Российская академия наук
Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет
Иркутский государственный университет путей сообщения
Иркутская государственная сельскохозяйственная академия
Братский государственный университет

Российский гуманитарный научный фонд

Всероссийская конференция

РАВНОВЕСНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Секция «Математическая экономика»
XIV Байкальская международная школа-семинар
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

2 – 8 июля 2008 г.
Иркутск, Байкал

Иркутск
2008

УДК 330.115

Р 13

Равновесные модели экономики и энергетики: Труды Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2 – 8 июля 2008 года.: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. – 635 стр.

ISBN 978-5-93908-052-1 (т.5)

В сборнике представлен широкий спектр работ по методическим проблемам, связанным с принятием и согласованием решений в экономике и энергетике, с вопросами пользования природными ресурсами и госрегулирования.

Обсуждаются вопросы теории рынков несовершенной конкуренции, равновесного программирования, потокораспределения, экономико-математических моделей, связанных с нахождением равновесия. Рассмотрен ряд экономических задач, решаемых с помощью методов оптимизации, агрегирования, дифференциального исчисления, теории оптимального управления и теории игр.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в соответствующих областях прикладной математики и экономики.

Труды подготовлены при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 08-02-14037г.

Ответственные за выпуск: *проф., д.т.н. Зоркальцев В.И.*
к.э.н. Айзенберг Н.И.

ISBN 978-5-93908-052-1 (т.5)

ОЦЕНКА РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

А.В. Панюков, А.Т. Латипова

Южно-Уральский Государственный университет, Челябинск
e-mail: a_panyukov@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрена проблема нахождения равновесия в модели Неймана (A, B), когда известны лишь интервалы, которым принадлежат элементы матриц модели. Показано, что в случае мультипликативной неопределенности как прямой, так и двойственный лучи Неймана определяются моделью Неймана с матрицами центров интервалов, а интервал числа Фробениуса модели – двумя задачами Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов.

Ключевые слова: модель Неймана, положение равновесия, прямой луч Неймана, двойственный луч Неймана, число Фробениуса, интервальная неопределенность.

Введение

Многоотраслевая модель экономики Дж. Фон Неймана оказала большое влияние на теорию экономического роста и накопления капитала, дала толчок интенсивному развитию современной математической экономики [1], [2]. Следует заметить, что общность модели Неймана состоит в ее применимости не только к анализу многоотраслевой экономики, но и к другим проблемам, в частности, к проблеме формирования бюджета продаж в условиях ценовой диверсификации [4]-[7].

Численные значения элементов матриц затрат и выпуска в фоннеймановских моделях получают на основе статистики и экспертных оценок, поэтому они могут иметь неопределенность, которая, скорее всего, будет интервальной.

В статье рассмотрена проблема нахождения равновесия в модели Неймана (A, B), когда известны лишь интервалы, которым принадлежат элементы матриц модели. Показано, что в случае мультипликативной неопределенности как прямой, так и двойственный лучи Неймана определяются моделью Неймана с матрицами центров интервалов, а интервал числа Фробениуса модели – двумя задачами Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов.

Положение равновесия в модели Неймана при точечных матрицах

Общим положением равновесия для модели Неймана (A, B), где A и B – заданные $m \times n$ матрицы затрат и выпуска с неотрицательными элементами ($A \geq 0$, $B \geq 0$), называют решение (λ, x, p) системы билинейных неравенств и уравнений

$$(A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0, \tag{1}$$

$$(A - \lambda B)^T p \geq 0,\ (p, e^n) = 1,\ p \geq 0. \tag{2}$$

Невырожденным положением равновесия рассматриваемой модели называют положение равновесия (λ, x, p), удовлетворяющее дополнительному условию

$$p^T A\, x > 0. \tag{3}$$

В данной работе мы ограничимся алгоритмами нахождения общего положения равновесия, т.е. решения (λ, x, p) системы (1)–(2).

Экстремальные допустимые значения λ могут быть найдены с помощью решения задач билинейной оптимизации

$$\underline{\lambda} = \min\left\{\lambda : \ (A - \lambda B)\, x \le 0, \ (x, e^m) = 1, \ x \ge 0\right\}, \tag{4}$$

$$\overline{\lambda} = \max\left\{\lambda : \ (A - \lambda B)^T p \ge 0, \ (p, e^n) = 1, \ p \ge 0\right\}. \tag{5}$$

Числа $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$ называют соответственно числом Неймана и числом Фробениуса модели Неймана. При этом число Неймана $\underline{\lambda}$ определяет максимальный темп сбалансированного роста, а число Фробениуса $\overline{\lambda}$ – минимальный темп сбалансированного роста и продуктивность модели [1], [2].

Векторы x, p в положении равновесия (λ, x, p) называют соответственно прямым и двойственным лучами Неймана, соответствующими значению λ.

Исходя из равенств (1), (2) и (5), для оценки продуктивности модели, т.е. нахождения числа Фробениуса $\overline{\lambda}$ а также характеристик устойчивого равновесия, можно использовать следующую задачу билинейного программирования

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A,B)} \lambda, \tag{6}$$

$$D(A,B) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (A - \lambda B)x \le 0, (A - \lambda B)^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\} \tag{7}$$

Численные методы решения задачи (6)–(7) рассмотрены в работе [9]. Они базируются на вычислении корней монотонной функции

$$u(\lambda) = \min_{x:\,(x,e^m)=1,\, x \ge 0} \quad \max_{i=1,2,\dots n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \lambda b_{ij})\, x_j$$

или

$$v(\lambda) = \max_{w:\,(w,e^n)=1,\, w \ge 0} \quad \min_{j=1,2,\dots m} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lambda b_{ij})\, w_i$$

при различных значениях λ.

При фиксированном значении λ значения функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ равны значениям следующих взаимно двойственных задач линейного программирования

$$\min\left\{u : \ (A - \lambda B)\, x \le u, \ (x, e^m) = 1, \ x \ge 0\right\}, \tag{8}$$

$$\max\left\{v : \ (A - \lambda B)^T w \ge v, \ (w, e^n) = 1, \ w \ge 0\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, упомянутый алгоритм требует решения последовательности задач линейного программирования (8) и/или (9).

Легко заметить, что при значениях λ близких к искомым, т.е. когда $u(\lambda), \ v(\lambda) \ \to 0$, соответствующие задачи становятся вырожденными, что влечет невозможность их решения с помощью традиционных средств, использующих вычисления с плавающей точкой.

Для устойчивого нахождения корней функций $u(\lambda)$ и $u(\lambda)$ можно применить методы теории матричных игр.

Оценка положения равновесия при интервальных матрицах

Далее обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ матрицы затрат и выпуска, элементами которых являются числовые интервалы. Через $\mathrm{mid}\mathbf{A}$ и $\mathrm{mid}\mathbf{B}$ обозначим точечные матрицы, элементами которых являются центры интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Через $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ обозначим точечные матрицы, состоящие из нижних границ интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно; а через $\overline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ - точечные матрицы, состоящие из верхних границ интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно [8].

Теорема 1. *Пусть β_A и β_B удовлетворяют условиям*

$$\tilde{A} = \beta_A \cdot \mathrm{mid}\mathbf{A} \in \mathbf{A},\ \ \tilde{B} = \beta_B \cdot \mathrm{mid}\mathbf{B} \in \mathbf{B};$$

пусть также

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})} \lambda\ .$$

Тогда

$$\left(\frac{\lambda^* \beta_A}{\beta_B},\ x^*,\ w^*\right) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda\ .$$

Доказательство. Задача определения параметров равновесия для модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$ имеет вид

$$(\tilde{\lambda}^*, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\tilde{\lambda}, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \tilde{\lambda}, \tag{10}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\tilde{\lambda}, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})x \le 0, (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \tilde{\lambda} \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Сделав в задаче (10)–(11) замену переменной $\tilde{\lambda} = \lambda\beta_A/\beta_B$, получим:

$$(\lambda^*, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda, \tag{12}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})x \le 0, \\ (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{13}$$

Переписав задачу (12)–(13) с учетом условия теоремы в терминах матриц $\mathrm{mid}\mathbf{A}$ и $\mathrm{mid}\mathbf{B}$, будем иметь равносильную задачу

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathrm{B})} \lambda, \tag{14}$$

$$D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathrm{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda\mathrm{mid}\mathrm{B})x \le 0, \\ (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda\mathrm{mid}\mathrm{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{15}$$

Полученная задача совпадает с задачей нахождения параметров (λ^*, x^*, w^*) для точечной модели Неймана $(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})$. Учитывая сделанную замену переменных, приходим к заключению, что кортеж $(\lambda^*\beta_A/\beta_B,\ x^*,\ w^*)$ является положением равновесия для модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Теорема доказана.

Таким образом, если неопределенность является мультипликативной и состоит в незнании коэффициентов пропорциональности β_A и β_B, то как прямой, так и двойственный луч Неймана могут быть найдены по матрицам центров интервалов.

Теорема 2. *Пусть точечные матрицы* $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *удовлетворяют условию*

$$\tilde{A} \in \mathbf{A}, \tilde{B} \in \mathbf{B}; \tag{16}$$

пусть также

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda; \tag{17}$$

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})} \lambda; \tag{18}$$

$$(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathrm{B}})} \lambda. \tag{19}$$

Тогда $\underline{\lambda} \leq \tilde{\lambda} \leq \overline{\lambda}$.

Доказательство. Из условия (16) следует, что для любых $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняется:

$$\overline{a}_{ij} \geq \tilde{a}_{ij}, \ \overline{b}_{ij} \geq \tilde{b}_{ij}, \ \underline{a}_{ij} \leq \tilde{a}_{ij}, \ \underline{b}_{ij} \leq \tilde{b}_{ij}. \tag{20}$$

Откуда следует возможность представления

$$\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A' = \overline{\mathbf{A}} - A'', \quad \tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B' = \tilde{\mathbf{B}} - B'',$$

где

$$A' = \left(a'_{ij}\right) = \left(\tilde{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}\right), \quad B' = \left(b'_{ij}\right) = \left(\tilde{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}\right),$$
$$A'' = \left(a''_{ij}\right) = \left(\overline{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij}\right), \quad B'' = \left(b''_{ij}\right) = \left(\overline{b}_{ij} - \tilde{b}_{ij}\right),$$

причем все элементы матриц A', B', A'' и B'' неотрицательны.

Сделав замену матриц $\tilde{A} = \overline{\mathbf{A}} - A''$ и $\tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B'$ в задаче (17) будем иметь эквивалентную задачу

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{(\lambda, x, w) \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda, \tag{21}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))x \leq 0, \\ (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))^T w \geq 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \geq 0, w \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right\}. \tag{22}$$

Из неотрицательности матриц A'' и B' второго неравенства в (22) следует справедливость неравенства

$$(\overline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\underline{\mathbf{B}})^T \tilde{w} \geq 0.$$

Откуда следует, что для любого $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\tilde{\lambda} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} \tilde{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} \tilde{w}_i} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} \overline{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} \overline{w}_i}. \tag{23}$$

Последнее неравенство в данной цепочке следует из условия (18) теоремы, в соответствии с которым

$$\overline{w} = \arg \max_{w:(w,e^n)=1, w\geq 0} \quad \min_{j=1,2,\ldots,m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} w_i}.$$

Поскольку

$$\overline{\lambda} = \max_{w:(w,e^n)=1, w\geq 0} \quad \min_{j=1,2,\ldots,m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} w_i},$$

то имеем $\tilde{\lambda} \leq \overline{\lambda}$.

Неравенство $\tilde{\lambda} \geq \underline{\lambda}$ доказывается аналогично. Действительно, после замены матриц $\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A'$ и $\tilde{B} = \overline{\mathbf{B}} - B''$ в задаче (17) получим задачу

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{(\lambda,x,w)\in D(\tilde{A},\tilde{B})} \lambda, \tag{24}$$

$$D(\tilde{A},\tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))x \leq 0, \\ (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))^T w \geq 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \geq 0, \\ w \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right\}. \tag{25}$$

Из неотрицательности матриц A' и B'' и первого неравенства в (25) следует $(\underline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\overline{\mathbf{B}})\tilde{x} \leq 0$, поэтому для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство

$$\tilde{\lambda} \geq \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij} \tilde{x}_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij} \tilde{x}_j} \geq \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij} \underline{x}_{\,j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij} \underline{x}_{\,j}}. \tag{26}$$

Последнее неравенство в данной цепочке следует из того, что

$$\underline{x} = \arg \min_{x:(x,e^m)=1, x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij} x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij} x_j}.$$

Поскольку

$$\underline{\lambda} = \min_{x:(x,e^m)=1, x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij} x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij} x_j},$$

то $\tilde{\lambda} \geq \underline{\lambda}$. Теорема доказана.

Заключение

Модель Неймана $(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})$ определяет как прямой, так и двойственный луч Неймана для модели Неймана с мультипликативной неопределенностью в элементах матриц затрат A и выпуска B.

Число Фробениуса модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с интервальными матрицами затрат и выпуска ограничено сверху числом Фробениуса для модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, снизу – числом Фробениуса для модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, где $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ – точечные матрицы верхних границ интервалов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ – точечные матрицы нижних границ интервалов этих же матриц.

Список литературы

[1] С. А. Ашманов *Введение в математическую экономику: Учеб. пособие для спец. Прикладная математика.* М.: Наука, 1984, 293 с.

[2] В. В. Альсевич *Введение в математическую экономику. Конструктивная теория.* М: Едиториал УРСС, 2005, 256 с.

[3] И. Ф. Цисарь, В. Г. Нейман *Компьютерное моделирование экономики.* М.: Диалог-МИФИ, 2002, 304 с.

[4] А. Т. Латипова *Модель оптимизации бюджетирования для предприятий минерально-сырьевого комплекса.* – Стратегия развития минерально-сырьевого комплекса в XXI веке. Материалы международной конференции. Москва-Бишкек. М: Изд-во РУДН, 2004, с. 206–208.

[5] А. Т. Латипова *Модель оптимизации ценовой стратегии для задач бюджетирования.* – Российская конференция "Дискретный анализ и исследование операций". Материалы конференций (Новосибирск, 28 июня - 2 июля 2004). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004, с. 206.

[6] А. Т. Латипова *Ценовая диверсификация в бюджетировании.* – Экономика и менеджмент: проблемы и перспективы: Труды Международной научно-практической конференции. 6-11 июня 2005 года. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2005, с. 562–566.

[7] А. Т. Латипова, А. В. Панюков *Оптимизация бюджета продаж* . – Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Рынок: Теория и практика. Челябинск: ЮУрГУ, 2006, вып. 4, N 15(170), с. 116–120.

[8] Л. Жолен и др. *Прикладной интервальный анализ.* М.: Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2005, 468 с.

[9] А. Т. Латипова *Математическая модель бюджетирования.* – Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2006, с. 391–397.

ESTIMATION OF EQUILIBRIUM POSITION FOR NEUMANN MODEL UNDER INTERVAL UNCERTAINTY OF SOURCE DATA

A.V. Panyukov , A.T. Latipova

South Ural state university, Chelyabinsk
e-mail: a_panyukov@mail.ru

Abstract. There is considered the problem of equilibrium parameters estimation for Neumann model (A, B) when only intervals containing matrices elements are known. It is shown that in case of multiplicative uncertainty, direct and dual Neumann beams are determined by matrices of interval centers, and interval for Frobenius number is determined by matrices of lower and upper bounds of intervals.

Key words: Neumann model, equilibrium, direct and dual Neumann beams, Frobenius number, interval uncertainty.