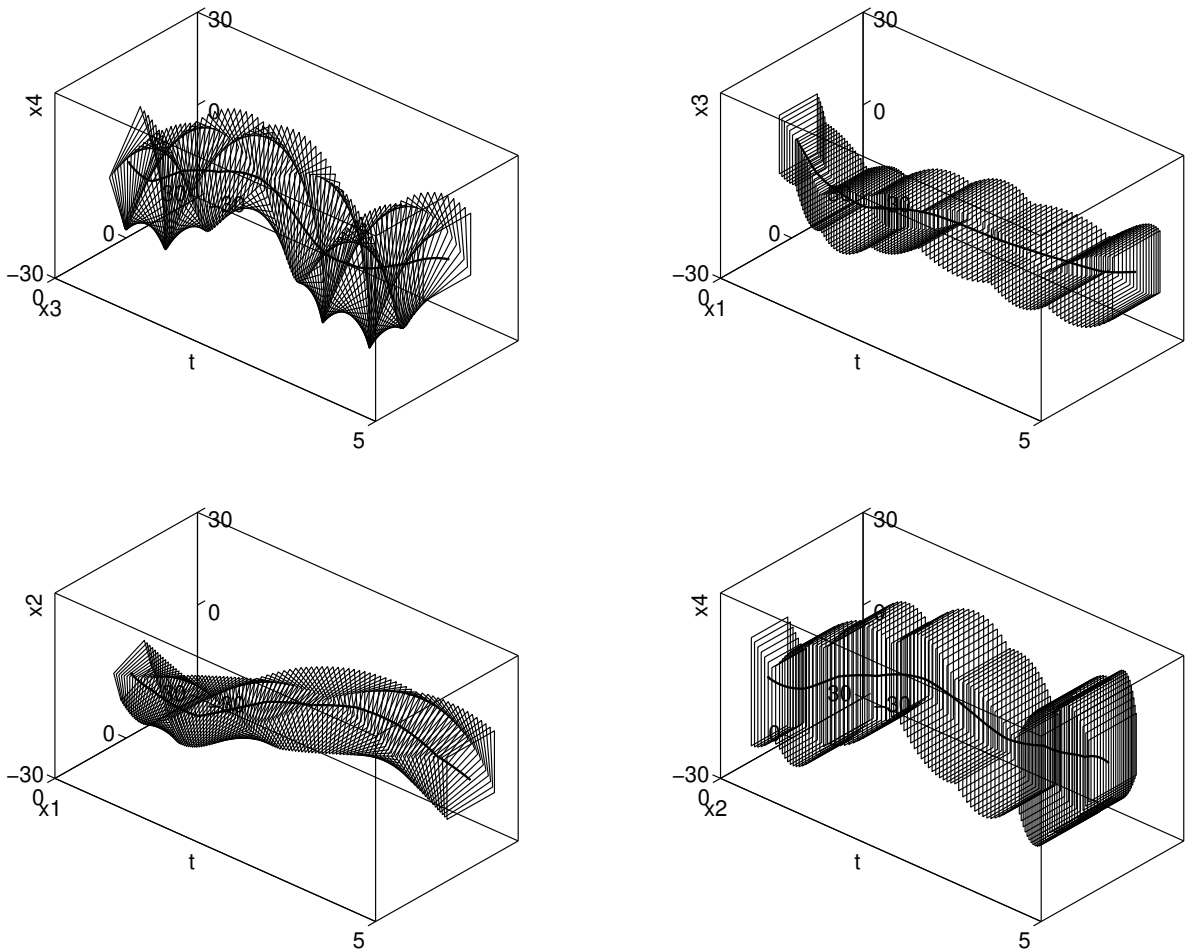


Рис. 16.3: Полиэдральный синтез в примере 16.2: случай с неопределенностью ($n = 4$). Динамика проекций на четыре координатные плоскости сечений трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, соответствующей $\Lambda_\theta = I$ и (16.4), и управляемой траектории.

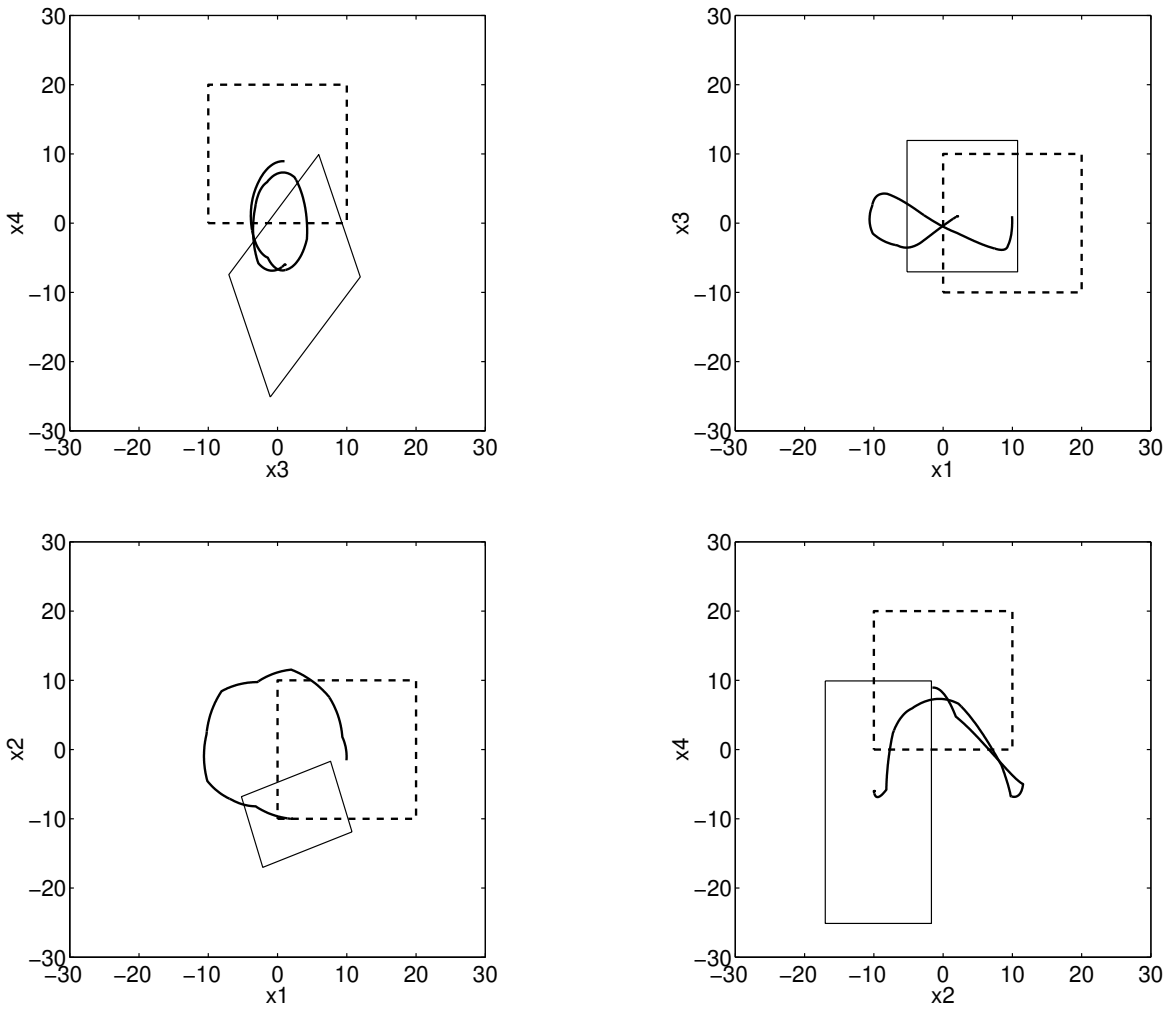
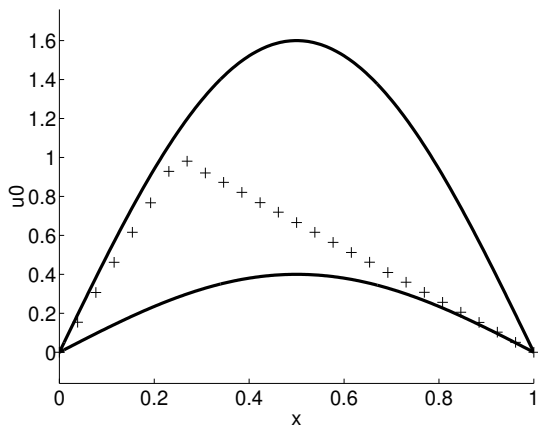
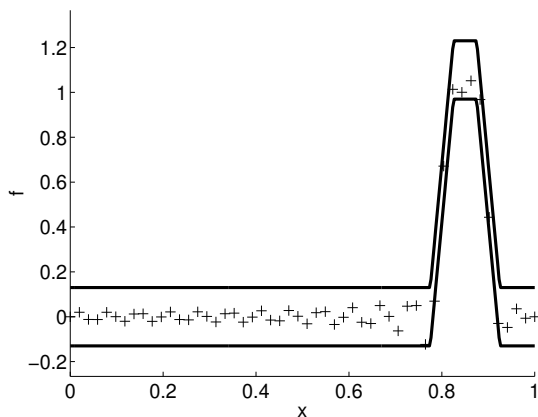


Рис. 16.4: Полиэдральный синтез в примере 16.2: случай с неопределенностью ($n = 4$). Проекции \mathcal{M} , $\mathcal{P}^-[0]$ (соответствующего $\Lambda_\theta = I$ и (16.4)) и $x[\cdot]$ на четыре координатные плоскости.

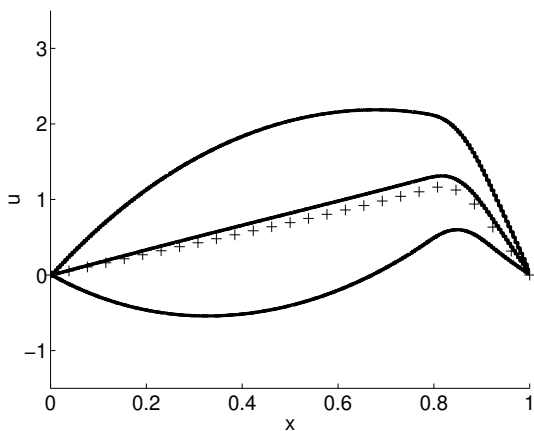


(a)

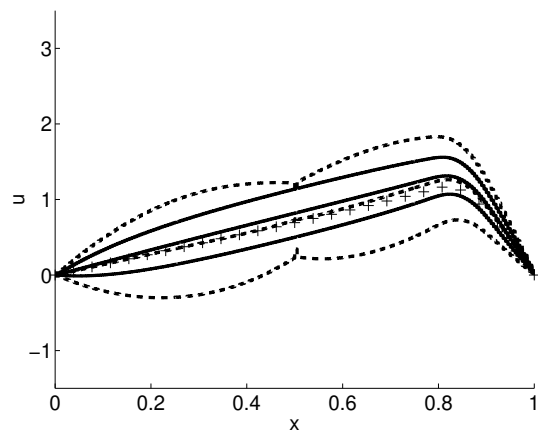


(b)

Рис. 19.1: Исходные данные для системы в примере 19.1. (a) Границы области \mathcal{U}_0 и моделируемое начальное условие $u_0(\cdot)$ (крестиками). (b) Границы множества допустимых значений правой части в уравнении (17.1) при каждом t и реализация $f(\cdot, t)$ (крестиками).

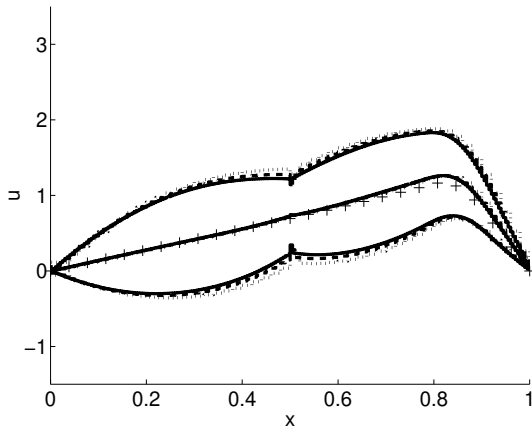


(a)

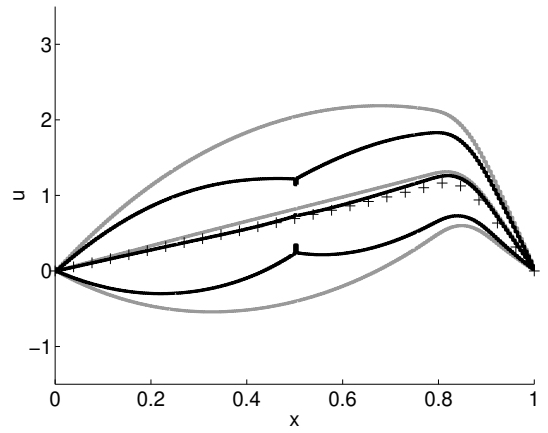


(b)

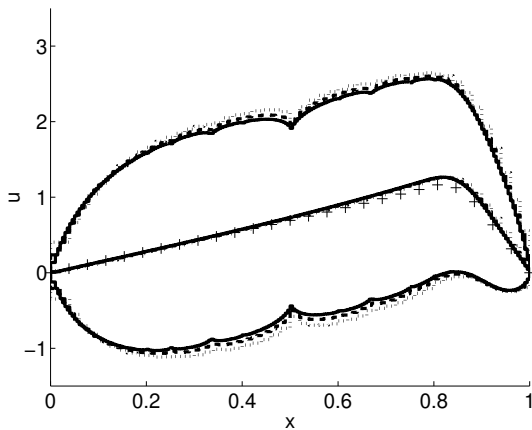
Рис. 19.2: Границы и центры внешних покоординатных (штриховые линии) и внутренних (сплошные линии) оценок в примере 19.1 при $m = 199$: (a) для $\mathcal{U}_a(\theta)$; (b) для $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$. Крестиками показана моделируемая функция $u(\cdot, \theta)$.



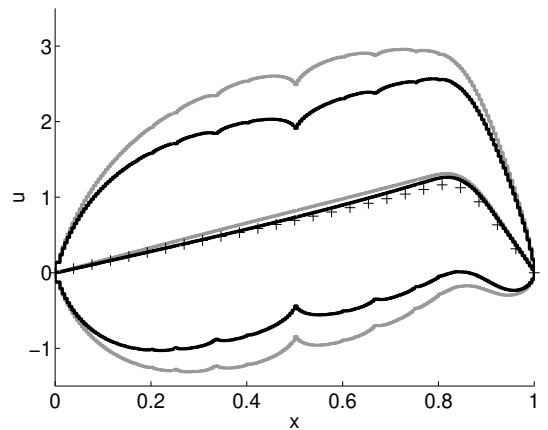
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 19.3: Внешние оценки для $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ и $\mathcal{U}_a(\theta)$ в примере 19.1. Крестиками показано моделируемая функция $u(\cdot, \theta)$. (a) Границы и центры внешних покоординатных оценок для $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ при $m = 49$, $m = 99$ и $m = 199$ (соответственно, точечные, штриховые и сплошные линии). (b) Границы и центры внешних покоординатных оценок для $\mathcal{U}_a(\theta)$ и $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ при $m = 199$ (линии серого и черного цвета соответственно). (c) Границы и центры внешних оценок "по Фурье" для $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ при $m = 49$, $m = 99$ и $m = 199$ (точечные, штриховые и сплошные линии). (d) Границы и центры внешних оценок "по Фурье" для $\mathcal{U}_a(\theta)$ и $\mathcal{U}(\theta; y(\cdot))$ при $m = 199$ (линии серого и черного цвета соответственно).

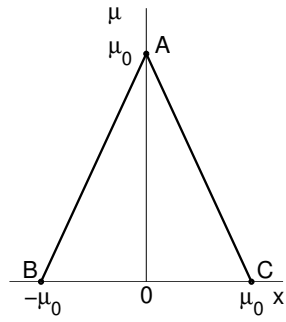
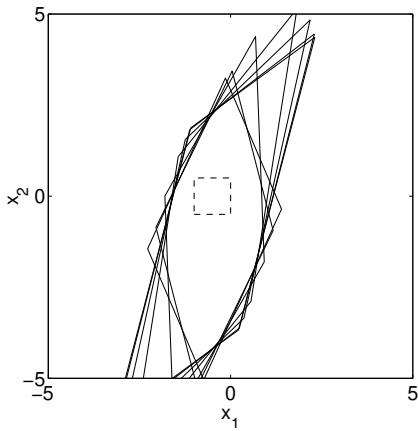
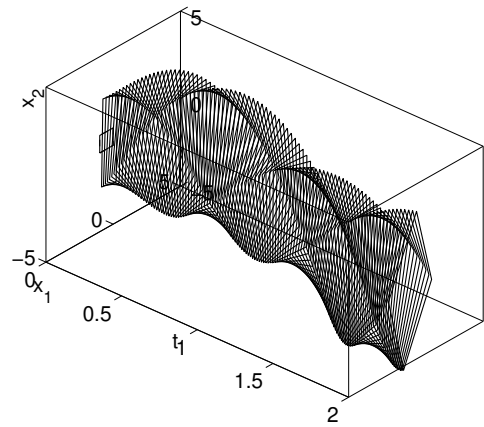


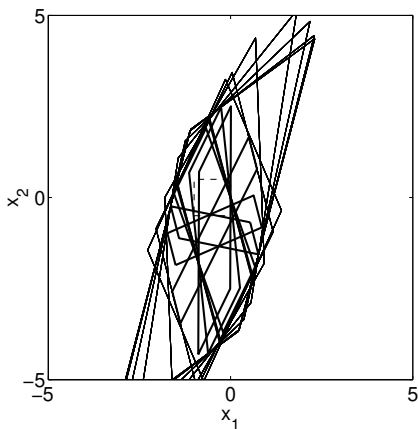
Рис. 20.1: Множество $\mathcal{Z}[1]$ в примере 20.1 ($n = 1$).



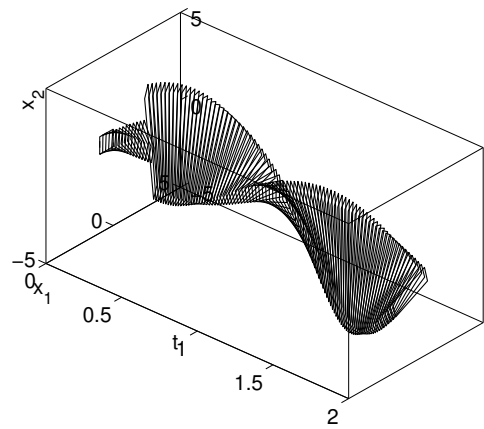
(a)



(b)

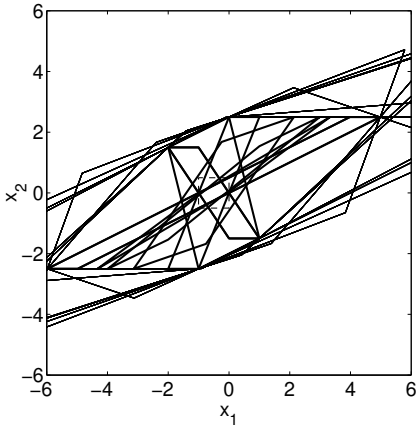


(c)

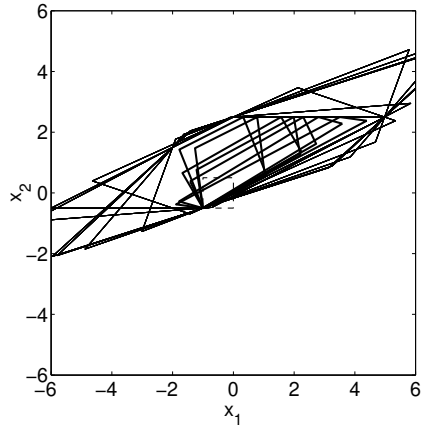


(d)

Рис. 21.1: Внешние и внутренние оценки множеств достижимости $\mathcal{X}[N]$ и $\mathcal{X}[k]$ системы с интегральными ограничениями на управление и без ФО в примере 21.1 ($n = 2$).



(a)



(b)

Рис. 21.2: Внешние и внутренние оценки для множества достижимости $\mathcal{X}[N]$ системы с интегральными ограничениями на управление и без ΦO в примере 21.2 ($n = 2$): (a) случай $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$; (b) случай $\mathcal{K}[j] \equiv [0, \infty)$.

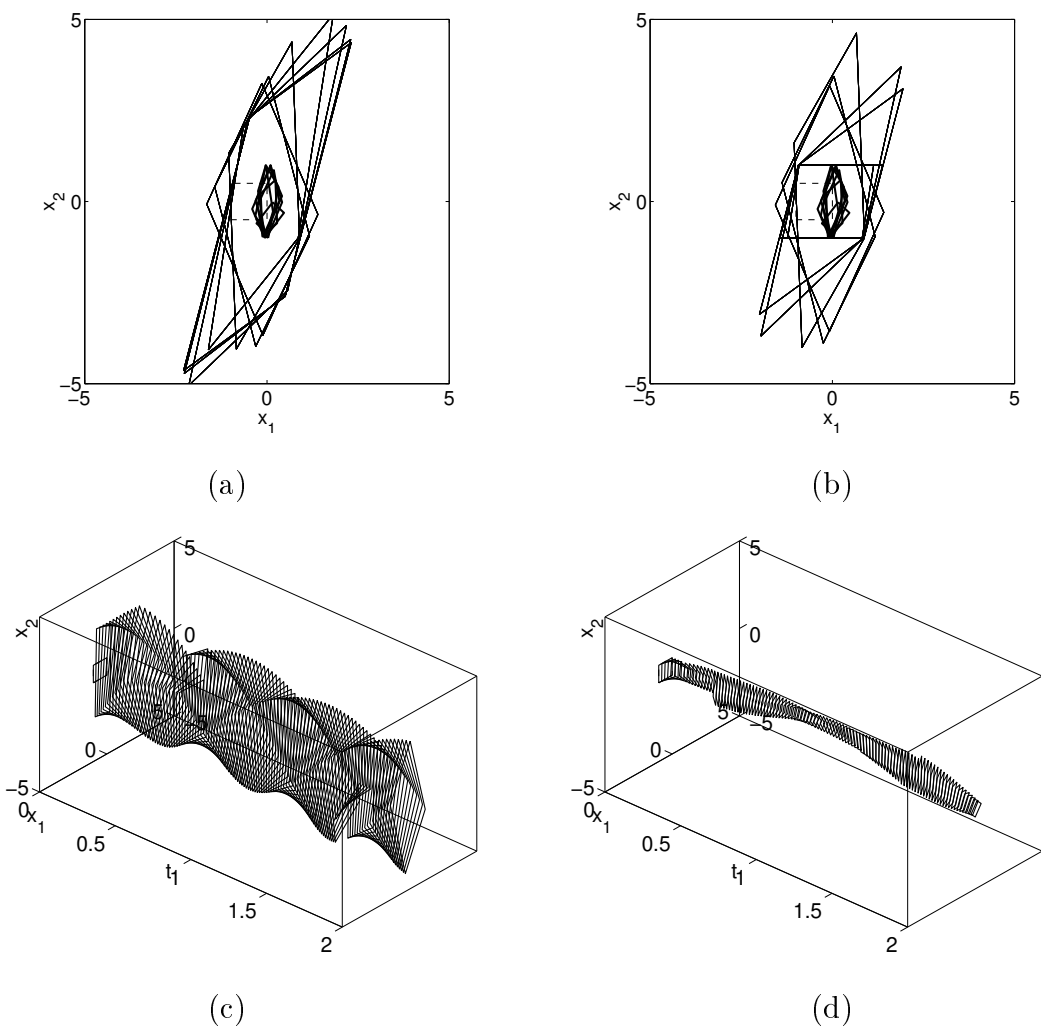
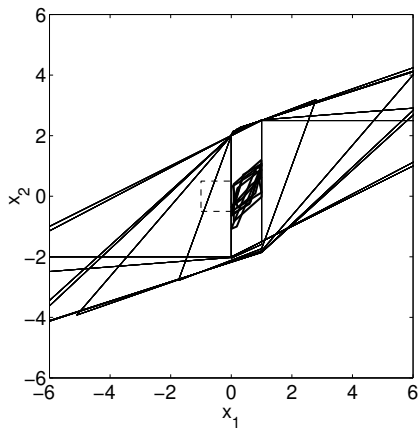
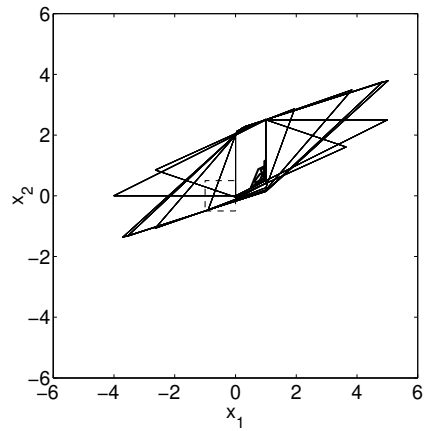


Рис. 22.1: Внешние и внутренние оценки множеств достижимости $\mathcal{X}[N]$ и $\mathcal{X}[k]$ системы с интегральными ограничениями на управление при наличии ФО в примере 22.1 ($n=2$).



(a)



(b)

Рис. 22.2: Внешние и внутренние оценки для МД $\mathcal{X}[N]$ системы с интегральными ограничениями на управление при наличии ФО в примере 22.2 ($n = 2$): (a) случай $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$; (b) случай $\mathcal{K}[j] \equiv [0, \infty)$.

Литература

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
- [2] Альбрехт Э.Г. Примеры информационных множеств нелинейных систем // Оценивание в условиях неопределенности. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С.5–9.
- [3] Ананьев Б.И. Минимаксные среднеквадратичные оценки в статистически неопределенных системах // Дифференц. уравнения. 1984. Т.20. N 8. С.1291–1297.
- [4] Ананьев Б.И., Ширяев В.И. Определение наихудших сигналов в задачах гарантированного оценивания // Автоматика и телемеханика. 1987. N 3. С.49–58.
- [5] Аникин С.А., Гусев М.И. Оценивание возмущающих сил по измерениям параметров движения // Гарантированное оценивание и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С.19–30.
- [6] Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Параметрическая идентификация нестационарных систем с использованием метода размытых эллипсоидальных множеств // Автоматика. 1993. N 3. С. 10–15.
- [7] Барабанов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.

- [8] Барбашин Е.А. К теории обобщенных динамических систем // Учен. записки Моск. ун-та. Сер. матем. 1948. Вып. 135. Т.2. С. 110–133.
- [9] Басин М.В. Эллипсоидальная фильтрация состояния бесконечномерной системы. II. Фильтрация по дискретно-непрерывным наблюдениям с векторной мерой // Автоматика и телемеханика. 1997. N 8. С. 102–109.
- [10] Бахвалов Н.С, Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
- [11] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
- [12] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
- [13] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. М.: Физматгиз, 1962.
- [14] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1985. Т.169. С.194–252.
- [15] Боткин Н.Д, Зарх М.А., Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. N 1. С.68–76.
- [16] Боткин Н.Д, Рязанцева Е.А. Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т.2. С.128–134.
- [17] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф., Наконечный А.Г. Регуляторы и минимаксные фильтры для систем с распределенными параметрами. Киев, 1978. (Препринт / ИК АН УССР, N 78-30).

- [18] Бурмистрова Л.В. Экспериментальный анализ нового адаптивного метода полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43. N 3. С. 328–346.
- [19] Бутковский А.Г. Дифференциально-геометрический метод конструктивного решения задач управляемости и финитного управления // Автоматика и телемеханика. 1982. N 1. С.5–18.
- [20] Бушенков В.А. Итерационный метод построения ортогональных проекций выпуклых многогранных множеств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. N 9. С. 1285–1292.
- [21] Важенцев А.Ю. О внутренних эллипсоидальных аппроксимациях для задач синтеза управления при ограниченных координатах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. N 3. С.70–77.
- [22] Васильев Н.С. О численном решении экстремальных задач построения эллипсоидов и параллелепипедов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т.27. N 3. С.340–348.
- [23] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
- [24] Васильев Ф.П. Регуляризация некоторых методов минимизации высокого порядка при неточных исходных данных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т.25. N 4. С.492–499.
- [25] Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.
- [26] Васильев Ф.П., Куржанский М.А. О методе квазирешений для неустойчивых задач минимизации с неточно заданными исходными данными // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1989. N 4. С.13–18.

- [27] Ватолин А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т.24. N 11. С.1629–1637.
- [28] Векслер Г.А. К задаче минимизации выпуклых функций в условиях неопределенности // Оценивание динамики управляемых движений. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С.29–39.
- [29] Габасов Р., Кириллова Ф.М. О конструктивной теории оптимального наблюдения за динамическими системами // Докл. РАН. 1995. Т.345. N 3. С.316–319.
- [30] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [31] Григорьева С.В., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритм вычисления минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с ограничениями в форме неравенств // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. Вып.3. С.57–69.
- [32] Гурман В.И., Константинов Г.Н. Описание и оценка множеств достижимости управляемых систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. N 3. С.416–423.
- [33] Гусев М.И. Об оптимизации измерений в задаче оценивания состояния динамической системы при геометрических ограничениях на помехи // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24. N 11. С.1862–1870.
- [34] Гусев М.И. Оптимальность линейных алгоритмов в задачах гарантированного оценивания // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. N 3. С.87–95.
- [35] Гусев М.И., Куржанский А.Б. Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т.1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С.187–195.

- [36] Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. I. N 1. С.3–23; II. N 2. С.3–30.
- [37] Гусейнов Х.Г., Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Приближенное построение множеств достижимости с интегральными ограничениями на управление // Прикл. математика и механика. 1999. Т.63. Вып.4. С.580–590.
- [38] Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. Об инфинитезимальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. I, II // Дифференц. уравнения. 1998. Т.34. I. N 2. С.157–165; II. N 4. С.457–464.
- [39] Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Нелинейный синтез при двойных ограничениях // Дифференц. уравнения. 2001. Т.37. N 11. С.1476–1484.
- [40] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [41] Дугарова И.В., Смагина Е.М. Обеспечение устойчивости системы с неопределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1990. N 11. С.176–181.
- [42] Дудов С.И. Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т.36. N 5. С.153–159.
- [43] Жуков А.А., Фурасов В.Д. Эллипсоидальная аппроксимация и оценивание состояний дискретных систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. N 2. С.121–129.

- [44] Зарх М.А., Иванов А.Г. Построение функции цены в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т.2. С.140–155.
- [45] Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. N 6. С. 162–169.
- [46] Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Докл. АН СССР. 1988. Т.299. N 2. С.292–295.
- [47] Иванов В.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Задача тореадора // Прикл. математика и механика. 1993. Т.57. Вып.3. С.15–22.
- [48] Ивлев Р.С., Соколова С.П. Построение векторного управления многомерным интервально заданным объектом // Вычисл. технологии. 1999. Т.4. N 4. С.3–13.
- [49] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
- [50] Каменев Г.К. Алгоритм сближающихся многогранников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. N 4. С. 134–147.
- [51] Кац И.Я., Куржанский А.Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. N 11. С.79–87.
- [52] Каюмов Р.И. Гарантированные оценки состояния одного класса систем с неопределенными коэффициентами // Оценивание динамики управляемых движений. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С.57–64.

- [53] Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Эллипсоидальное оценивание по отношению к обобщенному критерию // Автоматика и телемеханика. 1991. N 9. С. 133–145.
- [54] Комаров В.А. Локально-оптимальные оценки множеств достижимости нелинейных систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. N 3. С.153–160.
- [55] Комаров В.А. Уравнение множеств достижимости дифференциальных включений в задаче с фазовыми ограничениями // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1988. Т.185. С.116–125.
- [56] Кондратьев Д.Л., Лотов А.В. О внешних оценках и построении множеств достижимости для нелинейных управляемых систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. N 4. С. 483–490.
- [57] Корноушенко Е.К. Интервальные по координатным оценкам для множества достижимых состояний линейной стационарной системы. I – IV // Автоматика и телемеханика. I. 1980. N 5. С.12–22; II. 1980. N 12. С.10–17; III. 1982. N 10. С.47–52; IV. 1983. N 2. С.81–87.
- [58] Короткий А.И. Динамическое восстановление управлений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. N 1. С.21–24.
- [59] Костоусов В.Б. Реализация алгоритмов высокоточной навигации по геофизическим полям на параллельных вычислительных системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. С.86–100.
- [60] Костоусова Е.К. Приближенные методы решения задач оценивания для систем с распределенными параметрами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Институт математики и механики УрО АН СССР. Свердловск, 1991.

- [61] Костоусова Е.К. О свойстве слабой наблюдаемости для одномерного волнового уравнения при точечном нестационарном операторе наблюдения // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. № 8. С.1318–1325.
- [62] Костоусова Е.К. О слабой наблюдаемости для одномерного волнового уравнения при точечном динамическом наблюдении // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 4. С.198–203.
- [63] Костоусова Е.К. О параллельном алгоритме решения задачи наблюдения для одномерного волнового уравнения // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. С.101–114.
- [64] Костоусова Е.К. О некоторых параллельных алгоритмах построения областей достижимости линейных многошаговых систем // V конференция "Транспьютерные системы и их применение", Домодедово, 1995: Тез. докл. Домодедово, 1995.
- [65] Костоусова Е.К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С.57–68.
- [66] Костоусова Е.К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл. технологии. 1998. Т.3. № 2. С.11–20.
- [67] Костоусова Е.К. Параллельные вычисления при оценивании областей достижимости и информационных множеств линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. Вып.3. С.107–126.
- [68] Костоусова Е.К. О внутренних полиэдральных оценках множеств достижимости линейных систем с фазовыми ограничениями // Ал-

горитмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. Вып.5. С.167–187.

- [69] Костоусова Е.К. О внешних полиэдральных оценках для множеств достижимости систем с билинейной неопределенностью // Прикл. математика и механика. 2002. Т.66. Вып.4. С.559–571.
- [70] Костоусова Е.К. О внутренних полиэдральных оценках множеств достижимости линейных динамических систем // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: Тез. докл. Междунар. науч. конф., 4–8 февраля 2002 г. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2002. С.57.
- [71] Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычисл. технологии. 2003. Т.8. N 4. С.55–74.
- [72] Костоусова Е.К. О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в "расширенном" пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычисл. технологии. 2004. Т.9. N 5. С.54–72.
- [73] Костоусова Е.К., Куржанский А.Б. Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т.2. N 1. С.19–27.
- [74] Костоусова Е.К., Сташкова Л.В. Об аппроксимациях решения одной задачи гарантированного оценивания состояния параболической системы // Вычисл. технологии. 2001. Т.6. N 5. С.60–72.
- [75] Кощеев А.С., Куржанский А.Б. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. N 2. С. 72–93.

- [76] Красовский Н.Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т.28. Вып.1. С.3–14.
- [77] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [78] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [79] Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Уравнения типа Гамильтона-Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. ИММ УрО РАН. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. Т.6. N 1–2. С.110–130.
- [80] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [81] Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. N 2. С.51–60.
- [82] Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Устойчивые решения обратных задач динамики управляемых систем // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1988. Т.185. С.126–146.
- [83] Кумков С.И., Пацко В.С. Управление в задаче на основе построения множеств возможных фазовых состояний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. N 1. С.65–71.
- [84] Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А. Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. N 4. С.51–61.
- [85] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. Киев: Наук. думка, 1985.

- [86] Куржанский А.Б. О двойственности задач оптимального управления и наблюдения // Прикл. математика и механика. 1970. Т.34. Вып.3. С.429–439.
- [87] Куржанский А.Б. К теории позиционного наблюдения. Общие соотношения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. N 5. С.20–31.
- [88] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [89] Куржанский А.Б. Об информационных множествах управляемой системы // Докл. АН СССР. 1978. Т.240. N 1. С.14–17.
- [90] Куржанский А.Б. Об аналитическом описании множества выживающих траекторий дифференциальной системы // Успехи мат. наук. 1985. Т.40. Вып.4. С.183–194.
- [91] Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. N 4. С.3–26.
- [92] Куржанский А.Б. Гарантированное оценивание распределенных процессов по результатам наблюдений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1995. N 1. С.33–40.
- [93] Куржанский А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1999. Т.224. С.234–248.
- [94] Куржанский А.Б., Мельников Н.Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона-Якоби // Мат. сб. 2000. Т.191. N 6. С.69–100.
- [95] Куржанский А.Б., Никонов О.И. К задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // Докл. АН СССР. 1990. Т.311. N 4. С.788–793.

- [96] Куржанский А.Б., Пищулина И.Я. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях. I – III // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. I. N 8. С.1434–1446; II. N 9. С.1568–1579; III. N 12. С.2149–2158.
- [97] Куржанский А.Б., Сивергина И.Ф. Метод гарантированных оценок и задачи регуляризации для эволюционных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т.32. N 11. С.1720–1733.
- [98] Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. N 8. С.1303–1315.
- [99] Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В. Программирование для математиков. М.: Наука, 1988.
- [100] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [101] Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
- [102] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
- [103] Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т.15. N 1. С.67–78.
- [104] Лотов А.В. О сходимости методов численной аппроксимации множеств достижимости для линейных дифференциальных систем с выпуклыми фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19. N 1. С. 44–55.
- [105] Лотов А.В. О понятии и построении обобщенных множеств достижимости для линейных управляемых систем в частных производных // Докл. АН СССР. 1981. Т.261. N 2. С.297–300.

- [106] Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
- [107] Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т.41. N 6. С. 895–908.
- [108] Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса // Мат. заметки. 1987. Т. 41. N 1. С. 71–76.
- [109] Никольский М.С. О приближенном вычислении геометрической разности множеств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2003. N 1. С.49–54.
- [110] Никонов О.И. О некоторых экстремальных свойствах наблюдаемых систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. N 2. С. 236–240.
- [111] Никонов О.И. К теории эволюционных уравнений с многозначными решениями // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. N 3. С. 144–151.
- [112] Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н.. Аппроксимация пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. N 4. С. 182–189.
- [113] Овсеевич А.И., Решетняк Ю.Н. Асимптотическое поведение эллипсоидальных оценок областей достижимости. I // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. N 1. С. 90–100.
- [114] Овсеевич А.И., Шматков А.М. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. N 4. С. 11–16.
- [115] Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

- [116] Огневцев С.Б. Метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т.17. N 5. С. 1311–1315.
- [117] Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т.223. N 6. С.1314–1317.
- [118] Панасюк А.И., Панасюк В.И. Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением // Мат. заметки. 1980. Т.27. N 3. С.429–437.
- [119] Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
- [120] Покотило В.Г. К изучению минимаксных оценок параметров нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 1984. Т.48. Вып. 4. С.615–621.
- [121] Покотило В.Г. К проблеме аппроксимации пересечения эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. N 3. С. 38–43.
- [122] Пономарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1978. N 1. С.82–90.
- [123] Пономарев А.П., Розов Н.Х. О дифференцируемости опорной функции альтернированного интеграла Понтрягина // Мат. заметки. 1981. Т.30. Вып. 6. С.865–870.
- [124] Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. I, II // Докл. АН СССР. 1967. I. Т.174. N 6. С.1278–1280; II. Т.175. N 4. С.764–766.
- [125] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т.112. N 3. С.307–330.

- [126] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
- [127] Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: — В 2-х т. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999.
- [128] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
- [129] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- [130] Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г. О задачах наблюдения в дискретных системах // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. Вып.1. С.3–10.
- [131] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [132] Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [133] Рокитянский Д.Я. Оптимальные эллипсоидальные оценки множества достижимости линейных систем с неопределенной матрицей// Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. N4. С.17–20.
- [134] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
- [135] Сивергина И.Ф. Об информационных областях линейных систем с неопределенными параметрами // Оценивание динамики управляемых движений. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С.96–100.
- [136] Сивергина И.Ф. Обратимость и наблюдаемость эволюционных систем // Докл. АН. 1996. Т.351. N 3. С.304–308.
- [137] Сидоров А.Ф., Гасилов В.Л., Кукушкин А.П. Разработка высокопроизводительных алгоритмических и программных средств на базе параллельных технологий // Алгоритмы и программные сред-

ства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. С.3–20.

- [138] Сиротин А.Н., Формальский А.М. Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. N 4. С.5–16.
- [139] Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [140] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
- [141] Субботин А.И., Шагалова Л.Г. Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби // Докл. РАН. 1992. Т.325. N 5. С.932–936.
- [142] Субботина Н.Н. Метод характеристик в теории уравнений Гамильтона-Якоби и его приложения в теории управления. Автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2003.
- [143] Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритм построения разрешающих позиционных процедур управления в трехмерной линейной дифференциальной игре сближения с выпуклой целью // Проблемы управления с гарантированным результатом. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. С.88–103.
- [144] Толстоногов А.А. Об уравнении интегральной воронки дифференциального включения // Мат. заметки. 1982. Т.32. Вып. 6. С.841–852.
- [145] Устюжанин А.М. Задача оценивания матричного параметра // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. N 3. С. 410–416.

- [146] Ушаков В.Н., Хрипунов Ф.П. О приближенном построении интегральных воронок дифференциальных включений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т.34. N 7. С. 965–977.
- [147] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [148] Филиппова Т.Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992.
- [149] Филиппова Т.Ф., Костоусова Е.К. Задачи описания эволюции многозначных состояний дифференциальных систем // Математика. Механика. Информатика. Труды юбилейной конф. 10 лет РФФИ, Москва, 2002. М.: Физматлит, 2004. С.283–303.
- [150] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2,3. М.: Наука, 1969.
- [151] Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
- [152] Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // Докл. АН СССР. 1991. Т.316. N 4. С.846–850.
- [153] Хонин В.А. Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов // Эволюционные системы в задачах оценивания. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С.104–123.
- [154] Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
- [155] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

- [156] Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикл. математика и механика. 1996. Т.60. Вып. 6. С.940–950.
- [157] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1976.
- [158] Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки множества точек в виде системы линейных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. N 8. С. 1213–1228.
- [159] Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные технологии. Т.4, N 13. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1995. С.64–80.
- [160] Ширяев В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. N 3. С. 229–237.
- [161] Шматков А.М. Об управлении ансамблем траекторий при наличии ограничений на помехи // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. N4. С.82–87.
- [162] Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
- [163] Athans M. The matrix minimum principle // Information and Control. 1968. 11. P.592–606.
- [164] Aubin J.-P., Frankovska H. Observability of systems under uncertainty // SIAM J. Control Optimiz. 1989. V.27. N 5. P.949–975.
- [165] Aumann R.J. Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V.12. N 1. P.1–12.

- [166] Bai E.W., Huang Y.F. Convergence of optimal sequential outer bounding sets in bounded error parameter estimation // *Mathematics and Computers in Simulation*. 1999. V.49. P.307–317.
- [167] Barmish B.R., Corless M., Leitman G. A new class of stabilizing controllers for uncertain systems // *SIAM J. Control Optimiz.* 1983. V.21. N 2. P.246–255.
- [168] Barmish B.R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via polytopes // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1979. V.AC-24. N 2. P.346–349.
- [169] Bertsekas D.P., Rhodes J.B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1971. V.AC-16, N 2. P.117–128.
- [170] Bushenkov V., Chernykh O., Kamenev G., Lotov A. Multi-dimensional images given by mappings: construction and visualization // *Pattern Recognition and Image Analysis*. 1995. V.5. N 1. P.35–56.
- [171] Chisci L., Garulli A., Vicino A., Zappa G. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification // *Automatica*. 1998. V.34. N 1. P.15–22.
- [172] Chisci L., Garulli A., Zappa G. Recursive state bounding by parallelotopes // *Automatica*. 1996. V.32. N 7. P.1049–1055.
- [173] Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. V.277. P.1–42.
- [174] Ferreres G., M'Saad M. Estimation of output error models in the presence of unknown but bounded disturbances // *Int. J. Adapt. Contr. Sign. Proc.* 1997. V.11. P.115–140.
- [175] Filippov A.F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equations // *Interval Computations*. 1992. N 2(4). P. 6–17.

- [176] Filippova T.F., Lisin D.V. On the estimation of trajectory tubes of differential inclusions // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. 2000. Suppl.2. P. S28–S37.
- [177] Fogel E., Huang Y.F. On the value of information in system identification - bounded noise case // Automatica. 1982. V.18. P.140–142.
- [178] Goncharova E.V., Baturin V.A., Sousa J.B., Pereira F.L. A reachable set estimation algorithm for impulsive control systems // Tools for Mathematical Modelling. Proc. of the The Fourth Intern. Conf., June 23–28, 2003, St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical Univ., 2003. P.213–219. (Mathematical Research, V.9).
- [179] Gorban A.N., Shokin Yu.I., Verbitskii V.I. Simultaneously dissipative operators and the infinitesimal wrapping effect in interval spaces // Вычисл. технологии. 1997. Т.2. N 4. С.16–48.
- [180] Gusev M.I. Error bounds for reachable sets under discrete approximation of state constraints // Nonlinear Control Systems (NOLCOS'2001), Preprints of the 5th IFAC Symposium, S.Petersburg, Russia, July 4-6, 2001. P. 1355–1360.
- [181] El Jai A., Pritchard A.J. Sensors and actuators in distributed systems // Int. J. Control. 1987. V.46. N 4. P.1139–1153.
- [182] Hestenes M.R. Conjugate Direction Methods in Optimization. New York Inc: Springer-Verlag, 1980.
- [183] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis With Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics. London: Springer-Verlag, 2001.
- [184] Kahan W. Circumscribing an ellipsoid about the intersection of two ellipsoids // Canad. Math. Bull. 1968. V.11. N 3. P.437–441.

- [185] Keesman K.J. Weighted least squares set estimation from l_∞ -norm bounded noise data // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V.AC-42. N 10. P.1456–1459.
- [186] Kostousova E.K. On the approximation of trajectory tubes through polyhedral techniques // Second International Workshop "Beam Dynamics & Optimization", St.-Petersburg, Russia, 1995: Proc. P.93–102.
- [187] Kostousova E.K. On polyhedral approximations of trajectory tubes // Third International Workshop "Beam Dynamics & Optimization", July 1–5, 1996, St.-Petersburg, Russia: Proc. St.-Petersburg, 1997. P.194–203.
- [188] Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 1998. V.9. N 4. P.269–306.
- [189] Kostousova E.K. On polyhedral techniques for some problems of the control theory // Mathematical Theory of Networks and Systems. Proceedings of the MTNS-98 Symposium held in Padova, Italy, July, 1998. Padova: Il Poligrafo, 1998. P.265–268.
- [190] Kostousova E.K. On approximating the guaranteed state estimation problem for a parabolic system // Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде (DSO'2000). Сб. докл. к Международной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С.91–92.
- [191] Kostousova E.K. Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 2001. V.14. N 4. P.267–310.
- [192] Kostousova E.K. Polyhedral estimates of reachable sets to linear discrete systems with integral bounds on controls // Tools for Mathematical Modelling. Proc. of the The Fourth Intern. Conf., June 23–28, 2003,

St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical Univ., 2003. P.308–314. (Mathematical Research, V.9).

- [193] Kostousova E.K., Kurzhanski A.B. Theoretical framework and approximation techniques for parallel computation in set-membership state estimation // CESA'96 IMACS Multiconference. Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, July 9–12,1996. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation. Proc. V.2. P.849–854.
- [194] Kühn W. Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect // Computing. 1998. V.61. P.47–67.
- [195] Kühn W. <http://www.deatur.de/wolfgang/zono/index.html>.
- [196] Kurzhanskii A.B. Dynamic control system estimation under uncertainty conditions. I, II // Probl. Contr. and Inform. Theory. I. 1980. V.9. N 6. P.395–406; II. 1981. V.10. N 1. P.33–42.
- [197] Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. P.122–188.
- [198] Kurzhanski A.B., Khapalov A.Yu. An observation theory for distributed-parameter systems // J. Math. Sys. Estim. & Control. 1991. V.1. N 4. P.389–440.
- [199] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: the problems of control synthesis // Dynamics and Control. 1991. N 1. P. 357–378.
- [200] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: control synthesis for uncertain systems // Dynamics and Control. 1992. N 2. P. 87–111.

- [201] Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [202] Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations // Optimiz. Methods & Software. 2002. V.17. N 2. P.177–206.
- [203] Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimiz. Methods & Software. 2002. V.17. N 2. P.207–237.
- [204] Lin S.H., Yuang Y.T., Fong I.K., Hsu C.F., Kuo T.S. Dynamic interval system analysis and design // Int. J. Control. 1988. V.48. N 5. P.1807–1818.
- [205] Lotov A.V. An estimate of solution set perturbations for a system of linear inequalities // Optimiz. Methods & Software. 1995. V.6. N 1. P.1–24.
- [206] Maksarov D., Norton J.P. Tuning of noise bounds in state bounding // CESA'96 IMACS Multiconference. Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, July 9–12,1996. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation. Proc. V.2. P.837–842.
- [207] Markov S.M., Popova E.D. Linear interpolation and estimation using interval analysis // Bounding Approaches to System Identification. New York and London: Plenum Press, 1996. P.139–157.
- [208] Merkurjev Y.A. Identification of linear objects with bounded disturbances in both input and output channels // Bounding Approaches to System Identification. New York and London: Plenum Press, 1996. P.307–316.
- [209] Milanese M., Belforte G. Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors. Linear families

- of models and estimators // IEEE Trans. Automat. Contr. 1982. V.AC-27. N 2. P.408–414.
- [210] Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., and Walter E., eds. Bounding Approaches to System Identification. New York and London: Plenum Press, 1996.
- [211] Milanese M., Tempo R. Optimal algorithms theory for robust estimation and prediction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1985. V.AC-30. P.730–738.
- [212] Milanese M., Vicino A. Optimal estimation theory for dynamic systems with setmembership uncertainty: an overview // Automatica. 1991. V.27. N 6. P.997–1009.
- [213] Moore R.E. Interval Analysis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1966.
- [214] Nickel K.L.E. Using interval methods for the numerical solution of ODE's // Z. angew. Math. Mech. 1986. V.66. N 11. P.513–523.
- [215] Norton J.P. Identification and application of bounded-parameter models // Automatica. 1987. V.23. P.497–507.
- [216] Norton J.P. Recursive computation of inner bounds for the parameters of linear models // Int. J. Control. 1989. V.50. P.2623–2630.
- [217] Ohta Y. Nonconvex polygon interval arithmetic as a tool for the analysis and design of robust control systems // Reliable Computing. 2000. V.6. N 3. P.247–279.
- [218] Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse Problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Gordon and Breach, 1995.
- [219] Ovseevich A. On equations of ellipsoids approximating attainable sets // J. Optimiz. Theory Appl. 1997. V.95. N 3. P.659–676.

- [220] Panasyuk A.I. Equations of attainable set dynamics. Part 1: Integral funnel equations // J. Optimiz. Theory Appl. 1990. V.64. N 2. P.349–366. Part 2: Partial differential equations // Ibid. P.367–377.
- [221] Pronzato L., Walter E. Volume-optimal inner and outer ellipsoids // Bounding Approaches to System Identification. New York and London: Plenum Press, 1996. P.119–138.
- [222] Roxin E. On the generalized dynamical systems defined by contingent equations // J. of Differential Equations. 1965. V.1. N 2. P.188–205.
- [223] Saint-Pierre P. Approximation of the viability kernel // Applied Mathematics & Optimization. 1994. V.29. N 2. P.187–209.
- [224] Schlaepfer F.M., Schweppe F.C. Continuous-time state estimation under disturbances bounded by convex sets // IEEE Trans. Automat. Contr. 1972. V.AC-17. N 2. P.197–206.
- [225] Schneider R.G. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [226] Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Contr. 1968. V.AC-13. N 2. P.22–28.
- [227] Sesekin A.N., Vdovina O.I. Numerical constructing the attainability sets for systems with the products of disturbances // Tools for Mathematical Modelling. Proc. of the The Fourth Intern. Conf., June 23–28, 2003, St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical Univ., 2003. P.376–379. (Mathematical Research, V.9).
- [228] Shor N.Z., Berezovski O.A. New algorithms for constructing optimal circumscribed and inscribed ellipsoids // Optimiz. Methods & Software. 1992. V.1. N 4. P.283–299.

- [229] Sonnevend G., Stoer J. Global ellipsoidal approximations and homotopy methods for solving convex analytic programs // Applied Mathematics & Optimization. 1990. V.21. N 2. P.139–165.
- [230] Tsai W.K., Parlos A.G., Verghese G.C. Bounding the states of systems with unknown-but-bounded disturbances // Int. J. Control. 1990. V.52. N 4. P.881–915.
- [231] Veliov V.M. Computation of integrals of uncertain vector functions // Interval Computations. 1993. N 4. P.143–153.
- [232] Vicino A., Milanese M. Optimal inner bounds of feasible parameter set in linear estimation with bounded noise // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V.AC-36. N 6. P. 759–763.
- [233] Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. V.AC-41. N 6. P. 774–785.
- [234] Watkins J., Yurkovich S. Set membership strategies for fault detection and isolation // CESA'96 IMACS Multiconference. Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, July 9–12,1996. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation. Proc. V.2. P.824–830.
- [235] Witsenhausen H.S. Set of possible states of linear systems given perturbed observations // IEEE Trans. Automat. Contr. 1968. V.AC-13. N 5. P.556–558.

**Приложение к диссертационной работе Е.К.Костоусовой
"Полиэдральные аппроксимации
в задачах гарантированного управления и оценивания"**

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано:	Должно быть:
18	6 снизу	§5	§2
19	13 сверху	$2n$ векторов	$2n$ скаляров
129	3 снизу	(C_{2n}^{n-1})	C_{2n}^{n-1}
190	15 сверху	$\tilde{Z}[k], \hat{Z}[k]$	$\tilde{\mathcal{X}}(k; T[\cdot]), \hat{\mathcal{X}}(k; T[\cdot])$
258	1 снизу	of the The	of the

Замеченные неточности

В последнем абзаце на стр. 82 следовало указать, что для точек $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ принято обозначение $z = (x^\top, \mu)^\top \triangleq \{x, \mu\}$, где $x \in \mathbb{R}^n$ (к сожалению, об этом сказано только значительно позже — на стр. 179).

В 5-й сверху строке на стр. 153 в формулировке теоремы 15.3 и в 7-й сверху строке на стр. 23 перед словами "параллелепипедозначными" пропущено существенное слово "невырожденными".