ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи УДК 519.6

РОГАЛЁВ АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.01.07 – вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель
академик Ю.И.Шокин

Красноярск, 1996

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Многие задачи науки и техники приводят к необходимости изучать математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Полученные математические модели часто поддаются исследованию только с помощью численных методов. Одним из серьезных вопросов, который возникает при этом, является контроль точности полученного численного решения, а также гарантированной точности, обеспечивающей учет влияния всех ошибок, в том числе ошибок округления. Следует отметить также необходимость решать задачи, у которых ряд параметров задан лишь неточно, следовательно необходимо описывать множества решений. Широкий круг подобных задач вызвал развитие методов построения верхних и нижних оценок или методов включения решений (*enclosure methods).*

Такие методы обычно основываются либо на использовании теорем сравнения решений, либо на реализации основных операций с некоторыми множествами, включающими всю совокупность решений исходной задачи, параллелепипедами (интервалами в R^n), эллипсоидами, шарами в некоторой норме и тому подобными. При этом операции над этими множествами должны строиться так, чтобы выполнялся принцип монотонности по включению [1], то есть гарантировалось сохранение в результирующем множестве результатов всех операций над вещественными числами (точками) из множеств-операндов.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе систем, имеющих неточно заданные параметры, вычисление верхних и нижних решений представляет большой значительный интерес в прикладных задачах. Это объясняется возможностью строить на их основе гарантированные оценки решений и множеств решений.

Рассмотрим задачу с начальными данными

$$\begin{gathered} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0,\ t \in [t_0, t_f],\ y \in R^n, \end{gathered} \tag{1}$$

точное решение которой равно $y(t)$.

Мы хотим вычислить интервальную функцию $Y(t) = \left[\underline{Y}(t), \overline{Y}(t)\right]$, для которой $y(t) \in Y(t)$ при всех $t \in [t_0, t_f]$. Функция $Y(t)$ учитывает также гарантированные границы глобальной ошибки решения задачи (1). Этот подход расширяет методику оценки численных решений с учетом всех типов погрешностей.

Следует отметить, что одним из первых ученых, который отметил необходимость построения двусторонних оценок решений дифференциальных уравнений был русский математик и механик С.А. Чаплыгин в 1919 году в работе, посвященной новому методу решения дифференциальных уравнений. Подробное описание этого метода и обзорную статью академика Н.Н. Лузина можно найти в сборнике трудов С.А. Чаплыгина [7]. Дальнейшее развитие методов построения двусторонних оценок и их использования для анализа решений дифференциальных уравнений содержится в работах [3, 8, 14].

Потребность создания более надежного программного обеспечения для методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений привела к появлению исследований, направленных на оценку глобальной ошибки. Интервальные методы решения дифференциальных уравнений, впервые предложенные Муром [1], являются логическим развитием этого направления, поскольку при этом производятся построения гарантированных верхних и нижних оценок множества точных решений, иначе называемых интервальными решениями.

Далее всюду в диссертации будут использоваться распространенные достаточно широко термины и обозначения интервального анализа, например, $[a, b]$ для интервалов $\{x|a \underline{\le x \le} b\}$, $f(X) = \{f(x)|x \in X\}$, $F(x) = [\underline{f(x)}, \overline{f(x)}] = \{f(x)|\underline{f(x} \le f(x) \le \overline{f(x)} \forall x \in X\}$. Понятие интервального решения требует своего осмысления в контексте интервальных алгоритмов. Интервальная величина может появиться в задаче (1) как интервальное начальное значение, или как интервальный параметр в правой части f. Такие интервалы обычно представляют неопределенности и не обязательно являются малыми величинами. Задачи, в которые присутствуют интервалы, могут рассматриваться либо как дифференциальные интервальные уравнения (уравнения, в которые входят интервальные коэффициенты и рассматриваются интервальные функции), либо как параметризованные семейства дифференциальных уравнений.

Чтобы проиллюстрировать это отличие, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -y, \ y(0) = [1, 2]. \tag{2}$$

Если рассматривать уравнение (2) как дифференциальное интервальное уравнение, то решение, проходящее через начальную точку $(t_0, y_0) = (0, 2)$ может иметь тангенс угла наклона, ограниченный сверху числом -1, решение, проходящее через точку $(0, 1)$ может иметь тангенс угла наклона, ограниченный снизу значением -2.

Оптимальное включение $\left[\underline{Y}(t), \overline{Y}(t)\right]$ точного решения y удовлетворяет системе

$$\overline{Y}' = -\underline{Y},\ \overline{Y}(0) = 2$$
$$\underline{Y}' = -\overline{Y},\ \underline{Y}(0) = 1$$

Следовательно,

$$y(t) \in \left[\underline{Y}(t), \overline{Y}(t)\right] = \left[(3e^{-t} - e^{t})/2, (3e^{-t} + e^{t})/2\right],$$

В частности, решение обыкновенного дифференциального уравнения, интерпретируемого как интервальное дифференциальное уравнение, не может иметь уменьшающуюся ширину.

С другой стороны, если мы рассматриваем уравнение (2) как параметризованное семейство, оптимальным включением будет $[e^{-t}, 2e^{-t}]$ – совершенно другое решение.

Подобное поведение обнаруживается, если задача (1) включает интервальнозначный параметр. Например, когда

$$y' = -ay,\ y(0) = 1,\ a = [1, 2]$$

рассматривается как интервальное уравнение, его решением будет

$$\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}\right],\ t \in [0, 0.623].$$

Рассматривая решение как параметризованное семейство, мы можем получить границу $\left[e^{-2t}, e^{-t}\right]$.

В работах, строящих интервальные методы, имеют место оба этих подхода, хотя для концепции, в которой мы сопоставляем системе обыкновенных дифференциальных уравнений параметризованное семейство, возникают сложности с нахождением эффективных численных алгоритмов. Например, если в задаче (1) включены параметры в функции f,то Лонер *(Lohner)* [38, 39, 40] считает, что каждый параметр–это дополнительная зависимая переменная, производная которой равна нулю.

Каждый из методов оценки глобальной ошибки, описанный в работе [35] может образовывать базис интервального алгоритма. Нахождение включений для $y(t)$ основано на

- дифференциальных неравенствах,
- конечно-разностных аппроксимациях с оценкой погрешности,

- разложениях в ряды Тейлора (или другие ряды) с оценкой остаточного члена,
- принципах коррекции дефекта,
- итерациях Пикара или Ньютона в соответствующем функциональном пространстве.

Важным моментом для всех этих подходов является требование поиска включения, как можно более близкого к точным решениям. Для достижения этого, метод должен преодолеть влияние так называемого эффекта Мура (*wrapping effect*), который означает сильное увеличение ширины включений, как правило экспоненциальное.

Опишем коротко алгоритм нахождения включения решений задачи с начальными данными. Этот алгоритм основан на принципах, заложенных в теореме существования и единственности Пикара. Для простоты сформулируем одномерный случай.

Теорема существования и единственности Пикара.

Пусть $R = \{(t, y) \in R^2 : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta.\}$ Предположим, что в R $f(t, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Тогда задача

$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$$

имеет единственное решение.

Схема доказательства. Прямоугольник R определяет предполагаемую априорно границу решения y. Вначале мы найдем окрестность t_0, в которой справедливо неравенство, задающее априорную границу. Поскольку f непрерывна, $|f|$ достигает своего максимального значения M в R. Определим $h = \min\{\alpha, \frac{y_0+\beta}{M}\}$. Тогда

$$\text{для } t \in [t_0 - h, t_0],\ y(t) \in [y_0 + M(t - t_0), y_0 - M(t - t_0)]$$

$$\text{для } t \in [t_0, t_0 + h],\ y(t) \in [y_0 - M(t - t_0), y_0 + M(t - t_0)]$$

Следовательно, при

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h],\ y \in Y(t) = y_0 + [-M, M](t - t_0) \subset R, \tag{3}$$

а операции Пикара сходятся равномерно к y на интервале $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Доказательство теоремы существования и единственности Пикара демонстрирует существование алгоритма нахождения включения $\mathrm{Y(t)}$, такого, что

$y(t) \in Y(t)$ где $y(t)$ – решение уравнения (3). Однако в качестве оценки y величина Y является неудовлетворительной, поскольку включение верно на сравнительно коротком интервале $[t_0 - h, t_0 + h]$ и не обладает свойством малости ширины. Многие известные интервальные алгоритмы обобщают различные аспекты этого доказательства и устраняют многие из этих недостатков, но полного решения задачи о построении эффективных методов интервальных оценок не дают.

В работах [3, 8] содержится достаточно полное изложение теории дифференциальных неравенств. В них приведены примеры систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для оценки решений которых может эффективно использоваться теория дифференциальных неравенств.

Функция $f(t, y)$ называется квазимонотонно возрастающей (убывающей) по y, если для $\nu = 1, \ldots, n$, $f_\nu(t, y) \leq f(t, z)$ (соответственно $\geq$) для $y \leq z$ покомпонентно, $y_\nu = z_\nu$. Любая одномерная функция $n = 1$ квазимонотонна. Поэтому интервальные алгоритмы могут хорошо работать для скалярных уравнений и, как следствие этого, вызывать предположение , что эти алгоритмы следует применять к системам уравнений.

На шаге интегрирования i мы получаем включение

$$y(t_i) \in Y(t_i) = \left[\underline{Y}(t_i), \overline{Y}(t_i)\right],$$

где $\underline{Y}, \overline{Y} \in R^n$. В общем случае мы должны решать задачу (1) с интервальными начальными данными $y(t_i) \in Y(t_i)$. Однако, если $f(t, y)$ квазимонотонна, мы отслеживаем за 2^n- решениями системы уравнений, имеющих числовое начальное значение и не работаем со всем симплексом,имеющим $n-$ вершин и описывающим множество точных решений.

Если $f-$ линейная функция, нам требуется лишь $(n+1)-$ точка. Мы выполняем значительно больший объем работы, чем в общем случае, но результирующее включение значительно ближе к множеству точных решений.

Теория дифференциальных неравенств может быть использована для вычисления оптимального включения решения уравнения $y' = f(y)$, должным образом трактуя начальное условие. Следовательно, можно применять линейные преобразования, чтобы использовать преимущества монотонных решений (потоков).

Программы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с гарантированным контролем ошибок, должны обеспечивать возможность распознавать одномерные, квазимонотонные или линейные задачи и трактовать их как специальные случаи.

Конечно–разностные аппроксимации используются во многих алгоритмах, интервальные версии этих алгоритмов можно сформулировать, добавляя интервальные оценки для глобальной ошибки [5, 6].

Итак, задачи с числовыми коэффициентами могут быть записаны в форме

$$y(t_i) = \text{формула} + Cy^p(\xi),\ \xi \in (t_i, t_{i+1}), \tag{4}$$

где формула (4) может соответствовать явному или неявному одношаговому (многошаговому) методу, включая вычисления $f(t, y)$. Включение $y^{(p)}(\xi) \in y^{(p)}([t_i, t_{i+1}])$ вычисляется с использованием арифметики дифференциалов [1, 2].

Тогда вычисление указанной формулы в уравнении (4) обеспечивает включение решения в точках t_i:

$$y(t_{i+1}) \in Y_{i+1} = \text{формула} + Cy^{(p)}([t_i, t_{i+1}]). \tag{5}$$

Функция включения может быть сконструирована из интерполянтов, используемых этими методами.

Интервальные методы, основанные на конечно–разностных аппроксимациях, не являются эффективными, поскольку они дают включения лишь в узлах сетки, а не функции включения, и потому, что методы рядов Тейлора дают обычно более узкие включения.

Формула вида $y_{i+1} = y_i + \ldots$, вычисляемая с использованием интервальной арифметики, приводит к появлению интервальных функций, ширина которых возрастает с увеличением значений аргумента (возрастающих по ширине). Однако пары формул, используемых многими известными алгоритмами для контроля за величиной шага, являются привлекательными для интервального исполнения. В интервальной постановке значения интервалов (включения), полученные по двум правилам следует пересекать, чтобы находить более узкое включение.

Мур в своих работах [1, 2] использовал арифметику дифференциалов, чтобы создавать ряды Тейлора для решений и интервальные методы, обеспечивающие включение остаточного члена рядов.

Пусть $T_i = [t_i, t_{i+1}]$, $\hat{y}_i$ обозначает оценку решения $y(t_i) = y_i$. Мур разлагал $\hat{y}(t)$ в ряд Тейлора в точке $t = t_i$ с шагом $h = t - t_i$:

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_i + \hat{y}_i' h + \hat{y}_i'' h^2/2! + \ldots + \hat{y}_i^{(p)} h^p/p! + e^p$$

Производные $\hat{y}_i^{(j)} = \hat{y}^j(t_i)$ вычисляются из дифференциального уравнения с помощью арифметики дифференциалов

$$e_p = \hat{y}^{(p+1)}(\xi) h^{p+1}/(p+1)!,\ \xi \in T_i$$

Обычное применение методов рядов Тейлора совместимо со стандартными многошаговыми методами типа Рунге-Кутта для решения нежестких задач в рамках обычной (неинтервальной арифметики).

Если Y_i– интервал, такой что $y_i \in Y_i$, то $y(t) \in Y_i(t)$ для $t \in T_i$, где

$$Y_{i+1}(t) = Y_i + Y_i'h + Y_i''h^2/2! + \ldots + Y_i^{(p)}h^p/p! + E_p. \tag{6}$$

В уравнении (6) $Y_i^{(j)}$ вычислялось с использованием точного рекуррентного соотношения такого, как для $\hat{y}_i^{(j)}$ с отмеченными операциями, реализованными в интервальной арифметике. Ошибка усечения заключена в интервал

$$E_p = Y_i^{(p+1)}(T_i)h^{p+1}/(p+1)!$$

Тогда для $Y_{i+1} = Y_i(t_{i+1})$ мы имеем $y_{i+1} \in Y_{i+1}$.

Уравнение (6) вычисляет интервалы, имеющие увеличивающуюся ширину так, что для уменьшения ширины Y_{i+1} следует использовать методы коррекции дефекта или сжимающих итераций [22, 36, 37, 41].

Одно из направлений в построении интервальных методов оценивания основано на попытках ориентировать интервальный вектор (интервал) в пространстве R^n так, чтобы он учитывал наибольшее и наименьшее отклонения множества точных решений, вообще говоря, используя оценки собственных значений матрицы, составленной из производных правой части. Впервые эта идея была предложена Крукебергом (Krückeberg)[21], но наиболее полное развитие она получила в цикле работ Лонера *(Lohner)* [38, 39, 40], который дополняет обычный разностный метод решения системы дифференциальных уравнений нахождением выражений, представляющих глобальные погрешности. Эта методика может быть реализована только при выполнении довольно сложных процедур дифференцирования функций в символьном виде, созданием которых занимался институт прикладной математики при университете г. Карлсруэ в течение нескольких лет.

Метод Лонера позволяет строить интервальные оценки для многих систем дифференциальных уравнений, но широк круг задач, в которых эти оценки слишком широки. В любом случае он требует очень много компьютерного времени и компьютеров большой производительности.

Алгоритм рядов Тейлора позволяет получить непрерывные интервальнозначные кусочные полиномы на интервале $[t_0, t_f]$, где $Y(t) = Y_i(t)$ на T_i. Включение $y(t) \in Y(t)$ выполняется для всех $t \in [t_0, t_f]$, даже если t или $y(t)$ не являются машинно представимыми. Составлены алгоритмы на основе разложений в ряды Тейлора, позволяющие вычислить включения для $y(t)$.

Возможны многие варианты метода коррекции дефекта, однако все они имеют следующую общую форму:

- вычисляется аппроксимация решения $\hat{y}(t)$ для $y(t)$,
- дефект определяется как $d(t) = \hat{y}' - f(t, \hat{y}(t))$,
- используется решения $\hat{y}$ задачи, коэффициенты которой близки к коэффициентам исходной задачи, $\hat{y}' = f(t, y) + d(t)$ (существование решения),
- вычисляется $\hat{\hat{y}}$– приближенное решение задачи $y' = f(t, y) + d(t)$ по тому же алгоритму, что и $\hat{y}(t)$,,
- предполагается, что $\hat{\hat{y}} - \hat{y}(t) \approx \hat{y}(t) - y(t)$, то есть полагаем, что ошибки, сделанные при решении ближайшей задачи, приближенно равны ошибкам, сделанным при решении первоначальной (исходной) задачи,
- тогда $y(t) \approx \hat{y}(t) - (\hat{\hat{y}} - \hat{y}(t))$.,
- производятся итерации шагов.

Интервальный вариант метода коррекции дефекта, предложенный Штеттером [41] находит числовую аппроксимацию совместно с интервальным включением ошибки на основе интервального алгоритма для уравнения ошибки. Заметим, что уравнение ошибки может быть монотонным, даже если исходное уравнение не обладает этим свойством.

Если включение, полученное в методе, не является достаточно узким, выбираем следующую итерацию с числовыми значениями. В результате, решение всегда выражается как числовое приближение с учетом интервального включения ошибки.

Для задач, не рассматривающих интервальные начальные данные или параметры, метод коррекции дефекта позволяет находить включения настолько узкие, насколько это можно сделать при вычислениях машинной арифметике.

Для задач, содержащих интервальные значения или параметры, точность решения зависит от точности, получаемой по интервальному алгоритму при решении уравнения ошибки.

Подход Каухера [42] к решению задачи (1), основанный на теореме существования и единственности Пикара, использует сжимающие итерации в интервальных функциональных пространствах.

Если $[a, b]$– соответствующая окрестность точки t_0, а $C_I[a, b]$ обозначает множество непрерывных интервальнозначных функций на $[a, b]$, тогда отображение $\Phi : C_I[a, b] \to C_I[a, b]$, заданное формулой

$$\Phi(Y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, Y(s))ds, \tag{7}$$

является $\alpha-$ сжатием, где $Y \in IC[a, b]$.

Следовательно, если $\Phi(Y)(t)$ находится строго внутри $Y(t)$ как множества, то существует единственное решение y задачи (1) и $y \in Y$. Поскольку Φ является сжатием, мы можем получить включение решения, достаточно близкое к множеству точных решений с помощью итераций

$$Y_{j+1} = \Phi(Y_j).$$

В практических вычислениях итерации в полученном итерационном уравнении должны быть выполнены в множестве непрерывных интервальных функций с коэффициентами, граничные точки которых являются машинно представимыми числами (понятие машинно представимого числа определено в [17, 69]). Интегрирование в этом уравнении производится по алгоритму интервальных квадратур [42, 24]. Если узлы интегрирования выбраны заранее, невозможно, вообще говоря, вычислять достаточно точные включения, следовательно, узлы определяются адаптивно. Результат состоит в том, что размерность множества интервальных функций растет при сходимости итераций.

Использование сжимающих итераций привлекательно с теоретической точки зрения, поскольку это дает и точные включения, и гладкие решения. Однако метод крайне трудоемок, особенно если не выбрано достаточно точное начальное включение. Такое начальное включение может быть получено либо по методу рядов Тейлора, либо по методу коррекции дефекта.

Например, разумно использовать алгоритм рядов Тейлора [23, 24] для вычисления точных начальных приближений, затем алгоритм коррекции дефекта для нахождения включения решения уравнения ошибки; и использовать сжимающие итерации с адаптивными узлами, чтобы получить гладкое и точное включение решения. Этот составной алгоритм вычисляет точное включение, но приводит к большим вычислительным затратам.

В последнее время появляется группа работ, основанная на аппроксимации множеств точных решений и их динамики эллипсоидами в n-мерном пространстве. Такие алгоритмы были предложены в наиболее полном виде в работах Ф.Л. Черноусько[11] и затем их исследования продолжались А.Ф. Филипповым [46, 47] и другими учеными [30, 45].

Целью настоящей работы является:

- создание нового класса алгоритмов для построения гарантированных оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивающих покоординатную сходимость этих оценок к множеству точных решений или неулучшаемость получаемых оценок
- доказательство теорем сходимости интервальных оценок, полученных по указанным схемам
- анализ различных модификаций этих алгоритмов для эффективного нахождения интервальных расширений
- получение и использование методов упрощения аналитических алгоритмов подстановки формул сплайн-функций
- исследование и реализация алгоритмов машинных интервальных операций и контроля точности численных результатов.

Научная новизна и практическая ценность. Основные результаты диссертации являются новыми и имеют как теоретическую, так и практическую ценность.

Обоснована сходимость интервальных оценок к множеству точных решений в хаусдорфовой метрике, при этом определение решения содержит объединенное интервальное расширение, и доказаны теоремы о покоординатной сходимости этих оценок к множеству точных решений. Тем самым, предлагается подход, позволяющий преодолеть влияние эффекта Мура, проявляющегося во всех существующих алгоритмах нахождения двусторонних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая схема этого алгоритма объединяет нахождение символьных формул сплайн-функций, аппроксимирующих решение по методу коллокации, и интервальных расширений по этим формулам. Существенным фактом является то, что в отличие от большинства символьных методов решения уравнений [70, 71, 72] здесь используется и разыскивается не точное решение, а аналитическая формула для сплайн-функций, аппроксимирующих решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в совокупности с интервальной оценкой глобальной ошибки, что позволяет производить строгое исследование решений системы и получать гарантированные оценки.

Предложены различные способы нахождения интервальных расширений функций в том числе суперпозиций функций, что позволяет эффективно использовать их для нахождения областей значений решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученные в диссертации результаты использовались для создания программных средств, реализующих алгоритмы надежных вычислений (язык реализации – Borland Pascal 7.0, Object Windows for Pascal), а также утилит для получения символьных формул сплайн-аппроксимаций решений (реализация в системе Maple). В приложениях 1 и 2 приведены символьные формулы и графики решений, найденных по разработанному алгоритму.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся методы, построенные для нахождения верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также алгоритмы реализации символьных преобразований получаемых формул сплайн-решений и интервальных операций с контролем точности.

Основные шаги численно–аналитических алгоритмов включают

- Выражение значения сплайна в любой интересующей нас точке t интервала $[t_0, t_k]$ как функции от начальных значений
- линеаризацию данной функции по начальным значениям в некоторой точке
- Оценку нормы разности значений сплайна $S(t)$ и точного решения $y(t)$ с помощью оценок глобальной ошибки
- Определение интервальной оценки множества решений по каждой компоненте как объединение интервального расширения сплайн-функции, аппроксимирующей решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и интервальной оценки глобальной ошибки

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались

на семинаре кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Новосибирского государственного университета под руководством академика Н.Н. Яненко;

на семинаре по численному анализу под руководством академика Ю.И.Шокина (ИТПМ СО РАН, г. Новосибирск);

на семинаре "Проблемы математического и численного моделирования" (ВЦ СО РАН г. Красноярск);

на конференциях молодых ученых ИТПМ СО РАН г.Новосибирск (1981, 1983 гг.);

на международном симпозиуме по интервальной математике (Фряйбург, Германия, 1980 г.);

на Всероссийских совещаниях по интервальному анализу (1985, 1986, 1988гг. — г. Красноярск, 1992г. — Абрау-Дюрсо);

на Всероссийской школе “Вычислительные методы и математическое моделирование” – Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша, Красноярский госуниверситет (1986 г. – Шушенское);

на Всероссийской конференции “Актуальные проблемы прикладной математики” – Саратовский госуниверситет (1991г. – Саратов);

на 8-й международной школе-семинаре “Качественная теория дифференциальных уравнений гидродинамики” — Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева, Красноярский госуниверситет (1992г. – Красноярск);

на международной конференции по численному анализу и автоматической верификации результатов – Университет штата Западная Луизиана (1993г. – Луизиана, США);

на международной конференции по компьютерным системам и прикладной математике – С.-Петербургский госуниверситет (1993г. – С.-Петербург);

на международной конференции по интервальным и компьютерно-алгебраическим методам в науке и инженерии – С.-Петербургский госуниверситет (1994г. — С.-Петербург);

на Всероссийском совещании по интервальной математике – Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск (1994,1995 гг. – Новосибирск);

на международной конференции по численному моделированию в научных исследованиях, компьютерной арифметике и гарантированным вычислениям (SCAN-95)– Университет г. Вупперталь, Германия (1995г.- Вупперталь, Германия).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы (86 наименований) и приложений.

В первой главе, состоящей из трех параграфов проведено рассмотрение задачи нахождения двусторонних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом мы основываемся на анализе не одного решения, а целой совокупности решений.

Тогда численный метод верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений должен создаваться с учетом следующих целей:

1. Нахождение включения решения с контролем истинности этого включения;
2. Определение количественной оценки влияния вариации исходных данных на решение;
3. Исследование практической устойчивости решения относительно допустимого множества изменяющихся (возмущающих) функций;
4. Описание совокупности решений множеств систем ОДУ.

В перечисленном списке четвертый пункт является основой для реализации трех предыдущих пунктов.

Материал данной главы содержит основные вопросы, освещающие понятие совокупности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их основных характеристик. Рассматривается случай одного уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, понятие сечения совокупности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, метрики Хаусдорфа. Показано, что метрика Хаусдорфа применима для задач оценивания совокупности решений систем ОДУ с компактными множествами начальных данных и соответствующей гладкостью правой части. Вводится понятие сходящихся оценок и приводится пример сходящийся оценки одного дифференциального уравнения.

Во второй главе, включающей три параграфа, рассматриваются вопросы, связанные с построением верхних и нижних оценок множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными данными и отклонений этих оценок от границ совокупности всех точных решений указанной задачи.

Здесь описан метод построения интервальных оценок, который основан на предварительном определении формул приближенных решений в аналитическом виде, гарантированной оценке глобальных ошибок и нахождению интервальных расширений (совместно для формул и глобальных ошибок). Требование строить формулы приближенных решений в любой точке t области G позволяет бороться с влиянием эффекта Мура, поскольку переносит определение интервальных расширений на последний этап алгоритма, то есть снимает “пошаговость” оценок множеств решений. При этом применяются кусочно-полиномиальные функции (или сплайн-функции) различных степеней гладкости и дефектов, что объясняется необходимостью эффективно выполнять аналитические выкладки для компьютеров средней производительности и конфигурации. Заметим, что выбор вида сплайн-функций зависит от того, для каких систем уравнений производятся оценки: для систем уравнений, имеющих линейную правую часть, или нелинейную правую часть. Результаты настоящей главы опубликованы в работах [76, 77, 78, 79, 81, 86].

Третья глава состоит из двух параграфов и содержит описание алгоритмов и практических вопросов реализации, связанных с построением программ интервальных операций с контролем точности и процедур для аналитических операций алгоритма. При выполнении численных алгоритмов, в том числе интервальных, могут появляться эффекты, вызванные влиянием ошибок округления и потерей точности при сокращениях. Компьютерные системы не предусматривают эффективного механизма определения точности вычислений или перекомпиляции неточных результатов для получения большей точности.

Реализация символьно–интервальных алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описанных в параграфах 2,3 главы 2, налагает свои требования к использованию программных модулей и программных оболочек, выполняющих действия по вычислению значений интервальных выражений, интервальных расширений функций и тому подобных. В работах [73, 74] пакет интервальных операций использует в подпрограммах типы данных вещественных и целых чисел, а сами интервальные величины представлены как массивы длины 2. Сами алгоритмы интервальных операций и машинных арифметических операций могут быть реализованы на любом языке высокого уровня и в настоящее время использованы программные средства на языках Паскаль и СИ.

Основа такой реализации определяется требованиями, обусловленными совместным использованием символьных вычислений и интервального оценивания ошибок приближенных решений, а также интервальных вычислений расширений для полученных сплайн-решений. В программах, реализующих арифметические операции над граничными значениями интервалов, используются направленные округления, что позволяет добиться гарантированного включения в полученный интервал точного результата арифметических операций, а также получения гарантированной величины точности.

Машинная арифметика в значительной мере зависит от аппаратных реализаций, которые предоставляет пользователю ЭВМ, поэтому при написании процедур арифметических операций гарантированной точности (с направленными округлениями) средствами языка высокого уровня приходится производить нормализацию чисел, сдвиги, проверку переполнения, округления чисел. Результаты настоящей главы опубликованы в работах [74, 75, 76, 81].

§1.1. Включение решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с начальными значениями, заданными в виде интервала

$$\frac{du}{dt} = f(u) \tag{1.1}$$

$$u(t_0) \in U^0 = [\underline{u}^0, \overline{u_0}]$$

Пусть функция $f(u)$ непрерывна на некотором открытом интервале G, содержащем t_0 и удовлетворяет условию Липшица на замкнутом интервале $[t_0, t_k] \subset G$. Обозначим через U^t–образ множества U^0 в момент времени t в силу системы (1.1), то есть

$$U^t = \left\{u(t)|u(t_0) \in U^0\right\} \tag{1.2}$$

Множество U^tможно назвать сечением совокупности решений, соответствующих значению U^0 при фиксированном времени t.

Если предположить, что выполнено условие непрерывной дифференцируемости решения по начальным данным, то для сечения семейства траекторий можно вычислить длину получающегося интервала:

$$w(U^t) = \underline{U}^t - \overline{U}^t = \int_{[\underline{U},\overline{U}]} du = \int_{[\underline{u}^0,\overline{u}^0]} |\frac{\partial u(t)}{\partial u_0}|du_0 = \int_{U^0} e^{\int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial u} u(s)ds} du_0 \tag{1.3}$$

Содержательной при этом является постановка задачи оценивания множества U_t в любой момент времени t и определение степени точности этого оценивания. Далее рассмотрим интервальный метод, который позволяет строить сходящиеся интервальные оценки, что может послужить иллюстрацией понятия сходимости и расходимости верхних и нижних (интервальных) оценок в случае систем уравнений.

Всюду мы предполагаем, что над встречающимися в формулах интервалами производятся соответствующие интервальные операции, в том числе взятие интервального интеграла [1].

Введем на интервальном пространстве I метрику Хаусдорфа

$$h(A, B) = max\{|\overline{a} - \overline{b}|, |\underline{a} - \underline{b}|\},$$

где нижний надчерк обозначает нижнюю границу интервала, верхний надчерк– верхнюю границу интервала. Обозначим через $C_I([t_0,t_k])$ пространство непрерывных интервальнозначных функций, определенных на интервале $[t_0,t_k]$ с метрикой

$$h_I(F,G) = max_t max\left\{\left|\overline{f}(t)-\overline{g}(t)\right|, \left|\underline{f}(t)-\underline{g}(t)\right|\right\}.$$

Преобразуем уравнение 1.1 к интегральному уравнению

$$u(t) = u_0 e^{-L(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} [f(u(s))+Lu(s)]e^{-L(t-s)}ds == u_0 e^{-L(t-t_0)} + \int_{t0}^{t} g(u(s))ds \tag{1.4}$$

где

$$g(u(s)) = e^{-L(t-s)}[f(u(s))+Lu(s)], \tag{1.5}$$

$$L = \max_{t\in[t_0,t_k]}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u(t))\right|\right\}.$$

Легко видеть, что производная $\frac{\partial g}{\partial u} \geq 0$ для любого $t\in[t_0,t_k]$. Решение задачи (1.1) эквивалентно отысканию всех непрерывных решений интегрального уравнения (1.4) таких, что $u_0 \in U^0$.

Для решения интегрального уравнения (1.4) используем интервальный метод последовательных приближений (метод Пикара). Имеем

$$V^{n+1}(t) = U^0 e^{-L(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} G(V^{(n)}(s))ds, \tag{1.6}$$

где

$$G(V^{(n)}(s)) = [g(\underline{v}^{(n)}(s)), g(\overline{v}^{(n)}(s))],$$

$$V^{(n)}(s) = [\underline{v}^{(n)}(s), \overline{v}^{(n)}(s)], n = 1,2,...,$$

являются естественными интервальными расширениями функций $g(v), v$,

$$V^{(0)}(s) = [\underline{u}^{(0)}e^{-L(s-t_0)}, \overline{u}^{(0)}e^{-L(s-t_0)}],$$

$V^{(0)}(s)$–некоторое начальное приближение, содержащее U^t. При этом $V^{(1)}$ выбирается так, чтобы $V^{(2)}(s) \subseteq V^{(1)}(s)$, при этом могут появиться некоторые ограничения на значения s. Отметим также, что интервальное расширение

$$G(V^{(n)}(s)) = [g(\underline{v}^{(n)}(s)), g(\overline{v}^{(n)}(s))]$$

удовлетворяет неравенству

$$h_I(G(V^{(n)}, G(V^{(n+1)}) \leq L\, h_I(V^{(n)}, V^{(n+1)}),$$

при некоторых естественных условиях.

Несложными рассуждениями мы можем показать, что метод 1.6 в пространстве $I(R))$ имеет неподвижную точку V^* , которая совпадает с U^t при любых временных значениях t. Для доказательства этого заметим, что оператор $Pic(V) \equiv V^0 + \int_{t_0}^{t} G(V(s))ds$ переводит непрерывные интервальнозначные функции в непрерывные интервальнозначные функции и является сжимающим в метрике h_I и некоторых ее аналогах. В качестве эквивалентной ей метрики определим

$$\widehat{h}_I(F,G) = \max_{t\in[t_0,t_k]} \max\left\{e^{-L_1(t-t_0)}(|\underline{f}(t)-\underline{g}(t)|, |\overline{f}(t)-\overline{g}(t)|)\right\} \tag{1.7}$$

$$\text{здесь} L_1 \geq L.$$

Известно, что обе метрики h_I и $\widehat{h}_I$ обладают инвариантностью относительно сдвига. Кроме того

$$\widehat{h}_I(V^{(n+1)}(t), V^{(n)}(t)) = \widehat{h}_I(\int_{t_0}^{t} G(V^{(n)}(s))ds, \int_{t_0}^{t} G(V^{(n-1)}(s))ds).$$

Интервальный интеграл в силу непрерывности подынтегральной функции G запишется так

$$\int_{t_0}^{t} G(V^{(n)}(s))ds = [\int_{t_0}^{t} g(\underline{v}^{(n)}(s))ds, \int_{t_0}^{t} g(\overline{v}^{(n)}(s))ds].$$

Тогда используя обозначения $C_e = e^{-L_1(t-t_0)}$, $C_s = e^{L_1(s-t)}e^{-L_1(s-t_0)}$, получаем неравенства

$$\widehat{h}_I(\int_{t_0}^{t} G(V^{(n)}(s))ds, \int_{t_0}^{t} G(V^{(n-1)}(s))ds) =$$

$$\max_t \left\{ C_e \max\left(\left| \int\limits_{t_0}^{t} g(\underline{v}^{(n)})ds - \int\limits_{t_0}^{t} g(\underline{v}^{(n-1)})ds \right|, \left| \int\limits_{t_0}^{t} g(\overline{v}^{(n)})ds - \int\limits_{t_0}^{t} g(\overline{v}^{(n-1)})ds \right| \right) \right\}$$

$$\leq \max_t \left\{ e^{-L_1(t-t_0)} \max\left\{ L\int\limits_{t_0}^{t} \left|\underline{v}^{(n)} - \underline{v}^{(n-1)}\right| ds,\ L\int_{t_0}^{t} \left|\overline{v}^{(n)} - \overline{v}^{(n-1)}\right| ds \right\} \right\}$$

$$\leq \max_t \left\{ L\int\limits_{t_0}^{t} C_s \max(|\underline{v}^{(n)}(s) - \underline{v}^{(n-1)}(s)|, |\overline{v}^{(n)}(s) - \overline{v}^{(n-1)}(s)|)ds \right\}$$

$$\leq L \max_t \int_{t_0}^{t} e^{-L_1(t-t_0)} ds \widehat{h}_I(V^{(n)}, V^{(n-1)} \leq \frac{L}{L_1}\left(1 - e^{-L_1(t_k-t_0)}\right) \widehat{h}_I(V^n, V^{(n-1)}).$$

Поскольку мы выбрали $L_1 \geq L$, то при $k = L/L_1$ имеет место $\left(1 - e^{-L_1(t_k-t_0)}\right) < 1$. Следовательно получим условие сжимаемости.

Это означает, что итерационный процесс (1.6) имеет неподвижную точку V^*. При доказательстве мы использовали тот факт, что

$$\widehat{h}_I(g(\underline{v}^{(k)}), g(\underline{v}^{(k+1)})) \leq \widehat{h}_I(G(V^{(k)}), G(V^{(k+1)})) \leq L\widehat{h}_I(V^{(k)}, V^{(k+1)}),$$

а также аналогичное неравенство для $g(\overline{v}^{(k)}, \overline{v}^{(k+1)})$. Включение $U^t \subseteq V^*$ следует из монотонности относительно включения функции g и интервальных операций. Правая граница интервала V^* является предельной точкой последовательности

$$\overline{v}^{n+1} = \overline{v}^{(0)} + \int_{t_0}^{t} g(\overline{v}^{(n)})ds$$

в силу монотонности функции g, обусловленной выполнением неравенства $\frac{\partial g}{\partial v} \geq 0$. Это означает, что $\overline{V}^*$является также максимальным решением системы дифференциальных уравнений. Подобные рассуждения обосновывают,что $\underline{V}^*$ является минимальным решением . Поэтому $U^t = V^*$.

Интервальный вариант метода последовательных приближений полезен тем, что обладает свойством сходимости к интервалу точных решений на всем интервале времени t при выполнении достаточно очевидных и необременительных условий. Следует заметить, что метод последовательных приближений в случае систем уравнений не обладает свойством близости к интервалу точных решений на всем интервале, а лишь на некотором малом подинтервале, хотя включение сохраняется.

Для описания эволюции множеств решений дифференциальных уравнений можно решать более общие задачи оценки множества достижимости решений дифференциальных уравнений, параметры которых изменяются на некоторой совокупности значений. Например, под множеством достижимости с начального многообразия R_0 понимается все множество правых концов $x(\tau)$ траекторий $x(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau$, начинающихся на R_0, то есть $x(t_0) \in R_0$.

Методы интервального анализа могут быть эффективно использованы для исследования совокупности решений дифференциальных уравнений. Основным инструментом исследования при этом является приводимая ниже последовательность определений и утверждений.

Пусть U и U_n – это интервалы при $n = 1, 2, \ldots$. Тогда U_n сходится к U при n, стремящимся к бесконечности, если

$$\lim_{n\to\infty} \underline{U}_n = \underline{U} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \overline{U}_n = \overline{U}.$$

Пусть P– отображение интервалов, задающее метод последовательных приближений. Сформулируем следующее утверждение.

Пусть существует интервальная функция U_0 такая, что $PU_0 \subset U_0$. Тогда последовательные итерации $U_{n+1} = PU_n$ образуют убывающую последовательность интервально-значных функций и $\lim_{n\to\infty} U_n(t) = U(t)$, где $U(t)$– интервальная функция на I. Кроме того, если u– произвольное решение уравнения $pu = 0$, то $u(t) \in U(t)$ на области существования решений J.

Рассмотрим задачу с интервальными начальными данными для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой удовлетворяют условию Липшица. Полагаем, что каждая задача с начальными данными

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad (1.8)$$
$$u(t_0) = u_0 \in K$$

однозначно разрешима при достаточно малых величинах на интервале

$$K = \{u : |u - u_0| \le r_1, r_1 > 0\}$$

Определив оператор T, отображающий подмножество множества вещественных чисел в себя

$$Tu = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \qquad (1.9)$$

мы получаем, что решение задачи 1.8 может быть приближено последовательностью значений итерационного метода последовательных приближений

$$u_{j+1} = Tu_j \text{ , } j = 1, 2 \ldots \qquad (1.10)$$

где $u(t_0) = u$, $u_1(t) \in K$, $u_1 \in R$ – пространству вещественных чисел. Заметим, что метод последовательных приближений 1.10 характерен отсутствием интервальных величин в качестве параметров и множителя $e^{-L(t-t_0)}$, которые обеспечивают сходимость метода 1.6 для любого t.

Можно получить границы ошибок метода (1.10), обеспечивающие возможность построения оценок и эволюции этих границ

$$|u_{j+1}(t) - u_j(t)| \le \int_{t_0}^{t} L\,|u_j(s) - u_{j-1}(s)| \le$$
$$\le L^{j-1}\varepsilon\,\frac{(t-t_0)^{j-1}}{(j-1)!},$$

где $|u_2(s) - u_1(s)| \le \varepsilon$ для $s \in [t_0, t] \subset I$,

§1.2. Некоторые интервальные метрики и особенности их применения для оценки интервальных включений.

Применение интервальных метрик и их свойства основаны на классических понятиях топологических и метрических пространств, образованных как для обычных, так и для интервальных чисел. Очень часто в задачах интервальной математики, рассматривающих вопросы скорости сходимости и метрические свойства, используется метрика Хаусдорфа. Свойства метрики Хаусдорфа можно описать, вводя вначале соответствующее топологическое пространство.

Напомним, что топологическое пространство называется хаусдорфовым, если для любых двух его различных точек a и b из A найдутся окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, пересечение которых пусто ($U \cap V = 0$). Множество A называется пространством топологии.

Образуем интервальную топологию, вводя систему открытых и замкнутых интервалов. Хотя нас интересует вопросы сходимости в интервальном пространстве с метрикой,эта топология позволяет лучше понять некоторые конкретные вопросы сходимости.

Будем называть открытым (замкнутым) лучом множества вида

$$\{x \in A : a < x\}(\{x \in A : a \leq x\}),$$

а открытым (замкнутым) интервалом–либо открытый (замкнутый) луч, либо множество вида

$$(a, b) = \{x \in A : a < x < b\}([a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}); a, b \in A$$

В нашей системе множество открытых (замкнутых) интервалов– это наименьшая совокупность подмножеств множества A, замкнутая относительно конечного пересечения и содержащая все открытые (замкнутые) лучи. Далее определим, что интервалом в A называется множество, которое является либо открытым, либо замкнутым интервалом, либо множеством вида

$$[a, b) = \{x \in A : a \leq x \leq b\}$$

Будем называть интервальной топологией наименьшую систему подмножеств множества A, замкнутую относительно объединения и конечного пересечения и содержащую все открытые лучи. Можно дать эквивалентное определение: интервальная топология– это наименьшая система подмножеств множества A, замкнутая относительно объединения и содержащая все открытые интервалы. Легко показать, что интервальная топология хаусдорфова.

Действительно, пусть $a, b \in A$ и $a < b$. Если существует элемент $c \in (a, b)$, то открытые интервалы, являющиеся открытыми лучами, не пересекаются и содержат элементы a и b соответственно. Если интервал (a, b) пуст, то открытые лучи (открытые интервалы), содержащие a и b, соответственно, не пересекаются. Как следствие этого факта и того,что интервальная топология хаусдорфова, каждая последовательность имеет не более одной предельной точки.

Для метрических пространств определение хаусдорфовой метрики примет следующий вид. Хаусдорфовым расстоянием между двумя компактными непустыми подмножествами A, B метрического пространства X с метрикой d называется отображение

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon : A^\varepsilon \supset B, B^\varepsilon \supset A\},$$

где

$$C^\varepsilon = \{x \in X : d(x, c) \leq \varepsilon\}$$

для некоторого $c \in C$.

В вопросах оценивания интервальных величин часто используется метрика

$$h : I(R^n) \times I(R^n) \to R$$

$$h(A, B) = \max_{1 \leq i \leq n} \max\{|\underline{a}_i - \underline{b}_i|, |\overline{a}_i - \overline{b}_i|\}. \tag{1.11}$$

В частном случае $n = 1$ имеем классическую метрику для оценки расстояния двух интервалов

$$h(A, B) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|\}$$

Легко видеть, что h является хаусдорфовой метрикой h_∞, соотносящейся с метрикой максимума $d_\infty : R^n \times R^n \to R$, где

$$d_\infty(a, b) = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|,$$

то есть

$$h(A, B) = h_\infty(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d_\infty(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d_\infty(a, b)\right\} \tag{1.12}$$

Поскольку элементы (интервалы) в пространстве $I(R^n)$ компактны, метрическое пространство $(I(R^n), h_\infty)$ будет полным.

Имеет смысл детальнее рассмотреть свойства хаусдорфовой метрики, применяемой для обычных множеств. Если X – банахово пространство с нормой

$\|\cdot\|$ и порожденной ей метрикой d_0, можно определить псевдометрику Хаусдорфа

$$p(A,B) = \max\left(\sup_{x\in B} d(x,A), \sup_{y\in A} d(y,B)\right),$$

где $d(x,A) = \inf\{d(x,y):\ y\in A\},\ A,B$ – подмножества банахова пространства X.

Рассматривая совокупность $compX(convX)$ всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств из X как подпространство пространства всех подмножеств X, имеем, что топология этого пространства индуцирует метрику Хаусдорфа (1.12). Если $Y\subset X$ и Y– компакт, то $comp\,Y$– совокупность всех непустых компактных подмножеств из Y, является компактом в совокупности $comp\,X$.

Итак, применение хаусдорфовой метрики для интервальных элементов оправдано в силу их выпуклости и компактности. Близко связана с этим вопросом задача применения хаусдорфовой метрики для совокупностей решений систем ОДУ или множеств точек фазовой плоскости, достижимых к моменту времени $T\geq 0$ из начальных точек $x_0\in X_0$ по траекториям исходной системы ОДУ. При естественных предположениях о достаточной гладкости правой части можно получить условия компактности сечений совокупностей решений систем ОДУ. Преобразование множества U_0 в U_t, определяемое траекториями системы, будет непрерывно дифференцируемым по начальным данным решений исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Следовательно, из компактности множества U_0 будет вытекать компактность множества U_t, то есть к U_t возможно применение хаусдорфовой метрики.

Использование хаусдорфовой метрики для анализа сходимости и получения оценок основано на свойствах этой метрики.

Интервальное отображение $V: I(R^n)\to I(R^n)$ метрического пространства $(I(R^n)), h)$ будем называть сжимаемым, если

$$h(V(x),V(y))\leq \alpha h(x,y) \text{ для любых } x,y\in I(R^n)$$

$$\text{где } 0<\alpha<1 \ \text{ (коэффициент сжатия)}.$$

Проверка этого определения производится достаточно легко. Полезными являются также следующие свойства.

Симметричность (аналогично метрике пространства R^n)

$$h(x+y,u+v)\leq h(x,u)+h(y,v),\ \text{где}\, x,y,u,v\in R^n$$

$$h(X+Y,U+V) \leq h(X,Y)+h(Y,V),\ \text{где}\, X,Y,U,V \in I(R^n);$$

однородность

$$h(\alpha X,\alpha Y)=|\alpha|h(X,Y),\ \text{где}\, \alpha \in R,\ X,Y \in I(R^n).$$

Если $[\underline{a^j},\overline{a^j}]$, $j=1,...,n$ - интервалы в R, то прямое произведение этих интервалов $\prod_{j=1}^n[\underline{a^j},\overline{a^j}]$ принадлежит $I(R^n)$.

Пусть $[\underline{a^j},\overline{a^j}]=[a^j,b^j]$, $j=1,...,n$, используя обычные интервальные операции, для сумм прямых произведений и умножения на число λ получим :

$$\lambda(\prod_{j=1}^n[a^j,b^j])=\prod_{j=1}^n[\lambda a^j,\lambda b^j],\ \text{если}\ \lambda\geq 0$$

$$\lambda(\prod_{j=1}^n[a^j,b^j])=\prod_{j=1}^n[\lambda b^j,\lambda a^j],\ \text{если}\ \lambda< 0$$

$$\sum_{i=1}^k\prod_{j=1}^n[a_i^j,b_i^j]=\prod_{j=1}^n\left[\sum_{i=1}^k a_i^j,\sum_{i=1}^k b_i^j\right]$$

Приведем оценки в хаусдорфовой метрике для расстояний между двумя множествами :

(a)

$$h(\prod_{j=1}^n[a^j,b^j],\prod_{j=1}^n[\tilde{a}^j,\tilde{b}^j])\geq \max_{j=1,2,...n}\left\{\left|a^j-\tilde{a}^j\right|,\left|b^j-\tilde{b}^j\right|\right\}$$

(b)

$$h(\prod_{j=1}^n[a^j,b^j],\prod_{j=1}^n[\hat{a}^j,\hat{b}^j])\leq \sum_{j=1}^n\left(\left|a^j-\hat{a}^j\right|,\left|b^j-\hat{b}^j\right|\right)$$

Доказательство этих оценок несложно.

(a)

Обозначим множества $\prod_{j=1}^n[a^j,b^j]$ и $\prod_{j=1}^n[\tilde{a}^j,\tilde{b}^j]$ в пространстве $B(R^n)$ через A и $\tilde{A}$ соответственно. Выберем произвольное $\varepsilon > d_H(A,\tilde{A})$, тогда в силу $h(A,B)\equiv inf\{\varepsilon>0\,|J_\varepsilon[A]\supset B, J_\varepsilon[B]\supset A\}$ мы имеем $J_\varepsilon[A]\supset\tilde{A}$, $J_\varepsilon[\tilde{A}]\supset A$. Если $\alpha^j<\tilde{a}^j$, мы получаем из $J_\varepsilon[\tilde{A}]\supset A$ соотношение $\varepsilon\geq\tilde{a}^j-a^j=|\tilde{a}^j-a^j|$.

С другой стороны, если $a^j>\tilde{a}^j$, то $J_\varepsilon[A]\supset\tilde{A}$ влечет за собой, что $\varepsilon\geq a^j-\tilde{a}^j=|\tilde{a}^j-a^j|$. Итак для $j=1,2,...,n$ мы имеем $\varepsilon\geq=|\tilde{a}^j-a^j|$. Подобные аргументы показывают, что $\varepsilon\geq=|\tilde{b}^j-b^j|, j=1,...,n$. Следовательно, правая часть (a) не превосходит ε. Поскольку $\varepsilon>d_H(A,\tilde{A})$ произвольно, это доказывает (a).

(b)

Определим при $j = 1, 2, ..., n$

$$x_1^j = \tilde{a}^j - (|a^j - \tilde{a}^j| + |b^j - \tilde{b}^j|)$$

$$x_2^j = \tilde{b}^j - (|a^j - \tilde{a}^j| + |b^j - \tilde{b}^j|$$

и положим $X = \prod_{j=1}^n [x_1^j, x_2^j]$.

Очевидно, что $X \supset \tilde{A}$ и поскольку $x_1^j \leq a^j$, $x_2^j \geq b^j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ X также содержит A.

Обозначим через $\varepsilon = \sum_{j=1}^n (|a^j - \tilde{a}^j| + |b^j - \tilde{b}^j|)$; тогда поскольку

$$[\sum_{j=1}^n (|a^j - \tilde{a}^j| + |b^j - \tilde{b}^j|)^2]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^n (|a^j - \tilde{a}^j| + |b^j - \tilde{b}^j|),$$

мы имеем $A \subset X \subset J_\varepsilon[\tilde{A}]$.

Аналогичным образом можно показать, что $J_\varepsilon[A] \supset \tilde{A}$. Следовательно $\varepsilon \geq h(A, \tilde{A})$, что доказывает (b).

§1.3 Гарантированные интервальные оценки совокупности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проблемы оценки одного решения или совокупности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений возникают в самых разнообразных прикладных задачах, связанных с численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Опишем интересующие нас постановки задач гарантированного оценивания численных решений, свойственные этим задачам понятия и часто используемые определения.

В исследованиях мы будем встречаться с понятиями верхних и нижних решений, обосновывающих определения верхних и нижних оценок.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(t, y) \tag{1.13}$$

$$y(t_0) = y_0,$$

Если функция $f(t, y)$ непрерывна в некоторой области G пространства $(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то через каждую точку этой области проходит по крайней мере одна интегральная кривая системы уравнений (1.13). При наличии более одного решения можно говорить о пучке решений, выходящих из одной точки.

Выполнение определенных условий, налагаемых на правые части уравнений, например, условий Осгуда [13] гарантирует существование и единственность.

Предположим, что функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в выпуклой области $G' \subset G$. Пусть $P_0(t, y_0)$– произвольная точка этой области. Точку A будем называть достижимой из P_0, если существует интегральная кривая уравнений (1.13), соединяющая точки P_0 и A.

Если мы рассматриваем одно дифференциальное уравнение, то можно ввести понятия верхнего (максимального) и нижнего (минимального) решений.

Определение. Решение $y(t) = U(t)$ уравнения (1.13), выходящее из точки $P_0(t_0, y_0)$ области D' и определенное на некотором отрезке $[a, b]$, содержащем внутри точку t_0, будем называть верхним (максимальным), если для любого другого решения $\varphi(t)$, выходящего из этой же точки, справедливо неравенство

$$\varphi(t) \leq U(t)$$

для всех $t \in [a, b]$, для которых решения $\varphi(t)$ и $U(t)$ определены одновременно.

Аналогично формулируется определения нижнего решения.

Определение. Решение $y(t) = L(t)$, определенное при условиях, указанных в предыдущем определении, будем называть нижним (минимальным) решением этого уравнения, если

$$\varphi \geq L(t)$$

для любого другого решения $\varphi(t)$, выходящего из той же точки.

Рассматривая систему уравнений

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где y(t)- вещественный вектор размерности 2, мы можем сформулировать условия, обеспечивающие локальное существование в системе (1.14) верхнего (нижнего) решения, в виде утверждения [13].

Утверждение. Если функция $f(t, y)$ непрерывна в некоторой открытой области $D' \subset D$, то для системы дифференциальных уравнений (1.14) через каждую точку этой области проходит верхнее (нижнее) решение, определенное по меньшей мере в некоторой достаточно малой окрестности точки t_0. Если прямоугольник $|t - t_0| \leq a$, $|x - x_0| \leq b$ лежит внутри области D' и $|f(t, y)| \leq M$, то в этом прямоугольнике существует верхнее (нижнее) решение в окрестности

$$|t - t_0| \leq \delta,\ \delta = \min(a, b/M).$$

Итак в случае систем уравнений, размерность правой части которых больше или равна двух, мы можем говорить о верхних и нижних решениях лишь в каждой фиксированной точке (t, y), то есть, вообще говоря, на всем интервале существования решений иметь дело с верхними и нижними оценками решений. Задача оценки решений— это более общая постановка таких задач, поскольку позволяет находить верхние и нижние оценки решений (или включения решений) в любой точке.

Например, метод верхних и нижних оценок, объединенный с монотонным итерационным методом, составляют гибкий и удобный механизм конструктивного доказательства существования решений.

Чтобы получить неравенства для решений различных систем дифференциальных уравнений, например, отличающихся начальными данными, можно использовать теорию дифференциальных неравенств, обеспечивающую сравнение решений.

В данной области классическим примером является подход С.А.Чаплыгина, формулировку которого можно записать в следующем виде. Пусть задано дифференциальное неравенство

$$v' < f(t, v) \tag{1.15}$$

где функция f – определена на некотором открытом множестве F_0, непрерывна и дифференцируема на интервале $[t_0, t_0 + \tau_1]$, $\tau_1 > 0$ и дифференциальное уравнение

$$z' = f(t, z) \tag{1.16}$$

$$t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$$

для которого решение $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$ допускает продолжение на промежуток $[t_0, t_0 + \tau_1]$. Тогда через любую начальную точку (t_0, z_0) проходит единственное решение уравнения (1.16). Если взять любую функцию $v(t)$ такую, что

$$v(t_0) \leq z(t_0), \tag{1.17}$$

и для которой на интервале $[t_0, t_0 + \tau)$ выполняется (1.15), то на всем интервале $[t_0, t_0 + \tau)$ будет справедливо неравенство

$$v(t) \leq z(t). \tag{1.18}$$

В соответствии с теоремой Пеано для функции $f(t, z)$, заданной на некотором открытом множестве F_0, и непрерывной на некотором интервале, зависящем, вообще говоря от F_0 и начальных условий (t_0, z_0) существует решение задачи Коши, но оно может быть не единственным, и через любую точку (t_0, z_0) из области F_0 может проходить множество интегральных кривых, каждая из которых имеет вершину в (t_0, z_0).

Мажорирующую (минорирующую) модель сравнения в этом случае построить можно, если среди всех решений $z(t)$ интегральной воронки существует верхнее решение $\overline{z}(t)$ (соответственно нижнее решение $\underline{z}(t)$.)

Значительно усложняется вопрос об оценивании сверху и снизу решений систем дифференциальных уравнений, поскольку класс рассматриваемых систем сводится к системам, для которых выполнены условия и теорема Т. Важевского. Условия Т. Важевского применяются к векторным, непрерывным, но не обязательно дифференцируемым функциям и гарантируют существование верхнего и нижнего решений системы $z' = f(t, z)$ при соблюдении условий:

— непрерывности, функция $f(\cdot) = f_1(\cdot), \ldots, f_i(\cdot), \ldots, f_r(\cdot)$ определена в открытой области и непрерывна в ней;

— квазимонотонности и неубываемости, все скалярные компоненты $f_i(t,z)$– монотонные неубывающие функции всех своих аргументов, кроме t и z_i, которые считаются фиксированными, то есть из

$$z_i' \leq z_j'',\ z_i' = z_i'',\ i \neq j$$

следуют неравенства $f_i(t,z') \leq f_i(t,z'')$ для любого i.

Отсутствие требования монотонности по t существенно для практических задач, так как при этом не устраняется возможность оценивать решения нестационарных систем, у которых функции $f_i(t,\cdot)$ с течением времени могут как убывать, так и возрастать, в частности для уравнений с переменными и периодическими коэффициентами.

Не менее важно отсутствие требований на характер поведения функции $f_i(\cdot)$ по собственной переменной z_i. Это имеет значение, в частности, в тех случаях, когда изолированная подсистема устойчива и введение условия неубывания $f_i(\cdot)$ по z_i сделало бы метод оценки, основанный на теореме Важевского, практически бесполезным.

Условия Важевского легко проверяется в случае линейных систем. Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$z' = W(t)z,$$

элементы матрицы $W(t)$ могут быть функциями, зависящими от t и постоянными величинами:

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & \dots & w_{1r}(t) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ w_{r1}(t) & w_{r2}(t) & \dots & w_{rr}(t) \end{pmatrix}$$

В соответствии с определением Важевского функция $f(\cdot)$ будет квазимонотонной и неубывающей в том и только том случае, когда все внедиагональные элементы матрицы W будут неотрицательными:

$$w_{ij} \geq 0,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\dots,r.$$

Постоянные матрицы W с неотрицательными внедиагональными элементами детально изучались Л. Метцлером и получили название M-матриц (метцлеровых). Итак, линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с $M-$матрицей коэффициентов удовлетворяет условию Важевского.

Сформулируем теорему Важевского (T. Wazewsky) [20]. Пусть в системе

$$z' = f(t,z) \tag{1.19}$$

с начальными условиями

$$z(t_0) = z_0, \tag{1.20}$$

вектор–функция $f(\cdot)$ определена им непрерывна в области

$$F = \{(t,z) : \, t_0 - \tau_2 \le t \le t_0 + \tau_1, \, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \, ||z - z_0|| < \rho\}, \tag{1.21}$$

и удовлетворены условия Важевского квазимонотонности и неубывания $f(\cdot)$. Тогда:

1)если решение задачи Коши (1.19,1.20) единственно и задана вектор–функция $v(t)$, непрерывная на интервале $[t_0, t_0 + \tau_1]$ или $[t_0 - \tau_2, t_0]$, такая, что выполняются строгие неравенства

$$v(t_0) < z_0 \tag{1.22}$$

$$D^+v(t) < f(t,v), \, t_0 \le t \le t_0 + \tau_1 \tag{1.23}$$

или

$$D^-v(t) < f(t,v), \, t_0 - \tau_2 \le t \le t_0 \tag{1.24}$$

тогда справедливо следующее неравенство (все неравенства покомпонентные)

$$v(t) < z(t) \tag{1.25}$$

соответственно на интервалах $[t_0, t_0 + \tau_1]$ или $[t_0 - \tau_2, t_0]$,

2) если решение задачи Коши (1.19,1.20) неединственно, то на некотором интервале $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ существуют верхнее (максимальное) и нижнее (минимальное) решения $\overline{z}$ и $\underline{z}$ такие, что

$$\underline{z}(t) \le z(t) \le \overline{z}(t), \tag{1.26}$$

и эти решения проходят через точку (t_0, z_0).

Подобные утверждения могут быть доказаны также и для нестрогих неравенств, причем $D^+, D_+, D^-, D_- - -$ — производные Дини, которые можно заменить обычными производными, не нарушая истинности теоремы.

Построение верхних и нижних оценок, а также интервальных оценок может быть успешно проведено, если они получаются на основе функций, удовлетворяющих условиям Важевского, то есть верхняя и нижняя границы совпадают с верхними и нижними решениями. При этом гарантированность оценок обеспечена формулировкой теоремы о мажорировании любого решения верхним решением, причем для них соответственно ограничены их начальные значения. Аналогичное рассуждение справедливо относительно ограниченности снизу нижним решением.

Если мы рассматриваем совокупности решений систем ОДУ, то можно отметить, что с каждой точкой x связано не одно направление, а целый конус, содержащий пучок допустимых направлений скоростей (касательных к траекториям). Таким образом в отличие от системы уравнений с числовыми коэффициентами, которая задается полем направлений (изоклинами), совокупности систем задаются полем конусов допустимых (возможных) направлений скоростей.

Напомним, что для динамических систем вводится понятие потоков и эволюции фазовых точек. Решение $x(t)$ уравнения $x' = F(x)$, $x \in S \subset R^n$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, определяет эволюцию фазовой точки, которая в момент $t = t_0$ занимала положение x_0, то есть ее прошлое (при $t < t_0$) и будущее (при $t > t_0$) положения. Эту идею можно формализовать, введя функцию $\varphi_t : S \to S$. Такую функцию называют фазовым потоком или оператором эволюции. Термин оператор эволюции обычно употребляется в приложениях, где φ_t описывает изменение состояния некоторой реальной физической системы во времени. Термин поток чаще употребляется в случае, когда изучается динамика в целом, а не эволюция данной конкретной точки.

Функция φ_t переводит точку $x_0 \in S$ в точку $\varphi_t(x_0)$, полученную из x_0 за время t продвижением по интегральной кривой системы ОДУ, проходящей через x_0. Для того, чтобы функция φ_t была определена, необходимо и достаточно выполнение теоремы существования и единственности для системы дифференциальных уравнений.

Для совокупности систем дифференциальных уравнений можно также ввести задачу исследования характера допустимых траекторий и множества однотипных конусов направлений скорости. Однако в общем случае встречается большое разнообразие различных вариантов, подчас требующих весьма скрупулезных и нетривиальных рассмотрений. Можно выделить задачу глобального изучения, включающую в себя возможности и характеры переходов из одного множества пространства состояний в другое, соседнее с ним. Картину глобальных связей можно представить в виде графа, вершины которого представляют собой множества постоянного типа конусов (или их подмножества), а ребра указывают на возможные переходы изображающей точки из одного множества в другое.

Например, пусть $K(x(t))$– конус допустимых направлений, построенный в пространстве $x(t)$ с вершиной в точке $x(t)$.

Для того, чтобы некоторая кривая $x = x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, расположенная в x, t, была допустимой интегральной кривой, необходимо и достаточно, чтобы положительный луч касательной $S^+(x(t))$ к $x(t)$ принадлежал конусу допустимых направлений $K(x(t))$ почти во всех точках $(x(t))$, то есть $S^+(x(t)) \subset K(x(t), t)$ почти для всех $t \subset [t_0, t_1]$.

Если мы рассматриваем интервальные оценки множества решений, можно ввести отображение эволюции, которое определяет связи и изменения интервалов, оценивающих точные решения.

Описывая поведения решений системы

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{1.27}$$

с заданными $y_0(t)$, будем представлять влияние возмущений дискретным множеством

$$\{E_k \,|\, k = 0, 1, 2, \ldots, N\},$$

где N– число шагов при вычислении решений. Это означает, что формулу решений системы :

$$y(t) = U(t, t_k)(y_k + \int_{t_k}^{t} U^{-1}(s, t_k) \cdot b(s) ds), \tag{1.28}$$

где U– фундаментальная матрица, удовлетворяющая системе

$$U'(t, t_k) = A(t)U(t, t_k),$$

$$U(t_k, t_k) = I,$$

(I– единичная матрица), можно перенести на случай системы с возмущениями E_k согласно следующему алгоритму

$$R_0 = E_0, \tag{1.29}$$

$$R_k = \{y(t) + e |\, y(t_0) \subset R_{k-1}\},\ e \subset E_k, \tag{1.30}$$

решение $y(t)$ задано формулами (1.28).

Формулы (1.30) отражают распространение внутренних ошибок, среди которых выделена локальная ошибка, их можно записать в виде

$$R_0 = E_0, \tag{1.31}$$

$$R_k = U(t_k, t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k, s) b(s) ds + E_k.$$

Легко видеть, что эти формулы можно свести к соотношениям, позволяющим приближать распространение множеств решений путем представления и преобразования интервалов, содержащих множества решений.

Можно показать, что непосредственное применение интервальных формул, аппроксимирующих, например, (1.30) приводит к росту ширины получаемых интервалов,

Выводы:

В настоящей главе описывается подход, основанный на анализе не одного решения, а целой совокупности решений. При рассмотрении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) ее решение зависит от вводимых данных(начальных условий, коэффициентов), которые зачастую изменяются на некоторых множествах или интервалах. Тогда численный метод решения систем ОДУ должен создаваться с учетом следующих целей:

1. Нахождение включения решения с контролем истинности этого включения;
2. Определение количественной оценки влияния вариации исходных данных на решение;
3. Исследование практической устойчивости решения относительно допустимого множества изменяющихся (возмущающих) функций;
4. Описание совокупности решений множеств систем ОДУ.
5. В перечисленном списке четвертый пункт является основой для реализации трех предыдущих пунктов.

Материал данной главы содержит основные вопросы, освещающие понятие совокупности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их основных характеристик. Рассматривается случай одного уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, понятие сечения совокупности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, метрики Хаусдорфа. Показано, что метрика Хаусдорфа применима для задач оценивания совокупности решений систем ОДУ с компактными множествами начальных данных и соответствующей гладкостью правой части. Вводится понятие сходящихся оценок и приводится пример сходящийся оценки одного дифференциального уравнения.

ГЛАВА2.Решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными данными

§2.1. Влияние эффекта Мура (wrapping effect) на поведение интервальных оценок.

Почти все существующие методы построения верхних и нижних оценок множества решений системы ОДУ с интервальными данными используют два основных аспекта:

1. работа с однотипными, замкнутыми множествами значений, описываемых конечным набором параметров (прямоугольными параллелепипедами в R^n, эллипсоидами, шарами в некоторой норме и так далее), при этом введенные над ними операции не выводят вне совокупности таких множеств;

2. применение теорем (принципов) сравнения решений дифференциальных уравнений.

Понятия сходимости оценок могут быть охарактеризованы на основе двух подходов: теоретического, рассматривающего сходимость в хаусдорфовой метрике, при условии замкнутости множеств оценок и точных решений; и практического, описывающего покоординатные неулучшаемые оценки.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y) \tag{2.1}$$

с интервальными начальными данными

$$y(t_0) = y_0 \in Y_0, \tag{2.2}$$

где $y(t)$– вещественный вектор размерности n.

Пусть $Y(t)$ обозначает совокупность точных решений задачи 2.1, то есть множество

$$\{y(t) \,|\, y' = f(t, y),\, y(t_0) \in Y_0\}.$$

При выполнении достаточно очевидных и легко проверяемых условий, например, существование равномерных оценок $|y(t)| < b$ для всех решений системы на интервале $t \in [s, T]$, $b > 0$, выпуклости и компактности интервальных расширений правой части (2.1) при любых фиксированных t и y, можно гарантировать компактность множества решений $Y(t)$. Доказательство этого факта является небольшим следствием доказательства аналогичной теоремы из [15]. Однако, как легко заметить, множество $Y(t)$ может обладать достаточно сложной геометрической формой и граница его является сложной геометрической фигурой. Встает задача оценить множество решений $Y(t)$ с помощью просто описываемого оценочного множества, в качестве которого может быть выбран, например, интервал $z(t)$. Естественное требование при этом заключается в оценке близости $Y(t)$ и $Z(t)$. Одно из условий, связывающих $Y(t)$ и $Z(t)$, состоит во внешнем включении $Z(t) \supseteq Y(t)$. В общем случае $Z(t)$ является векторной интервальной функцией, то есть принадлежит множеству $I(R^n)$ при каждом значении t. Сравнение близости двух многозначных функций, одна из которых не является интервальнозначной, можно производить с помощью метрики Хаусдорфа, ранее описанной в параграфе 2 главы 1.

Общая формула, задающая хаусдорфову метрику, выглядит так

$$h(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\right\}, \tag{2.3}$$

где A, B – некоторые множества в R^n,

$$d(a,b) = \max_{i=\overline{1,n}} \max |a_i - b_i|.$$

Построение интервальных оценок решений систем дифференциальных уравнений сильно усложняется ростом со временем отклонения границ интервалов друг от друга очень часто как экспонента от времени. Причины такого эффекта, впервые описанного Муром [1], так называемый wrapping effect, кроются во многих факторах: несовпадение интервалов ($n-$ мерных прямоугольных параллелепипедов) с совокупностями точных решений; расширении относительно исходных систем дифференциальных уравнений размерности систем уравнений, определяющих верхние и нижние границы; необходимостью описывать эволюцию верхних и нижних границ на основе операций, накапливающих возможные значения во времени с помощью каких-либо принципов, например монотонности по включению и тому подобных.

Иллюстрирующий пример можно описать в следующем виде. Пусть рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay, \tag{2.4}$$

где $y-$ вектор размерности два, $A-$ матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что решение задачи Коши для этой системы с начальными данными $y_0 = (y_0^1, y_0^2)$ определяется по формуле

$$y(t) = \left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}\right) y_0,$$

где обозначено
$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Пусть известно, что начальные данные заданы некоторой интервальной оценкой $y_0^1 \in [-a_0, a_0]$, $y_0^2 \in [-b_0, b_0]$. Тогда в момент времени t_1 компоненты интервального вектора, оценивающего множество точных решений, заданы выражениями
$$y_1^1 \in [-a_1, a_1],\ y_1^2 \in [-b_1, b_1],$$
где
$$a_1 = \left(3e^{-h} - 2e^{-2h}\right) a_0 + \left(2e^{-h} - 2e^{-2h}\right) b_0, \tag{2.5}$$
$$b_1 = \left(3e^{-h} - 3e^{-2h}\right) a_0 + \left(-2e^{-h} + 3e^{-2h}\right) b_0. \tag{2.6}$$

Продолжая такие выкладки, мы можем осуществить вычисление границ интервалов, включающих множества решений в моменты $t_2, t_3, \ldots, t_n$. Для этих границ справедливы соотношения
$$a_i = \left(3e^{-h} - 2e^{-2h}\right) a_{i-1} + \left(2e^{-h} - 2e^{-2h}\right) b_{i-1},$$
$$b_i = \left(3e^{-h} - 3e^{-2h}\right) a_{i-1} + \left(-2e^{-h} + 3e^{-2h}\right) b_{i-1},$$
которые образуют систему разностных уравнений.

Общее решение этой системы разностных уравнений имеет вид
$$a_i = 2N_1\lambda_1^i + N_2\lambda_2^i,\ b_i = N_1\lambda_1^i - 3N_2\lambda_2^i,$$
где λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения
$$\lambda^2 - \lambda\left(e^{-h} + e^{-2h}\right) - 12e^{-2h} + 25e^{-3h} - 12e^{-4h} = 0$$
Эти корни легко найти:
$$\lambda_1 = 4e^{-h} - 3e^{-2h},\ \lambda_2 = -3e^{-h} + 4e^{-2h}, \tag{2.7}$$
и можно заметить, что при $0 < h < 1$ $\lambda > 1$, поэтому a_i и b_i растут неограниченно, то есть каждый из членов последовательности интервалов имеет возрастающую ширину, хотя совокупность решений системы (2.4) является ограниченным множеством.

Возрастание интервалов включения для области значений решений системы дифференциальных уравнений, начальные данные которой берутся из интервала y_0, обусловлено главным образом тем, что границы области значений не параллельны координатным осям, но определяют параллелограмм, наклоненный под некоторым углом к координатным осям. При этом на каждом шаге интервал включения (прямоугольный параллелепипед) будет включать помимо области значений и посторонние точки, и такая погрешность возрастает от шага к шагу.

Впервые явление экспоненциального роста ширины интервальных оценок было отмечено Р.Муром в книге [1] на примере простой линейной системы двух дифференциальных уравнений

$$y_1' = y_2, y_2' = -y_1 \tag{2.8}$$

с интервальными начальными данными $y_1(0) \in [0, 1]$, $y_2(0) \in [0, 1]$.

Тогда интервальные оценки совокупности решений имеют вид

$$y_1(t) \in [0, 1] \cos t + [0, 1] \sin t,$$

$$y_2(t) \in [-1, 0] \sin t + [0, 1] \cos t.$$

На основе результатов теории дифференциальных неравенств [3] можно записать следующую расширенную систему относительно верхней и нижней оценок решений

$$\begin{aligned} \underline{y}_1' &= \underline{y_2}, \\ \underline{y}_2' &= -\underline{y_1}, \\ \overline{y}_1' &= \overline{y_2}, \\ \overline{y}_2' &= -\overline{y_1}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

с начальными данными

$$\underline{y}_1(0) = 0,$$

$$\underline{y}_2(0) = 0,$$

$$\overline{y}_1(0) = 1,$$

$$\overline{y}_2(0) = 1.$$

Решение системы (2.9) имеет вид

$$\underline{y}_1(t) = \frac{1}{2}\left(-e^t + \sin t + \cos t\right),$$

$$\underline{y}_2(t) = \frac{1}{2}\left(-e^t + \cos t - \sin t\right),$$

$$\overline{y}_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + \sin t + \cos t\right),$$
$$\overline{y}_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + \cos t - \sin t\right),$$

Следовательно отклонение границ друг от друга составляет величину порядка e^t. В точке $t = 2\pi$ эта величина составляет $e^{2\pi} \approx 535.4$.

Пусть вектор $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ записан в виде $(y_k,_k y)$, где обозначение $_k y$ означает совокупность компонент вектора y за исключением компоненты y_k. Функцию f, зависящую от $y_1, y_2, \dots, y_n$, назовем частично изотонной (антитонной) на области $D \subset R^n$ относительно переменной y_k, если

$$f(y_k,_k y) \leq f(z_k,_k y)$$

для всех $y_k \geq z_k$ $(y_k \leq z_k)$.

Определим класс функций $f_k(t, x_k,_k x)$, частично монотонных относительно любой компоненты $_k x$ на их области определения, но но не монотонных относительно x_k. Для любой функции этого класса удобно записать

$$f_k(t, x_k,_k x) = f_k(t, x_k,_k x^i,_k x^a),$$

что означает, что векторы $_k x$ и y разделены на два множества компонент, для которых f_k является изотонной относительно $_k x^i$, и антитонной относительно $_k x^a$.

Тогда для решения системы дифференциальных уравнений

$$u_k' = f_k(t, u),\ k = 1, 2, \dots, n \tag{2.10}$$

верхние $\underline{u}_k$ и нижние $\overline{u}_k$ границы решения удовлетворяют системе $2n-$уравнений

$$\begin{aligned} \underline{u}_k'(t) &= f_k\left(t, \underline{u}_k(t),_k \underline{u}(t)^i,_k \overline{u}(t)^a\right), \\ \overline{u}_k'(t) &= f_k\left(t, \overline{u}_k(t),_k \overline{u}(t)^i,_k \underline{u}(t)^a\right), \end{aligned} \tag{2.11}$$

с $2n-$ начальными условиями:

$$\underline{u}_k(0) = \underline{a}_k,$$

$$\overline{u}_k(0) = \overline{a}_k,$$

Однако функции $\underline{u}(t)$, $\overline{u}(t)$ в общем случае не являются решениями (2.11), следовательно интервальный вектор $[\underline{u}, \overline{u}]$ может быть назван интервальной оценкой решений (2.11).

Как было отмечено, одной из причин появления экспоненциального или близкого к нему роста длин интервалов является пошаговое увеличение погрешностей построения интервалов включения, содержащих совокупности точных решений.

Рассмотрим случай системы двух линейных обыкновенных уравнений, на примере которой, как было отмечено, показывал влияние этого эффекта Р.Мур [1].

Пусть

$$y_1'(t) = y_2,$$
$$y_2'(t) = -y_1,$$
$$y(x_0) = (y_1^0, y_2^0) \in [\underline{Y}^0, \overline{Y}^0].$$

Применим для оценки множеств точных решений интервальный метод последовательных приближений, сходимость которого и некоторые другие вопросы обсуждались в параграфе 1 главы 1. Заметим, что интервальный метод последовательных приближений снимает пошаговость интервальных методов, так как позволяет получить оценки сразу при интересующем нас значении аргумента t.

Обозначим границы интервалов на $n --$ шаге приближения

$$\underline{Y}_1^{(n)}, \overline{Y}_1^{(n)}, \underline{Y}_2^{(n)}, \overline{Y}_2^{(n)},$$

тогда можно записать метод последовательных приближений в виде

$$\left[\underline{Y}_1^{(n+1)}, \overline{Y}_1^{(n+1)}\right] = \int\limits_0^t \left[\underline{Y}_2^{(n)}(s), \overline{Y}_2^{(n)}(s)\right] ds + \left[\underline{Y}_1^0, \overline{Y}_1^0\right],$$

$$\left[\underline{Y}_2^{(n+1)}, \overline{Y}_2^{(n+1)}\right] = \int\limits_0^t \left[-\underline{Y}_1^{(n)}(s), -\overline{Y}_1^{(n)}(s)\right] ds + \left[\underline{Y}_2^0, \overline{Y}_2^0\right],$$

Пусть $\underline{Y}_1^0 = \underline{a}_1$, $\overline{Y}_1^0 = \overline{a}_1$, $\underline{Y}_2^0 = \underline{a}_2$, $\overline{Y}_2^0 = \overline{a}_2$, тогда

$$\underline{Y}_1^{(n)} = \underline{a}_1 \frac{t^n}{n!} - \overline{a}_2 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \overline{a}_1 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \underline{a}_2 \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}$$
$$+\underline{a}_1 \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} - \overline{a}_2 \frac{t^{n-5}}{(n-5)!} + \ldots + \underline{a}_1,$$

$$\overline{Y}_1^{(n)} = \overline{a}_1 \frac{t^n}{n!} - \underline{a}_2 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \underline{a}_1 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \overline{a}_2 \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}$$
$$+\overline{a}_1 \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} - \overline{a}_2 \frac{t^{n-5}}{(n-5)!} + \ldots + \overline{a}_1,$$

$$\underline{Y}_2^{(n)} = \underline{a}_2\frac{t^n}{n!} + \underline{a}_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \overline{a}_2\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} - \overline{a}_1\frac{t^{n-3}}{(n-3)!}$$
$$+\underline{a}_2\frac{t^{n-4}}{(n-4)!} + \overline{a}_1\frac{t^{n-5}}{(n-5)!} + \ldots + \underline{a}_2,$$

$$\overline{Y}_2^{(n)} = \overline{a}_2\frac{t^n}{n!} - \overline{a}_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \underline{a}_2\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} - \underline{a}_1\frac{t^{n-3}}{(n-3)!}$$
$$+\overline{a}_2\frac{t^{n-4}}{(n-4)!} + \overline{a}_1\frac{t^{n-5}}{(n-5)!} + \ldots + \overline{a}_2.$$

Несложные преобразования этих формул и переход к пределу позволяют получить выражения для длин интервальных оценок

$$\overline{Y}_1(t) - \underline{Y}_1(t) = (\overline{a}_1 - \underline{a}_1)\cosh t + (\overline{a}_2 - \underline{a}_2)\sinh t,$$

$$\overline{Y}_2(t) - \underline{Y}_2(t) = (\overline{a}_2 - \underline{a}_2)\cosh t + (\overline{a}_1 - \underline{a}_1)\sinh t,$$

то есть близкий к экспоненциальному рост длин интервалов.

Следовательно построение методов интервального оценивания должно происходить на основе уменьшения влияния интервальных вычислений, например значений функций.

§2.2. Аналитическое представление решений с помощью сплайн-функций.

Рассматривая систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

правые части которой удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения достаточной гладкости, мы можем трактовать ее как закон движения точки $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ векторного пространства R^n. Кроме того, будем считать, что каждое начальное условие

$$y(s) = y_0$$

однозначно определяет решение

$$y(t) = u(t, s, y_0)$$

исходного, причем это решение определено при любом t.

Точка y_0, двигаясь по траекториям системы (), за время от s до t перейдет в новую точку $y(t)$. Оператор $U(t, s)$, определяющийся равенством

$$U(t, s)y_0 = u(t, s, y_0)$$

и задающий переход от точки y_0 к новой точке $y(t)$ называется оператором сдвига по траекториям системы. Легко установить, что однозначная разрешимость при каждом начальном условии системы уравнений () означает непрерывность оператора сдвига.

Как было замечено в параграфе 1 главы 2, нахождение интервальных оценок совокупностей точных решений сильно усложняется ростом ширины этих интервалов. Почти все известные методы включения решений основаны на пошаговом уточнении оценок множеств решений, что приводит к возрастанию их ширины от шага к шагу.

Один из возможных подходов к оцениванию множеств решений систем ОДУ с интервальными данными состоит в объединении символьного вычисления формул приближенного решения с последующим нахождением интервального расширения. Тем самым мы аппроксимируем оператор сдвига по траекториям системы формулой в символьном виде, что в определенной степени ослабляет требования к методу нахождения решений в аналитическом виде, хотя вносит некоторые характерные черты. Мы применяем для подобных целей сплайн-функции, обладающие хорошо известными аппроксимирующими свойствами и удобные для вычислений символьных выражений.

Рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными в виде интервала

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad (2.12)$$
$$y(t_0) = y_0 \in Y_0,$$

где Y_0– прямоугольный параллелепипед в R^n.

Обозначим совокупность точных решений задачи (2.12) как

$$Y^*(t) = \{y(t)\,|y(t_0) \in Y_0\}\,. \qquad (2.13)$$

Пусть на интервале $[t_0, t_k]$, где рассматривается задача (2.12) введена сетка узлов

$$t_0 < t_1 < \ldots, t_n = t_k,\ \tau = \max_i\{t_{i+1} - t_i\}.$$

Алгоритм построения интервальных оценок множеств решений основан на аналитическом вычислении коэффициентов сплайн-функций, удовлетворяющих условиям коллокации в узлах сетки, с последующим нахождением их интервальных расширений и с интервальной оценкой погрешности сплайн-коллокации.

Вначале рассмотрим случай, когда правая часть исходной системы уравнений – линейная функция относительно всех y_j. Тогда для определения коэффициентов сплайн-решений в методе коллокации можно решать системы линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов точно, пользуясь системами аналитических вычислений. Заметим, что решение нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений потребует некоторых изменений при выборе сплайн-функций, их коэффициентов, хотя не вносит принципиальных отличий.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$y' = A(t)y + B(t) \qquad (2.14)$$

с начальными данными

$$y(t_0) = y_0 \in Y_0,$$
$$\text{где}\, y = (y_1, \ldots, y_n)^T,\ A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}),$$
$$B(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t)).$$

Обозначим $A(t)y + B(t)$ через $M(t, y)$,

$$m_k(t, y) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Для $M(t,y)$ выполнено условие Липшица в виде

$$\left|m_k^{(i)}(t,y) - m_k^{(i)}(t,z)\right| \leq L_{ki}\|y-z\| \leq \|y-z\|,$$

$$\text{где } L > 0,\ L_{ki} > 0,\ i = 0,1,\ldots,p-1,\ k = 1,2,\ldots,n,$$

$m_k^{(i)}$ определяется по формулам

$$m_k^0(t,y) = m_k(t,y)$$

$$m_k^{(i)}(t,y) = \frac{\partial}{\partial t} m_k^{(i-1)}(t,y) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l}(m_k^{(i-1)})m_k,$$

а в качестве нормы $\|\cdot\|$ выбрано

$$\max_k |y_k - z_k|.$$

Для аппроксимации каждой компоненты y_k вектора решений y используем полиномиальные сплайн-функции S_k степени m дефекта d. Подбор значений параметров m и d будет осуществляться на основе требования устойчивости построенной сплайн-функции.

Основные этапы нашего алгоритма можно описать так.

Этап 1. Выражаем значение сплайна $S_k(t)$ в любой интересующей нас точке t интервала $[t_0, t_K]$ как функцию от начальных значений $y_1(t_0), \ldots,$ $y_n(t_0)$.

Этап 2. Оцениваем разность значений сплайна $S_k(t)$ и точного решения $y_k(t)$ с помощью оценок вида

$$\max_k |y_k(t) - S_k(t)| \leq h^m r(t),$$

где $r(t)$ не зависит от h, $m > 0$–некоторая константа для любого k.

Этап 3. В качестве интервальной оценки множества решений по каждой компоненте берем интервальную функцию.

$$Y_k(t) = S_k^*(t) + h^m[-r(t), r(t)],$$

где $S_k^*(t)$– объединенное расширение найденных сплайн-функций по всем $y_0 \in Y_0$, т.е.

$$S_k^*(t) = \cup_{y_0 \in Y_0} S_k(t).$$

Перейдем к описанию этапа 1.

На интервале $[t_0, t_k]$ введем равномерную сетку $t_i = t_0 + i\tau,\ h = (t_k - t_0)/n1$, $i = 0, 1, \ldots, n1$. На каждом подинтервале $J_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n1-1$, для $k-$компоненты сплайн-функции $S_k(t)$ справедливо представление

$$S_k(t) = \sum_{j=0}^{q} C_{ij}^k \frac{(t-t_i)^j}{j!} + \sum_{j=1}^{d} C_{i,q+j}^k \frac{(t-t_i)^{q+j}}{(q+j)!} \tag{2.15}$$

где коэффициенты удовлетворяют в точке t_i условиям

$$C_{ij}^k = S_k^{(j)}(t_i),\ j = 0, 1, \ldots, q,$$

причем

$$C_{0j}^k = y_k^{(j)}(t_0),\ j = 0, 1, \ldots, q,$$

а так же условиям коллокации в точке t_{i+1} :

$$S_k^j(t_{i+1}) = m_k^{(j-1)}(t_{i+1}, S(t_{i+1})),\ j = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.16}$$

Для доказательства разрешимости и единственности схемы сплайн-коллокации запишем (2.15) в виде

$$Dz = F(z, h), \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \text{где } z = (z_i)^T \in R^{nd},\ z_i = h^{q+l_1} C_{i,q+l_1}^k, \\ F(z,h) = (F_l(z,h))^T \in R^{nd}, \\ F_l(z,h) = h^{l_1} m_k^{(l_1-1)}(t_{i+1}, S(t_{i+1})) - \sum_{r=l}^{q} C_{ir}^k \frac{h^r}{(r-1)!}. \end{aligned}$$

Матрица D имеет размерность $nd \times nd$ и не зависит от выбора правой части задачи (), она составлена из n диагональных блоков D_b. При этом

$$\begin{gathered} D_b = [(q+j-l_1)!]^{-1},\ l_1, j = 1, 2, \ldots, d,\ [(-p)!]^{-1} = 0, \\ p \in N, l = (k-1)d + l_1,\ l_1 = 1, 2, \ldots, d,\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered}$$

Полагая, что в качестве правой части m выбрана функция $m(x)$, не зависящая от y, получаем задачу интерполирования по Эрмиту, имеющую единственное решение [9]. Следовательно, матрица D не вырождена для любых $m(x, y)$. Функция F удовлетворяет условию Липшица в норме пространства R^{nd}. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке к отображению

$$D^{-1}F(z,h)\ :\ R^{nd} \to Rnd,$$

имеем при достаточно малом h существование единственной неподвижной точки. Разрешимость и единственность схемы сплайн-коллокации следует из этих рассуждений и схемы доказательства.

Проведем доказательство сходимости полученных сплайн-функций к решению задачи () и оценку погрешности. На интервале J_i каждая компонента сплайн-функции S_k может быть записана в виде

$$S_k(t) = \sum_{j=0}^{q} S_k^{(j)}(t_i)L_{1j}(t) + \sum_{j=1}^{d} S_k^{(j)}(t_{i+1})L_{2j}(t) + \\ +S_k(t_{i+1})L_{20}(t), \tag{2.18}$$

где $L_{1j}(t)$, $L_{2j}(t)$ — — базисные полиномы интерполирования по Эрмиту, в общем виде записывающиеся так:

$$L_{ij}(t) = \frac{w(t)}{j!}\sum_{r=1}^{\alpha_{i-j}} \frac{(t-t_i)^{-r}}{(\alpha_i - j - r)!} \cdot \\ \cdot \frac{d^{\alpha_i - j - r}}{dt^{\alpha_i - j - r}} \left\{ \frac{(t-t_i)^{\alpha_i}}{w(t)} \right\} |_{(t=t_i)}, \tag{2.19}$$

а точки t_i, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, —– узлы интерполяции кратности α_i [?] :

$$w(t) = \prod_{i=1}^{n1} (t-t_i)^{\alpha_i}$$

.

В нашем случае интерполяция происходит по двум узлам t_i, t_{i+1} кратности $q+1$ и $d+1$ соответственно. Поэтому из (2.19) получаем

$$L_{1j}(t) = \frac{1}{j!}(t-t_{i+1})^{d+1} \sum_{r=1} q+1-j(-h)^{j+r-m-2} \cdot \\ \cdot \left(\begin{array}{c} -d-1 \\ q+1-j-r \end{array} \right) (t-t_i)^{q+1-r} \tag{2.20}$$

$$L_{2j}(t) = \frac{1}{j!}(t-t_i)^{q+1} \sum_{r=1}^{d+1-j} (-h)^{j+r-m-2} \cdot \tag{2.21}$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c} -q-1 \\ d+1-j-r \end{array} \right) (t-t_{i+1})^{d+1-r} \tag{2.22}$$

Здесь

$$\left(\begin{array}{c} -d-1 \\ q+1-j-r \end{array} \right) = \frac{(-d-1)(-d-2)\cdots(-d-1-q-1+j+r+1)}{(q+1-j-r)!}$$

аналогичное выражение можно выписать для

$$\left(\begin{array}{c} -q-1 \\ d+1-j-r \end{array} \right)$$

Сравнивая степени полиномов в (2.16), замечаем, что справа в (2.16) стоят полиномы, наивысшая степень которых равна $m+1$, а слева — полиномы степени m. Отсюда следует, что коэффициенты при старших степенях равны нулю. На основе этого получим соотношение

$$\sum_{j=0}^{q} S_k^{(j)}(t_i)\frac{1}{j!}h^{j+1}(-1)^{j+1}\left(\begin{array}{c} -d-1 \\ q-j \end{array}\right)$$
$$+\sum_{j=0}^{d} S_k^{(j)}(t_{i+1})\frac{1}{j!}h^{j+1}(-1)^{j+1}\left(\begin{array}{c} -q-1 \\ d-j \end{array}\right)=0,$$

или

$$S_k(t_{i+1}) = S_k(t_i) + \sum_{j=1}^{q} a_j h^j S_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} b_j h^j S_k^{(j)}(t_{i+1}), \tag{2.23}$$

где

$$a_j = \frac{(m-j)!}{m!}\left(\begin{array}{c} q \\ j \end{array}\right),\ j=1,2,\ldots,q,$$
$$b_j = (-1)^{j+1}\frac{(m-j)!}{m!}\left(\begin{array}{c} d \\ j \end{array}\right),\ j=1,2,\ldots,d, k=1,2,\ldots,n.$$

где $m=q+d-$ степень сплайна.

Соотношения (2.23) можно рассматривать как одношаговый разностный метод решения задачи (2.23).

Поскольку производная y' также является решением соответствующей интерполяционной задачи Эрмита, то выражение

$$\sum_{j=1}^{q} a_j h^j S_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} b_j h^j S_k^{(j)}(t_{i+1})$$

является квадратурной двухточечной формулой Эрмита, примененной к интегралу

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} m_k(t,y(t))dt = y_{i+1}-y_i,\ i=0,1,\ldots,n_1-1,\ k=1,2,\ldots,n,$$

причем t_i- узел кратности q, $t_{i+1}-$ узел кратности d. При $q=d$ одношаговый метод принимает вид

$$S_k(t_{i+1}) - S_k(t_i) = \sum_{j=1}^{q} h^j a_j\left[S_k^{(j)}(t_i) + (-1)^{(j+1)}S_k^{(j)}(t_{i+1})\right].$$

Локальная ошибка метода (2.23) определится при подстановке точного решения соответствующей гладкости:

$$y_k(t_{i+1}) - y_k(t_i) - \sum_{j=1}^{q} h^j a_j y_k^{(j)}(t_i) - \sum_{j=1}^{d} h^j b_j y_k^{(j)}(t_{i+1}) = \tag{2.24}$$

$$= \frac{-1)^m}{(m!)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y^(m+1)(\xi)(\xi - t_i)^q (\xi - t_{i+1})^d d\xi =$$

$$= (-1)^d \frac{d!q!}{m!(m+1)!} y^{(m+1)}(\eta) h^{(m+1)},\ \eta \in (t_i, t_{i+1})$$

Введем обозначение $e_k(t_i) = S_k(t_i) - y_k(t_i)$ и перепишем (2.23) в виде

$$S_k(t_{i+1}) = e_k(t_i) + y_k(t_i) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j y_k^{(j)}(t_i) + \tag{2.25}$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} h^j b_j y_k^{(j)}(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j e_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} h^j b_j e_k^{(j)}(t_{i+1}).$$

Вычитая $y_k(t_{i+1})$ из обеих частей (2.25), получаем

$$e_k(t_{i+1}) = e_k(t_i) + y_k(t_i) - y_k(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j y_k^{(j)}(t_i) + \tag{2.26}$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} h^j b_j y_k^{(j)}(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j e_k^{(j)}(t_i) \sum_{j=1}^{d} h^j b_j e_k^{(j)}(t_{i+1}).$$

Учитывая (2.21), оцениваем $e_k(t_{i+1})$ из (2.26) :

$$|e_k(t_{i+1})| \le |e_k(t_i))| + \frac{d!q!}{m!(m+1)!} \max |y^{(m+1)}(\eta)| h^{(m+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^j e_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j e_k^{(j)}(t_{i+1}).$$

В силу достаточной гладкости решения $y(t)$ и сплайна $S(t)$, из соотношений

$$S_k^{(j)} = m_k^{(j-1)}(t_i, S(t_i)),\ y_k^{(j)} = m_k^{(j-1)}(t_i, y(t_i)),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, d^*,\ d^* = \max(q, d),$$

получаем с учетом условия Липшица правой части неравенства

$$|e_k^{(j)}(t_i)| \le L|e_k(t_i)|.$$

Подставляя эти равенства в (2.25) имеем

$$|e_k(t_{i+1})| \le |e_k(t_i)| + \frac{d!q!}{m!(m+1)!} \max_{\eta \in J_I} |y^{(m+1)}(\eta)| h^{(m+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^j L |e_k^{(j)}(t_i)| + \sum_{j=1}^{q} |b_j| h^j |e_k(t_{i+1})|,$$

или

$$|e_k(t_{i+1})| \leq \alpha\,|e_k(t_i)| + \gamma, \tag{2.27}$$

где

$$\alpha = \left(1 + \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^j L\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L\right)^{-1};$$

$$\gamma = \frac{d!q!}{m!(m+1)!}[max_{\eta_i}|y^{(m+1)}(\eta)|h^{m+1}](1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L)^{-1}$$

налагая условия на h, имеем

$$1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L > \delta > 0.$$

Далее последовательной подстановкой из (2.27) выводим

$$|e_k(t_{i+1})| \leq \alpha^{(i+1)}|e_k(t_0)| + \gamma(\alpha^{(i+1)} - 1)/(\alpha - 1).$$

Величина $e_k(t_0) = 0$ в силу постановки задачи, α^{i+1} преобразуем к следующему виду

$$\alpha^{i+1} = \left[\left(1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L\right)^{-1} + \right. \tag{2.28}$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L + \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^j L\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L\right)^{-1}\right]^{i+1} =$$

$$= \left[1 + hL\left(\sum_{j=1}^{d} |b_j| h^{j-1} + \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^{j-1}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L\right)^{-1}\right]^{i+1}.$$

Обозначим величину

$$\left(\sum_{j=1}^{d} |b_j| h^{j-1} + \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^{j-1}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j L\right)^{-1}$$

через p, тогда (2.28) принимает вид

$$\alpha^{i+1} = (1 + hLp)^{i+1} \leq e^{hpLi}$$

и погрешность $e_k(t_{i+1})$ оценивается так:

$$|e_k(t_{i+1})| \leq \gamma\left(e^{hpLi} - 1\right)/(hLp),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, n_1 - 1.$$

Для вектора ошибки метода сплайн-коллокаций

$$E(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))^T$$

в норме максимума модуля получим аналогичное неравенство, обосновывающее сходимость метода:

$$\|E(t_{i+1})\| = \max_k |e_k(t_{i+1})| \le \gamma \left[exp(t_k Lp) - 1\right]/(hLp).$$

Заметим, что подобные неравенства можно вывести для погрешностей производных

$$|S_k^{(j)}(t_i) - y_k^{(j)}(t_i)|,\ j = 1, 2, \ldots .d,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, n_1.$$

Далее, используя интерполяционные свойства сплайн-функций, эти неравенства можно распространить на любую точку t интервала $[t_0, t_k]$.

Произведем проверку свойства $A-$устойчивости метода (2.23) на решении тестового уравнения

$$y_k' = \lambda y_k,\ y_k(0) = 1,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ Re\lambda < 0. \tag{2.29}$$

Применяя (2.21) к задаче (2.29), получаем для $k-$компоненты сплайн-функции S выражение

$$S_k(t_i) = R(\lambda h)^i,$$

где

$$R(z) = \left(1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z_j\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{d} b_j z_j\right)^{-1},\ z = \lambda h.$$

Таким образом установлено, что метод (2.23) аппроксимирует задачу () с порядком $m + 1$, следовательно

$$e^z = R(z) + O\left(z^{m+1}\right),$$

т.е. $R(z)-$ это $(q, d)-$ аппроксимация Паде функции e^z.

Как установлено, методы, основанные на аппроксимациях Паде, $A-$устойчивы, если $q = d$ или $q = d - 1$, $q = d - 2$. Чтобы рассмотреть поведение интервальной функции $Y(t, h)$, вновь обратимся к схеме построения сплайн-решения и покажем, что полученный сплайн будет линейной функцией относительно начальных значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$, а коэффициентами при них служат полиномы относительно t.

Можно вычислить

$$S_k^{(l)}(t) = \sum_{j=l}^{q} c_{ij}^k \frac{(t - t_i)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{d} c_{i,q+j}^k \frac{(t - t_i)^{q+j-1}}{(q+j-l)!}$$

и

$$m_k^{(l)}(t_{i+1}, s(t_{i+1})) = \frac{d^l}{dt^l}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)s_j(t) + b_k\right]_{t=t_{i+1}} =$$

$$= \sum_{j=1+1}^{n}\left[\sum_{r=1}^{l} a_{kj}(t)^{(r)} s_j^{(l-r)}(t)\begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix}\right]|_{t=t_{i+1}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,\ l = 1, 2, \ldots, d.$$

Тогда (2.15) запишется в виде

$$\sum_{j=l}^{q} c_{ij}^k \frac{(t-t_i)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{d} c_{i,q+j}^k \frac{(t-t_i)^{q+j-1}}{(q+j-l)!} = \tag{2.30}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{l}\begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix}[a_{kj}(t_{i+1})]^{(r)}\left[\sum_{j_1=l-r}^{q} c_{i,j_1}^k \frac{h^{j_1-l+r}}{(j_1-1)!} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j_1=1}^{d} c_{i,q+j_1}^k \frac{h^{q+j_1-l+r}}{(q+j_1-l+r)!}\right]\right\},\ l = 1, 2, \ldots, d.$$

Относительно вектора неизвестных $\left(c_{i,q+1}^k, c_{i,q+2}^k, \ldots, c_{i,q+d}^k\right)^T$ уравнение (2.30) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{d} c_{i,q+j}^k \frac{h^{q+j-l}}{(q+j-l)!} - \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{l}\begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix}[a_{kj}(t_{i+1})]^{(r)} \times \right. \tag{2.31}$$

$$\left. \times \left[\sum_{j_1=1}^{d} c_{i,q+j_1}^k \frac{h^{q+j_1-l+r}}{(q+j_1-l+r)!}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{l}\begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix}[a_{kj}(t_{i+1})]^{(r)}\left[\sum_{j_1=l-r}^{q} c_{i,j_1}^k \frac{h^{j_1-l+r}}{(j_1-1)!}\right]\right\}$$

$$- \sum_{j=l}^{q} c_{i,j}^k \frac{h^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Рассматривая (2.31) как $k-$уравнение системы линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных

$$(c_{i,q+1}^k, c_{i,q+2}^k, \ldots, c_{i,q+d}^k)^T$$

размерности nd, замечаем, что матрица коэффициентов не содержит компонент, зависящих от начальных значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$. На первом интервале $[t_0, t_1]$ правая часть системы (2.31) представляет собой линейную функцию относительно $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$ в силу (2.15).

Решая систему (2.31) в узле коллокации t_1 получаем вектор решений, являющийся линейной функцией относительно $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$. Применение описанной процедуры на интервале $[t_1, t_2]$ начинается с вычисления коэффициентов c_{2j}^k по формулам (2.28), что также сохраняет линейную зависимость относительно начальных значений. Затем вновь решается система (2.31), в правую часть которой подставлены значения компонент сплайна S.

Метод математической индукции позволяет доказать, что последовательное применение описанного выше метода нахождения коэффициентов сплайна даст нам в любой точке t_i значение сплайн-решения как линейную функцию относительно значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$.

Итак, компоненты сплайн-решения могут быть записаны в виде

$$S_k(t) = P_{k1}(t,h)y_1(t_0) + \ldots + P_{kn}(t,h)y_n(t_0).$$

Поэтому объединенное интервальное расширение этой функции совпадает с естественным интервальным расширением [1, 4], т.е.

$$S_k^*(t) = \cup_{y_0 \in Y_0} s_k(t_0, y_0, t) = P_{k1}(t,h)Y_{0,1} + \ldots + P_{kn}(t,h)Y_{0,n}. \tag{2.32}$$

Это означает, что наш метод позволяет получить покоординатную сходимость интервальной оценки к множеству точных решений или неулучшаемость оценок в общем случае.

Как мы уже отмечали, практическое применение этого алгоритма основывается на нахождении интервальных расширений для полученных символьных выражений сплайн-аппроксимаций решений, при этом только от вида этих расширений зависит ширина интервальной оценки множеств решений. Рассмотрим некоторые аспекты вычислений интервальных расширений.

Напомним,что объединенным интервальным расширением функции $f(x)$ мы называем интервально-значную функцию

$$f(X) = \bigcup_{x \in X} f(x) = \{f(x) | x \in X\}.$$

Любое отображение $F(X)$ на множество интервальных чисел (интервалов из R^n) такое, что

$$f(X) \in F(X) \text{и} f(x) = F(x) \text{для } \forall x \in X$$

называется интервальным расширением функции $f(x)$ на X. Если для любых двух интервалов $X_1 \subseteq X_2$ мы имеем

$$F(X_1) \subseteq F(X_2)$$

, то $F(X)$ называют монотонным по включению интервальным расширением. Интересно получить конструктивные оценки, позволяющие исследовать возможность выбора наилучшего по ширине включения интервального расширения функции f. В нашем случае мы производили построение интервального расширения по формулам сплайн-решений, преобразованным так, что относительно начальных значений $y_1^0, \ldots, y_n^0$ они представляли кусочно-линейные функции, что легко увидеть из §2, §3 главы 2.

§2.3. Методы построения верхних и нижних оценок, основанные на аналитическом представлении приближенных решений с учетом интервальных оценок.

Нахождение формул решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет организовать процесс вычисления интервальных оценок множеств решений системы, в котором определение интервальных оценок (расширений) производится только в конечной точке области аргумента решений, что полностью компенсирует влияние эффекта Мура. При этом ширина интервальных решений будет зависеть лишь от реализации формул, по которым выполняется вычисление интервальных выражений, состоящих из нескольких интервальных операций,что не вызовет экспоненциальный рост ширины интервалов. Как было отмечено в §2 главы 2 общая схема предлагаемого подхода к построению интервальных оценок совокупностей решений обыкновенных дифференциальных уравнений включает в себя аналитическое нахождение формул приближенных решений, их полных погрешностей с последующим интервальным оцениванием. Имеет существенное значение для выражения сплайн-решений как функций, зависящих от начальных данных.

Рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, \ldots, n, \\ y_k'(x) = f_k(x_{i-1}, y_1(x_{i-1}), \ldots, y_n(x_{i-1})), \quad k = 1, \ldots n_r, \end{gathered} \tag{2.33}$$

где правая часть – это функция, которая определена и непрерывна в прямоугольной области D и удовлетворяет там условию Липшица.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} f_k^{(q)}(x, y_1, \ldots y_n) = \frac{\partial}{\partial x} f_k^{(q-1)}(x, y_1, \ldots, y_n) + \\ \sum_{l=1}^{n} f_l(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_l} f_k^{(q-1)}(x, y_1, \ldots, y_n), \\ f_k^{(0)}(x, y_1, \ldots, y_n) = y_k^0, \quad q = 1, \ldots, r, \quad k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Будем строить полиномиальную сплайн-функцию степени $r+1$, гладкости 1, аппроксимирующую решение $y(x)$ согласно схеме

$$s_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$s_k(x) = s_k(x_{i-1}) + \sum_{j=0}^{r} f_k^{(j)}(x_{i-1}, s_1(x_{i-1}), \ldots, s_n(x_{i-1})) \frac{(x - x_{i-1})^{(j+1)}}{(j+1)!}, \tag{2.35}$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots n_r.$$

Отметим, что сплайн-функция такого большого дефекта редко используется в методах сплайн-коллокации решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и, вообще говоря, такая схема весьма похожа на метод рядов Тейлора, однако позволяет связать вопрос оценки погрешности метода сплайн-коллокации с точностью построения двусторонних оценок сразу на всем интервале в зависимости от величины шага сетки h.

Запишем разложение компонент точного решения $y(x)$ по формуле Тейлора на интервале $[x_{i-1}, x_i]$:

$$y_k(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{y_k^{(j)}(x_{i-1})}{j!}(x - x_i)^j + \frac{y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i})}{(r+1)!}(x - x_{i-1})^{(r+1)},$$

$$\xi_{k,i} \in (x_i, x_{i+1}), \quad k = 1, \ldots, n_r.$$

Обозначим $e_k(x) = |y_k(x) - s_k(x)|, \quad k = 1, \ldots n_r$.

Тогда

$$|y_k(x) - s_k(x)| = |\sum_{j=0}^{r} \frac{y_k^{(j)}(x_{i-1})}{j!}(x - x_{i-1})^j + \frac{y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i-1})}{(r+1)!}(x - x_{i-1})^{(r+1)} -$$

$$s_k(x_{i-1}) - \sum_{j=0}^{r} f_k^{(j)}(x_{i-1}, s_1(x_{i-1}, \ldots, s_n(x_{i-1}))\frac{(x - x_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!}| \leq \tag{2.36}$$

$$|y_k(x_{i-1}) - s_k(x_{i-1})| + \sum_{j=0}^{r-1} |y_k{}^{(j+1)}(x_{i-1}) - f_k^{(j)}(x_{i-1}, \ldots, s_n(x_{i-1})| \frac{(x - x_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!} +$$

$$|y_k{}^{(r+1)}(\xi_k) - f_k^{(r)}(x_{i-1}, \ldots, s_n(x_{i-1}))| \frac{(x - x_{i-1})^{r+1}}{(r+1)!}$$

Учитывая непрерывность сплайн-функции и условие Липшица, которое выполняется для производных правой части (2.33), мы получим

$$|y_k^{(j+1)}(x_{i-1}) - f_k^{(j)}(x_{i-1}, s_1(x_{i-1}), \ldots, s_n(x_{i-1}))| \leq L_k \sum_{l=1}^{n} |y_l(x_{i-1}) - s_l(x_{i-1})| \leq \tag{2.37}$$

$L_k \sum_{l=1}^{n} e_l(x_i), k = 1, \ldots n.$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке

$$|y_k{}^{(r+1)}(\xi_{k,i}) - f_k^{(r)}(x_{i-1}, s_1(x_i - 1), \ldots, s_n(x_{i-1}))| \leq |y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i}) - y_k^{(r+1)}(x_{i-1})| + \tag{2.38}$$

$$|f_k^{(r)}(x_{i-1}, y_1(x_{i-1}), \ldots, y_n(x_{i-1})) - f_k^{(r)}(x_{i-1}, s_1(x_{i-1}), \ldots, s_n(x_{i-1}))| \leq$$

$$\omega(y_k^{(r+1)}, h) + L_k \sum_{l=1}^{n} e_l(x_{i-1}).$$

Заметим, что в этих неравенствах мы использовали модули непрерывности ω производной $r+1$ -го порядка решения, которые в общем виде определяются, как функция

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leq \delta, x', x'' \in [a, b].$$

Непосредственно из определения ясно, что модуль непрерывности ω функции f характеризует величину максимальной осцилляции этой функции на отрезке длины $\delta > 0$. Модули непрерывности как и модули гладкости с успехом использовались в некоторых аппроксимационных задачах, в особенности они удобны для выражения погрешностей численных методов, в которых участвуют функции с компактной областью определения, когда значения функций могут быть заданы или численно определены с наперед заданной точностью в конечном (или счетном) множестве точек этой области.

Существенно для нас то, что использование этих модулей позволяет оценивать погрешность численного метода или приближенной формулы для данного численного метода без каких-либо дополнительных ограничений на участвующие функции, кроме тех, которые необходимы при формулировке задачи. Подставляя (2.37), (2.38) в (2.36) мы имеем

$$e_k(x) \leq e_k(x_i) + L_k(\textstyle\sum_{l=1}^{n} e_l(x_i)) \displaystyle\sum_{j=0}^{(r-1)} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} +$$

$$(\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}(L_k(\sum_{l=1}^{n} e_l(x_i) + \omega(y_k^{(r+1)}, h)).$$

Заметим, что

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{h^j}{(j+1)!} \leq \exp(h) \leq e$$

Тогда неравенство (2.39) можно записать в виде

$$e_k(x) \leq e_k(x_i)(1 + hL_k \exp + \tfrac{h^{r+1}}{(r+1)!}) + \textstyle\sum_{l=1,\, l\neq k}^{n} e_l(x_i) h L_k \exp + \tfrac{h^{r+1}}{(r+1)!} L_k +$$
$$\tfrac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(y_k^{(r+1)}, h) \leq e_k(x_i)(1 + hc_k) + c_k h \textstyle\sum_{l=1,\, l\neq k}^{n} e_l(x_i) + \tfrac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(y_k^{(r+1)}, h),$$

где

$$c_k = L_k(\exp + \frac{1}{(r+1)!}).$$

Введем вектор $E(x)$, составленный из величин $e_k(x)$

$$E(x) = (e_1(x), \ldots, e_n(x))^T),$$

тогда совокупность покомпонентных неравенств (2.39) запишется в матричном виде

$$E(x) \leq (I + hA)E(x_i) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)B$$

где A -матрица размерности $n \times n$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} c_1 & c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ c_n & c_n & \dots & c_n, \end{array} \right)$$

B- единичный вектор размерности n,

$$B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

через $\omega(h)$ мы обозначили величину

$$\omega(h) = max_k\{\omega(y_k^{(r+1)}, h)\}.$$

В дальнейшем мы используем норму вектора $E(x_i) = max_k E_k(x)$, и соответствующую матричную форму

$$\| A \| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

где a_{ij} -компоненты матрицы A. Запишем последовательность неравенств

$$\begin{gathered} \| E(x) \| \leq (1 + h \| A \|) \| E(x_i) \| + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega h \\ (1 + h \| A \|) \| E(x_i) \| \leq (1 + h \| A \|)^2 \| E(x_{i-1} \| + \\ \frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)(1 + h \| A \|) \\ (1 + h \| A \|)^2 \| E(x_{i-1}) \| \leq (1 + h \| A \|)^3 \| E(x_{i-2} \| + \\ \frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)(1 + h \| A \|)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (1 + h \| A \|)^i \| E(x_1) \| \leq (1 + h \| A \|)^{i+1} \| E(x_0 \| + \\ \frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)(1 + h \| A \|)^i. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $e_k(x_0) = 0$, получим

$$\| E(x) \| \leq \frac{(\exp(\| A \| -1)}{(r+1)! \| A \|} h^r \omega(h). \tag{2.40}$$

Естественно, что неравенство (2.40) справедливо и для отдельных компонент вектора $E(x)$. Аналогично предыдущим рассуждениям мы оцениваем отклонение производных точного решения и сплайн-решения,

$$|{y_k}^{(q)}(x) - s_k^q(x)|, q = 1, \ldots, r$$

и получаем

$$\| y^{(q)}(x) - s^{(q)}(x) \| \leq \frac{(\exp(\| A \| -1)}{(r+1)! \| A \|} h^{r-q} \omega(h). \tag{2.41}$$

Подобные оценки обосновывают сходимость данного метода построения сплайн- функций, аппроксимирующих решение исходной задачи, на всем интервале $[x_0, x_T]$ при шаге сетки h , стремящемся к 0. Вопросы устойчивости такого алгоритма могут быть получены несложными рассуждениями.

Итак, мы предложили алгоритм, который строит интервальные оценки множеств точных решений задачи (2.33) на основе сочетания двух шагов: последовательного нахождения аналитических формул, задающих выражения, по которым можно вычислить значения сплайн-функций, аппроксимирующих решение, и определения по этим формулам интервальных расширений, включающих решение. Поскольку мы избегаем при этом пошагового применения интервальных операций, мы обходим влияние эффекта Мура. Однако в случае оценки решений систем уравнений с линейной правой частью, мы можем пользоваться схемой сплайн-коллокации с параметрами сплайна (степенью n и дефектом d), подбираемыми из условий устойчивости и точности приближений. Это возможно сделать, поскольку мы умеем находить аналитически в узлах коллокации формулы для решений систем линейных алгебраических уравнений, определяющих параметры сплайн-функций, что реализовано во многих системах символьных вычислений. Если необходимо находить оценки множеств решений систем дифференциальных уравнений с нелинейной правой частью, встает задача получить аналитически формулы решений систем нелинейных алгебраических уравнений, что в общем случае невозможно. Поэтому предложен подход, основанный на построении сплайн-функций большого дефекта, во многом он похож на схему метода рядов Тейлора, но в отличие от них применение сплайнов позволяет существенно упростить доказательство сходимости интервальных оценок.

В случае этого подхода нам удается получить формулы для сплайн-функций, аппроксимирующих решение, как суперпозиции функций, зависящих от начальных данных. При выполнении следующего шага данного метода, связанного с вычислением интервальных расширений, для нас возможно выбрать одно из двух направлений: находить интервальную оценку области значений векторно–значных функций, последовательно решая $2n$ экстремальных задач для координат этих функций, либо дополнительно на каждом шаге производить линеаризацию символьных формул этих решений по начальным значениям. Далее мы остановимся на этом направлении более подробно.

Итак, символьные формулы сплайн-функций $s_k(x)$, аппроксимирующих компоненты решений задачи (2.33) – это суперпозиции функций, зависящих от начальных значений $y_1^0, \dots, y_n^0$ для любого k . Для нас удобно ввести обозначения $\Phi_{ijk}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ для производных $f_k^{(j)}$, участвующих в процессе вычисления.

Будем производить линеаризацию этих функций на интервале Y^0, являющимся произведением интервалов $Y_1^0 \times Y_2^0 \times \dots \times Y_n^0$. Используем формулу Тейлора

$$\Phi_{ijk}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) = \Phi_{ijk}(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) + \tfrac{\partial \Phi_{ijk}}{\partial y^0} \mid_{z^*} (y_1^0 - y_1^*) + \dots \quad (2.42)$$

$$+\tfrac{\partial \phi_{ijk}}{\partial y_n^0} \mid_z^* (y_n^0 - y_n^*) + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{l,s=1}^n \tfrac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y_l^0 \partial y_s^0} \mid_{z^{**}} (y_l^* + \theta_l(y_l^0 - y_l^*))(y_s^* + \theta_s(y_s^0 - y_s^*)),$$

$$\theta_l, \theta_s \in [0,1], \quad z^*, z^{**} \in Y_1^0 \times \dots \times Y_n^0$$

Обозначим через $m_{k,i,j}$ линейную часть этого разложения

$$m_{ijk} = \Phi_{ijk}(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Phi_{ijk}}{\partial y^0}(y_l^0 - y_l^*) \qquad (2.43)$$

Легко видеть справедливость неравенства

$$|\Phi_{ijk}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) - m_{ijk}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)| \leq$$

$$\frac{1}{2} \sum_{l,s=0}^n |\frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y_l^0 \partial y_s^0} w(Y_l^0) w(Y_s^0)| \leq \frac{1}{2} max_{_{l,\ s,\ Y^0}} |\frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y_l^0 \partial y_s^0}| \sum_{l,s=0}^n w(Y_l^0) w(Y_s^0) \leq$$

$$\frac{1}{2} max_{l,\ s,\ Y^0} |\frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y_l^0 \partial y_s^0}| w^2(Y_{max}^0) \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \Phi w^2(Y_{max}^0), \qquad (2.44)$$

где

$$w(Y_l^0) = \overline{Y_l^0} - \underline{Y_l^0}, \quad w(Y^0) = max_{_l} w(Y_l^0)$$

$$\Phi = max_{_{l,\ s,\ Y^0}} |\frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y_l^0 \partial y_s^0}|$$
$$l, s = 1, \ldots, n.$$

Итак алгоритм заключается в следующем:

- На каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ представляем выражения $f_k^(j)$ как функции, зависящие только от начальных данных
- Затем определяем их линейные части согласно формуле (2.43)
- Подставляем их в выражения, по которым мы вычисляли компоненты сплайн- функций

$$s_k(x) = s_k(x_{i-1}) + \sum_{j=0}^{r} m_{kij}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)\frac{(x - x_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!} \tag{2.45}$$
$$s_k(x_0) = y_k^0 \tag{2.46}$$
$$k = 1, \ldots, n_r, \quad , i = 1, \ldots, n$$

Оценим погрешность метода (2.45) и используем при этом обозначения $e_k(x) = |y_k(x) - s_k(x)|$. Тогда получаем

$$\begin{gathered} |y_k(x) - s_k(x)| = |\textstyle\sum_{j=0}^{r} \frac{y_k^{(j)}(x_{i-1})}{j!}(x - x_{i-1})^j + \frac{y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i-1})}{(r+1)!}(x - x_{i-1})^{(r+1)} - \\ s_k(x_{i-1}) - \textstyle\sum_{j=0}^{r} m_{kij}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0 \frac{(x-x_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!}| \leq \\ |y_k(x_{i-1} - s_k(x_{i-1})| + \textstyle\sum_{j=0}^{r-1} |\frac{(x-x_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!}| + \\ |y_k{}^{(r+1)}(\xi_k) - m_{kij}(x_{i-1}, s_1(x_{i-1}), \ldots, s_n(x_{i-1}))\frac{|x-x_{i-1}{}^{r+1}|}{(r+1)!}| \end{gathered} \tag{2.47}$$

Воспользовавшись неравенством (2.44), получаем оценки для производных

$$\begin{gathered} |y_k^{(j+1)}(x_i) - m_{kij}(y_1^0, \ldots, y_n^0)| \leq |y_k^{(j+1)}(x_i) - f_k^{(j)}(x_{i-1})| + \\ n(n-1)/4\Phi w^2(Y_0), \\ k = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, r-1, \end{gathered} \tag{2.48}$$

аналогично оцениваем

$$|y_k^{(r+1)}(\xi_{ki}) - m_{kir}(y_1^0, \ldots, y_n^0)| \leq |y_k^{(r+1)}(\xi_{ki}) - f_k^{(r)}(x_{i-1})| +$$

$$n(n-1)/4\Phi w^2(Y_0)$$

Подставляя полученные оценки в (2.47), имеем

$$|y_k(x)-s_k(x)|\leq e_k(x_i)+(L_k(\sum_{l=1}^{n}e_l(x_i))$$

$$+\frac{n(n-1)}{4}\Phi w^2(Y_0))\sum_{j=0}^{r-1}\frac{h^{j+1}}{(j+1)!}+$$

$$\omega(y_k^{(r+1)},h)+(L_k(\sum_{l=1}^{n}e_l(x_i))+\frac{n(n-1)}{4}\Phi w^2(Y_0))\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\leq e_k(x_i)(1+ \tag{2.49}$$

$$hL_ke+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!})(\sum_{l=1}^{n}e_l(x_i))(hL_ke+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!})+he\frac{n(n-1)}{4}\Phi w^2(Y_0)+$$

$$\frac{h^{r+1}}{(r+1)!})\frac{n(n-1)}{4}\Phi w^2(Y_0)\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(y_k^{(r+1)},h)\leq e_k(x_i)(1+c_kh)+$$

$$c_k\sum_{l=1,\quad l\neq k}^{n}e_l(x_i)+hw^2(Y_0)b_1+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}b_2.$$

где

$$c_k=L_k((\exp+\frac{1}{(r+1)!}),b_1=e\frac{n(n-1)}{4}\Phi,$$

$$b_2=\frac{n(n-1)}{4}\Phi w^2(Y_0)+\omega(y_k^{(r+1)},h),$$

$$k=1,\ldots,n$$

Для вектора ошибок $E(x)$ можно записать неравенство

$$E(x)\leq(I+hA)E(x_i)+hw^2(Y_0)b_1B+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}b_2B, \tag{2.50}$$

где матрица A и вектор B были определены ранее.

Тогда сложив последовательно неравенства

$$\parallel E(x)\parallel\leq(1+h\parallel A\parallel)\parallel E(x_i)\parallel+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}b_2+hw^2(Y_0)b_1$$

$$(1+h\parallel A\parallel)\parallel E(x_i)\parallel\leq(1+h\parallel A\parallel)^2\parallel E(x_{i-1}\parallel+$$

$$(1+h\parallel A\parallel)(\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}b_2+hw^2(Y_0)b_1)$$

$$(1+h\parallel A\parallel)^2\parallel E(x_{i-1})\parallel\leq(1+h\parallel A\parallel)^3\parallel E(x_{i-2}\parallel+$$

$$(1+h\parallel A\parallel)^2(\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}b_2+hw^2(Y_0)b_1),$$

. . . .

$$(1+h \parallel A \parallel)^i \parallel E(x_1) \parallel \leq (1+h \parallel A \parallel)^{i+1} \parallel E(x_0 \parallel + \tag{2.51}$$
$$(1+h \parallel A \parallel)^i (\frac{h^{r+1}}{(r+1)!} b_2 + hw^2(Y_0)b_1),$$

и учитывая, что $e_k(x_0) = 0$ для всех k мы получаем

$$\parallel E(x) \parallel \leq \sum_{l=0}^{i} (1+h \parallel A \parallel)^l \tag{2.52}$$
$$(\frac{h^{r+1}}{(r+1)!} + hw^2(Y_0)b_1) \leq \frac{\exp \parallel A \parallel - 1}{\parallel A \parallel} (\frac{h^{r+1}}{(r+1)!} + hw^2(Y_0)b_1).$$

Неравенство (2.52) означает сходимость предложенного метода сплайн-коллокации при $h \mapsto 0, \quad w(Y_0) \mapsto 0$. В схеме практической реализации этого алгоритма это приводит к необходимости разбивать интервал начальных значений на малые подинтервалы и последовательно решать задачи построения верхних и нижних оценок для задач с полученными подинтервалами начальных значений. При фиксированных значениях $h, \quad w(Y_0)$ верхние и нижние оценки будут включать множество точных решений, отклонение этого включения можно оценить как величину, зависящую от шага и интервала начальных значений.

Выводы.

В этой главе рассматриваются вопросы, связанные с построением верхних и нижних оценок множеств решений систем ОДУ с интервальными данными и отклонений этих оценок от границ совокупности всех точных решений указанной задачи. При этом вводятся понятия сходимости в хаусдорфовой метрике объединенного интервального расширения, соответствующего построенной в предлагаемом методе интервальной оценке, к совокупности точных решений, и неулучшаемой (покоординатной) интервальной оценки. Сходимость в хаусдорфовой метрике объединенного расширения носит скорее теоретический характер, а неулучшаемость (покоординатная близость) оценок имеет практическое значение, поскольку отражает факт параллельности осям координат границ интервалов и близость их к совокупностям точных решений.

Интервальные методы находят интервальные функции, гарантированно содержащие точные решения систем ОДУ с использованием различных подходов. Можно выделить алгоритмы, построенные на основе дифференциальных неравенств [22, 31, 32], конечно–разностных аппроксимаций с учетом границ ошибок [5, 6], разложениях в ряд Тейлора (или другие ряды) с оценкой остаточного члена [1, 2, 16, 18, 21, 22], коррекции дефекта [26, 28], итерациях

Пикара или Ньютона в соответствующем функциональном пространстве [37], а также вычислений оценок с использованием эллипсоидов [11, 30, 43, 44, 45].

Общим подходом для всех этих методов является требование нахождения включения решений как можно более узкого, а также использование свойства монотонности относительно включения.

Серьезное ограничение интервальных методов оценки решений систем дифференциальных уравнений связано с влиянием так называемого эффекта Мура (*wrapping effect)*, приводящего к экспоненциальному расширению ширины получаемых оценок [11, 22]. Основной причиной этого служит неточность приближения интервалом, включаемого им множества решений и сильный рост, зачастую экспоненциальный, этого отклонения. Это можно объяснить также увеличением количества уравнений в системе, соответствующей поведению интервальных оценок, то есть расширением размерности пространства в котором мы находим описываемую оценку.

Заметим, что интервальные методы дают гарантированные оценки глобальной ошибки, позволяющие получать глобальное включение точных решений. Интервальные значения могут появиться в задаче либо как интервальное начальное значение, либо как интервальный параметр в правой части. Такие интервалы обычно представляют неопределенности и не обязательно являются малыми величинами. Задачи, в которые включены интервалы, могут рассматриваться либо как уравнения (системы уравнений) над интервалами, либо как параметризованные семейства уравнений.

В этой главе описан метод построения интервальных оценок, который основан на предварительном определении формул приближенных решений в аналитическом виде, гарантированной оценке глобальных ошибок и нахождению интервальных расширений (совместно для формул и глобальных ошибок). Требование строить формулы приближенных решений в любой точке t области G позволяет бороться с влиянием эффекта Мура, поскольку переносит определение интервальных расширений на последний этап алгоритма, то есть снимает "пошаговость"оценок множеств решений. При этом применяются кусочно– полиномиальные функции (или сплайн-функции) различных степеней гладкости и дефектов, что объясняется необходимостью выполнять аналитические выкладки. Заметим, что выбор вида сплайн-функций зависит от того, для каких систем уравнений производятся оценки: для систем уравнений, имеющих линейную правую часть, или нелинейную правую часть. Результаты настоящей главы опубликованы в работах [76, 77, 78, 79, 81, 86].

ГЛАВА3. **Компьютерная реализация интервальных алгоритмов и вопросы надежных вычислений.**

§3.1. Вопросы реализаций интервальных операций и операций с направленными округлениями (динамической точностью).

Опишем структуру данных, позволяющих точно представлять вещественные числа. Эта форма представления данных позволит проводить точные вычисления над числами, включая арифметические операции над рациональными числами. При этом можно точно вычислить значения функций, используя ряды с бесконечным числом членов.

Пусть $R-$пространство действительных чисел, $M-$ некоторое его подмножество, отображение $\varphi : R \to M$ назовем округлением, если $\varphi(x) = x$ для любого $x \in M$.

Округление называется монотонным, если $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ для всех $x, y \in R$ таких, что $x \leq y$;

округление называется направленным вниз округлением, если $\varphi(x) \leq x$ для всех $x \in R$;

округление называется направленным вверх округлением, если $\varphi(x) \geq x$ для всех $x \in R$.

Как правило, для монотонных ориентированных округлений принято использовать специальные обозначения, например, $\varphi_{up}(x) \geq x-$для монотонного, направленного вверх округления, $\varphi_{low}(x) \leq x-$для монотонного, направленного вниз округления, $\varphi_{near}(x) = (\varphi_{up}(x) - \varphi_{low}(x))/2-$ для округления к ближайшему машинно-представимому числу.

Алгоритмы машинных арифметических операций могут быть представлены схематически в следующем виде: декомпозиция операндов, выполнение операций над показателями степени и дробными частями, округление, нормализация, упаковка в формат чисел с плавающей точкой.

Чтобы производить необходимые округления, арифметические операции выполняются с точностью, превышающей стандартную для арифметического устройства ЭВМ, затем проверяется остаток. Для этого выделения дробные части рассматриваются как целые числа и над ними производятся операции повышенной точности.

При выполнении арифметических операций в компьютере вещественные числа представлены как числа с плавающей точкой, а интервалы вещественных чисел как интервалы с граничными значениями — числами с плавающей точкой. При всех операциях над числами с плавающей точкой производится выбор в качестве результата чисел, ближайших к нему. При этом приближение чисел может выполняться двумя способами: с помощью округления к ближайшему машинно представимому числу, с помощью округления к ближайшему меньшему машинному числу.

Для описания дальнейших операций мы будем пользоваться следующими обозначениями, близкими к типам данным и операторам языка Паскаль.

Пусть интервалы представлены элементами, принадлежащими типу данных запись:

```
type interval = record
      inf:real;
      sup:real;
      end;
```

Здесь поле *inf* соответствует меньшей границе интервала, поле *sup* соответствует большей границе интервала.

Постоянные величины

```
      const small=...;
      large=...;
```

это представления, отвечающие наименьшему и наибольшему положительному значению среди чисел с плавающей точкой.

Появления чисел с плавающей точкой, выходящих за границы области машинно представимых чисел, определяются значениями флагов:

```
      var underflow : boolean;
      var overflow : boolean;
```

Если происходит прерывание операции, например, в силу деления на 0, мы полагаем существование процедуры

```
      procedure error;
```

прерывает операцию с сообщением об ошибке.

Итак, общий алгоритм сложения интервальных величин может быть представлен в следующем виде

```
      function add(a,b:interval):interval;
    begin
        add.inf:=a.inf+ low(b.inf);
         if overflow then error;
         if underflow then
          if add.inf>0 then add.inf:=0
          else add.inf:=small;
           add.sup:=a.sup+up(b.sup);
```

if overflow then error;
if underflow then
if add.sup<0 then add.sup:=0
else add.sup:=small
end;

Аналогично можно представить алгоритм вычитания интервальных величин, интервальное умножение и деление будут отличаться за счет дополнительного анализа граничных точек.

При реализации процедур для операций над граничными точками интервалов мы должны обеспечить присутствие утилит, получающими ближайших к заданному машинному числу величин, и обозначаемых *succ(v)* и *pred(v)*.

Тогда процедура, осуществляющая сложение с направленными округлениями примет вид

```
function add up(u,v:real):real;
var x,y:real
begin x=:u+near v;
 if overflow then error;
if underflow then
 if x<0 then add up:=0
else add up:=small
 else
if x=u then
if v>0 then add up:=succ(v)
else add up:=u
else
if x=v then add up:=succ(v)
if u>0 then add up:=succ(v)
else add up:=u
else
if x>0 then
begin
y:=x-near v;
if(y<>x) or underflow then
add up:=succ(x);
else add up:=x;
end
else add up:=x;
end;
```

Для конструирования алгоритмов интервальных операций и операций с направленными округлениями весьма эффективно применять соотношения, связывающие результаты машинных арифметических операций и арифметических операций гарантированной точности, в частности точных операций.

Обозначим через $*_M$– машинную арифметическую операцию, u, v– нормализованные операнды, например, $+_M$– машинное сложение, $/_M$– машинное деление.

Тогда возможно доказать равенства, аналогичные следующему

$$u + v = (u +_M v) +_M ((u -_M u_1) +_M (v -_M v_1))$$

где $u_1 = (u +_M v) -_M v$, $v_1 = (u +_M) -_M u_1$, $u + v$ – точный результат операции сложения.

Доказательство его сводится к рассмотрению возможных соотношений между показателями степени операндов.

Итак, мы имеем формулу для связи между $u + v$ и $u +_M v$ в терминах величин, которые могут быть вычислены с помощью операций однократной точности. Поэтому точность вычислений можно повышать, накапливая поправочные члены при условии, что не происходит переполнение.

Представив дробную часть числа имеющим повышенное количество разрядов, можно получить алгоритмы арифметических операций над граничными точками интервалов повышенной точности, например, двойной точности.

Пусть x, y– числа, записанные в ЭВМ, z– результат машинной арифметической операции, примененной к ним, zz– поправочный член. Допускаем, что числа x и y могут быть разделены на две части, где младшие разряды содержатся в переменных xx, yy, быть может равных нулю. Тогда алгоритмы арифметических операций, с гарантированной оценкой точности на основе повышения количества разрядов для представления результатов имеют вид:

сложение

$$x + y = z + zz,$$

где

$$z = x +_M y,$$

$$zz = w +_M y,$$

$$w = x -_M z,$$

вычитание

$$x - y = z + zz,$$

где

$$z = x -_M y, \; zz = z_1 - z_2,$$

$$z_1 = y -_M w,\ z_2 = v -_M x$$
$$w = z -_M x,\ v = z -_M w,$$

умножение

$$x * y = z + zz,$$

где

$$z = p +_M q,\ p = x *_M y,$$
$$q = x *_M yy +_M xx *_M y,$$
$$zz = p -_M z +_M q +_M xx *_M yy,$$

деление

$$x/y = z + zz,$$

где

$$z = p +_M q,\ zz = p -_M z +_M q,$$
$$p = x/_M y,\ q = (x +_M xx -_M p *_M yy)/_M y.$$

Реализация представленных алгоритмов характерна тем, что мы используем обычные арифметические операции, представленные в большинстве алгоритмических языков и операционных сред компьютера, и вспомогательные переменные, принадлежащие стандартным типам данных. Следует отметить, что эффективным является подход, связанный с использованием накопителя. Накопитель– это область памяти, достаточная для представления чисел с плавающей точкой как чисел с фиксированной точкой.

Длина накопителя определяется по минимальному и максимальному значению показателя степени и длине мантиссы чисел. Эта величина накопителя определяется так, чтобы мы могли хранить в нем точное значение произведения двух машинных чисел. Общепризнанным требованием является то, чтобы мы могли также хранить значения суммы $n-$ чисел и произведения $n-$ мерных векторов без промежуточных переполнений памяти.

Процедуры, в которых реализуются действия над интервалами, основываются на описанных выше операциях с направленными округлениями и динамической точностью.

В число процедур, работающих с интервальными числами, включены процедуры, выполняющие арифметические операции, логические операции, специальные интервальные операции, такие как объединение, пересечение интервалов, расстояние между интервалами и некоторые другие. К ним относятся также утилиты для нахождения интервальных расширений стандартных математических функций. Для каждой из процедур, объединенных интерфейсной программной оболочкой, характерными являются два момента:

наличие достаточно большого числа параметров, управляющих проведением операции, а также контроль за появлением возможных ошибок, в первую очередь за выходом результатов за границы области машинно–представимых чисел.

На основе изложенных принципов разработан набор процедур, позволяющий эффективно решать вопросы, возникающие при вычислении интервальных расширений формул приближенных решений, появляющихся на основе символьных вычислений.

§3.2. Применение аналитических алгоритмов для нахождения формул приближенных решений.

Вопросы взаимодействия символьных и вычислительных алгоритмов являются важными в описываемых методах получения гарантированных оценок систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Символьные операции производятся с помощью специализированных программных средств, языков REDUCE[71, 72], MARPLE [15], ACRITH[18] и тому подобных, а также программных систем, реализующих конкретные символьные методы. Такой подход привлекателен своей направленностью на решения конкретных вопросов и задач, возможностью получить эффективные реализации.

Можно отметить следующие важные взаимодействия символьных и вычислительных алгоритмов:

–анализ исходных систем и подготовка к применению удобного символьного и численного методов;

–построение численного алгоритма согласно заданным условиям;

–графический или табличный вывод результатов.

Отметим, что описанный здесь подход отличается от известных методов символьного решения уравнений [69, 70, 71] тем, что в этих методах строятся точные решения уравнений, а в представленных методах для оценивания - неориентированные связные графы без циклов, задающие сплайн-функции, аппроксимирующие точное решение исходной системы уравнений, и далее используемые для нахождения интервальных расширений по полученным формулам.

Под графом понимается множество вершин C и совокупность преобразований α на них. Представлением дерева называется способ записи информации о нем, однозначно и полностью восстанавливающий структуру дерева и позволяющий вычислять его характеристики. Можно выделить общие способы представления — для всех графов представления и специфические — для деревьев. Представление с помощью матрицы смежности является общим для графов, оно определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма.

Достоинством этого представления является легкость получения, а также возможность использования для языков, допускающих побитовую обработку двоичных последовательностей. Однако это представление не является самым экономным и трудоемкость алгоритмов, работающих с таким представлением, не может быть ниже $O(n^2)$. Напомним, что матрица смежности есть квадратная матрица размером $n \times n$ у которой элемент a_{ij} определяется следующим соотношением.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если вершины } x_i, y_j \text{ смежные,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, под универсальной системой символьных или аналитических преобразований принято считать программную систему, позволяющую проводить алгебраические преобразования над объектами достаточно общей в математическом смысле природы. Они, как правило включают в себя процедуры для работы в аналитическом виде с матрицами, для решения алгебраических уравнений и систем линейных уравнений, для генерации программ численного счета, для вычисления в символьном виде (когда это возможно) интегралов и сумм, дифференцирования и других задач. Весьма удобно при этом, что все численные коэффициенты представляются обычно в виде рациональных дробей с неограниченными длинами числителя и знаменателя.

В качестве основной системы для реализации нашего алгоритма была выбрана система MARPLE[19]. Важно отметить, что используемое в алгоритме символьное дифференцирование не всегда допускает эффективную реализацию, что требует существенных изменений. Дело в том, что, хотя символьное дифференцирование является базовым оператором, в формулах большой длины трудно получить выражение для производной из-за стремительного роста промежуточных результатов. Возможен другой подход. Если имеется программа на каком-либо языков аналитических вычислений, результатом выполнения которой будет интересующее нас выражение, то проанализировав шаг за шагом все операторы этой программы, можно автоматически сгенерировать программу, вычисляющую его производную более экономным образом. Такой подход называется автоматическим дифференцированием. при этом размер полученной программы может оказаться небольшим.

В алгоритме использованы возможности этих двух подходов. Отметим, что в задачах вычисления интервальных расширений функций большое значение приобретает упрощенная форма записи выражений и приведение подобных членов , поскольку это позволяет существенно снизить трудоемкость алгоритма, время исполнения.

Пусть $Y = F(X_1, \ldots, X_n)$ представляет оператор присваивания. Левую часть (переменную Y) назовем определяемой (defined, def) правосторонними переменными из F , которые будем считать используемыми (used).
Это может быть представлено элементарным графом с вершинами $Y, X_1, \ldots, X_n$. Аналогично мы свяжем блок, состоящий из $m-$операторов присваивания с графом G_m, показывая соотношения между определяемыми и используемы-

ми переменными в каждом операторе и их роль в блоке. Чтобы определить, существует ли зависимость между переменными X_i и X_j, от которых зависит одна и та же переменная Y нам нужно построить зависимость

$$X_i \quad 'd' \quad X_j = \begin{cases} X_i \quad 'succ' \quad X_j \\ X_j \quad 'succ' \quad X_i \\ X_i \quad 'ptcom' \quad X_j \end{cases}$$

где $X_j \quad 'succ' \quad X_i \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} X_i \quad 'uses' \quad X_j \quad or \\ \exists X_k| \quad (X_i \quad 'succ' \quad X_k) \quad and \quad (X_j \quad 'succ' \quad X_k) \end{cases}$$

и $X_i \quad 'ptcom' \quad X_j \Longleftrightarrow \{\exists X_k|(X_k'succ'X_i)and(X_k'succ'X_j)\}$

Процесс глобального упрощения может быть представлен в виде алгоритма, у которого присваивание происходит на входе, а последовательность модифицированных операторов можно получить на выходе.

$$Y_i = F_i^{(t)}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow (STATEG_{t-1}) \Longrightarrow \begin{cases} Y_1 \quad = F_1^{(t+1)}(X_1, \ldots, X_n) \\ \ldots \\ Y_i \quad = F_i^{(t+1)}(X_1, \ldots, X_n) \end{cases}$$

Каждый шаг алгоритма, обозначенный нами 't', состоит из фазы создания и модификации графа, за которой следует фаза исключения зависимости среди переменных, используемых в шагах $F_1^{(t)}, \ldots, F_i^{(t)}$.

На фазе создания графа выделяется несколько анализируемых случаев, зависящих от того является ли Y_i определена и использована в выражении на данном шаге алгоритма

На фазе исключения зависимостей можно определить шаги проверки:

1. Существует ли пара (X_i, X_j), такая, что $X_i'd'X_j$.

   Тогда a) $X_i \quad 'succ' \quad X_j$ влечет, что X_j заменяется на свое определение в Y_i.

   Например, $\begin{cases} X_1 \quad = 2X_2 \\ Y_i \quad = X_1 X_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_1 \quad = 2X_2 \\ Y_i \quad = 2X_2 X_2 \end{cases}$

   b) $X_i \quad 'ptcom' \quad X_j$ влечет, что как X_j так и X_j заменяется на свое определение в Y_i.

   Например, $\begin{cases} X_1 \quad = Z \\ X_2 \quad = 3Z \\ Y_i \quad = X_2 - X_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_1 \quad = Z \\ X_2 \quad = 3Z \\ Y_i \quad = 2Z \end{cases}$

2. Существует Y_j, такое, что

$$Y_i \quad 'succ' \quad Y_j \quad and \quad (\exists X_k| \quad (X_k \quad 'succ' \quad Y_i) \quad and \quad (X_k \quad 'succ' \quad Y_j).$$

В этом случае реализуется последовательная замена сверху вниз переменных, применяемых в Y_j, Y_i, на их определения.

Например, $\begin{cases} Y_j & = Y_l + X_n \\ \quad Y_l & = Y_i \\ Y_i & = X_1 - X_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y_j & = Y_l + X_n \\ Y_l & = X_1 - X_n \\ Y_i & = X_1 - X_n \end{cases}$
$\Longrightarrow \begin{cases} \quad Y_j & = X_l \\ Y_l & = X_1 - X_n \\ Y_i & = X_1 - X_n \end{cases}$

Циклы в этом направленном графе будут соответствовать используемым (used), но не инициализированным переменным, что позволяет попутно выявить семантические ошибки в программе.

Итак, мы строим алгоритм, последовательно упрощающий выражения для того, чтобы минимизировать количество появлений каждой из переменных в выражениях и ширину их интервального расширения.

Модули, создающие аналитические формулы выражений сплайн-функций, аппроксимирующих решения по методу сплайн-коллокации, позволяют накопить эти формулы в файлах для последующего использования в алгоритме.

Выводы

Данная глава содержит описание алгоритмов и практических вопросов реализации, связанных с построением программ интервальных операций с контролем точности.

При выполнении численных алгоритмов, в том числе интервальных, могут появляться эффекты, вызванные влиянием ошибок округления и потерей точности при сокращениях. Компьютерные системы не предусматривают эффективного механизма определения точности вычислений или перекомпиляции неточных результатов для получения большей точности.

Чтобы добиться повышения точности интервальных алгоритмов и надежности численных алгоритмов, применялись многие программные средства. На ранних этапах развития системы интервальных вычислений и машинной интервальной арифметики создавались программные пакеты, обеспечивающие реализацию основных операций над интервалами и арифметических операций над числами, выполняемых с переменной точностью [60, 61, 62, 65].

Позднее стали появляться программные языки высокого уровня, которые содержат данные новых типов, команды и инструкции, выполняющие действия над ними с контролируемой точностью.

В языках высокого уровня для обеспечения вычислений с адаптивной точностью возможны два способа. Подход, реализующий операции с многократной точностью, предусматривает использование для вещественных чисел большого количества двоичных разрядов и реализацию операций над ними среди стандартных процедур-операций. Подход на основе больших чисел *"bignum"* использует динамически распараллеленную память, в частности для представления больших чисел.

Недостаток арифметики многократной точности состоит в том, что точность остается конечной. Проблемы использования больших чисел *"bignum"* состоят в том, что даже распространяя методику на рациональные комбинации целых чисел, невозможно получать решения конкретных задач и результаты вычисления выражений, используя ресурсы ЭВМ массового использования.

Реализация символьно–интервальных алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описанных в параграфах 3,4 главы 2, налагает свои требования к использованию программных модулей и программных оболочек, выполняющих действия по вычислению значений интервальных выражений, интервальных расширений функций и тому подобных. В работах [73, 74] пакет интервальных операций использует в подпрограммах типы данных вещественных и целых чисел, а сами интервальные величины представлены как массивы длины 2. Сами алгоритмы интервальных операций и машинных арифметических операций могут быть реализованы на любом языке высокого уровня и в настоящее время использованы программные средства на языках Паскаль и СИ.

Основа такой реализации определяется требованиями, обусловленными совместным использованием символьных вычислений и интервального оценивания ошибок приближенных решений, а также интервальных вычислений расширений для полученных сплайн-решений. В программах, реализующих арифметические операции над граничными значениями интервалов, используются направленные округления, что позволяет добиться гарантированного включения в полученный интервал точного результата арифметических операций, а также получения гарантированной величины точности.

Машинная арифметика в значительной мере зависит от аппаратных реализаций, которые представляет пользователю ЭВМ, поэтому при написании процедур арифметических операций с направленными средствами языка высокого уровня приходится производить нормализацию чисел, сдвиги, проверку переполнения, округления чисел.

Напомним, что теоретические основы для рассмотрения округления как отображения множества действительных чисел в множество машинно представимых чисел, удовлетворяющего ряду свойств, заложены в работах [17, 18, 61]. Результаты настоящей главы опубликованы в работах [72, 73, 74, 79].

Заключение (основные выводы). Результатом выполненной работы является создание новых алгоритмов для построения верхних и нижних (интервальных) оценок множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами, обладающих свойствами покоординатной сходимости, а также средств для реализации этих алгоритмов в множестве интервальных чисел. Предложенный подход позволяет осуществлять построение символьных формул приближенных решений, что служит основой для различных численных алгоритмов оценки решения дифференциальных уравнений, в том числе с неточно заданными параметрами.

В процессе работы решены следующие задачи:

- создание нового класса алгоритмов для построения гарантированных оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивающих покоординатную сходимость этих оценок к множеству точных решений или неулучшаемость получаемых оценок
- доказательство теорем сходимости интервальных оценок, полученных по указанным схемам
- анализ различных модификаций этих алгоритмов для эффективного нахождения интервальных расширений
- получение и использование методов упрощения аналитических алгоритмов подстановки формул сплайн-функций
- исследование и реализация алгоритмов машинных интервальных операций и контроля точности численных результатов.

В настоящее время представляется актуальной работа в таком направлении, как распространение созданных алгоритмов на различные классы задач, требующих гарантированного контроля за точностью численных результатов, что подтверждается результатами, полученными при реализации этих алгоритмов.

Список литературы

[1] Moore R.E. Interval analysis. – Prentice Hall: Englewood Cliffs, N.-J., 1966. – 145 p.

[2] Moore R.E. Methods and applications of interval analisis. – Philadelphia: SIAM, 1979. – 190 p.

[3] Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin, Springer, 1970. – 195 p.

[4] Алефельд Г., Херцберг Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.

[5] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 221 с.

[6] Шокин Ю.И. Интервальный анализ.- Новосибирск: Наука, 1981.- 112 с.

[7] Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.- В кн. Чаплыгин С.А. Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. -М.: Наука, 1976.- с. 307-362.

[8] Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения.- Киев: Наукова Думка, 1979.- 272 с.

[9] Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986.- 744 с.

[10] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

[11] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988. – 320 с.

[12] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

[13] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Мир, 1970. – 719 с.

[14] Добронец Б.С., Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы.- Новосибирск: Наука, 1990. – 208 с.

[15] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.-М.: Наука, 1972. – 116 с.

[16] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

[17] Kulisch U., Miranker W. Computer arithmetic in theory and practice.- New York, Academic Press, 1981. – 251 p.

[18] Klatte R., Kulisch U., Neaga M., Ratz D., Ullrich Ch. PASCAL–XSC languages reference with examples. – Berlin, Springer. – 1992. – 81 p.

[19] Heck A. Introduction to Maple. - Berlin, Springer. – 1993. – 497 p.

[20] Wažewski T. Systemes des equation et des inequalities differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applicationes // Ann. Soc. Polonaise de mathematiques. – 1950. – ь23 – P. 111–166.

[21] Krückeberg F. Ordinary differential equations. Topics in interval analysis. Ed.by Hansen E. – Oxford: Clarendon Press. – 1969. – P. 91–97.

[22] Stewart N.F. A heuristic to reduce the wrapping effect in the numerical solution of $x' = f(t, x)$ // BIT. – 1971. – ь11. – P. 328–337.

[23] Corliss G., Chang Y. Solving ordinary differential equation using Taylor series // ACM Trans. Math. Software. – 1982. – Vol. 8 - ь2. – P. 114–144.

[24] Corliss G.,Rall L. Adaptive seft-validating quadrature // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1987. – Vol. 8, ь5 – P. 831–847.

[25] Eijgenraam P. The solution of initial value problems using interval arithmetic: formulation and analysis of an algorithm //Mathematical Center Tracts.- 1981.- ь144.

[26] Nickel K. How to fight the wrapping effect // Lecture Notes in Computer Science. – 1985. – ь212. – P. 121–132.

[27] Вербицкий В.И., Горбань А.Н., Утюбаев Г.Ш., Шокин Ю.И. Эффект Мура в интервальных пространствах // Докл. АН СССР. – 1989. Т. 304, ь1. – P. 17–22

[28] Nickel K. Using interval methods for the numerical solution of ODE's // Z. Angew. Math. Mech. – 1986. – Vol. 66, ь11. – P. 513–523.

[29] Adams E. Enclosure methods and scientific computation // IMACS Ann. Comput. and Appl. Math. – 1989. – Vol. 1, ь1-4. – P. 3–31.

[30] Neumaier A. The wrapping effect, ellipsoidal arithmetic, stability and confidence regions // Computing. – 1993. – Suppl.9. – P. 12–28.

[31] Lakshmikantham V., Sivasundaram S. The methods of upper and lower solutions and interval methods for first order differential equations // Appl. Math. and Comput. – 1987. – Vol.23, ь1. – P. 1–5.

[32] Lakshmikantham V. Application of interval analysis to minimal and maximal solution of differential equations // Appl.Math. and Comput. – 1991. – Vol. 41, ь1. – P. 77–87.

[33] Gambill T., Skeel R. Logarithmic reduction of the wrapping effect with application to ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1988. – Vol. 25, ь1. – P. 153–162.

[34] Jackson L. Interval arithmatic error-bounding algorithms // SIAM J. Numer. Anal. – 1975. – Vol.12, ь2. – P. 223–238.

[35] Skeel R. Thirteen ways to estimate global error // Numer. Math. – 1986. – Vol. 48, ь1. – P. 1–20.

[36] Adams E. Invers–Monotonie, directe und indirecte intervall methoden // Ber. Math.–Stat. Sek. Forschungzent. Graz. – 1982. – ь185-189. - S. 185/1–185/56.

[37] Bauch H., Kimmel W. Solving ordinary initial value problems with guaranted bounds // Z. Angew. Math. Mech. – 1989. - Band 69, ь4. – P. 110–112.

[38] Adams E.,Cordes D.,Lohner R. Enclosure of solutions of ordinary initial value problems and applications // Math. Res. – 1987. – ь36. – P. 9–28.

[39] Lohner R. Einschlieıungen bei Anfangs-und Randwertaufgaben gewönlicher Differentialgleichungen. Wissenschaftliches Rechnen mit Ergebnisverification / Hrsg. Kulish U. – 1989. – S. 183–207.

[40] Lohner R. Praktikum einschlieıung bei Differentialgleichungen. Wissenschaftliches Rechnen mit Ergebnisverification / Hrsg. Kulish U. – 1989. – S. 209–223.

[41] Stetter H. Sequential defect correction for high accuracy algorithms // Lect. Notes in Math. – 1984. – Vol. 1006. – P. 17–42.

[42] Kaucher E. Methoden zur Lüsung von Integral-und-Gleichungen. Math. Res. – 1989. – ь58. – P. 225–238.

[43] Некрасов С.А. О построении двусторонних приближений к решению задачи Коши // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – ь5. – С. 660–668.

[44] Некрасов С.А. Двусторонние методы численного интегрирования начальных и краевых задач // Изв. вузов. Электромеханика. – 1993. – ь1. – С. 75–78.

[45] Ermakov O.B. Two–sided methods for solving system of ordinary differential equations with automatic determination of guaranteed estimates // Interval Computations. – 1992. – ь3. – P. 63–69.

[46] Filippov A.F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differatial equations // Interval Computations. – 1992. - ь2. – P. 6–17.

[47] Filippov A.F. Ellipsoidal error estimates for Adams method // Interval Computations. – 1992, ь3. – P. 75–79.

[48] Dobronets B.S. Interval methods based on a posteriori estimates // Interval Computations. – 1992.– ь3. – P. 50–55.

[49] Dobronets B.S. On some two–sided methods for solving systems of ordinary differential equations // Interval Computations. – 1992. – ь1. – P. 6–21.

[50] Пахнутов И.А. Сплайны с дополнительными узлами и задача Коши // Математические заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 1. – С. 17–24.

[51] Пахнутов И.А. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью сплайнов // Сб. Вычислительные системы. Новосибирск, 1975, вып.65. – С. 96–129.

[52] Multhei H. Numerische Lösung gewönlicher Differentialgleichungen mit Splinefunctionen.// Computing. – 1980. – Vol. 25, ь3. – P. 317–335.

[53] Alefeld G. On the approximation of the range of values by interval expressions // Computing. – 1990.– Vol. 44, ь3. – P. 273–278.

[54] Cornelius H., Lohner R. Computing the range of values of real functions with accuracy higher than second order // Computing. – 1984.– Vol. 33, ь1. – P. 331–347.

[55] Alefeld G.,Lohner R. On higher order centered forms // Computing. – 1985. – Vol. 35, ь 2. – P. 177–184.

[56] Rokne J., Bao P. Interval Taylor Forms // Computing.-1987. – Vol. 39, ь3. – P. 247–259.

[57] Krawczyk R., Nickel K. Die zentrische Form in der Intervall-arithmetic, ihre quadratische Konvergenz // Computing. – 1982. – Vol. 28, ь2. – P. 117–137.

[58] Jahn K.-U. Evaluation of Hausdorff distances in interval mathematics. // Computing. – 1990. – Vol. 45, ь2. – P. 117–137.

[59] Popova E.D. Extended interval arithmetic in IEEE floating–point environment // Interval computations. – 1994. – ь4. – P. 100–129.

[60] Cole A., Morrison R. Triplex: A system for interval arithmetic // Software Pract. Exper. – 1982. – Vol. 12, ь4. – P. 341–350.

[61] Klatte R., Ullrich Ch., Gudenberg J. Arithmetic specification for scientific computation // IEEE Trans. Comput. – 1985. – Vol. C-34, ь11. – P. 996–1005.

[62] Kulisch U., Bohlender G. Features of a hardware implementation of optimal arithmetic // A new approach to scientific computation / Ed. Kulisch U., Miranker W. – New York etc.: Academic Press. – 1983. – P. 269–290.

[63] Bundi A. A generalized interval package and its use for semantic checking // ACM Trans. Math. Software. – 1984. – Vol. 10, ь4. – P. 397–409.

[64] Velitchkov T., Cohen R., Stoyanov P. Hificomp: basic computer arithmetic operations // IMACS Ann. Comput. and Appl. Math. – 1990. – Vol. 7, ь1-4. – P. 443–456.

[65] Kulisch U. Formalization and implementation of floating point arithmetic // Computing. – 1975. – Vol. 14, ь4. – P. 323–348.

[66] Olver F.W. Further development of RP and AP error analysis // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1982. – Vol. 2, ь3. – P. 249–274.

[67] Ukkonen E. On the calculation of effects of roundoff errors // ACM Trans. Math. Software. – 1981. – Vol. 7, ь3. – P. 259–271.

[68] Kulisch U. An axiomatic approach to rounded computations // Numer. Math.- 1971. – Vol. 18. – P. 1–17.

[69] Нестеров В.М. Автоматическое символьное решение уравнений / Методы и средства информационной технологии в науке и производстве. С.-Петербург: Наука, 1992. - С. 47–57.

[70] Moussiaux A. CONVODE: a REDUCE package for solving differential equations // J.Comp.Appl.Math. – 1993. – Vol. 48. – P. 157–165.

[71] Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф. Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях // Программирование – 1994. – С. 69–82.

[72] De Gregorio S. Narrow bounds for numerical integration of differential equations // J. Stat. Phys. – 1985. – Vol. 41, ь8. – P. 865–876.

[73] Яненко Н.Н., Шокин Ю.И., Рогалев А.Н. О принципах построения пакета интервальных операций // Сб. Численные методы механики сплошной среды.- Новосибирск.- 1980, т.11, ь5. – С. 147–153.

[74] Шокин Ю. И., Рогалев А.Н. Пакет интервальных операций для ЭВМ БЭСМ-6 // Препринт ИТПМ СО РАН ь24-81. – Новосибирск. – 1981. – 22 с.

[75] Шокин Ю.И., Рогалев А.Н., Юлдашев З.Х. Использование методов интервального анализа в проблеме транспортабельности программ // Прикладная математика и механика. – Ташкент, 1981. – ь670. – С. 91–97.

[76] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Об одном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными в виде интервала // Информационно-оперативный материал (интервальный анализ). Препринт ВЦ СО РАН. – Красноярск, 1989. – ь9. – С. 29–30.

[77] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Исследование интервального метода последовательных приближений // Информационно-оперативный материал (интервальный анализ). Препринт ВЦ СО РАН.- Красноярск, 1989. – ь9. – С. 28–29.

[78] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Влияние эффекта "раскрутки"на получение верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1990. – Т. 29, ь10.- С. 1593–1595.

[79] Рогалев А.Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Материалы Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики". – Саратов, 1991. – С. 136–140.

[80] Рогалев А.Н. Двусторонние численно-аналитические методы оценки решений систем ОДУ с интервальными данными // Восьмая международная школа-семинар "Качественная теория дифференциальных уравнений гидродинамики (институт гидродинамики, Новосибирск - Красноярский госуниверситет)". – Красноярск, 1992. – С. 22–24.

[81] Rogalev A.N. Numerical Methods for Enclosing Solutions of Ordinary Differential Equations with Interval Data // Abstracts for an International Conference on Numerical Analysis with Automatic Result Verification. Mathematics, Applications and Software. February 25–Mach 1, 1993. University of South Western Louisiana, USA. – P. 75–77.

[82] Rogalev A.N. Outer and inner estimates for sets of solutions of ODE's with interval data // International Congress on Computer Systems and Applied Mathematics. – St.Peterburg State University, Russian Local ACM Chapter (St. Peterburg) – 1993. – P. 99–100.

[83] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал. выч. мат. и мат. физ. – 1993. – Т. 33, ь2. – С. 219–231.

[84] Rogalev A.N. Optimal upper and lower bounds for sets of solutions of ODE's with interval data // International Congress on Interval and Computer-Algebraic methods in Science and Engineering. – St.Peterburg State University, International Journal "Interval Computations", 1994.- P. 203–204.

[85] Рогалев А.Н. Нахождение оптимальных гарантированных оценок множеств решений систем ОДУ с интервальными данными // Сб. Вычислительные технологии. – Новосибирск, 1995. – Т. 4, ь13. – С. 58–64.

[86] Rogalev Alexei N. Solving Systems of Ordinary Differential Equations with Interval Data: Rigorous and Optimal Bounds // IMACS/GAMM International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Sept. 26–29, 1995. – Bergische Universität Gesamthochschulle Wuppertal, Fachbereich Mathematic und Institut für Angewandte Informatic (Germany). – P. 113–114.

Приложение 1. Символьные формулы сплайн-функций, аппроксимирующих решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом приложении мы приводим символьные формулы сплайн-аппроксимаций решений, которые получаются после одного, двух шагов применения нашего метода. При расчете границ решений на достаточно большом интервале мы получаем формулы, занимающие при записи их в память 150-200 килобайт. Практическая реализация метода означает вызов этих формул в модули, которые производят расчет значений интервальных расширений, что эффективно можно произвести для программных инструментов как в системе MARPLE, так и на языке Borland Pascal.

В первом случае мы демонстрируем сплайн-аппроксимации для системы Мура [1], на примере которой наглядно иллюстрируется влияние эффекта Мура для большинства методов. Наш алгоритм дает неулучшаемые оценки, свободные от влияния эффекта.

Итак, мы рассматриваем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay, \tag{3.1}$$

где $y-$ вектор размерности два, $A-$ матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

с интервальными начальными данными $y_0^1 \in [-0.1, 0.1], \quad y_0^2 \in [0.9, 1.1]$.

После первого шага получаем для компонент вектора решений формулы, зависящие только от начальных значений y_0^1, y_0^2:

$$y^1(t) = y_0^1 + y_0^2\, h - \frac{h^2 y_0^1}{2} - \frac{y_0^2\, h^3}{6} + \frac{h^4 y_0^1}{24} + \frac{h^5 y_0^2}{120}$$

$$y^2(t) = y_0^2 - h\, y_0^1 - \frac{h^2 y_0^2}{2} + \frac{h^3 y_0^1}{6} + \frac{y_0^2\, h^4}{24} - \frac{h^5 y_0^1}{120}.$$

После второго шага - формулы:

$$y^1(t) = -2\,h^2 y_0^1 + y_0^1 + \frac{2\,h^4 y_0^1}{3} + 2\,y_0^2\,h + \frac{4\,h^5 y_0^2}{15} - \frac{4\,y_0^2\,h^3}{3} - \frac{31\,h^6 y_0^1}{360} - \frac{h^7 y_0^2}{45} + \frac{13\,h^8 y_0^1}{2880} + \frac{h^9 y_0^2}{1440} - \frac{h^{10} y_0^1}{14400}$$

$$y^2(t) = y_0^2 - \frac{4\,h^5 y_0^1}{15} + \frac{2\,y_0^2\,h^4}{3} + \frac{4\,h^3 y_0^1}{3} - 2\,h^2 y_0^2 - 2\,h\,y_0^1 + \frac{13\,h^8 y_0^2}{2880}\frac{h^9 y_0^1}{1440} + \frac{h^7 y_0^1}{45} - \frac{31\,h^6 y_0^2}{360} - \frac{h^{10} y_0^2}{14400}$$

После третьего шага-формулы:

$$y^1(t) = -\frac{9\,h^2 y_0^1}{2} + y_0^1 + \frac{27\,h^4 y_0^1}{8} + 3\,y_0^2\,h + \frac{81\,h^5 y_0^2}{40} - \frac{9\,y_0^2\,h^3}{2} - \frac{121\,h^6 y_0^1}{120} - \frac{17\,h^7 y_0^2}{40} + \frac{49\,h^8 y_0^1}{320} - \frac{9\,h^{11} y_0^2}{3200} + \frac{409\,h^9 y_0^2}{8640} - \frac{h^{15} y_0^2}{1728000} - \frac{h^{14} y_0^1}{115200} + \frac{h^{13} y_0^2}{12800} + \frac{181\,h^{12} y_0^1}{345600} - \frac{361\,h^{10} y_0^1}{28800}$$

$$y^2(t) = y_0^2 - \frac{h^{14} y_0^2}{115200} + \frac{h^{15} y_0^1}{1728000} - \frac{h^{13} y_0^1}{12800} + \frac{9\,h^{11} y_0^1}{3200} + \frac{181\,h^{12} y_0^2}{345600} - \frac{81\,h^5 y_0^1}{40} + \frac{27\,y_0^2\,h^4}{8} + \frac{9\,h^3 y_0^1}{2} - \frac{9\,h^2 y_0^2}{2} - 3\,h\,y_0^1 + \frac{49\,h^8 y_0^2}{320} - \frac{409\,h^9 y_0^1}{8640} + \frac{17\,h^7 y_0^1}{40} - \frac{121\,h^6 y_0^2}{120} - \frac{361\,h^{10} y_0^2}{28800}$$

Во втором случае мы получили результаты применения метода к нескольким модельным системам уравнений, описанных в монографии академика РАН Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988. Эти результаты интересны для сравнения с описанным в монографии одним из подходов к оценке множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, созданным автором монографии.

Приведем здесь формулы для сплайн-функций, аппроксимирующих решения.

Здесь рассматривался линейный управляемый осциллятор с вязким трением при нулевых начальных условиях

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + ky = u,$$
$$|u| \leq 1,$$
$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0.$$

Здесь y–скалярная переменная, u–скалярное управление, k, α– постоянные коэффициенты. Без потери общности можно считать, что коэффициент k принимает одно из трех значений $k \in \{-1, 0, 1\}$; случай произвольного k сводится к одному из трех за счет изменения масштабов.

Мы приводим случай, когда $k = 0, \alpha = -1$. Мы вводим обозначения y^1 для y и y^2 для $\frac{dy}{dt}$.

После первого шага получаем для компоненты $y^1(t)$ вектора решений формулы, зависящие только от начальных значений y_0^1, y_0^2:

$$y^1(t) = \left(\frac{y_0^1}{120} + \frac{y_0^2}{360}\right)h^5 + \left(\frac{y_0^1}{24} + \frac{y_0^2}{44}\right)h^4$$
$$+ \left(\frac{y_0^1}{6} + \frac{y_0^2}{9}\right)h^3 + \left(\frac{y_0^1}{2} + \frac{y_0^2}{7}\right)h^2 +$$
$$y_0^1\, h + y_0^1$$

После второго шага для компоненты $y^1(t)$ вектора решений – формулы:

$$y^1(t) = \left(\frac{y_0^2}{24400} + \frac{y_0^1}{16240}\right)h^{10} + \left(\frac{y_0^1}{1440} + \frac{y_0^2}{1820}\right)h^9 + \left(\frac{13\,y_0^1}{2880} + \frac{13\,y_0^2}{1860}\right)h^8 +$$
$$\left(\frac{y_0^1}{85} + \frac{y_0^2}{64}\right)h^7 + \left(\frac{31\,y_0^2}{360} + \frac{24\,y_0^1}{360}\right)h^6 + \left(\frac{6\,y_0^1}{25} + \frac{4\,y_0^2}{15}\right)h^5 +$$
$$\left(\frac{2\,y_0^1}{3} + \frac{2\,y_0^2}{3}\right)h^4 + \left(\frac{4\,y_0^1}{7} + \frac{8\,y_0^2}{3}\right)h^3 + \left(2\,y_0^1 + 3\,y_0^2\right)h^2 + 2\,y_0^1\,h +$$

$$y_0^1.$$

Приведенные в данном приложении формулы сплайн-аппроксимаций решений демонстрируют процесс вычислений выражений, используемых нами для нахождения интервальных оценок множеств решений. Эти формулы приближают также оператор сдвига по траектории решений дифференциальных уравнений.

Приложение 2. Результаты расчетов и графики интервальных оценок множеств точных решений.

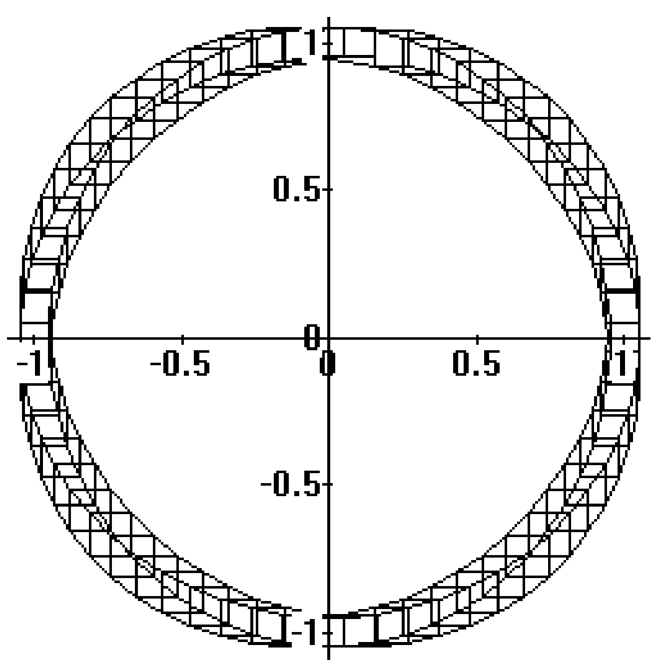
Для системы Мура [1], описанной в книге Мура, которую использовали в качестве тестовой авторы всех методов интервальных оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, мы получили практически точные по каждой координате вектора решений оценки. На фазовой плоскости множество решений системы

$$y' = Ay, \tag{3.2}$$

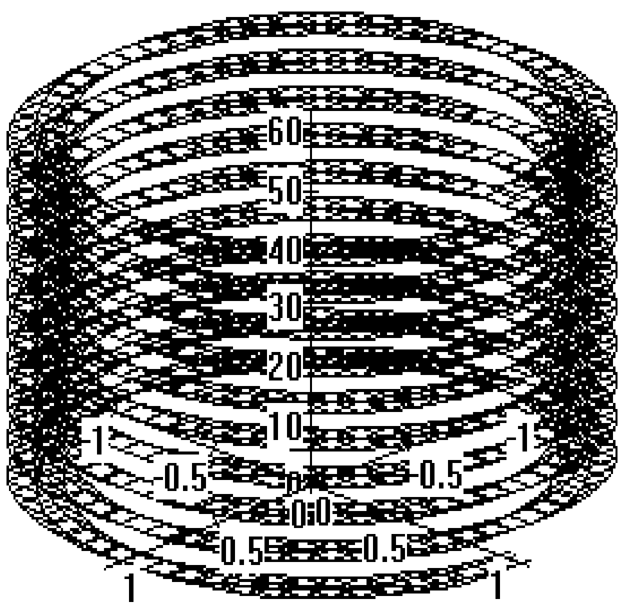
где $y-$ вектор размерности два, $A-$ матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

с интервальными начальными данными $y^1 \in [-0.1, 0.1], \quad y^2 \in [0.9, 1.1]$, представляет движущийся по концентрическим окружностям квадрат и поворачивающийся относительно координатных осей. Для большинства методов, гарантирующих точное включение множества решений, сторона этого квадрата увеличивается после $k-$ оборотов в $e^{2\pi k}$ раз, то есть после первого оборота почти в 600 раз. В нашем случае мы получаем практически точное включение поворачивающегося квадрата после одного оборота, что изображено на рисунке 1. Здесь по оси абсцисс отложена y^1 по оси ординат y^2.



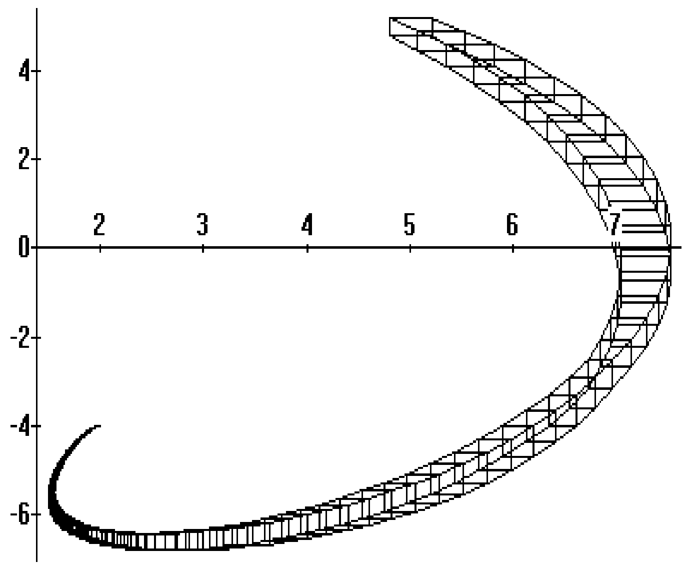
На рисунке 2 изображено поведение решений системы Мура после 60 оборотов, движения квадрата изображены на последовательности плоскостей, расположенных параллельно друг другу в направлении оси Z. Заметим, что время расчетов для оценки решений после 1000 оборотов в фазовом пространстве занимает 30 минут для ПК IBM PC 486 - SX и менее 8 минут для ПК IBM PC 486 - DX4.



На рисунке 3 показаны оценки решений системы

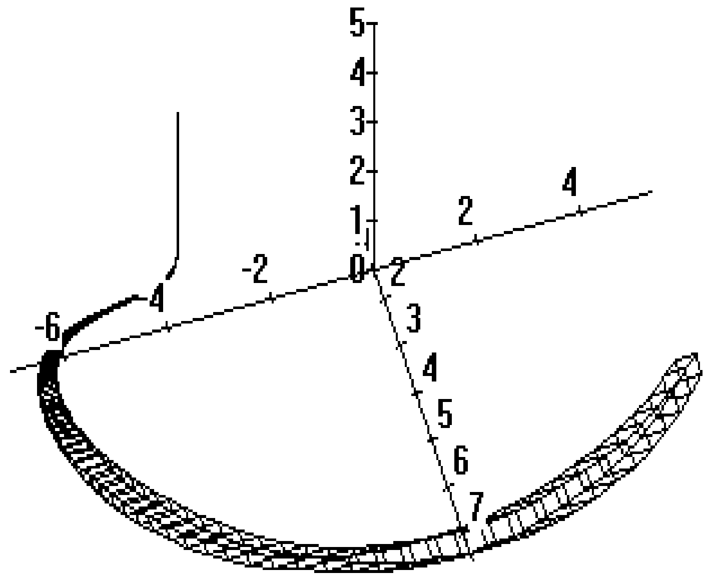
$$x' = xy - x + R,$$
$$y' = -x^2 - y,$$

приведенной в работе итальянского физика De Gregorio [72]. Отметим, что поведение решений этой системы характеризуется следующими свойствами. Если $(x_0, y_0$ –начальная точка, то решение содержится в сфере радиуса $r = max[R, (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}]$, где $R > 0$. Легко показать, что эта система имеет всегда только одно стационарное решение, которое устойчиво. Результаты интервального оценивания решений, полученные De Gregorio в [72] при различных значениях R, демонстрируют экспоненциальный рост границ этих оценок. Полученные в нашем методе оценки решений этой системы при начальном интервале $x \in [4.9, 5.1], \quad y \in [4.4, 4.6]$ сходятся в одну точку, что легко увидеть на рисунке 3.



4
2
0
-2
-4
-6
2
3
4
5
6
7

На рисунке 4 представлены графики для тех же оценок, но с изображением оси t, направленной вверх.



На рисунке 5 показаны оценки решений системы Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ \epsilon y' &= y - (1/3)y^3 - x, \end{aligned}$$

здесь $\epsilon > 0$ малый параметр.

Известно, что в ней устанавливается периодический режим–колебания, известные под наименованием релаксационных, характерной чертой которых наличие участков, где траектория резко меняет направление–релаксационыых участков. Для того, чтобы численно определить релаксационные участки траекторий, необходимо интегрировать систему с шагом много меньшеϵ. Поведение интервальных оценок, полученных по нашему алгоритму при $\epsilon = 0.01$ приведены на рисунке 5. Время расчетов составило 20 секунд.