

BIRGIT KELLING und DIETER OELSCHLÄGEL

Zur Lösung von linearen Toleranzproblemen

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Verfahren zur Behandlung linearer Toleranzprobleme vorgestellt und erste Ergebnisse zu Effektivitätsuntersuchungen diskutiert. Diese Untersuchungen bilden die Grundlage zur Erstellung eines Programmsystems zur Lösung linearer Toleranzprobleme. Ein abschließendes Beispiel illustriert die theoretisch erörterte Vorgehensweise.

Summary

In this paper methods will be presented for the solution of linear tolerance-problems. Some results about investigations of activity will be discussed. These investigations are a basis for a program to solve linear tolerance-problems. An example demonstrates some assertions of the theory given in this paper.

Резюме

В этой работе представлены методы изучения линейных задач допуска и рассмотрены первые результаты касающиеся их эффективности. Эти исследования являются основой для создания системы вычислительных программ для решения линейных задач допуска.

Пример приведенный в заключении разъясняет предвещающие теоретические рассуждения.

Deskriptoren

Toleranzprobleme, Intervallmathematik, Lineare Gleichungssysteme

1. Einleitung

Verschiedene praktische Problemstellungen erfordern die Berechnung zulässiger Schranken für die Eingangsdaten, so daß vorgeschriebene Toleranzbereiche für die Ausgangsdaten nicht überschritten werden. Konstruktive Aufgabenstellungen dieser Art existieren z. B. bei der Berechnung:

- von Startbedingungen einer Rakete, damit ein vorgesehenes Ziel erreicht wird,
- der Belastbarkeit eines Krans, so daß er weder kippt noch bricht.

Diese praxisnahe Problematik wird mathematisch wie folgt formuliert:

Es wird die Kenntnis einer Funktion F angenommen, die auf einem Gebiet $D \subseteq R^n$ definiert ist und deren Werte im R^m liegen. Weiterhin sei $c \in I(R^m)$ ein Intervallvektor.

Gesucht ist eine berechenbare Teilmenge folgender Menge:

$$T_F(c) := \{\tilde{x} \in R^n / F(\tilde{x}) \in c\}. \quad (1)$$

Diese Teilmenge soll so groß wie möglich, aber leicht zu beschreiben sein.

Die Beziehung (1) wird wie folgt interpretiert:

$F(x)$ beschreibt das Verhalten eines Modellentwurfes mit dem Parametervektor x . Der Mittelpunktvektor \hat{c} von c ($\hat{c} \in R^m$) widerspiegelt den gewünschten Zustand, und der Radius $\rho(c)$ gibt die maximal zugelassene Abweichung an.

Die Behandlung dieses Problems ist von der Beschaffenheit der Funktion F abhängig. Man unterscheidet lineare und nichtlineare Aufgabenstellungen. Viele nichtlineare Problemstellungen lassen sich durch Linearisierung auf lineare Toleranzprobleme zurückführen und näherungsweise lösen.

In dieser Arbeit werden Verfahren zur Behandlung linearer Toleranzprobleme erläutert und untersucht.

2. Lineare Intervallgleichungssysteme

Für die weiteren Untersuchungen sei die Funktion F von folgender Gestalt:

$$F(x) := Ax + a. \quad (2)$$

Die Behandlung dieses linearen Falles erfordert spezielle Kenntnisse zur Theorie der linearen Intervallgleichungssysteme. Daher werden im folgenden Abschnitt Lösungsbegriffe bei linearen Intervallgleichungssystemen zusammengestellt und die Beziehungen zum Toleranzproblem herausgearbeitet.

2.1. Lösungsbegriffe bei linearen Intervallgleichungssystemen

Ein lineares Intervallgleichungssystem wird beschrieben durch

$$Ax = b \quad (3)$$

mit $x \in R^n$, $A \in I(R^{m \times n})$ und $b \in I(R^m)$.

Im Verlauf der Entwicklung der Intervallmathematik haben sich mehrere Autoren mit der Lösung linearer Intervallgleichungssysteme befaßt.

Bedingt durch die Art der Aufgabenstellung entstanden unterschiedliche Lösungsbegriffe, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

Die Bezeichnungsweise für diese Lösungsbegriffe ist in der Literatur nicht einheitlich, daher wird in dieser Arbeit diejenige von NEUMAIER [1] gewählt.

Definition 2.1.:

Man bezeichnet die Menge:

$$\Sigma(A, b) := \{\tilde{x} \in R^n / \dot{A}\tilde{x} = \dot{b} \text{ mit } \dot{A} \in A, \dot{b} \in b\} \quad (4)$$

als Lösungsmenge des linearen Intervallgleichungssystems (3).

Bemerkung:

In der Literatur wird diese Lösungsmenge oft als „äußere“ Lösung bezeichnet. Folgende Ausdrücke beschreiben äquivalente Beziehungen zu (4):

$$\Sigma(A, b) := \{\tilde{x} \in R^n / A\tilde{x} \cap b \neq \emptyset\} \quad (5)$$

$$\Sigma(A, b) := \{\tilde{x} \in R^n / 0 \in b - A\tilde{x}\}. \quad (6)$$

Die Beziehung (5) führt unter Benutzung der Randpunkte der Elemente von A bzw. b zur Betrachtung linearer Ungleichungssysteme für die einzelnen Orthanten (vgl. [2]).

Die Lösungsmenge $\Sigma(A, b)$ ergibt sich dann als Vereinigung der 2^m Lösungsmengen der jeweiligen Ungleichungssysteme. Für bestimmte Probleme genügt es auch, innere Abschätzungen der Lösungsmenge anzugeben.

Definition 2.2.:

Unter einer inneren Abschätzung der Lösungsmenge $\Sigma(A, b)$ versteht man einen Intervallvektor $X \in I(\mathbb{R}^n)$, für den gilt:

$$X \subseteq \Sigma(A, b). \quad (7)$$

Solche inneren Abschätzungen können durch symmetrische Aufweitung eines willkürlichen Lösungspunktes \tilde{x} mit:

$$\tilde{x} \in \Sigma(A, b) \quad (8)$$

berechnet werden (vgl. [1], [3]).

Die folgenden Betrachtungen gelten einem weiteren Lösungsbegriff für lineare Intervallgleichungssysteme.

Definition 2.3.:

Man bezeichnet die Menge:

$$\Sigma_0(A, b) := \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n / A\tilde{x} \subseteq b \} \quad (9)$$

als eingeschränkte Lösungsmenge des linearen Intervallgleichungssystems (3).

Bemerkung:

In vielen Veröffentlichungen wird dieser Begriff auch als „innere“ Lösung von (3) bezeichnet.

Die eingeschränkte Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ ist immer eine Teilmenge der Lösungsmenge $\Sigma(A, b)$.

Analog zum Begriff der inneren Abschätzung für die Lösungsmenge $\Sigma(A, b)$ kann man auch innere Abschätzungen der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ angeben. Ein Algorithmus zur Erzeugung solcher inneren Abschätzungen wird von NEUMAIER [1] vorgestellt und im Abschnitt 3.2. dieser Arbeit angegeben.

2.2. Die Beziehungen zum Toleranzproblem

Wie in der Einleitung formuliert wurde, besteht das Toleranzproblem darin, daß eine berechenbare Teilmenge der Menge:

$$T_F(c) := \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n / F(\tilde{x}) \in c \}$$

mit $c \in I(\mathbb{R}^m)$ gesucht wird.

Im linearen Fall gilt:

$$F(x) := Ax + a,$$

wobei

$$a = F(0) \in \mathbb{R}^m$$

und

$$A = F'(0) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Daraus folgt:

$$F(x) \in c \Leftrightarrow Ax + a \in c \Rightarrow Ax \in c - a.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzt man $b := c - a$ und erhält dann:

$$\begin{aligned} T_F(c) &:= \{ x \in \mathbb{R}^n / F(\tilde{x}) \in c \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n / A\tilde{x} \subseteq b \} =: \Sigma_0(A, b). \end{aligned}$$

Da $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ folgt weiter:

$$\Sigma_0(A, b) = \Sigma(A, b).$$

Oft sind bei praktischen Aufgaben die Koeffizienten $a = F(0)$ und $A = F'(0)$ nur in bestimmten Schranken bekannt, d. h. $a \in I(R^m)$ und $A \in I(R^{m \times n})$. Der Intervallvektor b ergibt sich dann als Hukuhara-Differenz (vgl. [1]) der beiden Intervallvektoren a und c . In diesem allgemeinen Fall gilt:

$$\Sigma_0(A, b) \subseteq \Sigma(A, b).$$

Somit besteht das lineare Toleranzproblem darin, eine berechenbare Teilmenge der eingeschränkten Lösungsmenge zu bestimmen.

Im folgenden Kapitel werden Verfahren zur Ermittlung der eingeschränkten Lösungsmenge und innere Abschätzungen dieser Menge vorgestellt und diskutiert.

3. Verfahren zur Bestimmung der eingeschränkten Lösungsmenge und innerer Abschätzungen dieser Lösungsmenge

3.1. Verfahren zur Beschreibung der eingeschränkten Lösungsmenge

3.1.1. Die Vorgehensweise von A. S. DEIF

In seinen Untersuchungen veröffentlichte A. S. DEIF [4] ein Verfahren zur Ermittlung einer Hülle der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$. Er benutzte dabei die Lösungsmengen (4) folgender spezieller Systeme:

$$\underline{A} x = b \quad \bar{A} x = b \tag{10}$$

mit $\bar{A}, \underline{A} \in R^{m \times n}$ und $b \in I(R^m)$, d. h.:

$$\begin{aligned} \Sigma(\underline{A}, b) &:= \{\tilde{x} \in R^n / 0 \in b - \underline{A}\tilde{x}\} \\ \Sigma(\bar{A}, b) &:= \{\tilde{x} \in R^n / 0 \in b - \bar{A}\tilde{x}\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Dann gilt für die Menge C mit

$$C := \{\tilde{x} \in R^n / \tilde{x} \in [\Sigma(\bar{A}, b) \cap \Sigma(\underline{A}, b)]\} \tag{12}$$

folgende Beziehung

$$\Sigma_0(A, b) \subseteq C, \tag{13}$$

wobei $A \in I(R^{m \times n})$ mit $A = [\underline{A}, \bar{A}]$.

Zur Ermittlung der beiden Lösungsmengen $\Sigma(\underline{A}, b)$ und $\Sigma(\bar{A}, b)$ kann man das bereits erwähnte Verfahren von JAHN [2] benutzen. Dabei werden lineare Ungleichungssysteme für jeden Orthanten betrachtet. Da die Matrizen \underline{A} und \bar{A} reell sind, vereinfacht sich die Lösung dieser 2 — mal 2^n Ungleichungssysteme auf die Lösung zweier Ungleichungssysteme für $x \in R^n$:

$$\begin{array}{ll} \Sigma(\underline{A}, b): & \Sigma(\bar{A}, b): \\ \underline{b}_1 \leq \underline{a}_{11}\tilde{x}_1 + \dots + \underline{a}_{1n}\tilde{x}_n \leq \bar{b}_1 & \underline{b}_1 \leq \bar{a}_{11}\tilde{x}_1 + \dots + \bar{a}_{1n}\tilde{x}_n \leq \bar{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{b}_n \leq \underline{a}_{n1}\tilde{x}_1 + \dots + \underline{a}_{nn}\tilde{x}_n \leq \bar{b}_n & \underline{b}_n \leq \bar{a}_{n1}\tilde{x}_1 + \dots + \bar{a}_{nn}\tilde{x}_n \leq \bar{b}_n. \end{array}$$

Die Durchschnittsbildung beider Lösungsmengen liefert eine Hülle der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$. DEIF verschärfte dann diese Aussage wie folgt:

Satz 3.1.:

Enthält die rechte Seite der Beziehung [13] nur nichtnegative (bzw. nichtpositive) Vektoren $x \in R^n$, so liefert die Durchschnittsbildung der beiden Lösungsmengen (11) eine exakte Beschreibung der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$.

Der Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß die Hülle von $\Sigma_0(A, b)$ die zulässigen Toleranzen i. a. überschreiten wird und somit keine befriedigende Lösung des linearen Toleranzproblems darstellt.

3.1.2. Das Verfahren von H. BEECK

Im folgenden Abschnitt wird eine Methode von H. BEECK [5] zur expliziten Beschreibung der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ angegeben. Diese Arbeit beschäftigt sich jedoch nur mit dem Spezialfall $m = n$, d. h. quadratische lineare Intervallgleichungssysteme. BEECK zeigte, daß die Schnittmenge der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ mit jedem Orthanten konvex ist.

Analog zur Ermittlung der Lösungsmenge (3) eines linearen Intervallgleichungssystems nach JAHN [2], beruht die Berechnung der eingeschränkten Lösungsmenge nach BEECK ebenfalls auf der Betrachtung linearer Ungleichungssysteme für jeden Orthanten O_k des R^n mit $k \in 1, \dots, 2^n$.

Satz 3.2.:

$$\forall \tilde{x} \in P_k \text{ gilt, daß } \tilde{x} \in \Sigma_0(A, b) \text{ mit } P_k = \{\tilde{x} \in O_k | c_k \tilde{x} \leq \bar{b}, d_k \tilde{x} \geq \underline{b}\}$$

$$c_k = (c_k) := \begin{cases} \bar{a}_{ij} & \tilde{x}_i \geq 0 \\ \underline{a}_{ij} & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$

$$d_k = (d_k) := \begin{cases} \underline{a}_{ij} & \tilde{x}_j \geq 0 \\ \bar{a}_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Lösung dieser Ungleichungssysteme kann für $n \leq 2$ graphisch und sonst durch die Simplextechnik erfolgen.

3.1.3. Das Verfahren von J. ROHN

Ein weiteres Verfahren zur Berechnung der eingeschränkten Lösungsmenge wurde von J. ROHN [6] veröffentlicht. Er zeigte für den allgemeinen Fall, d. h. $m \neq n$, daß die eingeschränkte Lösungsmenge eines linearen Intervallgleichungssystems ebenfalls in die Lösung eines linearen Ungleichungssystems überführt werden kann.

Satz 3.3.:

$$\tilde{x} \in \Sigma_0(A, b) \Leftrightarrow \tilde{x} = x^1 - x^2,$$

wobei $x^1, x^2 \in R^n$ Lösungen des folgenden Systems linearer Ungleichungen sind:

$$\begin{aligned} \bar{A}x^1 - \underline{A}x^2 &\leq \bar{b} \\ -\underline{A}x^1 + \bar{A}x^2 &\leq -\underline{b} \\ x^1, x^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

In seiner Arbeit gab ROHN einige Folgerungen aus dem obigen Satz an, die für die praktische Anwendung wichtig sind:

- Die eingeschränkte Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ ist konvex.
- Jedes $\tilde{x} \in \Sigma_0(A, b)$ erfüllt folgende Beziehung:

$$\varrho(A) |\tilde{x}| \leq \varrho(b). \quad (16)$$

Der Nachteil dieser durch Satz 3.3 gegebenen Vorgehensweise besteht in folgendem:

Da jeder Vektor $\tilde{x} \in R^n$ als Differenz zweier nichtnegativer Vektoren dargestellt wird, verdoppelt sich die Anzahl der gesuchten Größen.

3.1.4. Vergleichende Betrachtungen zur Effektivität der vorgestellten Verfahren

Die angegebenen Verfahren ermöglichen eine Aussage zur Struktur der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$. Diese Kenntnisse zur Struktur der eingeschränkten Lösungsmenge sind notwendig, um innere Abschätzungen als Lösungen des linearen Toleranzproblems berechnen zu können (vgl. Abschnitt 2.2.).

Daher ist es günstig, die oben beschriebenen Verfahren zu vergleichen um eine effektive Vorgehensweise vorzuschlagen.

Da jedoch das Verfahren von BEECK nur im quadratischen Fall, d. h. $m = n$, anwendbar ist, beziehen sich die anschließenden vergleichenden Betrachtungen nur auf diesen Spezialfall.

a) Die Verfahren von H. BEECK und J. ROHN beruhen auf der Lösung linearer Ungleichungssysteme:

Verfahren von J. ROHN

Lösung von $2n$ Ungleichungen
mit $2n$ Unbekannten

Verfahren von H. BEECK

Lösung von 2^n Ungleichungssystemen
mit jeweils $2n$ Ungleichungen und n Unbekannten

Der Aufwand bei dem Verfahren von H. BEECK steigt mit wachsendem n exponentiell, es ist daher zu vermuten, daß dieses Verfahren abgelehnt wird.

Bei einigen Beispielen zeigte sich, daß die mit der Methode von J. ROHN berechnete eingeschränkte Lösungsmenge echte Teilmenge der nach BEECK ermittelten eingeschränkten Lösungsmenge ist und somit nicht als zufriedenstellende Lösung des linearen Toleranzproblems angesehen werden kann.

b) Im Abschnitt 3.1.1. wurde bereits erwähnt, daß die von A. S. DEIF vorgeschlagene Methode zur Berechnung einer Hülle von $\Sigma_0(A, b)$ im Spezialfall die eingeschränkte Lösungsmenge exakt liefert. Jedoch kann man mit Ausnahme von diesem Spezialfall keine Aussage darüber treffen, inwieweit die so berechnete Hülle von $\Sigma_0(A, b)$ zulässige Toleranzen überschreitet.

Diese Überlegungen führen zu der folgenden Fragestellung: Existiert eine Möglichkeit, anhand der jeweiligen Aufgabenstellung festzustellen, ob die Menge C (vgl. (12)) nur nichtnegative bzw. nichtpositive Vektoren enthält?

Dabei führt ein möglicher Lösungsweg über die Berechnung einer Einschließung dieser Menge C . Die Untersuchungen von JAHN [2] zur Lösungsmenge $\Sigma(A, b)$ beinhalten auch Methoden zur Hüllenbestimmung dieser Menge. So kann man eine achsenparallele Hülle durch Lösung linearer Gleichungssysteme bestimmen, wobei die Koeffizienten durch die Randpunkte der Elemente der Intervallmatrix A und des Intervallvektors b gegeben sind. Man erhält dann als achsenparallele Hülle der Menge C die folgende Menge:

$$D := \{\hat{x} \in R^n \mid \hat{x} \in [H(\Sigma(\underline{A}, b)) \cap H(\Sigma(\bar{A}, b))]\}. \quad (17)$$

Die Berechnung dieser Menge ist einfach und man kann dann entsprechend der Struktur von D folgende Fallunterscheidung treffen.

$$D \geq 0 \text{ bzw. } D \leq 0 \Rightarrow C \geq 0 \text{ bzw. } C \leq 0$$

Somit ist auch die eingeschränkte Lösungsmenge nichtpositiv bzw. nichtnegativ und kann als Lösung eines linearen Ungleichungssystems für den entsprechenden Orthanten mit dem Verfahren von H. BEECK bestimmt werden.

$$D = \{\emptyset\} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_0(A, b) = \{\emptyset\}$$

Das lineare Intervallgleichungssystem besitzt keine eingeschränkte Lösungsmenge.

Enthält die Menge D positive und negative Vektoren, kann keine Aussage zur Gestalt der Menge C und somit der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ getroffen werden.

Anhand der obigen Ausführungen wird ersichtlich, daß die Entscheidung, welcher Rechenweg effektiv ist, bisher nur für bestimmte Spezialfälle getroffen werden kann. Das folgende Schema enthält diese Entscheidungsvarianten und führt entsprechende Querverbindungen auf.

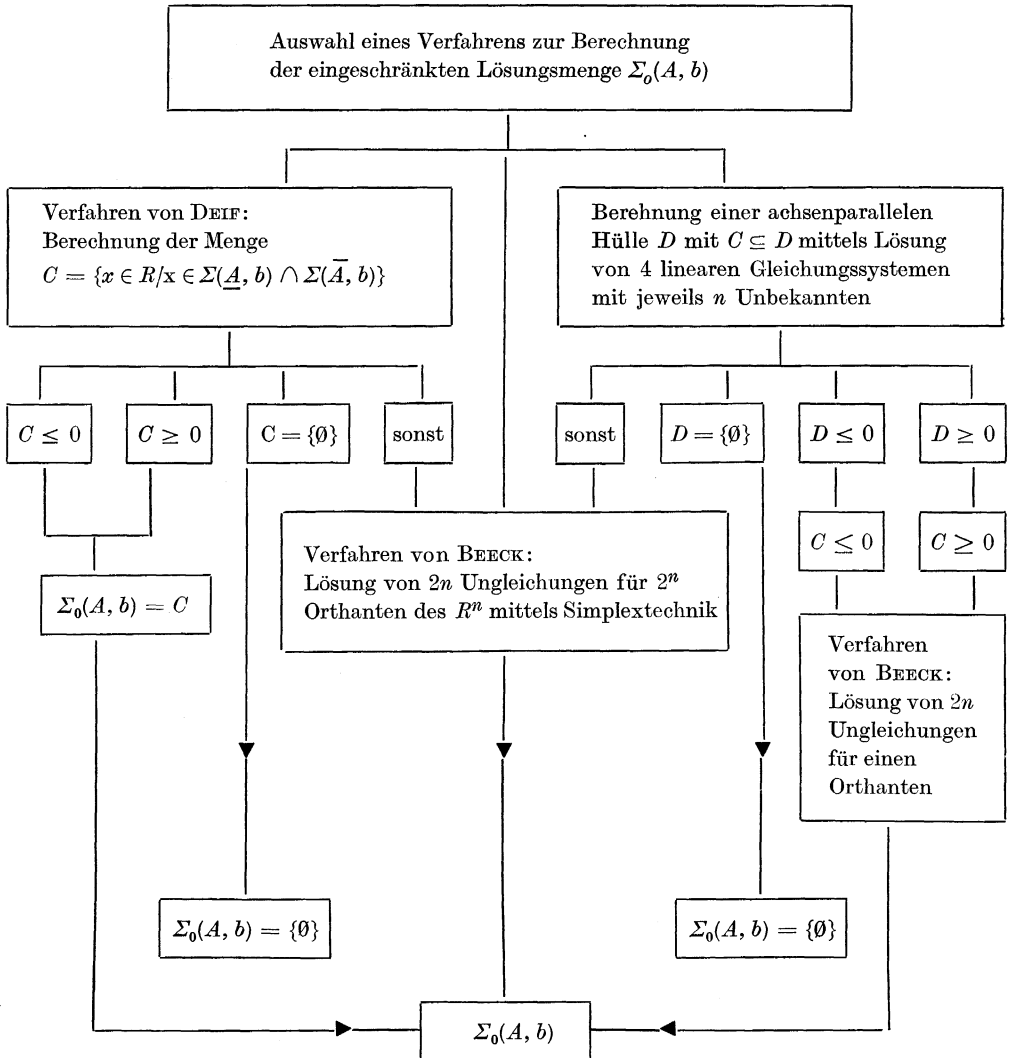


Abb. 3.1.

3.2. Die Bestimmung innerer Abschätzungen der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$

Im Abschnitt 2.2. wurde bereits darauf verwiesen, daß als Lösung des linearen Toleranzproblems eine Teilmenge der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ zu bestimmen ist. Diese Mengen sollen den folgenden Forderungen genügen:

- a) gut beschreibbar b) „so groß wie möglich“.

Die Bedingung a) führt zur Betrachtung intervallwertiger Lösungen X mit

$$X \subseteq \Sigma_0(A, b). \quad (18)$$

NEUMAIER [1] gab ein Verfahren an, daß analog zur Bestimmung innerer Abschätzungen der Lösungsmenge $\Sigma(A, b)$ (vgl. KARTHEUS, [3]) verläuft. Der Algorithmus arbeitet nach folgendem Schema:

1. Wahl eines beliebigen Vektors $\tilde{x} \in R^n$, so daß gilt:

$$A\tilde{x} \subseteq \text{int } b. \quad (19)$$

2. Wahl eines Intervallvektors $d \in I(R^n)$ mit $0 \in d$ und Bestimmung der größten positiven Zahl α mit folgender Eigenschaft:

$$A\tilde{x} + \alpha(Ad) \subseteq b. \quad (20)$$

Satz 3.4.:

Erfüllt $\tilde{x} \in R^n$ die Bedingung (19), so erhält man durch:

$$X = x + \alpha d \quad (21)$$

eine innere Abschätzung der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$, wobei α die größte positive Zahl darstellt, für die Beziehung (20) erfüllt ist.

Dieser Satz ist einfach zu beweisen. Für beliebige reelle $\tilde{d} \in d$ gilt:

$$A(\tilde{x} + \alpha\tilde{d}) \subseteq A\tilde{x} + \alpha(Ad) \subseteq b. \quad (22)$$

Der Satz 3.4. liefert jedoch keine Aussage darüber, ob die so berechnete innere Abschätzung maximal ist. Gerade diese Aussage ist für die Lösung des linearen Toleranzproblems gemäß Forderung b) von Bedeutung. Um diese Bedingung zu realisieren, ist es notwendig zu erläutern, in welchem Sinne diese Optimalitätsforderung zu verstehen ist.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde dabei das Volumen des entstehenden n -dimensionalen Würfels als Zielfunktion ausgewählt.

Die Untersuchungen von KARTHEUS [3] ergaben, daß die Wahl des Startvektors $\tilde{x} \in R^n$ mit $\tilde{x} \subseteq \Sigma(A, b)$ die Lösung beeinflussen kann.

Diese Problematik ist auch bei der Bestimmung innerer Abschätzungen der eingeschränkten Lösungsmenge zu beachten.

In dieser Arbeit werden zur Wahl des Startvektors \tilde{x} zwei Möglichkeiten vorgestellt und diskutiert.

- I. Man wählt als Startvektor die Lösung der Mittelpunktgleichung:

$$\hat{A}x = \hat{b} \quad (23)$$

mit $\hat{A} = 0,5(\underline{A} + \bar{A})$; $\hat{b} = 0,5(\underline{b} + \bar{b})$.

- II. Wird die Aussage von J. ROHN [6] benutzt, daß es sich bei der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ um eine konvexe Menge handelt, so kann man als Startvektor den Punkt $x_s \in R^n$ ermitteln, dessen Koordinaten sich als Mittel der Koordinaten der Eckpunkte des n -dimensionalen Polyeders ergeben:

$$x_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_i^k \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Im Ergebnis der bisherigen Testrechnungen wurde festgestellt, daß der Algorithmus mit dem Startvektor nach Methode II bessere Abschätzungen im Sinne des oben festgelegten Optimalitätsbegriffes liefert. Jedoch gibt es bei verschiedenen Aufgabenstellungen Abweichungen von der maximalen inneren Abschätzung, falls diese bekannt ist. Weiterführende Untersuchungen werden daher diese Problemstellung zum Inhalt haben.

Der oben angegebene Algorithmus erzeugt innere Abschätzungen der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$ durch symmetrische Aufweitung eines beliebigen Startvektors $x \in R^n$.

Diese Überlegungen können fortgesetzt werden, indem man eine beliebige Aufweitung des Startvektors zuläßt.

Die in den Abschnitten 3.1. und 3.2. vorgestellten Verfahren zur Lösung linearer Toleranzprobleme sollen nun anhand eines Beispiels illustriert werden.

3.3. Anwendungsbeispiel

$$A = \begin{pmatrix} [-1, & 1] & [& 2, & 3] \\ [-3, & -2] & [-2, & -1] \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} [-2, & 3] \\ [-4, & 6] \end{pmatrix}$$

Gesucht ist eine innere Abschätzung der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$.

I. Bestimmung von $\Sigma_0(a, b)$

Gemäß Abbildung 3.1. kann man mit der Methode von JAHN [2] eine achsenparallele Hülle der eingeschränkten Lösungsmenge berechnen.

$$H(\Sigma_0(A, b)) \subseteq \{H(\Sigma(\bar{A}, b)) \cap H(\Sigma(\underline{A}, b))\}. \tag{25}$$

Man berechnet die Hüllen der Lösungsmengen $\Sigma(\bar{A}, b)$ und $\Sigma(\underline{A}, b)$ durch die Lösung linearer reeller Gleichungssysteme. Für die Hülle von $\Sigma(\bar{A}, b)$ erhält man folgende 4 Gleichungssysteme:

$$\bar{A}x^{(i)} = b^{(i)} \quad i = 1, \dots, 4 \text{ mit}$$

$$b^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad b^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad b^3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad b^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Hülle von $\Sigma(\underline{A}, b)$ wird analog vorgegangen. Nach der Bildung des Durchschnittes beider Hüllen erhält man als Hülle der eingeschränkten Lösungsmenge $\Sigma_0(A, b)$:

$$H(\Sigma_0(A, b)) = \begin{pmatrix} [-9/4, & 6/4] \\ [-12/8, & 13/8] \end{pmatrix}.$$

Die graphische Darstellung dieser Hülle erfolgt in Abbildung 3.2. Da beide Elemente dieses Vektors die Null enthalten ist Satz 3.1. nicht anwendbar und somit durch dieses Verfahren keine exakte Beschreibung der eingeschränkten Lösungsmenge möglich. Entsprechend dem Schema 3.1. kann man das Verfahren von BEECK [5] zur Bestimmung von $\Sigma_0(A, b)$ anwenden (vgl. Abschnitt 3.1.2.).

Für dieses Beispiel ($n = 2$) ist die graphische Lösung der 4 Ungleichungssysteme günstig. Nach Anwendung des Satzes 3.2. ergaben sich folgende Ungleichungssysteme für die Quadranten:

$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1 + 3x_2 \leq 3$	$-2 \leq -x_1 + 2x_2$
	$-2x_1 - x_2 \leq 6$	$-4 \leq -3x_1 - 2x_2$
$x_1 \geq 0$	$x_1 + 2x_2 \leq 3$	$-2 \leq -x_1 + 3x_2$
$x_2 \leq 0$	$-2x_1 - 2x_2 \leq 6$	$-4 \leq -3x_1 - x_2$
$x_1 \leq 0$	$-x_1 + 3x_2 \leq 3$	$-2 \leq x_1 + 2x_2$
$x_2 \geq 0$	$-3x_1 - x_2 \leq 6$	$-4 \leq -2x_1 - 2x_2$
$x_1, x_2 \leq 0$	$-x_1 + 2x_2 \leq 3$	$-2 \leq x_1 + 3x_2$
	$-3x_1 - 2x_2 \leq 6$	$-4 \leq -2x_1 - x_2$

Die graphisch ermittelte Lösung ist in Abbildung 3.2. dargestellt.

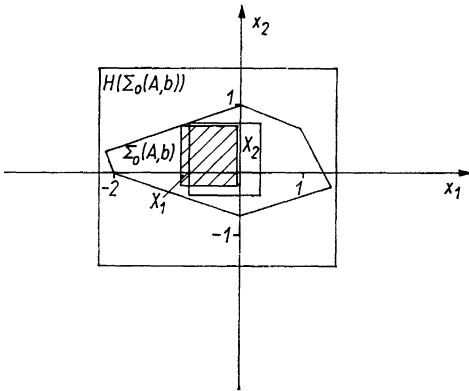


Abb. 3.2.

II. Die Bestimmung innerer Abschätzungen der eingeschränkten Lösungsmenge nach der Methode von NEUMAIER (1986)

a) Mit der Lösung \tilde{x} der Mittelpunktgleichung: $\hat{A}x = \hat{b}$ $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -0,52 \\ 0,20 \end{pmatrix}$ ergibt sich nach Anwendung des Algorithmus und Satz 3.4 folgende innere Abschätzung:

$$X_1 = \begin{pmatrix} [-0,99, -0,05] \\ [-0,27, 0,67] \end{pmatrix}.$$

Als Optimalitätskriterium betrachtet man den Flächeninhalt dieses Quadrates $A_1 = 0,88$ FE.

b) Ermittelt man die Koordination des Startvektors x durch die Vorschrift (2.4) so ergibt sich als Startvektor:

$$x_s = \begin{pmatrix} -0,30714 \\ 0,18888 \end{pmatrix}.$$

Als innere Abschätzung der eingeschränkten Lösungsmenge ergibt sich dann folgendes Quadrat:

$$X_2 = \begin{pmatrix} [-0,82479, 0,21052] \\ [-0,32878, 0,70654] \end{pmatrix}.$$

Für den Flächeninhalt ergibt sich $A_2 = 1,07187$ FE.

Beide inneren Abschätzungen sind in Abbildung 3.2. graphisch dargestellt und man sieht, daß die Abschätzung X_2 als zufriedenstellende Lösung dieses speziellen Toleranzproblems angesehen werden kann.

Literatur

- [1] NEUMAIER, A.: "Tolerance-analysis with interval arithmetic". FIB 1986/9, S. 5–19.
- [2] JAHN, K. U.: „Eine Theorie der Gleichungssysteme mit Intervallkoeffizienten“, ZAMM 54, s. 405–412 1974.
- [3] KARTHEUS, V.: „Zur intervallanalytischen Behandlung linearer Gleichungssysteme“, Mitt der GMD Bonn 16, 1972.
- [4] DEIF, A. S.: "Methods of interval analysis", Lectures, delivered at the University Cairo, 1984.

- [5] BEECK, H.: „Über intervallanalytische Methoden bei linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten und Zusammenhänge mit der Fehleranalysis“, Dissertation, TH München 1972.
- [6] ROHN, J.: “Inner solutions of linear interval systems”, Interval Mathematics 1985, ed. by K. Nickel Lectures Notes Comp., Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 1986, S. 157/158.

Eingang: 7. 2. 1989

Verfasser: KELLING, BIRGIT, Dipl.-Math.;

OELSCHLÄGEL, DIETER, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg

Fachbereich Mathematik und Informatik