Ащепков Л.Т, Давыдов Д.В. Редукции интервальных бескоалиционных игр // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 11. С 2001-2008.

УДК 519.8

РЕДУКЦИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГР*

© 2006 г. Л.Т. АЩЕПКОВ, Д. В. ДАВЫДОВ

(690041, Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН)

Рассматриваются бескоалиционные игры конечного числа лиц с интервальнозначными функциями выигрыша. Вводится понятие равновесной ситуации. Предлагается редукция игр к детерминированным бескоалиционным играм. Выясняются свойства редуцированных игр. Исследуются интервальные антагонистическе и биматричные игры. Приводятся иллюстративные примеры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория бескоалиционных игр хорошо разработана и широко представлена в научной и учебной литературе (см., например, [1-6]). Основные результаты группируются вокруг вопросов определения, существования, идентификации, нахождения и выделения предпочтительных равновесных ситуаций. Классическое понятие равновесия [6] исходит из однозначности функций выигрышей игроков. Если модель игры допускает многозначность выигрышей, то понятие равновесия требует изменения, учитывающего природу многозначности и степень информированности игроков. К примеру, в теории стохастических игр полагается, что многозначность выигрышей обусловлена действием случайных факторов. Законы распределения этих факторов считаются известной игрокам дополнительной информацией. Для определения и изучения равновесия используется аппарат теории вероятностей. Теория игр с «природой» базируется на другом предположении, что неоднозначность выигрышей связана с объективной неопределенностью оценок действий игроков.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-012).

Дополнительная информация о распределении выигрышей отсутствует, поэтому такую неопределенность характеризуют как «безнадежную». Равновесие трактуется в терминах гарантированных выигрышей. Многочисленные примеры игр с безнадежными неопределенностями поставляют прикладные экономические и социальные науки, в которых выбор критериев и получение объективных оценок действий участников конфликтов представляют сложную самостоятельную проблему.

Одним из эффективных инструментов исследования различных математических моделей в условиях неопределенности является интервальный анализ. Созданный первоначально для потребностей вычислительной математики он стал активно использоваться в теории управления [7-10], исследовании операций [11-14] и теории игр [15,16]. Данная работа посвящена применению интервального анализа к бескоалиционным играм нескольких участников с безнадежной многозначностью выигрышей. Другими словами, модель игры допускает, что выигрышем каждого участника может быть любое вещественное число из некоторого интервала и дополнительная информация о распределении выигрышей внутри этого интервала отсутствует. Для определения равновесных ситуаций используются методы интервального анализа и новая процедура частичного упорядочивания интервалов. Она дает возможность свести исходную игру к новой детерминированной игре и использовать для решения известные или модифицированные результаты классической теории [2].

2. МОДЕЛЬ ИГРЫ

Предметом нашего внимания будет интервальная бескоалиционная игра

$$\mathbf{\Gamma}_n = \left\langle X_1, X_2, ..., X_n, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, ..., \mathbf{H}_n \right\rangle \tag{2.1}$$

с множеством $N = \{1, 2, ..., n\}$ игроков. Согласно ее правилам, игроки $i \in N$ независимым выбором соответствующих стратегий x_i из множеств X_i формируют ситуацию $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в игре. Когда ситуация x полностью сформирована, каждый игрок i получает в качестве выигрыша некоторое вещественное число из интервала

$$\mathbf{H}_i(x) = [H_{i0}(x) - \Delta H_i(x),\, H_{i0}(x) + \Delta H_i(x)]. \tag{2.2}$$

Все интервальнозначные функции (2.2) предполагаются заданными на множестве ситуаций $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Цель каждого игрока $i \in N$ заключается в «максимизации» своей функции выигрышей $\mathbf{H}_i(x)$ выбором стратегии $x_i \in X_i$. Требуется придать понятию максимизации формальный смысл и указать способы нахождения «максимизирующих» стратегий игроков.

В модели игры отметим две важные детали. Во-первых, для *вырожденных* интервалов (2.2) с *нулевыми радиусами* игра (2.1) превращается в известную [2] бескоалиционную игру

$$\Gamma_{n0} = \left\langle X_1, X_2, ..., X_n, H_{10}, H_{20}, ..., H_{n0} \right\rangle. \tag{2.3}$$

Ее можно назвать *центральной*, поскольку она формируется из центров интервалов (2.2). Как будет видно из дальнейшего, центральная игра (2.3) играет важную роль для характеристики равновесий исходной игры (2.1). Во-вторых, по правилам игры стратегии игроков оцениваются интервалами, и при таком уровне неопределенности выигрышей требовать нахождения их точных значений было бы неразумно. Конечно, не исключен вариант, когда игроков интересуют гарантированные выигрыши. В этом случае вместо игры $\mathbf{\Gamma}_n$ имеет смысл рассматривать обычную бескоалиционную игру, полученную из (2.1) заменой интервалов $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, ..., \mathbf{H}_n$ их левыми концами.

3. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Стратегические предпочтения игроков в игре $\mathbf{\Gamma}_n$ формируются путем сравнения интервалов выигрышей, поэтому остановимся на вопросе упорядочивания интервалов подробнее.

В работе [17] неравенство $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ для вещественных замкнутых интервалов $\mathbf{u} = [u_0 - \Delta u, u_0 + \Delta u]$, $\mathbf{v} = [v_0 - \Delta v, v_0 + \Delta v]$ определяется в «сильном», «слабом» и «центральном» смыслах:

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; ((\forall u \in \mathbf{u})\,(\forall v \in \mathbf{v})\,(u \leq v)), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; ((\exists u \in \mathbf{v})\,(\exists v \in \mathbf{v})\,(u \leq v)), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; (u_0 \leq v_0). \tag{3.3}$$

Согласно сильному определению (3.1), интервал $\mathbf{u}$ на числовой прямой находится левее интервала $\mathbf{v}$ и может иметь с ним не более одной общей точки. Слабое определение (3.2) допускает пересечение интервалов, при этом интервал $\mathbf{u}$ может лежать правее $\mathbf{v}$. Центральное определение (3.3) упорядочивает интервалы по центрам независимо от радиусов. В работе [14] используется сильное определение, в остальных случаях интервалы считаются несравнимыми.

Взглянем на проблему упорядочивания интервалов с другой точки зрения. Назовем вещественное число

$$R(\mathbf{u} \le \mathbf{v}) = (v_0 - u_0) \big/ (\Delta u + \Delta v) \tag{3.4}$$

показателем интервального неравенства $\mathbf{u} \le \mathbf{v}$. Геометрический смысл показателя ясен из приведенного ниже рисунка и пояснений к нему.

При $R(\mathbf{u} \le \mathbf{v}) < -1$ весь интервал $\mathbf{u}$ лежит правее интервала $\mathbf{v}$. Если $|R(\mathbf{u} \le \mathbf{v})| \le 1$, то $\mathbf{u}$ имеет с $\mathbf{v}$ общее пересечение относительной меры $|R(\mathbf{u} \le \mathbf{v})|$. В случае $R(\mathbf{u} \le \mathbf{v}) > 1$ весь интервал $\mathbf{u}$ находится левее $\mathbf{v}$. Приведенные выше сильное слабое и центральное определения соответствует случаям $R(\mathbf{u} \le \mathbf{v}) \ge 1$, $R(\mathbf{u} \le \mathbf{v}) \ge -1$ и $R(\mathbf{u} \le \mathbf{v}) \ge 0$.

Рис. Изображены пересекающиеся интервалы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ на числовой прямой. Точки u, v этих интервалов удовлетворяют неравенству $u \le v$, если принадлежат соответствующим отрезкам $[u_0 - \Delta u, v_0 - \Delta v]$ и $[u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v]$. Отношение общей длины данных отрезков к общей длине интервалов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ с точностью до знака совпадает с показателем (3.4)

Не останавливаясь подробно на вытекающих из (3.4) свойствах показателя, отметим лишь одно, связанное с вероятностной трактовкой интервалов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ как континуумов возможных реализаций независимых случайных величин u, v. Тогда показателю $\rho = R(\mathbf{u} \le \mathbf{v})$ неравенства $\mathbf{u} \le \mathbf{v}$ можно соотнести вероятность $p = P(\mathbf{u} \le \mathbf{v})$ события

$$\mathbf{u} \le \mathbf{v} = \{(u,v) \in \mathbf{u} \times \mathbf{v} : u \le v\} \ .$$

В предположении равномерности распределения случайных величин u, v и невырожденности интервалов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ имеем

$$p = \alpha(1+\rho)^2, \quad -1 \le \rho < -\rho_1 ; \quad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta v}\rho\right), \quad |\rho| \le \rho_1 ; \tag{3.5}$$

$$p = 1 - \alpha(1-\rho)^2, \quad \rho_1 < \rho \le 1 , \tag{3.6}$$

где

$$\alpha = \frac{(\Delta u + \Delta v)^2}{8 \Delta u \Delta v}, \quad \rho_1 = \frac{|\Delta u - \Delta v|}{\Delta u + \Delta v}. \tag{3.7}$$

Формулы (3.5) – (3.7) задают на отрезке [-1,1] строго возрастающую непрерывную функцию с непрерывной первой производной. Таким образом, каждому интервальному неравенству с показателем $|\rho| \le 1$ можно придать определенную вероятностную трактовку.

4. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ

Пусть x^* - некоторая ситуация в игре (2.1). Следуя [6], обозначим символом $x^* \| x_i = (x_1^*, \ldots x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots x_n^*)$ новую ситуацию, полученную из x^* заменой стратегии x_i^* на x_i. Очевидно, $x^* \| x_i^* = x^*$, $i \in N$. Ситуацию x^* назовем *приемлемой* для игрока i, если она обеспечивает ему предпочтительный интервал выигрышей $\mathbf{H}_i(x^*)$ с заданным показателем ρ_i или, другими словами, если

$$R(\mathbf{H}_i(x^* \| x_i) \le \mathbf{H}_i(x^*)) \ge \rho_i \tag{4.1}$$

для любой стратегии $x_i \in X_i$. С помощью формулы (3.4) представим требование (4.1) в равносильном виде

$$H_{i0}(x^*) - \rho_i \Delta H_i(x^*) \geq H_{i0}(x^* \| x_i) + \rho_i \Delta H_i(x^* \| x_i), \quad x_i \in X_i. \qquad (4.2)$$

Для того чтобы неравенство (4.2) выполнялось с положительной вероятностью и было справедливым при $x_i = x_i^*$, примем $-1 < \rho_i \leq 0$. Вектор $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ из куба $(-1,0]^n$ назовем вектором *показателей*.

Пусть $\rho \in (-1,0]^n$. Ситуацию x^* определим как *ρ-равновесную* в игре $\mathbf{\Gamma}_n$, если она приемлема для каждого игрока $i \in N$. Как видно, множество $X^*(\rho)$ ρ-равновесных ситуаций игры (2.1) образовано всеми решениями x^* неравенств (4.2) при любых $x_i \in X_i$ и $i \in N$.

Приведем вытекающие из определения свойства множества $X^*(\rho)$.

Свойство 1. $X^*(\rho^1) \supset X^*(\rho^2)$, *если векторы показателей* ρ^1, ρ^2 *покоординатно удовлетворяют неравенству* $\rho^1 \leq \rho^2$.

Свойство 2. *Множество* $X^*(0)$ *есть общая часть всех множеств* $X^*(\rho),\ \rho \in (-1,0]^n$.

Свойство 3. *Множество* $X^*(\rho)$ *содержит каждую равновесную по Нэшу ситуация неинтервальной бескоалиционной игры*

$$\Gamma_n(\rho) = \langle X_1, X_2, ..., X_n, H_{10} - \rho_1 \Delta H_1, H_{20} - \rho_2 \Delta H_2, ..., H_{n0} - \rho_n \Delta H_n \rangle. \qquad (4.3)$$

Игра (4.3) при $\rho = 0$ совпадает с центральной игрой (2.3) По свойствам 1, 2 игра $\Gamma_n(0)$ имеет наименьшее по включению множество

$X^*(0)$ 0-равновесных ситуаций. Как следует из неравенства (4.2), 0-равновесные ситуации есть обычные равновесные по Нэшу ситуации центральной игры Γ_{n0}. Любая из них удовлетворяет интервальным неравенствам (4.1) с наибольшей нижней оценкой показателя ρ_i. В этом смысле игру Γ_{n0} можно считать предпочтительной редукцией интервальной игры (2.1). Подведем итоги.

Для заданного вектора показателей $\rho \in (-1,0]^n$ *нахождение* ρ-*равновесных ситуаций* $x^* \in X^*(\rho)$ *интервальной игры (2.1) сводится к решению системы неравенств (4.2) при любых* $i \in N$. *Центральная редуцированная игра* Γ_{n0} *вида (2.3) предпочтительна для игроков из соображений «узости» множества равновесных ситуаций* $X^*(0)$ *и «максимальности» отвечающих им показателей интервальных неравенств (4.1).*

Полезно отметить, что редуцированные игры (2.3), (4.3) наследуют аналитические свойства центров и радиусов интервалов (2.2) (непрерывность, вогнутость и выпуклость по совокупности или отдельным группам аргументам). Поэтому известные [2] достаточные условия существования равновесных стратегий для редуцированных игр можно формулировать в терминах исходной интервальной игры как достаточные признаки ее разрешимости. Например, в игре $\mathbf{\Gamma}_n$ 0-равновесные ситуации существуют, если множества стратегий игроков - выпуклые компакты конечномерных пространств, а центры интервалов (2.2) - непрерывные на множестве ситуаций функции, вогнутые по соответствующим аргументам на множестве стратегий каждого игрока.

В заключение раздела остановимся на характеристике условий равновесности для двух важных частных случаях интервальных игр, когда радиусы интервалов выигрышей 1) постоянны ($\Delta H_i(x) = \delta_i > 0,\ i \in N$) и 2) пропорциональны своим центрам ($\Delta H_i(x) = \alpha_i H_{i0}(x) > 0,\ i \in N$) с постоянными множителями пропорциональности $\alpha_i > 0,\ i \in N$. Можно сказать, что в этих случаях игра (2.1) задана с постоянными абсолютными или относительными ошибками. В первом случае условие равновесности (4.2) примет вид

$$H_{i0}(x^*) \ge H_{i0}(x^* \| x_i) + 2\delta_i \rho_i, \quad x_i \in X_i,\ i \in N. \tag{4.4}$$

Если вектор ρ имеет малую норму, все функции H_{i0} непрерывны на X и X - компактное подмножество конечномерного пространства, то множество равновесных стратегий $X^*(\rho)$ содержит малую окрестность множества $X^*(0)$. Во втором случае неравенство (4.2) запишется в виде

$$(1-\alpha_i\rho_i)H_{i0}(x^*) \ge (1+\alpha_i\rho_i)H_{i0}(x^* \| x_i),\ x_i \in X_i, \quad x_i \in X_i,\ i \in N \tag{4.5}$$

и из (4.5) следуют аналогичные выводы.

5. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Рассмотрим биматричную игру $\mathbf{\Gamma}_2 = \langle X, Y, \mathbf{H}, \text{-}\mathbf{H} \rangle$. Интервальные функции

$$\mathbf{H}(x, y) = [H_0(x, y) - \Delta H(x, y),\ H_0(x, y) + \Delta H(x, y)], \qquad (5.1)$$

$$\text{-}\mathbf{H}(x, y) = [-H_0(x, y) - \Delta H(x, y), - H_0(x, y) + \Delta H(x, y)], \qquad (5.2)$$

выигрышей игроков полагаем заданными на множестве $Z = X \times Y$ ситуаций $z = (x, y)$.

Пусть $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ - вектор показателей из квадрата $(-1, 0]^2$. Согласно (4.1), ρ-равновесная ситуации (x^*, y^*) удовлетворяет неравенствам

$$R(\mathbf{H}(x, y^*) \le \mathbf{H}(x^*, y^*)) \ge \rho_1, \quad R(-\mathbf{H}(x^*, y) \le -\mathbf{H}(x^*, y^*)) \ge \rho_2. \qquad (5.3)$$

для любых $x \in X$, $y \in Y$. Отсюда с использованием формулы (3.4) получим условия равновесности

$$H_0(x, y^*) + \rho_1 \Delta H(x, y^*) \le H_0(x^*, y^*) - \rho_1 \Delta H(x^*, y^*), \quad x \in X, \qquad (5.4)$$

$$H_0(x^*, y^*) + \rho_2 \Delta H(x^*, y^*) \le H_0(x^*, y) - \rho_2 \Delta H(x^*, y), \quad y \in Y. \qquad (5.5)$$

Множество всех ρ-равновесных ситуаций обозначим $Z^*(\rho)$. Легко видеть, что $Z^*(\rho)$ наследует свойства 1, 2 множества $X^*(\rho)$. Если $\rho = 0$, то наименьшее по включению множество $Z^*(0)$ состоит из обычных седловых точек функции H_0 на Z.

Отождествим биматричную игру $\mathbf{\Gamma}_2 = \langle X, Y, \mathbf{H}, \text{-}\mathbf{H} \rangle$ с интервальной антагонистической игрой $\mathbf{\Gamma} = \langle X, Y, \mathbf{H} \rangle$. В силу интервальности функций выигрышей она отличается от классической антагонистической игры тем, что сумма выигрышей игроков в любой ситуации (x, y) принадлежит отрезку $[-2\Delta H(x, y),\ 2\Delta H(x, y)]$ и не обязательно равна нулю.

Как видно*, для заданного вектора* $\rho \in (-1,0]^2$ *множество* $Z^*(\rho)$ *всех* ρ*-равновесных ситуаций* $(x^*,\ y^*)$ *антагонистической игры* $\mathbf{Г}$ *определяются неравенствами (5.4), (5.5) и содержит седловые точки обычной антагонистической игры* $\Gamma_0 = \langle X, Y, H_0 \rangle$. *Игра* Γ_0 *характеризуется наименьшим множеством седловых точек и максимальностью показателей неравенств (4.5), определяющих предпочтительные интервалы выигрышей.*

Пример 1. Рассмотрим интервальный вариант

$$\mathbf{H}(x, y) = [(x-y)^2 - \delta,\ (x-y)^2 + \delta)],\ X = Y = [0,1]$$

известной [6] игры «уклонения-сближения» игроков. Параметр $\delta > 0$ можно трактовать как абсолютную погрешность определения квадрата расстояния между стратегиями (положениями) x и y игроков на числовой прямой. Непосредственной проверкой убеждаемся $Z^*(0) = \varnothing$. Найдем вектор $\rho \in (-1,0]^2$ так, чтобы сумма его координат $\rho_1 + \rho_2$ была максимальна и $Z^*(\rho) \neq \varnothing$. Согласно (5.4), (5.5), искомые ситуации $(x^*,\ y^*)$ должны удовлетворять неравенствам

$$(x-y^*)^2 + 2\delta\rho_1 \le (x^*-y^*)^2 \le (x^*-y)^2 - 2\delta\rho_2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \qquad (5.7)$$

Отсюда в силу произвольности стратегий x, y получим

$$2\delta\rho_1 \le (x^*-y^*)^2 - \max_x (x-y^*)^2,\ \ 2\delta\rho_2 \le -(x^*-y^*)^2 + \min_y (x^*-y)^2,$$

следовательно,

$$2\delta(\rho_1 + \rho_2) \le -\max_x (x-y^*)^2 + \min_y (x^*-y)^2 \le -0.25\,, y^* = 0.5.$$

При $\rho_1 = 0,\ \rho_2 = -0.125\delta^{-1}$ неравенствам (5.7) удовлетворяют $x^* = 0$ или x^* = 1. Очевидно, вектор $\hat{\rho} = (0, -0.125\delta^{-1})$ имеет максимальную сумму координат и множество $Z^*(\hat{\rho})$ состоит из двух равновесных ситуаций (0, 0.5), (1, 0.5).

6. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

По традиции игру $\mathbf{\Gamma}_2 = \langle X_1, X_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \rangle$ с двумя участниками и конечными множествами стратегий X_1, X_2 назовем интервальной *биматричной* игрой. Не теряя общности, будем считать стратегиями игроков натуральные числа множеств $I = \{1, 2, ..., m\}$, $J = \{1, 2, ..., n\}$ и выигрышами игроков в ситуациях $(i, j) \in I \times J$ элементы

$$\mathbf{a}_{ij} = [a_{ij0} - \Delta a_{ij},\ a_{ij0} + \Delta a_{ij}], \quad \mathbf{b}_{ij} = [b_{ij0} - \Delta b_{ij},\ b_{ij0} + \Delta b_{ij}] \tag{6.1}$$

интервальных $m \times n$-матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Как и прежде, цели игроков состоят в максимизации неопределенных выигрышей $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}$ выбором своих *чистых* стратегий $i \in I, j \in J$. Интервальную биматричную игру в чистых стратегиях обозначим $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

5.1. **Чистые равновесные ситуации**. Конечность множеств стратегий позволяет определить чистую равновесную ситуацию в биматричной игре по-другому. Припишем каждой ситуации (i, j) максимальное число ρ_{ij}, удовлетворяющее неравенствам

$$R(\mathbf{a}_{i_1 j} \le \mathbf{a}_{ij}) \ge \rho_{ij},\ i_1 \in I \setminus i; \quad R(\mathbf{b}_{ij_1} \le \mathbf{b}_{ij}) \ge \rho_{ij},\ j_1 \in J \setminus j.$$

Наибольшее из чисел ρ_{ij} по всем ситуациям $(i,j) \in I \times J$ обозначим $\rho*$. Ситуацию $(i*, j*)$ назовем *равновесной с показателем* $\rho*$, если

$$R(\mathbf{a}_{ij*} \leq \mathbf{a}_{i*j*}) \geq \rho*,\ i \in I \setminus i*;\quad R(\mathbf{b}_{i*j} \leq \mathbf{b}_{i*j*}) \geq \rho*,\ j \in J \setminus j*. \qquad (6.2)$$

Существование равновесных ситуаций сомнений не вызывает, интерпретации зависят от значений показателя $\rho*$. Если $\rho* \geq 1$, то ситуация $(i*, j*)$ *устойчиво* равновесна: она удовлетворяет классическим условиям равновесия [6] в обычной биматричной игре $\Gamma(A,B)$ при любых $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$. Максимальность показателя $\rho*$ в формуле (6.2) частично снимает проблему не единственности равновесных ситуаций. При $|\rho*| < 1$ ситуацию $(i*, j*)$ можно считать наиболее вероятной в силу отмеченной ранее связи вероятности и показателя выполнения интервального неравенства. При $\rho* \leq -1$ для каждой равновесной ситуации найдется другая ситуация с лучшим выигрышем хотя бы для одного игрока. В этом случае определение равновесия в чистых стратегиях лишено игрового смысла и возникает необходимость перехода к новой игре в смешанных стратегиях.

Игру $\mathbf{\Gamma(A) = \Gamma(A, -A)}$ назовем интервальной *матричной* игрой. Для матричной игры $\mathbf{\Gamma(A)}$ условие (6.2) равновесности ситуации $(i*, j*)$ с наибольшим показателем $\rho*$ примет вид

$$\rho* \leq R(\mathbf{a}_{ij*} \leq \mathbf{a}_{i*j*}),\ R(\mathbf{a}_{i*j*} \leq \mathbf{a}_{i*j}) \leq -\rho*,\ i \in I \setminus i*,\ j \in J \setminus j*. \qquad (6.3)$$

Пример 2. Рассмотрим при $0 < a < 1$ интервальный вариант

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2-a, 2+a] & [-a, a] \\ [-a, a] & [1-a, 1+a] \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1-a, 1+a] & [-a, a] \\ [-a, a] & [2-a, 2+a] \end{pmatrix},$$

биматричной игры «семейный спор» [2], допуская одинаковую неопределенность оценок морального удовлетворения игроков исходами игры. Непосредственными вычислениями находим $\rho_{12} = \rho_{21} = -a^{-1}$, $\rho_{11} = \rho_{22} = (2a)^{-1}$. Требованию (6.2) удовлетворяют две чистые равновесные ситуации (1, 1) и (2, 2) с показателем $\rho^* = (2a)^{-1}$. При $0 < a \le 0.5$ эти ситуации *устойчиво* равновесны, при $0.5 < a < 1$ - наиболее вероятны.

Пример 3. Рассмотрим модифицированную модель

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1.5, -0.5] & [-11, -9] \\ 0 & [-7, -5] \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [-1.5, -0.5] & 0 \\ [-11, -9] & [-7, -5] \end{pmatrix}$$

известной биматричной игры «дилемма заключенного» [2], учитывая неоднозначность срока наказания за преступление в уголовно-процессуальных кодексах большинства стран. Здесь единственная чистая равновесная ситуация (2, 2) с показателем $\rho^* = 2$ (вероятностью 1) отвечает условию равновесности (6.2).

Пример 4. Построим интервальное расширение

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-100(1+\alpha), -100(1-\alpha)] & [50(1-\alpha),\ 50(1+\alpha)] \\ [100(1-\alpha),\ 100(1+\alpha)] & [-100(1+\alpha), -100(1-\alpha)] \end{pmatrix}$$

другой известной матричной игры «преследование Шерлока Холмса» [1]. Параметр α, $0 < \alpha < 1$ можно трактовать как относительную погрешность задания неопределенных выигрышей игроков. С использованием формулы

(6.3) легко проверить, что все ситуации в игре являются чистыми равновесными с общим показателем $\rho = -\alpha^{-1} < -1$.

5.2. **Смешанные равновесные ситуации.** Интервальную бескоалиционную игру $\mathbf{\Gamma}_2 = \langle X, Y, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \rangle$ с множествами стратегий

$$X = \{x \in R^m : e'x = 1,\ x \ge 0\},\ Y = \{y \in R^n : e'y = 1,\ y \ge 0\} \tag{6.4}$$

и функциями выигрышей

$$\mathbf{H}_1(x,y) = x'\mathbf{A}y = \{x'Ay :\ A \in \mathbf{A}\},\ \mathbf{H}_2(x,y) = x'\mathbf{B}y = \{x'By :\ B \in \mathbf{B}\} \tag{6.5}$$

будем называть *смешанным расширением* игры $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и обозначать $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A},\mathbf{B} \rangle$. В формулах (6.4), (6.5) участвующие в операциях векторы - столбцевые, штрих – операция транспонирования, e - вектор с единичными координатами, $e'x$ - скалярное произведение векторов e и x (сумма координат x), Все векторные неравенства понимаются покоординатно. Вектора x, y из множеств (6.4) будем называть *смешанными* стратегиями игроков. Они имеют такую же вероятностную интерпретацию, как в обычной биматричной игре [1].

Перейдем к определению и изучению равновесных ситуаций игры $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A},\mathbf{B} \rangle$. Введем $m \times n$-матрицы $A_0,\ \Delta A,\ B_0,\ \Delta B$, составленные из центров и радиусов интервалов (6.1). В силу (6.5) для каждой ситуации $(x,y) \in X \times Y$ имеем

$$\mathbf{H}_1(x,y) = [x'(A_0 - \Delta A)y,\ x'(A_0 + \Delta A)y],\ \ \mathbf{H}_2(x,y) = [x'(B_0 - \Delta B)y,\ x'(B_0 + \Delta B)y].$$

Зафиксируем вектор показателей $\rho \in (-1,0]^2$. Согласно (4.2), ρ-равновесная ситуация (x^*, y^*) определяется условиями

$$x^{*\prime}(A_0 - \rho_1 \Delta A) y^* \geq x'(A_0 + \rho_1 \Delta A) y^*, \; x \in X, \tag{6.7}$$

$$x^{*\prime}(B_0 - \rho_2 \Delta B) y^* \geq x^{*\prime}(B_0 + \rho_2 \Delta B) y, \; y \in Y. \tag{6.8}$$

Свяжем с условиями (6.7), (6.8) две системы линейных неравенств и равенств

$$(A_0 - \rho_1 \Delta A) y \geq v_1 e \geq (A_0 + \rho_1 \Delta A) y, \; y \in Y, \tag{6.9}$$

$$(B_0 - \rho_2 \Delta B)' x \geq v_2 e \geq (B_0 + \rho_2 \Delta B)' x, \; x \in X \tag{6.10}$$

с неизвестными y, v_1 и x, v_2 и отметим некоторые их свойства и связь с решением биматричной игры.

Свойство 4. *Если для заданного вектора* $\rho \in (-1,0]^2$ *существует пара* (y^*, v_1^*), (x^*, v_2^*), *удовлетворяющая условиям (6.9) и (6.10), то* (x^*, y^*) *-* ρ*-равновесная ситуация в игре* $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$.

Действительно, по предположению для первой пары имеем

$$(A_0 - \rho_1 \Delta A) y^* \geq v_1^* e \geq (A_0 + \rho_1 \Delta A) y^*.$$

Умножив левое неравенство скалярно на вектор $x^* \in X$ и правое – на произвольную стратегию $x \in X$, получим соотношение (6.7). Аналогично с помощью условий (6.10) убеждаемся, что вектор y^* удовлетворяет соотношению (6.8).

Свойство 5. *Если* $\rho \in (-1,0]^2$, *то для совместности условий (6.9) и (6.10) достаточно, чтобы системы линейных уравнений*

$$A_0 y - v_1 e = 0, \; e'y = 1; \quad B_0' x - v_2 e = 0, \; e'x = 1 \tag{6.11}$$

имели решения $x \geq 0,\ y \geq 0$.

Свойство 6. *Любые решения* $y^* \geq 0$, $v_1^* = x^{*\prime} A_0 y^*$ *и* $x^* \geq 0$, $v_2^* = x^{*\prime} B_0 y^*$ *систем уравнений (6.11) образуют равновесную ситуацию* (x^*, y^*) *в обычной биматричной игре* $\Gamma\langle A_0, B_0\rangle$. *Соответствующие ситуации числа* $v_1^*,\ v_2^*$ *- наиболее вероятные выигрыши игроков в интервальной биматричной игре* $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle$.

Проверка свойств 3-6 не представляет труда.

Пример 5. Построим по игре «преследование Шерлока Холмса» из примера 4 биматричную игру $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A}, \text{-}\mathbf{A}\rangle$. Применив к ней лемму 3, найдем наиболее вероятное смешанное равновесие $x^* = (4/7, 3/7)$, $y^* = (3/7, 4/7)$, $v_1^* = -v_2^* = -100/7$, которое совпадает с приведенным в монографии [1].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в статье результаты и примеры показывают, что новое понятие показателя интервального неравенства может быть полезным при изучении игр с интервальной неопределенностью выигрышей. Благодаря показателю появляется возможность ввести во множестве выигрышей отношение частичного порядка и определить равновесные ситуации игры. Условия равновесности отличаются от ранее известных меньшей жесткостью и большей параметризованностью, что ведет к расширению множества равновесных ситуаций. В результате оно становится непустым, и у игроков появляются дополнительные возможности для нахождения компромисса.

Компромиссу в игре способствует и рациональный выбор вектора показателей. Каждая его координата определяет вероятность, с которой соответствующий игрок находит свою равновесную стратегию. Очевидно, все игроки одинаково заинтересованы в формировании «надежной» равновесной ситуации, поэтому им выгодно выбрать все координаты вектора показателей равными. Тогда множество равновесных ситуаций и предпочтительные интервалы выигрышей становятся функциями одного аргумента, что упрощает поиск компромиссного равновесия. Центральная игра и служит примером логического завершения этих соображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
2. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
3. *Nash John.* Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. № 2. P. 286-295. Рус. пер. : Матричные игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1961. С.205-221.
4. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1960.
5. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.
6. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998.
7. *Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I, II // Известия АН. Техническая кибернетика. 1991. №1. С. 3-23. №2. С.3-30.
8. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами // Известия вузов. Математика.2002. № 2(477). С. 11-17.
9. *Ащепков Л.Т., Колпакова Г.Э., Стегостенко Ю.Б.* Стабилизация нестационарной линейной дискретной системы управления с интервальными коэффициентами по наблюдениям фазовых состояний // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 3-11.
10. *Давыдов Д.В.* Локальная стабилизация интервально наблюдаемой системы с неопределенными параметрами. // Вычислительные технологии. 2003. Том 8. № 1. С. 44-51.

11. *Ащепков Л.Т., Косогорова И.Б.* Минимизация квадратичной функции с интервальными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 5. С 653-664.
12. *Ащепков Л.Т., Милютин А.В.* Управление запасами с ограниченным сроком хранения в условиях интервальности спроса. Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (2-8 июля 2005 г., Иркутск-Северобайкальск). Т.4. Интервальный анализ. Иркутск: ИСЭМ СО РАН. 2005. С. 27-33.
13. *Домбровский В.В., Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса // Труды международной конференции RDAMM-2001. 2001. Т. 6. Часть 2. Спец. выпуск. С. 271-274.
14. *Левин В.И.* Сравнение интервальных величин и оптимизация неопределенных систем // Информационные технологии. 1998. № 7. С. 22-32.
15. *Ащепков Л.Т., Гуторова С.В., Карпачев А.А., Ли С.* Интервальные матричные игры // Дальневосточный математический журнал. 2003. № 2. С. 276-288.
16. *Шашихин В.Н.* Решение интервальной матричной игры в смешанных стратегиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 97-104.
17. *Rohn J., Kreslova J.* Linear interval inequalities // Linear and Multilinear Algebra. 1994. Vol. 38. P. 41-43.