Вычислительные технологии **Том 8, № 5, 2003**

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СО СВЯЗЯМИ

Р. С. Ивлев

Институт проблем информатики и управления МОН РК, Алматы, Казахстан

e-mail: `ivlevruslan@newmail.ru`

Dependent interval matrices, i.e.interval matrices with the elements, which depend on each other, are considered. The possibility to represent a dependent interval matrix as a matrix polytope is shown. Some algebraic conditions of positive definiteness and asymptotic stability for matrix polytopes are obtained.

Введение

Проблема исследования устойчивости динамических систем в условиях параметрической неопределенности интервального типа является объектом пристального внимания современной теории управления и смежных научных дисциплин. Несмотря на то что наибольших успехов в этом направлении удалось достигнуть в классе линейных стационарных систем с интервальными параметрами, некоторые из вопросов, касающиеся исследования устойчивости заданных в пространстве состояний линейных интервальных динамических систем, остаются открытыми. Так, решение задачи исследования устойчивости интервальных матриц получено для специальных случаев интервальных матриц (например, [1]) либо в виде достаточных условий [2, 3]. В общем случае согласно результатам [4] задача исследования устойчивости интервальной матрицы является NP-трудной. Наряду с указанными сложностями при построении математической модели некоторые параметры модели могут оказаться зависимыми друг от друга и оставаться в пределах заданных интервалов. В результате этого истинные значения параметров могут принимать не произвольные сочетания значений из заданных интервалов, а только те, которые удовлетворяют существующим зависимостям. Для случая линейных динамических систем, заданных в пространстве состояний, значения элементов матрицы состояния будут зависеть друг от друга. Матрицы, значения элементов которых, оставаясь в пределах заданных интервалов, зависят друг от друга, будем называть согласно [5 – 9] *интервальными матрицами со связями.* Исследование свойств таких интервальных матриц представляет большой научный интерес.

1. Обозначения и постановка задачи

Специальной нотации в данной работе будут подчинены интервальные величины, для обозначения которых в дальнейшем будет использован полужирный шрифт. Неинтервальные (точечные) величины будут обозначаться обычным шрифтом. Символами подчеркивания и надчеркивания будут обозначаться нижняя и верхняя границы интервала соответственно. Применительно к интервальным матрицам и векторам символы подчеркивания и надчеркивания будут пониматься в поэлементном смысле.

В данной работе рассматривается линейный характер зависимостей элементов матрицы от неопределенных параметров. Пусть $\mathbf{c} = [\underline{c}, \overline{c}] = ([\underline{c}_k, \overline{c}_k])_{k=1}^m \in \mathbb{IR}^m$ — некоторый интервальный вектор [10, 11] и $d_{ij} \in \mathbb{R}^m$ — неинтервальные (точечные) векторы, $i, j \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$; $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов [10, 11]. Введем матрицы $D \in \mathbb{R}^{n\times nm}$ и $C \in \mathbb{R}^{nm\times n}$ блочного вида

$$D = \left(d_{ij}^T\right)_{ij=1}^n = \begin{pmatrix} d_{11}^T & d_{12}^T & \ldots & d_{1n}^T \\ d_{21}^T & d_{22}^T & \ldots & d_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1}^T & d_{n2}^T & \ldots & d_{nn}^T \end{pmatrix}, \quad C = \text{Block Diag}\{\underbrace{c, c, \ldots, c}_{n}\}, \ c \in \mathbf{c}.$$

Определение 1. *Назовем множество матриц*

$$\mathbf{A}^{\text{dep}} = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = DC, c \in \mathbf{c}\right\} \tag{1}$$

интервальной матрицей со связями линейного типа относительно интервального вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{IR}^m$ *и матричного множителя* $D \in \mathbb{R}^{n\times nm}$.

Для краткости изложения будем использовать термин “интервальная матрица со связями”, опуская слова “линейного типа относительно интервального вектора и матричного множителя”, при этом будем подразумевать эквивалентное значение. Из определения 1 видно, что в общем случае $\mathbf{A}^{\text{dep}} \notin \mathbb{IR}^{n\times n}$ в классическом смысле.

В работе [8] расматриваются зависимые интервальные векторы для случая, когда $j = 1$, $d_{i1} = d_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in J$, и все значения элементов векторов d_i, кроме одного, равны нулю. В указанной работе интервальные векторы со связями представляются иным образом: пусть $(J_q)_{q=1}^l$ — разбиение множества индексов $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, т. е.

$$J_q \subseteq J, \quad J_{q_1} \bigcap J_{q_2} = \emptyset \text{ для } q_1 \neq q_2, \quad \bigcup_{q=1}^l J_q = J.$$

Далее, пусть $\mathbf{y}_q \in \mathbb{IR}$, $q = 1, 2, \ldots, l$ и $s \in \mathbb{R}^n$, тогда согласно [8] имеем следующее представление интервального вектора со связями:

$$\mathbf{b}^{\text{dep}} = \{b \in \mathbb{R}^n \mid b_r = s_r y_q, \ r = 1, 2, \ldots, n, \text{ где } y_q \in \mathbf{y}_q \text{ при } r \in J_q\}.$$

Легко видеть, что приведенные два представления эквивалентны для случая, когда $j = 1$, $l = m$, $\mathbf{c} = (\mathbf{y}_q)_{q=1}^l$, и векторы d_i, $i \in J$, имеют в качестве q-й компоненты величину s_i при $i \in J_q$, $q = 1, 2, \ldots, l$, а остальные компоненты равны нулю, т. е.

$$d_i = (\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \ldots, \overset{q}{s_i}, \ldots, \overset{m}{0})^T, \quad i \in J_q, \quad q = 1, 2, \ldots, l.$$

Для случая, когда $m = n^2$, векторы d_{ij} являются столбцами единичной матрицы порядка n^2, т. е.

$$
\begin{aligned}
d_{11}^T &= (\overset{1}{1}, \overset{2}{0}, \ldots, \overset{n^2}{0}),\\
d_{12}^T &= (\overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \ldots, \overset{n^2}{0}),\\
&\vdots\\
d_{1n}^T &= (\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \ldots, \overset{n}{1}, \overset{n+1}{0}, \ldots, \overset{n^2}{0}),\\
d_{21}^T &= (\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \ldots, \overset{n}{0}, \overset{n+1}{1}, \ldots, \overset{n^2}{0}),\\
&\vdots\\
d_{nn}^T &= (\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \ldots, \overset{n^2}{1}),
\end{aligned}
$$

имеем интервальную матрицу (1), понимаемую в классическом смысле, т. е. $\mathbf{A}^{\text{dep}} = \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$.

Введем матрицы $\underline{C}, \overline{C} \in \mathbb{R}^{nm\times n}$ блочно-диагонального вида

$$\underline{C} = \text{Block Diag}\{\underbrace{\underline{c}, \underline{c}, \ldots, \underline{c}}_{n}\}, \quad \overline{C} = \text{Block Diag}\{\underbrace{\overline{c}, \overline{c}, \ldots, \overline{c}}_{n}\}$$

и, используя арифметические операции классической интервальной арифметики [10, 11], построим интервальную матрицу $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$

$$\mathbf{A} = D\mathbf{C}, \tag{2}$$

где $\mathbf{C} = [\underline{C}, \overline{C}] \in \mathbb{IR}^{nm\times n}$. Нетрудно показать [11], что интервальная матрица (2) является интервальной оболочкой для $\mathbf{A}^{\text{dep}}$, т. е.

$$\mathbf{A} = \square\mathbf{A}^{\text{dep}}; \quad \mathbf{A}^{\text{dep}} \subseteq \mathbf{A}. \tag{3}$$

Определение 2. *Будем говорить, что интервальная матрица со связями $\mathbf{A}^{\text{dep}}$ обладает некоторым свойством $\mathcal{P}$, если этим свойством обладает любая матрица $A \in \mathbf{A}^{\text{dep}}$.*

В настоящей работе исследуются асимптотическая устойчивость и положительная определенность интервальной матрицы со связями $\mathbf{A}^{\text{dep}}$.

Задача: требуется определить конечное множество специальным образом построенных точечных матриц порядка n таких, что наличие исследуемого свойства у этих матриц влечет наличие этого свойства у матрицы $\mathbf{A}^{\text{dep}}$ в смысле определения 2.

Из соотношения (3) можно заключить, что для решения поставленной задачи достаточно воспользоваться, например, результатами работы [1] применительно к интервальной матрице $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Однако во многих случаях интервальная оболочка матрицы $\mathbf{A}^{\text{dep}}$ может оказаться слишком грубой аппроксимацией множества (1), что повлечет за собой большую избыточность полученных условий.

2. Предварительный результат: геометрические свойства

В данном разделе нами будет установлено, что интервальная матрица со связями $\mathbf{A}^{\text{dep}}$ представима в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ в виде выпуклой комбинации конечного числа точечных матриц. Для этого выполним сначала некоторые вспомогательные построения и приведем необходимые определения.

Рассмотрим матрицы $D_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in K = \{1, 2, \ldots, m\}$, построенные следующим образом: ij-й элемент матрицы D_k определяется равным k-му элементу вектора d_{ij}, $i, j \in J$, т. е.

$$D_k = (d_{ij_k})_{ij=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где d_{ij_k} — k-й элемент вектора d_{ij}, $i, j \in J$. Для любого $k \in K$ имеем $D_k \neq 0_{n\times n}$, поскольку в противном случае ни один элемент матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$ не зависел бы от $\mathbf{c}_k$ и, следовательно, элемент $\mathbf{c}_k$ можно было бы исключить из рассмотрения, сделав соответствующие изменения в векторах $\mathbf{c}$ и d_{ij}. Множество матриц D_k обозначим через

$$\mathcal{D}_K = \{D_k \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid D_k \neq 0_{n\times n}, k \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}.$$

С использованием введенных матриц D_k интервальная матрица со связями $\mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$ представима в виде

$$\mathbf{A}^{\mathrm{dep}} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{k=1}^{m} D_k c_k,\ c_k \in \mathbf{c}_k\}. \tag{4}$$

Аналогичное представление можно получить для интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Применяя арифметические операции классической интервальной арифметики, имеем

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} D_k \mathbf{c}_k.$$

На множестве $\mathcal{D}_K$ матриц D_k, $k \in K$, введем отношение φ_D следующим образом.

Определение 3. *Будем говорить, что две матрицы $D_{k'} \in \mathcal{D}_K$ и $D_{k''} \in \mathcal{D}_K$, $k', k'' \in K$, находятся в отношении φ_D, и будем записывать $D_{k'}\varphi_D D_{k''}$, если существует такое число $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, что имеет место равенство*

$$D_{k'} = \mu D_{k''}. \tag{5}$$

Это отношение является отношением эквивалентности, поскольку свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности очевидным образом выполняются. Введенному отношению φ_D соответствует разбиение $\left(\mathcal{D}_{K_q}\right)_{q=1}^{p}$ множества $\mathcal{D}_K$ на классы, которое индуцирует разбиение $(K_q)_{q=1}^{p}$ множества индексов $K = \{1, 2, \ldots, m\}$:

$$K_q \subseteq K, \quad K_{q_1} \bigcap K_{q_2} \neq \emptyset, \text{ для } q_1 \neq q_2, \quad \bigcup_{q=1}^{p} K_q = K.$$

Из соотношения (5) и определения 3 видно, что класс K_q, $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$, содержит номера только тех индексов, которым соответствуют матрицы D_k с пропорциональными элементами.

Матрицы D_k, находящиеся в отношении φ_D, обладают следующим свойством: *если для некоторых $k', k'' \in K$ имеет место $D_{k'}\varphi_D D_{k''}$, то*

$$\frac{|D_{k'}|}{\|D_{k'}\|} = \frac{|D_{k''}|}{\|D_{k''}\|}, \tag{6}$$

где $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}$ *для* $X = (x_{ij})_{ij=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Соотношение (6) выполняется для любых двух матриц, принадлежащих одному классу $\mathcal{D}_{K_q}$. Это позволяет поставить каждому классу в соответствие матрицу

$$N_q = \frac{|D_{k_q}|}{\|D_{k_q}\|}, \tag{7}$$

где $D_{k_q} \in \mathcal{D}_{K_q}$ однозначно определяет свой класс. Здесь и далее матрицы, принадлежащие классу $\mathcal{D}_{K_q}$, обозначаются через D_{k_q}, $k_q \in K_q$, $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Для каждого класса $\mathcal{D}_{K_q}$ введем в рассмотрение числа μ_{k_q}, определяемые согласно выражению

$$\mu_{k_q} N_q = D_{k_q}, \quad k_q \in K_q.$$

Из соотношения (7) видно, что $|\mu_{k_q}| = \|D_{k_q}\|$. Также для каждого класса $\mathcal{D}_{K_q}$, применяя классическую интервальную арифметику, вычислим интервалы

$$\mathbf{v}_q = \sum_{k_q \in K_q} \mu_{k_q} \mathbf{c}_{k_q}, \quad q \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Используя множество

$$Z_p = \{z \in \mathbb{R}^p \mid z_i \in \{-1, 1\}, \text{ для всех } i\},$$

вычислим матрицы

$$G_z = \sum_{q=1}^{p} N_q(\operatorname{mid} \mathbf{v}_q + z_q \operatorname{rad} \mathbf{v}_q),$$

где $\operatorname{mid} \mathbf{v}_q = (\underline{v}_q + \overline{v}_q)/2$ и $\operatorname{rad} \mathbf{v}_q = (\overline{v}_q - \underline{v}_q)/2$ — середина и радиус интервала $\mathbf{v}_q$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A}^{\text{dep}}$ *— интервальная матрица со связями линейного типа относительно интервального вектора* $\mathbf{c} \in \mathbb{IR}^m$ *и матричного множителя* $D \in \mathbb{R}^{n\times nm}$*. Тогда*

$$\mathbf{A}^{\text{dep}} = \operatorname{cch}\{G_z\} = \mathbb{G},$$

где cch *— выпуклая оболочка.*

Доказательство. Используя соотношение (4) для интервальной матрицы со связями $\mathbf{A}^{\text{dep}}$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\text{dep}} &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{k=1}^{m} D_k c_k,\ c_k \in \mathbf{c}_k\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k_q \in K_q} D_{k_q} c_{k_q},\ c_{k_q} \in \mathbf{c}_{k_q}\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k_q \in K_q} \mu_{k_q} N_q c_{k_q},\ c_{k_q} \in \mathbf{c}_{k_q}\} = \\
&= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{q=1}^{p} N_q \sum_{k_q \in K_q} \mu_{k_q} c_{k_q},\ c_{k_q} \in \mathbf{c}_{k_q}\} =
\end{aligned}$$

$$= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{q=1}^{p} N_q v_q,\ v_q \in \mathbf{v}_q\} =$$
$$= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{q=1}^{p} N_q \left(\lambda_q \underline{v}_q + (1-\lambda_q)\overline{v}_q\right),\ 0 \le \lambda_q \le 1\} =$$
$$= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \sum_{q=1}^{p} \left(\lambda_q \underline{v}_q N_q + (1-\lambda_q)\overline{v}_q N_q\right),\ 0 \le \lambda_q \le 1\}.$$

Выражение $\sum\limits_{q=1}^{p} \left(\lambda_q \underline{v}_q N_q + (1-\lambda_q)\overline{v}_q N_q\right)$ представляет собой сумму отрезков в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$, понимаемую в теоретико-множественном смысле. Покажем по индукции, что получаемое при этом множество матриц порядка n представимо в виде выпуклой комбинации конечного числа матриц того же поряда. Имеем для $p = 2$ (случай $p = 1$ очевиден):

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \underline{v}_1 N_1 + (1-\lambda_1)\overline{v}_1 N_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 N_2 + (1-\lambda_2)\overline{v}_2 N_2 = \\
&\quad = (\lambda_2 + (1-\lambda_2))\, \lambda_1 \underline{v}_1 N_1 + (\lambda_2 + (1-\lambda_2))\,(1-\lambda_1)\overline{v}_1 N_1 + \\
&\quad + (\lambda_1 + (1-\lambda_1))\, \lambda_2 \underline{v}_2 N_2 + (\lambda_1 + (1-\lambda_1))\,(1-\lambda_2)\overline{v}_2 N_2 = \\
&\quad = \lambda_1\lambda_2 \underline{v}_1 N_1 + \lambda_1(1-\lambda_2)\underline{v}_1 N_1 + \lambda_2(1-\lambda_1)\overline{v}_1 N_1 + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\overline{v}_1 N_1 + \\
&\quad + \lambda_1\lambda_2 \underline{v}_2 N_2 + \lambda_2(1-\lambda_1)\underline{v}_2 N_2 + \lambda_1(1-\lambda_2)\overline{v}_2 N_2 + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\overline{v}_2 N_2 = \\
&\quad = \lambda_1\lambda_2(\underline{v}_1 N_1 + \underline{v}_2 N_2) + \lambda_1(1-\lambda_2)(\underline{v}_1 N_1 + \overline{v}_2 N_2) + \\
&\quad + \lambda_2(1-\lambda_1)(\overline{v}_1 N_1 + \underline{v}_2 N_2) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(\overline{v}_1 N_1 + \overline{v}_2 N_2) = \\
&\quad = \tilde{\lambda}_1 \left((\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_1 - \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_1)N_1 + (\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_2 - \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_2)N_2\right) + \\
&\quad + \tilde{\lambda}_2 \left((\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_1 - \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_1)N_1 + (\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_2 + \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_2)N_2\right) + \\
&\quad + \tilde{\lambda}_3 \left((\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_1 + \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_1)N_1 + (\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_2 - \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_2)N_2\right) + \\
&\quad + \tilde{\lambda}_4 \left((\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_1 + \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_1)N_1 + (\mathrm{mid}\,\mathbf{v}_2 + \mathrm{rad}\,\mathbf{v}_2)N_2\right) = \\
&\quad = \mathrm{cch}\,\{G_z\},
\end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}_i \ge 0$, $i \in \{1,2,3,4\}$, $\sum\limits_{i=1}^{4} \tilde{\lambda}_i = 1$. Далее, пусть $2 < p' < p$ и

$$\mathrm{cch}\,\{Z_{p'}\} = \sum_{z\in Z_{p'}} \hat{\lambda}_z G_z = \sum_{q=1}^{p'} \left(\lambda_q \underline{v}_q N_q + (1-\lambda_q)\overline{v}_q N_q\right),\ 0 \le \lambda_q \le 1,\ \hat{\lambda}_z \ge 0,\ \sum_{z\in Z_{p'}} \hat{\lambda}_z = 1.$$

Тогда, выполняя аналогичные действия, можно показать, что

$$\sum_{z\in Z_{p'}} \hat{\lambda}_z G_z + \left(\lambda_{p'+1} \underline{v}_{p'+1} N_{p'+1} + (1-\lambda_{p'+1})\overline{v}_{p'+1} N_{p'+1})\right) = \sum_{z\in Z_{p'+1}} \tilde{\lambda}_z G_z,$$

где $\tilde{\lambda}_z \ge 0$, $z \in Z_{p'+1}$, $\sum_{z\in Z_{p'+1}} \tilde{\lambda}_z = 1$. Из приведенных соотношений утверждение теоремы следует немедленно. Теорема доказана. □

Заметим, что представление интервальной матрицы со связями $\mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$ в виде выпуклой комбинации конечного числа точечных матриц может быть получено иным способом. Вводя в рассмотрение матрицы

$$C^{\mathrm{vert}} = \mathrm{Block\ Diag}\{\underbrace{c, c, \ldots, c}_{n}\},\ c \in \mathrm{vert}\,\mathbf{c},$$

где vert $\mathbf{c}$ — множество всех угловых векторов интервального вектора $\mathbf{c}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\mathrm{dep}} &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = DC,\ c \in \mathbf{c}\} = \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = DC,\ c \in \mathrm{cch}\,\mathrm{vert}\,\mathbf{c}\} = \\ &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = DC,\ C \in \mathrm{cch}\,\{C^{\mathrm{vert}}\}\right\} = \\ &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \in \mathrm{cch}\,\{DC^{\mathrm{vert}}\}\right\} = \\ &= \mathrm{cch}\,\{DC^{\mathrm{vert}}\}.\end{aligned}$$

При этом

$$\mathrm{cch}\,\{G_z\} = \mathrm{cch}\,\{DC^{\mathrm{vert}}\}$$

и

$$\{G_z\} \subseteq \{DC^{\mathrm{vert}}\}.$$

Последнее соотношение показывает преимущества представления интервальной матрицы со связями $\mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$ в виде выпуклой комбинации матриц G_z, поскольку

$$\mathrm{card}\,\{G_z\} = 2^p \le 2^m = \mathrm{card}\,\{DC^{\mathrm{vert}}\},$$

так как $p \le m$.

3. Основной результат

В предыдущем разделе показано, что интервальная матрица со связями $\mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$ представима в виде выпуклой оболочки $\mathbb{G} = \mathrm{cch}\,\{G_z\}$ конечного числа точечных матриц (матричного политопа). Это позволяет свести задачу исследования свойств интервальной матрицы со связями $\mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$ к задаче исследования свойств матричных политопов, в отношении которых и будут сформулированы дальнейшие результаты. По аналогии с интервальными матрицами со связями будем говорить, что матричный политоп положительно определен (асимптотически устойчив), если любая матрица, принадлежащая данному политопу, положительно определена (асимптотически устойчива). Некоторые подходы к исследованию устойчивости матричного политопа обсуждаются в работе [12], в которой приведены убедительные контрпримеры, показывающие, что для устойчивости матричного политопа недостаточно устойчивости его ребер, равно как и недостаточно устойчивости выпуклой оболочки множества характеристических полиномов, соответствующих всевозможным матрицам исследуемого политопа.

Для того чтобы сформулировать основной результат данного раздела, приведем известное определение из теории выпуклых многогранников [13] применительно к рассматриваемому случаю.

Определение 4. *Множество матриц $\{G_z\}$ называется выпукло-независимым, если ни одна из этих матриц $G_{z'}$ не представима в виде выпуклой комбинации остальных, т. е.*

$$\forall z' \in Z_p:\ G_{z'} \neq \sum_{z\in Z_p, z\neq z'} \lambda_z G_z,\ \text{где } \lambda_z \ge 0, z \in Z_p\backslash\{z'\}, \sum_{z\in Z_p, z\neq z'} \lambda_z = 1.$$

Теорема 2. *Для положительной определенности матричного политопа $\mathbb{G}$ достаточно, а в случае выпуклой независимости матриц G_z и необходимо, чтобы все матрицы G_z были положительно определены.*

Доказательство. Необходимость очевидна, поэтому докажем достаточность. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда для произвольной матрицы $G \in \mathbb{G}$ квадратичная форма имеет вид

$$x^T G x = x^T \left(\sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z \right) x = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z x^T G_z x \geq 0,\ \lambda_z \geq 0,\ z \in Z_p,\ \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1,$$

поскольку $x^T G_z x \geq 0$ для любого $z \in Z_p$. Теорема доказана. □

Нетрудно проверить, что данная теорема остается верной и для случая отрицательной определенности матричного политопа. К сожалению, аналогичное утверждение в отношении асимптотической устойчивости матричного политопа в общем случае остается неверным. И тем не менее можно выделить частный случай матричного политопа, когда такое утверждение будет справедливым.

Теорема 3. *Пусть $G_z = G_z^T$ для любого $z \in Z_p$. Тогда для асимптотической устойчивости матричного политопа $\mathbb{G}$ достаточно, а в случае выпуклой независимости матриц G_z и необходимо, чтобы все матрицы G_z были асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для того чтобы доказать достаточность, заметим, что любая матрица $G \in \mathbb{G}$ симметрическая, т. е. $G = G^T$, поскольку

$$G^T = \left(\sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z \right)^T = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z^T = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z = G,\ \lambda_z \geq 0,\ z \in Z_p,\ \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1.$$

По теореме 2 матрица G является отрицательно-определенной в силу симметричности и асимптотической устойчивости матриц G_z. С учетом симметричности матрицы G заключаем, что собственные значения матрицы G вещественны и строго отрицательны. Следовательно, матрица G асимптотически устойчива. Теорема доказана. □

Условия асимптотической устойчивости матричного политопа в общем случае дает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть существует симметрическая положительно-определенная матрица $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такая, что матрицы $G_z^T H + H G_z$ для любого $z \in Z_p$ асимптотически устойчивы, тогда матричный политоп $\mathbb{G}$ асимптотически устойчив.*

Доказательство. Асимптотически устойчивые матрицы $G_z^T H + H G_z$ являются симметрическими и, следовательно, отрицательно-определенными. По теореме 3 матричный политоп

$$\operatorname{cch} \{G_z^T H + H G_z\} \tag{8}$$

является отрицательно-определенным. Из построения $\operatorname{cch} \{G_z^T H + H G_z\}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cch} \{G_z^T H + H G_z\} = \\
&\quad = \{G_H \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid G_H = \sum_{z \in Z_p} \lambda_z (G_z^T H + H G_z),\ \lambda_z \geq 0,\ z \in Z_p,\ \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1\} = \\
&\quad = \{G_H \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid G_H = (\sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z)^T H + H \sum_{z \in Z_p} \lambda_z G_z,\ \lambda_z \geq 0,\ z \in Z_p,\ \sum_{z \in Z_p} \lambda_z = 1\} = \\
&\quad = \{G_H \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid G_H = G^T H + H G,\ G \in \mathbb{G}\}.
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения заключаем, что для произвольной матрицы $G \in \mathbb{G}$ матрица $G_H = G^T H + H G$ отрицательно определена в силу отрицательной определенности (8). Следовательно, матрица $G \in \mathbb{G}$ асимптотически устойчива. Теорема доказана. □

4. Пример

В качестве примера рассмотрим систему автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника, математическая модель которой имеет вид [14]:

$$\begin{cases} \dfrac{dU_{д}}{dt} = -\dfrac{1}{T_{д}}U_{д} - \dfrac{K_{д}}{T_{у}}\omega_{г} + \dfrac{K_{д}}{T_{у}}\omega_{сигн}, \\ \dfrac{dU_{у}}{dt} = -\dfrac{1}{T_{д}}U_{у} + \dfrac{1}{T_{д}}U_{д}, \\ \dfrac{d\omega_{г}}{dt} = -\dfrac{1}{T_{г}}\omega_{г} + \dfrac{K_{г}}{T_{г}}U_{у} \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U_{д} \\ U_{у} \\ \omega_{г} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{T_{у}} & 0 & -\dfrac{K_{д}}{T_{у}} \\ \dfrac{1}{T_{д}} & -\dfrac{1}{T_{д}} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_{г}}{T_{г}} & -\dfrac{1}{T_{г}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{д} \\ U_{у} \\ \omega_{г} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{K_{д}}{T_{у}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\omega_{сигн},$$

$$\omega_{г} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{д} \\ U_{у} \\ \omega_{г} \end{pmatrix},$$

где $U_{д}$, $U_{у}$ — напряжение на выходе дискриминатора и на выходе усилителя напряжения соответственно; $\omega_{сигн}$ и $\omega_{г}$ — угловая частота сигнала и на выходе гетеродина соответственно; $T_{у}$, $T_{д}$ и $T_{г}$ — постоянные времени усилителя промежуточной частоты, усилителя напряжения и гетеродина; $K_{д}$ и $K_{г}$ — коэффициенты передачи дискриминатора и гетеродина.

Элементы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{T_{у}} & 0 & -\dfrac{K_{д}}{T_{у}} \\ \dfrac{1}{T_{д}} & -\dfrac{1}{T_{д}} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_{г}}{T_{г}} & -\dfrac{1}{T_{г}} \end{pmatrix}$$

системы имеют сложную зависимость от ее конструктивных параметров. Рассмотрим случай, когда постоянные времени $T_{у}$, $T_{д}$ и $T_{г}$ заданы интервально, т. е. $T_{у} \in \mathbf{T}_{у} = \left[\underline{T}_{у}, \overline{T}_{у}\right]$, $T_{д} \in \mathbf{T}_{д} = \left[\underline{T}_{д}, \overline{T}_{д}\right]$ и $T_{г} \in \mathbf{T}_{г} = \left[\underline{T}_{г}, \overline{T}_{г}\right]$, а остальные параметры известны точно. Тогда $n = m = 3$,

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\overline{T}_{у}^{-1}, \underline{T}_{у}^{-1}\right] & \left[\overline{T}_{д}^{-1}, \underline{T}_{д}^{-1}\right] & \left[\overline{T}_{г}^{-1}, \underline{T}_{г}^{-1}\right] \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -K_{д} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{г} & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее, $p = m$ и

$$Z = \Big\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T,$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \Big\}.$$

Соответственно,

$$\{G_z\} = \Big\{ \overline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \overline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \overline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,\ \underline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \overline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \overline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,$$
$$\overline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \underline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \overline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,\ \underline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \underline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \overline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,$$
$$\overline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \overline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \underline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,\ \underline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \overline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \underline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,$$
$$\overline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \underline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \underline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3,\ \underline{T}_{\text{у}}^{-1} D_1 + \underline{T}_{\text{д}}^{-1} D_2 + \underline{T}_{\text{г}}^{-1} D_3 \Big\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} -\overline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\overline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\overline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\underline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\overline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\begin{pmatrix} -\overline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\overline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\overline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\underline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\overline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\overline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\overline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\underline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\underline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\overline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\underline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\left. \begin{pmatrix} -\overline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\overline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\underline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\underline{T}_{\text{у}}^{-1} & 0 & -K_{\text{д}}\underline{T}_{\text{у}}^{-1} \\ \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{д}}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{\text{г}}\underline{T}_{\text{г}}^{-1} & -\underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Для сравнения

$$\{C^{\text{vert}}\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}^T, \right.$$
$$\begin{pmatrix} \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}^T,$$
$$\begin{pmatrix} \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}^T,$$
$$\begin{pmatrix} \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \overline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{pmatrix}^T,$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{array}\right)^T,$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \overline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{array}\right)^T,$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{array}\right)^T,$$

$$\left.\left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{T}_{\text{у}}^{-1} & \underline{T}_{\text{д}}^{-1} & \underline{T}_{\text{г}}^{-1} \end{array}\right)^T \right\},$$

$$d_{11}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ d_{13}^T = \begin{pmatrix} -K_{\text{д}} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ d_{21}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ d_{22}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$d_{32}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_{\text{г}} \end{pmatrix},\ d_{33}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ d_{12}^T = d_{23}^T = d_{31}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, имеем

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\text{д}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{\text{г}} & 0 & -1 & \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$D\{C^{\text{vert}}\} = \{DC^{\text{vert}}\} = \{G_z\}.$$

Исследуем асимптотическую устойчивость рассматриваемой системы для следующих численных значений:

$$\mathbf{T}_{\text{у}} = [0.0032, 0.004]\ \text{с};\ \mathbf{T}_{\text{д}} = [0.0016, 0.002]\ \text{с};\ \mathbf{T}_{\text{г}} = [0.0008, 0.001]\ \text{с};$$
$$K_{\text{д}} = 2\ \text{В}\cdot\text{с/рад};\ K_{\text{г}} = 3\ \text{В}\cdot\text{с/рад}.$$

Тогда

$$T_{\text{у}}^{-1} \in [250, 312.5],\ T_{\text{д}}^{-1} \in [500, 625],\ T_{\text{г}}^{-1} \in [1000, 1250].$$

Множество матриц G_z для указанных численных значений имеет вид

$$\{G_z\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3000 & -1000 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -250 & 0 & -500 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -312.5 & 0 & -625 \\ 625 & -625 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -250 & 0 & -500 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} -312.5 & 0 & -625 \\ 500 & -500 & 0 \\ 0 & 3750 & -1250 \end{array}\right)\Bigg\}.$$

Для исследования асимптотической устойчивости системы автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника применим теорему 4, где в качестве матрицы H выберем решение матричного уравнения Ляпунова

$$G_m^T H + H G_m = -Q, \tag{9}$$

где Q — некоторая положительно-определенная симметрическая матрица; G_m — геометрический центр матричного политопа, который вычисляется по формуле

$$G_m = \frac{1}{\mathrm{card}\,\{G_z\}} \sum_{z \in Z_p} G_z.$$

Для рассматриваемого примера имеем

$$G_m = \left(\begin{array}{ccc} -281.25 & 0 & -562.5 \\ 562.5 & -562.5 & 0 \\ 0 & 3375 & -1125 \end{array}\right).$$

Для числовой матрицы

$$Q = \left(\begin{array}{ccc} 20 & -4 & -4 \\ -4 & 50 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{array}\right),$$

(главные диагональные миноры равны соответственно $\Delta_1 = 20 > 0$, $\Delta_2 = 984 > 0$, $\Delta_3 = 5640 > 0$) решение уравнения (9) имеет вид

$$H = \left(\begin{array}{ccc} 0.07009524 & 0.01726984 & -0.02260317 \\ 0.01726984 & 0.16863492 & 0.02069841 \\ -0.02260317 & 0.02069841 & 0.01441270 \end{array}\right)$$

и является симметрической положительно-определенной матрицей (главные диагональные миноры равны соответственно $\Delta_1 = 0.07009524 > 0$, $\Delta_2 = 0.01152226 > 0$, $\Delta_3 = 0.00003372 > 0$).

Для найденной числовой матрицы H множество матриц $G_z^T H + H G_z$ имеет вид

$$\{G_z^T H + H G_z\} =$$
$$= \Bigg\{ \left(\begin{array}{ccc} -13.46031746 & 22.47619048 & 6.14285714 \\ 22.47619048 & -86.60317460 & 0.96825397 \\ 6.14285714 & 0.96825397 & -6.22222222 \end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{ccc} -22.22222222 & 21.39682540 & -1.20634921 \\ 21.39682540 & -86.60317460 & -1.19047619 \\ -1.20634921 & -1.19047619 & -0.57142857 \end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{ccc} -17.77777778 & 3.55555556 & 3.55555556 \\ 3.55555556 & -44.44444444 & 3.55555556 \\ 3.55555556 & 3.55555556 & -6.22222222 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} -26.53968254 & 2.47619048 & -3.79365079 \\ 2.47619048 & -44.44444444 & 1.39682540 \\ -3.79365079 & 1.39682540 & -0.57142857 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -13.46031746 & 5.52380952 & 11.79365079 \\ 5.52380952 & -55.55555556 & 6.60317460 \\ 11.79365079 & 6.60317460 & -13.42857143 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -22.22222222 & 4.44444444 & 4.44444444 \\ 4.44444444 & -55.55555556 & 4.44444444 \\ 4.44444444 & 4.44444444 & -7.77777778 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -17.77777778 & -13.39682540 & 9.20634921 \\ -13.39682540 & -13.39682540 & 9.19047619 \\ 9.20634921 & 9.19047619 & -13.42857143 \end{pmatrix},$$
$$\left.\begin{pmatrix} -26.53968254 & -14.47619048 & 1.85714286 \\ -14.47619048 & -13.39682540 & 7.03174603 \\ 1.85714286 & 7.03174603 & -7.77777778 \end{pmatrix}\right\}.$$

Все матрицы множества $\{G_z^T H + HG_z\}$ являются асимптотически устойчивыми, их собственные числа соответственно равны

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1 = -92.9641653 & \lambda_2 = -12.8511248 & \lambda_3 = -0.4704241 \\
\lambda_1 = -93.0724164 & \lambda_2 = -15.9062018 & \lambda_3 = -0.4182073 \\
\lambda_1 = -45.1550120 & \lambda_2 = -18.5639641 & \lambda_3 = -4.7254683 \\
\lambda_1 = -44.8628846 & \lambda_2 = -26.6882061 & \lambda_3 = -0.0044649 \\
\lambda_1 = -56.9046334 & \lambda_2 = -25.2209562 & \lambda_3 = -0.3188549 \\
\lambda_1 = -56.4437650 & \lambda_2 = -23.2049551 & \lambda_3 = -5.9068354 \\
\lambda_1 = -36.4693516 & \lambda_2 = -6.3197987 & \lambda_3 = -1.8140244 \\
\lambda_1 = -36.8824086 & \lambda_2 = -10.4287075 & \lambda_3 = -0.4031696\ .
\end{array}$$

По теореме 4 заключаем, что система автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника асимптотически устойчива.

Рассмотрим интервальную оболочку матричного политопа: $\mathbb{G}$

$$\mathbf{A} = D\mathbf{C},$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
[\overline{T}_{\text{у}}^{-1}, \underline{T}_{\text{у}}^{-1}] & 0 & 0 \\
[\overline{T}_{\text{д}}^{-1}, \underline{T}_{\text{д}}^{-1}] & 0 & 0 \\
[\overline{T}_{\text{г}}^{-1}, \underline{T}_{\text{г}}^{-1}] & 0 & 0 \\
0 & [\overline{T}_{\text{у}}^{-1}, \underline{T}_{\text{у}}^{-1}] & 0 \\
0 & [\overline{T}_{\text{д}}^{-1}, \underline{T}_{\text{д}}^{-1}] & 0 \\
0 & [\overline{T}_{\text{г}}^{-1}, \underline{T}_{\text{г}}^{-1}] & 0 \\
0 & 0 & [\overline{T}_{\text{у}}^{-1}, \underline{T}_{\text{у}}^{-1}] \\
0 & 0 & [\overline{T}_{\text{д}}^{-1}, \underline{T}_{\text{д}}^{-1}] \\
0 & 0 & [\overline{T}_{\text{г}}^{-1}, \underline{T}_{\text{г}}^{-1}]
\end{pmatrix}.$$

Выполняя интервальные арифметические операции, получим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-312.5, -250] & 0 & [-625, -500] \\ [500, 625] & [-625, -500] & 0 \\ 0 & [3000, 3750] & [-1250, -1000] \end{pmatrix}.$$

При этом матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -250 & 0 & -625 \\ 625 & -500 & 0 \\ 0 & 3750 & -1000 \end{pmatrix} \in \mathbf{A},\ A' \notin \mathbf{A}^{\mathrm{dep}}$$

имеет собственные числа, равные

$$\lambda_1 = -1764.6883713, \quad \lambda_{2,3} = 7.34418565 \pm \jmath 949.139853202,\ \jmath = \sqrt{-1},$$

т. е. матрица A' неустойчива!

Список литературы

[1] Rohn J. An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. XX, No. V. P. 1–4.

[2] Heinen J.A. Sufficient conditions for stability of interval matrices // Intern. J. Contr. 1984. Vol. 39, No. 6. P. 1323–1328.

[3] Wang K., Michel A. On sufficient conditions for the stability of interval matrices // Syst. Control Lett. 1993. Vol. 20. P. 345–351.

[4] Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P. Computational Complexity and Feasibility af Data Processing and Interval Computations. Dordrecht: Kluwer, 1997.

[5] Alefeld G., Kreinovich V., Mayer G. Symmetric linear systems with perturbed input data // Numer. Methods and Error Bounds. Berlin: Akad. Verlag, 1996. P. 16–22.

[6] Alefeld G., Kreinovich V., Mayer G. The shape of the symmetric solution set // Appl. of Interval Computations Kearfott. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 61–79.

[7] Alefeld G., Kreinovich V., Mayer G. On the shape of symmetric, persymmetric and skew-symmetric solution set // Mat. Nachrichten. 1998. Bd. 192. P. 23–36.

[8] Jansson C. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices and dependencies in the right hand side // Computing. 1991. Vol. 46. P. 265–274.

[9] Шарый С.П. Метод дробления параметров для интервальных линейных систем со связями // Перспективы систем информатики: Мат. Междунар. сов. по интервальной математике и методам распространения ограничений. Новосибирск, 2003. С. 1–12.

[10] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[11] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[12] Barmish B. Ross, Fu M., Saleh S. Stability of a polytope of matrices: counterexamples // IEEE Trans. Autom. Contr. 1988. Vol. 33, No. 6. P. 569–572.

[13] Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.

[14] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк., 1989.

Поступила в редакцию 25 апреля 2003 г.,
в переработанном виде — 16 июля 2003 г.