FREIBURGER INTERVALL-BERICHTE

78/6

Klaus Peter Hellmig

Existenz von Lösungen bei Anfangswertproblemen von Intervall-Differentialgleichungen

(Diplomarbeit)

Herausgeber: Karl Nickel
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg i. Br.
Hermann-Herder-Straße 10
D-7800 Freiburg i. Br.
West Germany
Telefon (0761) 203 3062

EXISTENZ VON LÖSUNGEN

BEI

ANFANGSWERTPROBLEMEN

VON

INTERVALL-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

\- Diplomarbeit -

verfaßt von Klaus Peter Hellmig
im Jahre 1978
am Institut für Angewandte Mathematik
der Albert - Ludwigs - Universität Freiburg
bei Herrn Prof. Dr. Karl Nickel

Hinweise für den Leser

Die Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel, die mit den römischen Ziffern I bis V bezeichnet sind. Jedes dieser Kapitel wird in Abschnitte unterteilt, die durch arabische Ziffern gekennzeichnet sind. So wird zum Beispiel der zweite Abschnitt im vierten Kapitel mit IV.2 bezeichnet.

In jedem Kapitel werden Sätze,Definitionen und Beispiele gekennzeichnet durch die Nummer des jeweiligen Abschnittes und eine in diesem Abschnitt fortlaufende Nummer.

Soll in einem Kapitel ein Satz, eine Definition oder ein Beispiel aus einem anderen Kapitel zitiert werden, so wird der Nummer dieses Satzes, dieser Definition oder dieses Beispiels die Nummer dieses Kapitels vorangestellt. (z.B. ... vergleiche Satz II.3.5)

Mit in der gesamten Arbeit fortlaufenden Nummern in runden Klammern werden einzelne Gleichungen oder andere Beziehungen gekennzeichnet, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgegriffen werden wird.

Treten bei Definitionen oder Sätzen hinter deren Nummern weitere Nummern in eckigen Klammern auf, so soll dies den Fall kennzeichnen, daß diese Definition bzw. dieser Satz aus der in der Literaturliste unter dieser Nummer aufgeführten Arbeit stammt.

Inhaltsverzeichnis

I. EINLEITUNG / PROBLEMSTELLUNG / VORGEHENSWEISE

I.1 Einleitung

Die Intervallmathematik hat sich in den letzten Jahren über große Teile der Mathematik ausgebreitet. So hat sie auch vor dem Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht halt gemacht.

Wie von PEANO bereits gegen Ende des 19. Jahrhunderts bewiesen wurde, hat das reelle Anfangswertproblem (AWP) $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_o$ mindestens eine Lösung, wenn nur die reellwertige Funktion f stetig ist.
Der Beweis dieses Peanoschen Existenzsatzes benutzt wesentlich das Lemma von Ascoli-Arzelà. Dieses Lemma lautet: Jede auf einem kompakten Intervall gleichgradig stetige und beschränkte Folge von Funktionen besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge(vergleiche etwa [13]). Diese Folge wird im Beweis des Lemmas von Ascoli-Arzelà jedoch nicht konstruktiv bestimmt. Damit wird auch der Beweis des Peanoschen Existenzsatzes nicht konstruktiv.
Angeregt von der von KENNEDY im Jahre 1969 in [4] gestellten Frage nach der Existenz eines "elementaren" Beweises des Peanoschen Existenzsatzes veröffentlichte WALTER in [12] einen Beweis, der das Lemma von Ascoli-Arzelà vermeidet, und in dem eine Lösung als Grenzwert von konstruktiv bestimmten Näherungsfunktionen angegeben wird. Außerdem wird im WALTER'schen Beweis nicht nur eine beliebige Lösung des gegebenen AWPs bestimmt, sondern sogar zwei Lösungen, und zwar die Maximallösung und die Minimallösung des gegebenen AWPs. Mit dem WALTER'schen Beweis besitzt man ein numerisches Verfahren, das monotone Folgen "oberer" und "unterer" Schranken für die Lösungen des gegebenen AWPs liefert.
Wie WALTER in [12] bemerkt, läßt sich dieser Beweis im Gegensatz zum Beweis mit Hilfe des Lemmas von Ascoli-Arzelà nicht auf beliebige Systeme von gewöhnlichen Differentalgleichungen übertragen. Eine Übertragung ist aber für Systeme möglich, wenn die rechte Seite f(t,x) "quasiisoton in x" ist (vergleiche [12], dort von WALTER als "quasimonoton wachsend in x" bezeichnet).

Die vorliegende Arbeit hat nun das Ziel, ein Analogon des Peanoschen Existenzsatzes für Anfangswertprobleme von Intervall-Differentialgleichungen herzuleiten.

I.2 Problemstellung

Untersucht werden sollen Intervall-Differentialgleichungen, das heißt Gleichungen, in denen intervallwertige Funktionen und deren Ableitungen auftreten.
Dazu ist es nötig, für intervallwertige Funktionen eine Ableitung zu erklären. Zu diesem Zweck werden in dieser Arbeit eine ganze Reihe von Differenzierbarkeitsbegriffen für intervallwertige Funktionen benutzt.

Das zu untersuchende Intervall-AWP wird sofort für beliebige Systeme formuliert.

Es sei T eine positive reelle Zahl. Das abgeschlossene Intervall $[0,T]$ werde mit J bezeichnet. Die Menge der reellen Zahlen werde wie üblich mit $\mathbb{R}$, und die Menge aller kompakten Intervalle über den reellen Zahlen mit den üblichen intervallarithmetischen Operationen werde mit $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ bezeichnet.
Es sei m eine natürliche Zahl.
Gegeben sei ein Element U_o aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ und eine stetige Funktion
$F : J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$.
Betrachtet werden nun Systeme von Intervall-Differentialgleichungen

$$(1) \qquad U'(t) = F(t,U(t)) \qquad \text{für} \quad 0 < t < T.$$

Vorgeschrieben seien Anfangsbedingungen

$$(2) \qquad U(0) = U_o \quad .$$

Dabei seien $U=(U^1,U^2, \ldots,U^m)$, $F=(F^1,F^2, \ldots,F^m)$ und $U_o=(U_o^1,U_o^2, \ldots,U_o^m)$ jeweils m-Vektoren.

Eine Funktion U von J nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ heißt dann Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich eines gegebenen Differenzierbarkeitsbegriffes, wenn U bezüglich dieses Differenzierbarkeitsbegriffes im Intervall $[0,T)$ differenzierbar ist, im gesamten Intervall J stetig ist, und wenn U die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.
In Abänderung hierzu soll für den noch einzuführenden Begriff der Fréchet - Differenzierbarkeit für eine Lösung bezüglich dieses Differenzierbarkeitsbegriffes nur die Differenzierbarkeit im offenen Intervall $J_o = (0,T)$ verlangt werden.

Bemerkung: Die explizite Forderung der Stetigkeit einer Lösung im Intervall (O,T) ist für einige Differenzierbarkeitsbegriffe nicht notwendig, da die Stetigkeit für diese Differenzierbarkeitsbegriffe bereits aus der Differenzierbarkeit folgt. Wie später noch gezeigt werden wird, gilt dies aber nicht für alle Differenzierbarkeitsbegriffe, die in dieser Arbeit benutzt werden.

Die in dieser Arbeit gestellte Aufgabe besteht nun darin, eine Lösung des Intervall-AWPs (1),(2) zu finden.

I.3 Vorgehensweise

Da die Intervallmathematik ganz besonders daran interessiert ist, konstruktive und damit praktisch anwendbare Verfahren zu erhalten, wird der von WALTER in [10] gegebene Beweis des Peanoschen Existenzsatzes eine zentrale Rolle spielen.

Es werden zwei verschiedene Lösungswege beschritten.
Der erste Lösungsweg ist nur für ein AWP bei einer einzigen Intervall-Differentialgleichung gangbar.
Das Intervall-AWP wird durch geeignete Transformationen auf ein AWP bei einem System von zwei reellen Differentialgleichungen mit quasiisotoner rechter Seite zurückgeführt, dessen Maximal- und Minimallösung man mit dem WALTER'schen Verfahren bestimmen kann. Aus der Maximal- und Minimallösung dieses Problems läßt sich dann eine Lösung des ursprünglichen Intervall-AWPs bestimmen.
Der zweite Lösungsweg besteht in der direkten Übertragung des WALTER'schen Beweises. Analog zum Reellen, wo eine Übertragung nur auf Systeme mit quasiisotoner rechter Seite möglich ist, läßt sich ein Beweis nur für Systeme mit "inklusionsisotoner rechter Seite" angeben.

Die im reellen Fall mit der WALTER'schen Methode bestimmten Lösungen waren die Maximal- und die Minimallösung.
Diese Begriffe lassen sich für Intervall-Differentialgleichungen übertragen. Man spricht dort dann etwa von der "größten Intervallösung" bzw. von der "kleinsten Intervallösung" (Eine exakte Definition dieser Begriffe erfolgt später, ebenso eine Begründung dafür, daß nicht mehr von Maximal- und

Minimallösung gesprochen wird, sondern von der größten bzw. kleinsten Lösung).
Der Begriff der größten bzw. kleinsten Intervallösung ist jedoch keine Erweiterung des Begriffes der Maximal- bzw. Minimallösung im Reellen.
Sie unterscheiden sich nämlich grundlegend dadurch, daß Maximal- und Minimallösung im Reellen ihre Extremaleigenschaft bezüglich der Ordnungsrelation $\leqq$ annehmen, während die größte bzw. kleinste Intervallösung ihre Extremaleigenschaft bezüglich der Ordnungsrelation $\subseteq$ annehmen.

Mit der ersten Lösungsmethode lassen sich nun die größte Intervallösung und, falls sie existiert, die kleinste Intervallösung des gegebenen Intervall-AWPs bestimmen. Man erhält damit stets "äußere" und "innere" Schranken für die Lösungen des Problems.
Mit der zweiten Methode läßt sich stets nur die größte Intervallösung des gegebenen Intervall-AWPs bestimmen. Damit erhält man lediglich "äußere" und keine "inneren" Schranken für die Lösungen.
Der große Vorteil der zweiten Methode liegt in ihrer Anwendbarkeit für Systeme mit "inklusionsisotoner rechter Seite", wo sich mit dieser Methode die größte Intervallösung bestimmen läßt.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird noch ein Zusammenhang zwischen den Lösungen von reellen Anfangswertproblemen und Intervall-Anfangswertproblemen hergestellt.
Es wird eine Klasse von reellen AWPen angegeben, deren Lösungen sich durch die größte Intervallösung eines vorgegebenen Intervall-AWPs abschätzen lassen.
Da diese erste Abschätzung nicht "optimal" ist, wird dann eine Klasse von reellen AWPen bestimmt, deren Lösungen sich "optimal" durch die größte Intervallösung eines vorgegebenen Intervall-AWPs abschätzen lassen.

Zum Schluß der Arbeit wird noch ein neuer Abschätzungssatz für die Lösungen einer vorgegebenen Klasse von reellen AWPen angegeben.

Dabei handelt es sich bei den in den Abschätzungssätzen betrachteten reellen AWPen stets um AWPe bei einem beliebigen System von reellen Differentialgleichungen.

II HILFSMITTEL

II.1 Grundlegende Definitionen und Sätze

Da sich diese Arbeit mit intervallwertigen Funktionen beschäftigt, sollen als erstes Intervalle definiert werden.
In der Intervallmathematik wird der Begriff des Intervalls für beliebige halbgeordnete Räume allgemein definiert.
Da es für die Zwecke dieser Arbeit genügt, soll diese Definition nur für den Spezialfall der Menge der reellen Zahlen, versehen mit der üblichen Ordnungsrelation $\leqq$, angegeben werden.

Definition 1.1 (Intervalle)
Es seien $\underline{a}$ und $\overline{a}$ reelle Zahlen mit $\underline{a} \leqq \overline{a}$. Dann heißt die Menge

$A = [\underline{a}, \overline{a}] := \{ a \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leqq a \leqq \overline{a} \}$ ein Intervall.

Mit $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ werde die Menge aller Intervalle bezeichnet.

Bemerkungen: 1.) Diese Definition entspricht der üblichen Definition eines abgeschlossenen Intervalls in $\mathbb{R}$. Damit ist der Begriff "Intervall" lediglich eine andere Bezeichnung für den Begriff "abgeschlossenes Intervall" im üblichen Sinne.
2.) Intervallwertige Funktionen nehmen somit als Funktionswerte stets abgeschlossene Intervalle an.

Schreibweisen: 1.) Wie üblich werde mit $(\underline{a}, \overline{a})$ das offene Intervall zwischen den Eckpunkten $\underline{a}$ und $\overline{a}$ bezeichnet.
2.) Kennt man zwar die Eckpunkte a und b eines Intervalls, weiß aber nicht, ob die Beziehung $a \leqq b$ gilt, so schreibt man für dieses Intervall auch $a \vee b$ (vergleiche [10]).

Definition 1.2 (Spanne eines Intervalls) [1],[6]
Es sei $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ ein Intervall. Dann wird die Spanne von A definiert als
$\operatorname{span} A := \overline{a} - \underline{a}$.

Durch die in der folgenden Definition erklärte Ordnungsrelation $\subseteq$ wird die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ der Intervalle zu einem halbgeordneten Raum.

Definition 1.3 (Inklusion bei Intervallen) [7]
Auf der Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ der Intervalle wird eine Ordnungsrelation $\subseteq$ wie folgt erklärt:
Es seien $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ und $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ Intervalle.
Dann gelte $A \subseteq B$ dann, wenn $\underline{a} \geq \underline{b}$ und $\overline{a} \leq \overline{b}$ gilt.

Bemerkung: Diese Definition stimmt mit der üblichen mengentheoretischen Definition überein.

Die vier arithmetischen Grundoperationen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen werden wie folgt auf die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ der Intervalle erweitert.

Definition 1.4 (intervallarithmetische Operationen) [1] , [6]
Es seien $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ und $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ Intervalle.
Dann wird für jedes ω aus der Menge $\{+,-,\times,/\}$ eine intervallarithmetische Operation erklärt durch

$$A \omega B \; := \; \{ a \omega b \mid \underline{a} \leq a \leq \overline{a} \, , \, \underline{b} \leq b \leq \overline{b} \} \quad .$$

Dabei wird für den Fall $\omega = /$ die Operation nur dann erklärt, wenn die Beziehung $0 \notin B$ gilt.

Die intervallarithmetischen Operationen haben die in dem folgenden Lemma aufgezählten Eigenschaften.

Lemma 1.5 [1], [6]
Es seien $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ und $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ Intervalle. Dann gilt:

$$A + B = [\, \underline{a} + \underline{b} \, , \, \overline{a} + \overline{b} \,] \quad ,$$

$$A - B = [\, \underline{a} - \overline{b} \, , \, \overline{a} - \underline{b} \,] \quad ,$$

$$A \times B = [\; \min\{\underline{a}\cdot\underline{b}, \underline{a}\cdot\overline{b}, \overline{a}\cdot\underline{b}, \overline{a}\cdot\overline{b}\} \, , \, \max\{\underline{a}\cdot\underline{b}, \underline{a}\cdot\overline{b}, \overline{a}\cdot\underline{b}, \overline{a}\cdot\overline{b}\} \;] \quad ,$$

$$1 / B = [\; 1/\overline{b} \, , \, 1/\underline{b} \;] \quad ,$$

$$A / B = A \times (1/B) \quad .$$

Darüber hinaus besitzen die intervallarithmetischen Operationen und die aus ihnen durch endlichmalige Anwendung aufgebauten Funktionen die nachfolgend erklärte wichtige Eigenschaft der Inklusionsisotonie.

Definition 1.6 (Inklusionsisotonie)

Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. Ihre Potenzmengen seien $P(M_1)$ und $P(M_2)$. Die Menge Q_1 sei eine Teilmenge von $P(M_1)$, die Menge Q_2 eine Teilmenge von $P(M_2)$. Es sei ferner F eine Funktion von Q_1 nach Q_2.
Dann heißt die Funktion F inklusionsisoton, wenn für alle Teilmengen A und B von Q_1 mit der Beziehung $A \subseteq B$ auch die Beziehung $F(A) \subseteq F(B)$ gilt.

Bemerkung: Um die Eigenschaft der Inklusionsisotomie für die intervallarithmetischen Operationen nachzuprüfen, ist in dieser allgemeinen Definition M_1 und M_2 gleich $\mathbb{R}$ und Q_1 und Q_2 gleich $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ zu setzen.

In der Intervallmathematik werden häufig reellwertige Funktionen durch intervallwertige Funktionen abgeschätzt beziehungsweise zu solchen erweitert.
Am gebräuchlichsten sind dabei die "Intervallerweiterungen".

Definition 1.7 (Intervallerweiterung)

Es seien f und F Funktionen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$.
Ferner gelte für alle x aus $\mathbb{R}$ die Beziehung $F([x,x]) = [f(x),f(x)]$.
Dann heißt die Funktion F Intervallerweiterung zu f.

Bemerkung: Bei den meisten Problemstellungen, bei denen Intervallerweiterungen benötigt werden, ist es erforderlich, von der Intervallerweiterung zusätzlich die Eigenschaft der Inklusionsisotonie zu verlangen. Besonders beim Auftreten von Intervallerweiterungen in praktisch anzuwendenden Verfahren ist diese Eigenschaft wichtig, da sie eine oft erhebliche Aufwandsersparnis mit sich bringt.

Als nächstes wird die auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen übliche, durch den Abstand gegebene, Metrik auf die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ der Intervalle verallgemeinert.

Definition 1.8 (Metrik auf $\mathbb{I}(\mathbb{R})$) [1]

Auf $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ wird eine Metrik definiert durch:

$$|A\ ,\ B| \ := \max\{\ |\underline{b} - \underline{a}|\ ,\ |\overline{b} - \overline{a}|\ \}$$

für alle $A = [\underline{a},\overline{a}]$ und $B = [\underline{b},\overline{b}]$ aus $\mathbb{I}(\mathbb{R})$.

Die Menge $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik und die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit der hier definierten Metrik bilden je einen metrischen Raum.

Damit läßt sich die Stetigkeit einer intervallwertigen Funktion $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ bzw. einer reellwertigen Funktion $f : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definieren mit Hilfe der Definition der Stetigkeit einer Abbildung eines metrischen Raumes in einen anderen.

Definition 1.9 (Stetigkeit)
Es seien X und Y metrische Räume mit den Metriken $|.,.|_X$ bzw. $|.,.|_Y$, und es sei f eine Funktion von X nach Y.
(a) Die Funktion f heißt stetig an der Stelle x_o des Definitionsgebietes von f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle x aus dem Definitionsgebiet von f mit $|x,x_o|_X < \delta_\varepsilon$ die Beziehung $|f(x),f(x_o)|_Y < \varepsilon$ gilt.
(b) Die Funktion f heißt stetig auf einer Teilmenge X_o des Definitionsgebietes von f, wenn f stetig ist an allen Punkten x_o aus X_o.

Oft ist es bequemer, mit reellwertigen Funktionen umzugehen als mit intervallwertigen Funktionen. Diesem Sachverhalt soll nun Rechnung getragen werden.

Lemma 1.10
Jede intervallwertige Funktion F läßt sich darstellen durch zwei reellwertige Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ als $F = [\underline{f},\overline{f}]$. Dabei gilt stets $\underline{f} \leq \overline{f}$.

Die Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ beschreiben den Verlauf der Eckpunkte der Intervalle, die die Funktion F als Funktionswerte annimmt.
Schreibweise: Weiß man lediglich, daß für alle Elemente t des Definitionsbereiches von F die Beziehung $F(t) = \underline{f}(t) \vee \overline{f}(t)$ gilt, so schreibt man $F = \underline{f} \vee \overline{f}$.

Wie das folgende Lemma zeigt, läßt sich für $F = [\underline{f},\overline{f}]$ die Stetigkeit der Funktion F auf die Randfunktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ übertragen und umgekehrt.

Lemma 1.11
Es sei Q ein metrischer Raum mit der Metrik $|.,.|_Q$. Ferner seien $F,\underline{f}$ und $\overline{f}$ Funktionen, $F : Q \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $\underline{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$, und es gelte $F = [\underline{f},\overline{f}]$.
Dann ist F genau dann stetig, wenn $\underline{f}$ und $\overline{f}$ stetig sind.

Beweis: a) Es sei F stetig.
Dann gibt es für jedes Element X_o aus Q und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß für alle X aus Q mit $|X,X_o|_Q < \delta_\varepsilon$ die Beziehung $|F(X),F(X_o)| < \varepsilon$ gilt.

Nach Definition der Metrik auf $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ heißt dies:
Für jedes X_o aus Q und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß für alle X aus Q mit $|X,X_o|_Q < \delta_\varepsilon$ die Beziehung

$$\max\{\,|\underline{f}(X) - \underline{f}(X_o)|\,,\,|\overline{f}(X) - \overline{f}(X_o)|\,\} < \varepsilon \quad \text{gilt.}$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von $\underline{f}$ und $\overline{f}$ unmittelbar.

b) Es seien $\underline{f}$ und $\overline{f}$ stetig.
Dann gibt es zu jedem X_o aus Q und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\underline{\delta}_\varepsilon > 0$ und ein $\overline{\delta}_\varepsilon > 0$, so daß für alle X aus Q mit $|X,X_o|_Q < \underline{\delta}_\varepsilon$ die Beziehung $|\underline{f}(X),\underline{f}(X_o)| < \varepsilon$ und für alle X aus Q mit $|X,X_o|_Q < \overline{\delta}_\varepsilon$ die Beziehung $|\overline{f}(X),\overline{f}(X_o)| < \varepsilon$ gilt.
Wie man sofort sieht, gelten für alle X aus Q mit $|X,X_o|_Q < \min\{\underline{\delta}_\varepsilon\,,\,\overline{\delta}_\varepsilon\}$ beide Beziehungen. Damit gilt:
Für jedes X_o aus Q und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß für alle X aus Q mit $|X,X_o|_Q < \delta_\varepsilon$ die Beziehungen $|\underline{f}(X),\underline{f}(X_o)| < \varepsilon$ und $|\overline{f}(X),\overline{f}(X_o)| < \varepsilon$ gelten.
Damit gilt für diese X auch die Beziehung

$$\max\{\,|\underline{f}(X),\underline{f}(X_o)|\,,\,|\overline{f}(X),\overline{f}(X_o)|\,\} < \varepsilon .$$

Wegen $F = [\underline{f},\overline{f}]$ und nach der Definition der Metrik auf $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ folgt hieraus sofort die Stetigkeit der Funktion F.

QED

Es wird nun ein Stetigkeitsbegriff für Mengen von reellwertigen Funktionen erklärt und mit diesem eine Konvergenzaussage für Funktionenfolgen formuliert.

<u>Definition 1.12</u> (gleichgradige Stetigkeit) [13]
Eine Menge $M = \{f_1, f_2, \dots\}$ von reellwertigen Funktionen, welche alle im Intervall $J : a \leqq x \leqq b$ stetig sind, heißt gleichgradig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle x und $\overline{x}$ aus J mit $|x - \overline{x}| < \delta$ die Beziehung $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ gilt, und zwar für alle Funktionen f aus M.

<u>Bemerkung:</u> [13] Das Wesentliche an dieser Definition ist, daß man für alle Funktionen aus M mit einunddemselben δ auskommt.

Beispiel 1.13 [13] Es sei M die Menge aller Funktionen f, welche in J einer Lipschitzbedingung mit der einheitlichen Lipschitzkonstanten L

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leqq L\,|x - \bar{x}| \qquad \text{für } x,\bar{x} \in J$$

genügen. Die Menge M ist gleichgradig stetig. Hier kann man offenbar $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$ setzen.

Lemma 1.14 [13] Ist die Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ in $J = [a,b]$ gleichgradig stetig, und konvergiert sie für alle x aus A, wobei $A \subseteq J$ eine in J dichte Punktmenge ist, so konvergiert sie für alle x aus J, und zwar gleichmäßig. Ihr Limes f ist demnach eine in J stetige Funktion.

Dabei nennt man die Punktmenge A "dicht" in J, wenn jedes Teilintervall von J mindestens einen Punkt von A enthält.

Es folgen nun einige Definitionen und Sätze aus der Verbandstheorie.

Definition 1.15 (Verband) [3]
Eine halbgeordnete Menge S heißt Verband, wenn zu je zwei Elementen a und b aus S das Infimum und das Supremum in S existieren.

Definition 1.16 ([bedingte] Vollständigkeit) [3]
Ein Verband S heißt [bedingt] vollständig, wenn zu jeder [beschränkten] Teilmenge M von S das Infimum und das Supremum von M in S existieren.

Beispiel 1.17 Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, versehen mit der Ordnungsrelation $\leqq$, ist ein bedingt vollständiger Verband.

Definition 1.18 (Supremums-Halbverband/Infimums-Halbverband) [3]
Eine halbgeordnete Menge S heißt Supremums-Halbverband [Infimums-Halbverband] wenn für je zwei Elemente a und b aus S das Supremum [Infimum] von a und b in S existiert.

Lemma 1.19 [7] Es sei S ein bedingt vollständiger Verband.
Dann ist die Menge $\mathbb{I}(S)$, versehen mit der Ordnungsrelation $\subseteq$, ein bedingt vollständiger Supremums-Halbverband.

Beispiel 1.20 Da $\mathbb{R}$ ein bedingt vollständiger Verband ist, ist die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, versehen mit der Ordnungsrelation $\subseteq$, ein bedingt vollständiger Supremums-Halbverband, d.h. für je zwei Elemente existiert das Supremum. Die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ ist aber kein Infimums-Halbverband. Schon für die zweielementige Teilmenge $\{[0,1], [2,3]\}$ von $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ existiert kein Infimum mehr.

Nach diesem kurzen Exkurs in die Verbandstheorie sollen zum Schluß dieses Abschnitts wieder Differentialgleichungen betrachtet werden.

Wie schon früher gesagt, lassen sich die bei reellen Differentialgleichungen auftretenden Begriffe der Maximallösung und der Minimallösung für Intervalldifferentialgleichungen übertragen.
Dazu sei das Folgende bemerkt:
In einer Teilmenge R einer halbgeordneten Menge S heißt ein Element a aus R maximal in R, wenn es kein Element x aus R gibt mit $x > a$.
Das Element a aus R heißt größtes Element in R, wenn für jedes andere Element x aus R die Beziehung $a \leqq x$ gilt.
Es kann mehrere maximale Elemente in R geben, aber stets nur ein größtes Element.
Es wäre deshalb sinnvoller, nicht von der Maximallösung und der Minimallösung zu sprechen, sondern von der größten Lösung und der kleinsten Lösung.
Eine gewisse Rechtfertigung für die Verwendung der Begriffe "maximal" und "minimal" ergibt sich aus dem folgenden Zusammenhang.
Existiert überhaupt ein größtes Element, so ist dieses auch ein maximales Element, und zwar das einzige maximale Element. Analog dazu ist das kleinste Element, falls es existiert, auch das einzige minimale Element.

Da sich in der Literatur die Begriffe Maximal- und Minimallösung durchgesetzt haben, soll auch in dieser Arbeit bei reellen AWPen diese Terminologie beibehalten werden. Bei Intervall-AWPen soll jedoch von der größten und der kleinsten Intervallösung gesprochen werden.
Diese Begriffe sollen in der folgenden Definition erklärt werden.

Definition 1.21 (größte Intervallösung/kleinste Intervallösung)
Eine Lösung $U^+ = [\underline{u}^+, \overline{u}^+]$ $\left[U_+ = [\underline{u}_+, \overline{u}_+] \right]$ des AWPs (1),(2) heißt größte Intervallösung $\left[\text{kleinste Intervallösung}\right]$, wenn für jede andere Lösung $\hat{U} = [\hat{\underline{u}}, \hat{\overline{u}}]$ gilt:

$\hat{U}(t) \subseteq U^+(t)$, d.h. $\underline{u}^+(t) \leqq \hat{\underline{u}}(t)$ und $\hat{\overline{u}}(t) \leqq \overline{u}^+(t)$ in J

$\left[U_+(t) \subseteq \hat{U}(t)\right.$, d.h. $\hat{\underline{u}}(t) \leqq \underline{u}_+(t)$ und $\overline{u}_+(t) \leqq \hat{\overline{u}}(t)$ in $\left. J \right]$.

II.2 Differenzierbarkeitsbegriffe, zugehörige Sätze und Definitionen

H. RATSCHEK und G. SCHRÖDER geben in [9] eine Reihe von Möglichkeiten an, Differenzierbarkeit und Ableitung einer intervallwertigen Funktion zu definieren.
Hierzu gehört auch die Fréchet-Differenzierbarkeit, mit der sich hier die Differenzierbarkeit einer intervallwertigen Funktion $F = [\underline{f},\overline{f}]$ auf die übliche Differenzierbarkeit der reellwertigen Randfunktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ zurückführen läßt.

Um die Fréchet-Differenzierbarkeit definieren zu können, muß zuerst noch auf der Menge $\mathbb{R}^2$ eine Subtraktion eingeführt werden.

Definition 2.1 (**innere Subtraktion**) [9]
Auf der Menge $\mathbb{R}^2$ sei eine Subtraktion $\overset{b}{-}$ gegeben durch

$$(a_1,a_2) \overset{b}{-} (b_1,b_2) \quad := \quad (a_1 - b_1 \, , \, a_2 - b_2) \quad \text{für alle } (a_1,a_2),(b_1,b_2) \text{ aus } \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.2 (Fréchet-Differenzierbarkeit und Ableitung) [9]
Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$, M offen, $G : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $x \in M$.
Die Funktion G heißt an der Stelle x dann F-differenzierbar, wenn ein Punkt (a,b) aus $\mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$r(0) = (0,0) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = (0,0)$$

existieren, so daß für alle h aus einer Umgebung $U(0)$ gilt:

$$G(x + h) \overset{b}{-} G(x) = (a,b)\cdot h + r(h) \, .$$

$G'(x) := (a,b)$ heißt dann die F-Ableitung von G an der Stelle x.
Existiert $G'(x)$ für alle x aus einer Teilmenge N von M, so heißt die Abbildung $G' : N \to \mathbb{R}^2$ F-Ableitung von G in N.

Bemerkungen: 1.) Intervalle $[a_1,a_2]$ bzw. $[b_1,b_2]$ werden mit den Punkten (a_1,a_2) bzw. (b_1,b_2) aus $\mathbb{R}^2$ identifiziert (vergleiche [9]). Damit ist die Verwendung der Subtraktion $\overset{b}{-}$ in Definition 2.2 gerechtfertigt.

2.) Die F-Ableitung (a,b) einer intervallwertigen Funktion in einem Punkt braucht kein Intervall mehr darzustellen, d.h. es braucht nicht die Beziehung $a \leqq b$ zu gelten. Dazu sei das folgende Beispiel gegeben.

Es sei M das offene Intervall (1,2). Auf M sei eine intervallwertige Funktion G definiert durch $G(x) := [2x, x + 6]$.

Dann gilt für jedes x aus M:

$$\begin{aligned} G(x + h) \overset{b}{-} G(x) &= (2(x + h),(x + h) + 6) \overset{b}{-} (2x,x + 6) \\ &= (2(x + h) - 2x,\ x + h + 6 -(x + 6)) \\ &= (2h,h) \\ &= (2,1)\ h + (0,0)\ . \end{aligned}$$

Die intervallwertige Funktion G ist demnach F-differenzierbar in M mit der F-Ableitung $G'(x) = (2,1)$ für alle x aus M. Damit stellt die F-Ableitung sogar in jedem Punkt des Definitionsgebietes von G kein Intervall dar.

<u>Lemma 2.3</u> [9]

Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$, M offen, $G : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $f : M \to \mathbb{R}$ und $g : M \to \mathbb{R}$.
Für alle x aus M gelte ferner $G(x) = [f(x),g(x)]$. Dann gilt:

(a) G ist an der Stelle x genau dann F-differenzierbar, wenn f und g an der Stelle x differenzierbar sind.

(b) $G'(x) = (f'(x),g'(x))$ für alle x aus M.

<u>Korollar 2.4</u> [9]

Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$, M offen, $G : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ und a aus M.
Für alle x aus M gelte $G(x) = [f(x),g(x)]$.
Dann ist $G'(a)$ genau dann ein Intervall, wenn $f'(a) \leqq g'(a)$ ist, d.h., wenn span $[f(x),g(x)]$ in einer Umgebung U(a) von a eine nicht abnehmende Funktion von x ist.

Wie bereits gezeigt wurde, braucht die F-Ableitung einer intervallwertigen Funktion im allgemeinen keine intervallwertige Funktion mehr zu sein.
Da im gegebenen AWP (1),(2) die Ableitung U' der intervallwertigen Funktion U gleich der intervallwertigen Funktion F sein soll, also selbst wieder intervallwertig ist, umfaßt die Menge der F-differenzierbaren intervallwertigen Funktionen eine große Klasse solcher intervallwertiger Funktionen, die als Lösungen für das AWP (1),(2) nicht in Frage kommen.
Es ist daher sinnvoll, auch solche Differenzierbarkeitsbegriffe einzuführen, die als Ableitung einer intervallwertigen Funktion stets wieder eine intervallwertige Funktion liefern.

Im Gegensatz zur F-Differenzierbarkeit wird hierbei der Weg über die Integration von intervallwertigen Funktionen eingeschlagen.
Wieder erhält man einen gewissen Zusammenhang zwischen einer intervallwertigen Funktion und den sie begrenzenden Randfunktionen. Diesmal aber nicht bezüglich der Differentiation , wie bei der F-Differenzierbarkeit, sondern bezüglich der Integration.

Es werden nur intervallwertige Funktionen (I-Funktionen) $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ betrachtet, für die $M \subseteq \mathbb{R}$ und M konvex ist.

Definition 2.5 [9]
Eine I-Funktion $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ heißt Borel-meßbar (B-meßbar) über einer konvexen Teilmenge J von M, wenn der Graph von U über J, das ist die Menge $\{ (x,p) \mid x \in J,\ p \in U(x) \}$, eine B-meßbare Menge bezüglich des $\mathbb{R}^2$ ist.

Bemerkung: [9] Gilt $U(x) = [f(x), g(x)]$, so ist die B-Meßbarkeit von U über J gleichbedeutend mit der B-Meßbarkeit (bezüglich $\mathbb{R}$) der Funktionen f und g über J.

Definition 2.6 [9]
Für I-Funktionen $P : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $a \in M, b \in M$ wird das folgende Symbol erklärt:

$$\int_a^b P := \left\{ \int_a^b p \;\middle|\; p \text{ meßbar, für } t \in [a,b] \text{ oder } t \in [b,a] \text{ sei } p(t) \in P(t) \right\} .$$

Dabei versteht man für $a > b$ unter $\int_a^b p$ das Integral $-\int_b^a p$.

Meßbarkeit und Integration seien hierbei die im Sinne von Lebesgue.

Definition 2.7 (H-Differenzierbarkeit,H-Ableitung) [9]
Es seien $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $0 \in M$. Existiert eine B-meßbare I-Funktion P mit

$U(x) = \int_0^x P$ für alle x aus M, so heißt U dann H-differenzierbar (in M).

Die Funktion P heißt die H-Ableitung von U (in M), und U heißt Integral von P (in M).

Definition 2.8 [9]
Mit $\mathfrak{H}$ werde die Menge aller auf beliebigen konvexen Mengen H-differenzierbarer I-Funktionen bezeichnet.

Lemma 2.9 [9]
Es seien U_1, U_2, P_1, P_2 auf M erklärte I-Funktionen, es sei $0 \in M$, und P_1 und P_2 seien die H-Ableitungen von U_1 bzw. U_2.
Dann ist $U_1 = U_2$ äquivalent mit $P_1(x) = P_2(x)$ fast überall (kurz: f.ü.) in M.

Definition 2. 10 [9]
Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$, $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$, und es gelte $U = [f,g]$.
Dann sei ι ein Operator, der Funktionen von M nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ auf Funktionen von M nach $\mathbb{R}^2$ abbildet, und der gegeben ist durch

$$\iota U(x) := \begin{cases} (f(x),g(x)) & \text{für } 0 \leqq x \in M \\ (g(x),f(x)) & \text{für } 0 > x \in M \end{cases} .$$

Man erhält damit einen Zusammenhang zwischen der Integration einer I-Funktion und der Integration der sie begrenzenden Randfunktionen in dem folgenden Lemma.

Lemma 2.11 [9]
Es seien $P : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ und $P = [f,g]$. Die Funktion P sei B-meßbar auf M, es sei $0 \in M$, und für jedes $x \in M$ gelte die Beziehung $\iota P(x) = (i(x), j(x))$ mit B-meßbaren Funktionen i und j auf M, $i : M \to \mathbb{R}$, $j : M \to \mathbb{R}$.

Dann gilt: $$\int_0^x P = \left[\int_0^x i \; , \; \int_0^x j \right] \quad \text{für alle } x \text{ aus } M.$$

Die Frage, wann eine I-Funktion H-differenzierbar ist, beantwortet das folgende Lemma.

Lemma 2.12 [9]
Es sei $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, f,g,i und j seien Funktionen von M nach $\mathbb{R}$. Es sei $0 \in M$, und es gelte $U = [f,g]$. Ferner gelte für jedes x aus M die Beziehung $\iota U(x) = (i(x), j(x))$.
Dann ist U genau dann H-differenzierbar, wenn gilt:

(a) $U(0) = [0,0]$

(b) span(U(x)) ist in M monoton zunehmend (isoton) für $x \geqq 0$ und monoton abnehmend (antiton) für $x \leqq 0$.

(c) Die Funktionen i und j lassen sich in M als unbestimmtes Integral von B-meßbaren Funktionen darstellen.

Korollar 2.13 [9]

Es mögen die Voraussetzungen von Lemma 2.12 gelten. Ferner sei die Funktion U noch H-differenzierbar.

Dann ist $U'(x) = [i'(x), j'(x)]$ f.ü. in M.

Bemerkung: [9] Eine notwendige Bedingung für die H-Differenzierbarkeit einer I-Funktion U auf M ist die zu 2.12(c) nicht äquivalente Aussage, daß i und j f.ü. differenzierbar sind.

Korollar 2.14 [9]

Es seien U_1 und U_2 in M erklärte, H-differenzierbare I-Funktionen.

Dann ist $U_1 + U_2$ eine H-differenzierbare Funktion, und es gilt

$(U_1 + U_2)' = U_1' + U_2'$.

Der Begriff der H-Differenzierbarkeit wird durch die nun folgende Definition der H_1-Differenzierbarkeit erweitert.

Definition 2.15 (H_1-Differenzierbarkeit, H_1-Ableitung) [9]

Es sei $U : M \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Die Funktion U heißt H_1-differenzierbar (in M), wenn es ein Intervall C und eine Funktion $G \in \mathfrak{H}$ gibt, so daß in M die Identität $U = G + C$ gilt.

$U' := G'$ sei dann die H_1-Ableitung von U (in M) .

Definition 2.16 [9]

Die Menge aller H_1-differenzierbaren I-Funktionen über beliebigen konvexen Mengen werde mit $\mathfrak{H}_1$ bezeichnet.

Lemma 2.17 [9]

Es sei $U : M \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $U \in \mathfrak{H}_1$.

Dann existiert genau eine auf M erklärte I-Funktion $G \in \mathfrak{H}$ und genau ein Intervall C, so daß $U = G + C$ ist.

Bemerkung: [9] Die H_1-Ableitung U' ist demnach eindeutig f.ü. in M.

Lemma 2. 18 [9]

Es seien U_1 und U_2 auf M erklärte und H_1-differenzierbare I-Funktionen.

Dann ist $U_1 + U_2$ eine H_1-differenzierbare Funktion, und für die H_1-Ableitung gilt $(U_1 + U_2)' = U_1' + U_2'$.

Man ist nun in der Lage, Intervallpolynome zu differenzieren.

Korollar 2.19 [9]
Es sei n eine natürliche Zahl. Für i=0(1)n sei $A_i \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

Das Intervallpolynom $P(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i\ ([x,x])^i$ ist H_1-differenzierbar

und besitzt die H_1-Ableitung $P'(x) = A_1 + \sum_{i=2}^{n} [i,i]\ A_i\ ([x,x])^{i-1}$.

Da bei der Definition des Integrals einer I-Funktion die untere Integrationsgrenze der Punkt 0 ist, ist eine Bildung der H_1-Ableitung bereits für eine Reihe "einfacher" I-Funktionen nicht möglich. Dies soll an dem folgenden Beispiel veranschaulicht werden.

Beispiel 2.20 [9]
Die I-Funktion U, die gegeben ist durch $U(x) := [0,1]\ ([x,x] - [1,1])$, ist nicht H_1-differenzierbar.

Beweis: Es gilt: $U(0) = [0,1]([0,0] - [1,1]) = [0,1][-1,-1] = [-1,0]$.
Macht man die Annahme, die Funktion U sei H_1-differenzierbar, dann folgt daraus die Existenz einer Funktion $G \in \mathfrak{F}$ mit $U(x) = G(x) + [-1,0]$.
Insbesondere gilt dann für x=1/2 : $U(1/2) = G(1/2) + [-1,0]$.
Da $U(1/2) = [0,1]\ ([1/2,1/2] - [1,1]) = [0,1][-1/2,-1/2] = [-1/2,0]$ gilt, muß somit gelten: $[-1/2,0] = G(1/2) + [-1,0]$.
Dies ist aber nicht möglich, da G eine I-Funktion ist, und diese Gleichung durch kein Intervall gelöst werden kann.

Durch geeignete Translationen wird nun auch dieser Mangel beseitigt.

Definition 2.21 ($H_2(a)$-Differenzierbarkeit, $H_2(a)$-Ableitung) [9]

Es sei $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, und es sei a aus M.
Die Funktion U heißt $H_2(a)$-differenzierbar (in M), wenn eine I-Funktion $G \in \mathfrak{F}_1$ existiert, so daß gilt:

(a) $G : M_{-a} \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, mit $M_{-a} := \{\, m - a \mid m \in M \,\}$

(b) $U(x) = G(x - a)$ für alle x aus M.

$U'(x) := G'(x - a)$ sei dann die $H_2(a)$-Ableitung von U (in M).

Definition 2.22 [9]
Die Menge aller $H_2(a)$-differenzierbaren Funktionen werde mit $\mathfrak{H}_2(a)$ bezeichnet.

Bemerkung: $H_2(0)$-Differenzierbarkeit und H_1-Differenzierbarkeit sind äquivalent.

Lemma 2.23 [9]
Es sei $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$, und es seien a und b aus M. Die Funktion U sei ferner $H_2(a)$-differenzierbar mit der $H_2(a)$-Ableitung U_a' und $H_2(b)$-differenzierbar mit der $H_2(b)$-Ableitung U_b'.
Dann ist $U_a' = U_b'$ f.ü. in M.

Damit ist man nun berechtigt, die folgende Definition anzugeben, die unabhängig von der Wahl eines Bezugspunktes eine Ableitung festlegt.

Definition 2.24 (H_2-Differenzierbarkeit, H_2-Ableitung) [9]
Es sei $U : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Es seien $M_i \subseteq \mathbb{R}$ konvexe Mengen mit $M = \bigcup M_i$.
Die Funktion U heißt H_2-differenzierbar (in M), wenn zu jedem M_i eine Zahl a_i existiert, so daß $U_i := U|M_i$ eine $H_2(a_i)$-differenzierbare Funktion ist.
Die in M f.ü. eindeutig bestimmte Funktion U', die gegeben ist durch $U'|M_i = U_i'$, sei die H_2-Ableitung von U (in M).

Diese Definition läßt die folgenden beiden Interpretationsmöglichkeiten zu:
1.) Man gebe sich Mengen M_i mit $\bigcup M_i = M$ vor und nenne dann die Funktion U eine H_2-differenzierbare Funktion, wenn es zu jedem dieser vorgegebenen M_i eine Zahl a_i aus M_i gibt, so daß die Funktion $U|M_i$ eine $H_2(a_i)$-differenzierbare Funktion ist. Dies beinhaltet, daß es wesentlich von der willkürlichen Wahl der Mengen M_i abhängt, ob eine Funktion H_2-differenzierbar ist oder nicht.

2.) Es wird lediglich die Existenz einer solchen Überdeckung von M durch Mengen M_i gefordert derart, daß die $H_2(a_i)$-Differenzierbarkeit der Restriktionen von U auf die Mengen M_i gesichert ist.

Für den Fall der Interpretation nach 1.) wäre dann aber nicht mehr gewährleistet, daß eine H- oder H_1-differenzierbare Funktion auch H_2-differenzierbar ist. Dies soll in dem folgenden Beispiel gezeigt werden.

Beispiel 2.25

Es wird eine H- und H_1-differenzierbare Funktion angegeben, die nicht H_2-differenzierbar ist im Sinne von Interpretation 1.) .

Wie RATSCHEK und SCHRÖDER in [9] auf Seite 182 angeben, ist die Funktion P, die gegeben ist durch $P(t) := [0,1][\sin t, \sin t]$, auf $M := [0, \pi/2]$ sowohl H- als auch H_1-differenzierbar.

Es sei nun eine Überdeckung von M gegeben durch $M_1 := \{0\}$, $M_2 := (0, \pi/2)$ und $M_3 := \{\pi/2\}$.

Macht man nun die Annahme, daß die Funktion P auf M eine H_2-differenzierbare Funktion im Sinne von Interpretation 1.) ist, dann folgt daraus insbesondere die Existenz eines Elementes a aus $M_2 = (0,\pi/2)$ mit der Eigenschaft, daß die Funktion $P_2 := P|M_2$ auf M_2 eine $H_2(a)$-differenzierbare Funktion ist.

Dies besagt aber, daß eine Funktion $G \in \mathfrak{H}_1$ existiert mit

$$G : M_{2,-a} \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad P_2(t) = G(t-a) \text{ für alle } t \text{ aus } M_2.$$

Dies wiederum beinhaltet die Existenz eines Intervalles C und einer Funktion $K \in \mathfrak{H}$ mit $K : M_{2,-a} \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und $P_2(t) = G(t-a) = K(t-a) + C$.

Da die Funktion K aus der Menge $\mathfrak{H}$ der H-differenzierbaren Funktionen stammt, gilt $K(0) = [0,0]$.

Dies bedeutet aber: $C = P_2(a) = [0, \sin a]$.

Es seien nun t_1 und t_2 aus M_2 , und es gelte $t_1 < t_2 < a$.

Dann gilt:

$$(+) \quad P_2(t_1) = P(t_1) = [0,1][\sin t_1, \sin t_1] = [0, \sin t_1] \subsetneqq [0, \sin t_2] =$$
$$= [0,1][\sin t_2, \sin t_2] = P(t_2) = P_2(t_2) \quad .$$

Wegen $t_1 < t_2 < a$ gilt auch $t_1 - a < t_2 - a < 0$.

Da K eine H-differenzierbare Funktion ist, ist span(K(t)) antiton für $t < 0$.

Hieraus folgt die Inklusion $K(t_2 - a) \subseteq K(t_1 - a)$.

Addiert man zu beiden Seiten das Intervall C, so erhält man die Beziehung

$$K(t_2 - a) + C \subseteq K(t_1 - a) + C$$

und damit
$$P_2(t_2) \subseteq P_2(t_1) \quad .$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (+).

Die Annahme, daß P auf M eine H_2-differenzierbare Funktion im Sinne von Interpretation 1.) ist, ist damit als falsch erkannt.

Wegen dieses Mankos soll im Folgenden die H_2-Differenzierbarkeit stets im Sinne von Interpretation 2.) verstanden werden.

Diese Auffassung wird auch noch dadurch bekräftigt, daß auch RATSCHEK und SCHRÖDER die H_2-Differenzierbarkeit stets im Sinne von Interpretation 2.) verstanden haben, wie in einem Briefwechsel zwischen Herrn Prof. Nickel und Herrn Prof. Ratschek bestätigt wurde.

Unter Zugrundelegung dieser Interpretation besitzt nun die H_2-Differenzierbarkeit auch die angestrebte Eigenschaft, eine Erweiterung der Begriffe der H-Differenzierbarkeit und der H_1-Differenzierbarkeit zu sein.

Dies wird in dem nun folgenden Lemma gezeigt.

<u>Lemma 2.27</u>

Es sei M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$, und es sei $P : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

Dann gilt: (a) Ist P in M eine H-differenzierbare Funktion, dann ist P in M auch H_1-differenzierbar, und die H-Ableitung stimmt mit der H_1-Ableitung überein.

(b) Ist P in M eine H_1-differenzierbare Funktion, dann ist P in M auch H_2-differenzierbar, und die H_1-Ableitung stimmt mit der H_2-Ableitung überein.

<u>Beweis:</u> zu (a): Es sei $P : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Ferner sei P eine H-differenzierbare Funktion in M. Man setzt nun in der Definition der H_1-Differenzierbarkeit $C := [0,0]$, dann folgt (a) unmittelbar.

zu (b): Es sei $P : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Ferner sei P eine H_1-differenzierbare Funktion in M. Nach Definition 2.21 gilt dann, daß P auch $H_2(O)$-differenzierbar in M ist. Setzt man nun in der Definition der H_2-Differenzierbarkeit $M_i := M$ für alle i, d.h., wählt man als Zerlegung von M nur die Menge M selbst, so folgt die H_2-Differenzierbarkeit von P unmittelbar.

QED

Die H_2-Differenzierbarkeit ist für die gestellte Anfangswertaufgabe (1),(2) immer noch nicht der "optimale" Differenzierbarkeitsbegriff.
So kann der Fall auftreten, daß die Anzahl der Mengen M_i überabzählbar ist, oder daß die Ableitung nicht überall eindeutig definiert oder nicht überall stetig ist.
Diese Nachteile vermeidet die von RATSCHEK in [10] angegebene sogenannte "stetige Differenzierbarkeit" von intervallwertigen Funktionen.
Dieser Differenzierbarkeitsbegriff soll nun noch als letzter eingeführt werden. Dazu wird die folgende Definition benötigt.

<u>Definition 2.28</u> [10]
Es sei M eine konvexe Teilmenge der reellen Zahlen. Die Funktion $F : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ sei durch die Randfunktionen f und g gegeben, d.h. $F = [f,g]$.
Sind f und g im Riemannschen Sinne integrierbar, und sind a und b aus M, so wird das Riemann-Integral über die Funktion F definiert durch

$$(++) \quad \int_a^b F(t)\,dt := \begin{cases} \left[\int_a^b f(t)\,dt\,,\ \int_a^b g(t)\,dt\right] & \text{, wenn } a \leqq b \text{ ist} \\ -\int_b^a F(t)\,dt & \text{, wenn } a > b \text{ ist} \end{cases} .$$

<u>Bemerkung:</u> Die hier gegebene Definition befindet sich in Übereinstimmung mit anderen Einführungen des Integrals für intervallwertige Funktionen, etwa in [2] und [5].
Die Beziehung (++) läßt sich mit den dort gegebenen Definitionen und den Voraussetzungen dieser Definition nachweisen.

Definition 2.29 (stetige Differenzierbarkeit und Ableitung) [10]

Es sei M eine konvexe Teilmenge der reellen Zahlen, und es sei $F : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ Dann heißt die Funktion F stetig differenzierbar (in M), wenn

(a) eine stetige Funktion $G : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$,

(b) eine Überdeckung von M durch eine Familie $(J_i)_{i \in I}$ mit $J_i \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ und abzählbarer Indexmenge I und

(c) zu jedem $i \in I$ ein $a_i \in \mathbb{R}$ und ein $F_i \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$

existieren, so daß für alle $i \in I$ gilt:

$$F(t) = \int_{a_i}^{t} G(t)\, dt + F_i \qquad \text{für alle } t \in J_i .$$

Die Funktion $F' := G$ heißt dann die (stetige) Ableitung von F (in M).

Bemerkungen: [10]

1.) Im Fall der Existenz ist G eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von der Überdeckung und den Punkten a_i .

2.) Aus der stetigen Differenzierbarkeit von F folgt nicht die Stetigkeit von F. So ist z.B. die im Punkt 0 unstetige Funktion $F(x) := [0,1] \cdot (\operatorname{sign} x)$ stetig differenzierbar mit der Ableitung $F'(x) = [0,0]$.
Ebenso folgt aus der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit von $F = [f,g]$ nicht die Differenzierbarkeit von f und g. Dies zeigt die Funktion $F(x) := [-1,1] + [-1,1]\, x$, für die $F'(x) = [-1,1]$ ist, und für die f und g im Punkt 0 nicht differenzierbar sind.

Auch hier erhält man wieder einen Zusammenhang zwischen der intervallwertigen Funktion $F = [f,g]$ und den sie begrenzenden Randfunktionen f und g.

Lemma 2.30 [10]

Es sei M eine konvexe Teilmenge der reellen Zahlen, und es sei $F : M \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit $F = [f,g]$. Die Funktion F sei in M stetig differenzierbar mit der Ableitung $G = [u,v]$, $(J_i)_{i \in I}$ sei die geforderte Überdeckung von M, und $(a_i)_{i \in I}$ bzw. $(F_i)_{i \in I}$ mit $F_i = [c_i, d_i]$ sei die zugehörige Familie von Punkten bzw. Integrationskonstanten.

Dann gelten in J_i die Gleichungen

$$f(t) = c_i + \int_{a_i}^{t} v(s)\, ds \qquad g(t) = d_i + \int_{a_i}^{t} u(s)\, ds \qquad \text{für } t \in J_i ,\ t \leqq a_i ,$$

$$f(t) = c_i + \int_{a_i}^{t} u(s)\, ds \qquad g(t) = d_i + \int_{a_i}^{t} v(s)\, ds \qquad \text{für } t \in J_i ,\ t \geqq a_i .$$

Da u nd v stetig sind, stimmen sie mit den Ableitungen ihrer unbestimmten Integrale überein, und man erhält das folgende Korollar.

Korollar 2.31 [10]

Es mögen die Voraussetzungen von Lemma 2.30 gelten.

Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$u(t) = g'(t) \quad \text{und} \quad v(t) = f'(t) \quad \text{für } t \in J_i \text{ , } t < a_i \text{ ,}$$

$$u(t) = f'(t) \quad \text{und} \quad v(t) = g'(t) \quad \text{für } t \in J_i \text{ , } t > a_i \text{ .}$$

Bemerkung: [10]

Damit sind für alle i aus I die Funktionen $f|(J_i \setminus \{a_i\})$ stetig differenzierbar.

Lemma 2.32 [10]

Es sei $F = [f,g]$ auf dem konvexen Bereich $M \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann sind f und g stetig differenzierbar mit Ausnahme von abzählbar vielen Stellen, und die Intervallfunktion $f' \vee g'$ ist zu einer stetigen, auf M erklärten Intervallfunktion $f_1 \vee g_1$ fortsetzbar, und es gilt $F' = f_1 \vee g_1$.

II.3 Existenz von Lösungen des Anfangswertproblems bei einem System von reellen Differentialgleichungen mit quasiisotoner rechten Seite

WALTER gibt in [12] einen elementaren und konstruktiven Beweis für die Existenz einer Lösung des reellen AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_o$ mit stetiger, reellwertiger Funktion f an.

Wie WALTER in jener Arbeit bemerkt, läßt sich der Beweis auf ein AWP bei einem System von Differentialgleichungen mit "quasiisotoner rechten Seite" (von WALTER wird dort der Ausdruck "quasimonoton wachsend" verwendet) übertragen.

Diese Übertragung soll in diesem Abschnitt vollzogen werden.

<u>Schreibweise:</u> Im Folgenden stehen Komponentenindices stets oben und Iterationsindices unten.

<u>Definition 3.1</u> (Quasiisotonie) [11] , [12]

Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$, $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f^i : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i=1(1)n$ und $f = (f^1,f^2,\dots,f^n)$. Dann heißt die Funktion $f(t,x) = f(t,x^1,x^2,\dots,x^n)$ quasiisoton in x, wenn für $i=1(1)n$ die Funktion $f^i(t,x) = f^i(t,x^1,\dots,x^n)$ isoton ist in jeder Variablen x^j mit $j \neq i$.

Zum Beweis des Satzes über die Existenz von Lösungen des AWPs bei einem System von Differentialgleichungen mit quasiisotoner rechten Seite f sind noch eine Definition und zwei Hilfssätze erforderlich.

<u>Definition 3.2</u>

Es seien $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $M \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^m$ und es gelte $P \subseteq \{1,2,\dots,m\}$. Dann werden (m+1)-dimensionale Gebiete definiert durch

$$R(t,x,h,M) \quad := \quad [t,t+h] \times [x - 3\,M \cdot h,\ x + M \cdot h] \quad ,$$

$$R^{\emptyset,C}(t,x,h,M) := R(t,x,h,M) \quad ,$$

$$R^{P,C}(t,x,h,M) := \Big\{ (t',y) \in [t,t+h] \times \mathbb{R}^m \,\Big|\, y^k = c^k \text{ für alle } k \in P, \text{ und es gibt ein } (\bar{t},\bar{y}) \in R(t,x,h,M) \text{ mit } \bar{t} = t' \text{ und } \bar{y}^s = y^s \text{ für alle } s \in \{1,2,\dots,m\} \text{ mit } s \notin P \Big\} \quad .$$

Anschaulich bedeutet die letzte Definition: Man nehme alle Elemente (t',x') von $R(t,x,h,M)$ und setze für alle $k \in P$ deren Komponente x'^k auf den Wert c^k .

<u>Lemma 3.3</u>

Es seien $m \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $J = [0,T]$, $t_1 \in J$, $t_1 \leqq T - h$, $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f^i : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ für $i=1(1)m$, $f = (f^1,f^2,\dots,f^m)$.
Es sei $f(t,x)$ stetig, quasiisoton in x und beschränkt durch $M = (m^1,m^2,\dots,m^m)$
Es seien P und Q Indexmengen mit $P \cup Q = \{1,2,\dots,m\}$ und $P \cap Q = \emptyset$.
Ferner seien $x = (x^1,x^2,\dots,x^m)$ und $C = (c^1,c^2,\dots,c^m)$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft $c^k \geqq x^k + m^k \cdot h$ für alle $k \in P$.
Dann gilt für alle $q \in Q$: $\max f^q(\, R(t_1,x,h,M)\,) \leqq \max f^q(\, R^{P,C}(t_1,x,h,M)\,)$

Beweis: Für $P = \emptyset$ ist die Behauptung nach Definition 3.2 trivialerweise erfüllt.

Es seien nun $P \neq \emptyset$, $(t,y) \in R(t_1,x,h,M)$ und $(t,y) \notin R^{P,C}(t_1,x,h,M)$.

Nach Definition von $R(t_1,x,h,M)$ und $R^{P,C}(t_1,x,h,M)$ und nach Voraussetzung gilt dann für alle $k \in P$ die Ungleichung $y^k < x^k + m^k \cdot h$. Da f quasiisoton ist, gilt dann für alle $q \in Q$ die Ungleichung $f^q(t,y) \leqq f^q(t,z)$, wenn man z so wählt, daß gilt: $z^k := c^k \geqq x^k + m^k \cdot h$ für $k \in P$ und $z^k := y^k$ sonst.

Dies heißt aber: Zu jedem Element $(t,y) \in R(t_1,x,h,M)$ gibt es ein Element $(t,z) \in R^{P,C}(t_1,x,h,M)$ mit $f^q(t,y) \leqq f^q(t,z)$ für alle $q \in Q$.

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

QED

Lemma 3.4

Es seien $m \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $T = n \cdot h$, $J = [0,T]$, $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f^i : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ für $i=1(1)m$ und $f = (f^1,f^2,\dots,f^m)$.

Es sei $f(t,x)$ quasiisoton in x, stetig und beschränkt durch $M = (m^1,m^2,\dots,m^m)$.

Es seien $V : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und $W : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ auf J stetige und auf den offenen Intervallen $(k \cdot h,(k+1)h)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ differenzierbare Funktionen mit $V = (v^1,v^2,\dots,v^m)$ und $W = (w^1,w^2,\dots,w^m)$. Beide seien beschränkt durch $M = (m^1,m^2,\dots,m^m)$. Es sei $t_i = i \cdot h$ ein Punkt aus J. Es seien ferner P,Q, A und B Indexmengen mit $P \cup Q = \{1,2,\dots,m\}$, $P \cap Q = \emptyset$, $A \cup B = \{1,2,\dots,m\}$, $A \cap B = \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$, und es gelte:

(a) $w^p(t_i) \leqq v^p(t_i) - m^p \cdot h$ für alle $p \in P$,

(b) $v^q(t_i) - m^q \cdot h < w^q(t_i) \leqq v^q(t_i)$ für alle $q \in Q$,

(c) $w^a(t_i+h/2) \leqq v^a(t_i) - (3/2)m^a \cdot h$ für alle $a \in A$,

(d) $v^b(t_i) - (3/2)m^b \cdot h < w^b(t_i+h/2) \leqq v^b(t_i) + (1/2)m^b \cdot h$ für alle $b \in B$

Dann gilt:

(α) $\max\ f(R(t_i,V(t_i),h,M)) \geqq \max\ f(R(t_i,W(t_i),h/2,M))$,

(β) $\max\ f(R(t_i,V(t_i),h,M)) \geqq \max\ f(R(t_i+h/2,W(t_i+h/2),h/2,M))$.

Hierbei wurde die übliche Schreibweise $\max f(S) = \max \{ f(s) \mid s \in S \}$ verwendet.

Beweis:

Zu (α): Da $v^k(t_i) \geqq w^k(t_i) + m^k \cdot h/2$ für alle $k \in P$ ist, genügt es nach Lemma 3.3 zu zeigen, daß die Ungleichung

$$\max f\ (\ R^{P,V(t_i)}(t_i,W(t_i),h/2,M)\ ) \leqq \max f\ (\ R(t_i,V(t_i),h,M)\ ) \qquad \text{gilt.}$$

Hierzu genügt es, die Inklusion $R^{P,V(t_i)}(t_i,W(t_i),h/2,M) \subseteq R(t_i,V(t_i),h,M)$ zu zeigen.

Die zugelassenen t-Werte für Elemente aus $R^{P,V(t_i)}(t_i,W(t_i),h/2,M)$ sind in denen für Elemente aus $R(t_i,V(t_i),h,M)$ trivialerweise enthalten.

Für alle Elemente (t,x) aus $R^{P,V(t_i)}(t_i,W(t_i),h/2,M)$ sind die Komponenten x^k für $k \in P$ fest, nämlich $x^k = v^k(t_i)$. Dies ist aber ein zulässiger Wert für die entsprechende Komponente eines Elementes aus $R(t_i,V(t_i),h,M)$.

Es bleiben die Komponenten x^q für $q \in Q$ zu untersuchen.

Zu zeigen sind die beiden Ungleichungen $v^q(t_i) - 3m^q \leqq w^q(t_i) - 3m^q \cdot h/2$ und $w^q(t_i) + m^q \cdot h/2 \leqq v^q(t_i) + m^q \cdot h$ für alle $q \in Q$.

Diese beiden Ungleichungen sind äquivalent mit den beiden Ungleichungen $v^q(t_i) - (3/2)m^q \cdot h \leqq w^q(t_i)$ und $w^q(t_i) - m^q \cdot h/2 \leqq v^q(t_i)$ für alle $q \in Q$.

Diese Ungleichungen sind aber für alle $q \in Q$ erfüllt, da nach Voraussetzung für alle $q \in Q$ die Ungleichungskette $v^q(t_i) - m^q \cdot h < w^q(t_i) \leqq v^q(t_i)$ gilt.

Damit ist die Behauptung (α) bewiesen.

Zu (β): Da $v^b(t_i) + m^b \cdot h/2 \geqq w^b(t_i + h/2)$ für alle $b \in B$ ist, genügt es nach Lemma 3.3 zu zeigen, daß die Ungleichung

$$\max f\ (\ R^{B,V(t_i)+M\cdot h/2}(t_i+h/2,W(t_i+h/2),h/2,M)\ ) \leqq \max f\ (\ R(t_i,V(t_i),h,M)\ )$$

gilt. Dazu genügt es, die Inklusion

$$R^{B,V(t_i)+M\cdot h/2}(t_i+h/2,W(t_i+h/2),h/2,M) \subseteq R(t_i,V(t_i),h,M) \qquad \text{zu zeigen.}$$

Die zugelassenen t-Werte für Elemente (t,x) aus

$R^{B,V(t_i)+M\cdot h/2}(t_i+h/2, W(t_i+h/2), h/2, M)$ sind trivialerweise in denen für Elemente von $R(t_i, V(t_i), h, M)$ enthalten. Für alle Elemente (t,x) aus

$R^{B,V(t_i)+M\cdot h/2}(t_i+h/2, W(t_i+h/2), h/2, M)$ sind die Komponenten x^a für $a \in A$ fest, nämlich $x^a = v^a(t_i) + m^a \cdot h/2$. Dies ist aber ein zulässiger Wert für die entsprechende Komponente eines Elementes von $R(t_i, V(t_i), h, M)$.

Es bleiben die Komponenten x^b mit $b \in B$ zu untersuchen.

Zu zeigen sind die beiden Ungleichungen $v^b(t_i) - 3m^b \cdot h \leqq w^b(t_i+h/2) - 3m^b \cdot h/2$ und $w^b(t_i+h/2) \leqq v^b(t_i) + m^b \cdot h/2$ für alle $b \in B$.

Für jedes $b \in B$ sind diese beiden Ungleichungen äquivalent zu den Ungleichungen $v^b(t_i) - (3/2)m^b \cdot h \leqq w^b(t_i+h/2)$ und $v^b(t_i) + m^b \cdot h/2 \geqq w^b(t_i+h/2)$.

Diese Ungleichungen sind aber für alle $b \in B$ erfüllt, da nach Voraussetzung für alle $b \in B$ die Ungleichungskette

$$v^b(t_i) - (3/2)m^b \cdot h < w^b(t_i+h/2) \leqq v^b(t_i) + m^b \cdot h/2 \qquad \text{gilt.}$$

Damit ist auch die Behauptung (β) bewiesen.

QED

Es sind nun alle nötigen Hilfsmittel vorhanden, um den Satz über die Existenz von Lösungen des AWPs bei einem System von reellen Differentialgleichungen mit quasiisotoner rechten Seite f zu beweisen.

<u>Satz 3.5</u> (Existenzsatz)

Es seien $m \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $J = [0,T]$, $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f = (f^1, \ldots, f^m)$.
Ferner sei $f(t,x)$ stetig, beschränkt und quasiisoton in x.

Dann gibt es für ein gegebenes $u_o \in \mathbb{R}^m$ mindestens eine stetig differenzierbare Funktion $u : J \to \mathbb{R}^m$ mit

$$(3) \qquad u'(t) = f(t, u(t)) \qquad \text{in } J \quad \text{und}$$

$$(4) \qquad u(0) = u_o \ .$$

Beweis:

Der Beweis gliedert sich in drei Schritte:

1.Schritt: Angabe eines Konstruktionsverfahrens für Näherungsfunktionen.

2.Schritt: Nachweis der Konvergenz der Folge der Näherungsfunktionen.

3.Schritt: Nachweis, daß die Grenzfunktion Lösung des gegebenen AWPs ist.

1.Schritt:

Der Beweis benutzt das Euler-Cauchysche Polygonzugverfahren:

Das Intervall J wird in n gleichlange Teilintervalle der Länge h aufgeteilt. Dann werden zu dieser vorgegebenen Schrittweite $h = T/n > 0$ und gegebenen Stützstellen $t_i := i \cdot h \ (i=0(1)n)$ Vektoren v_i aus $\mathbb{R}^m \ (i=0(1)n)$ konstruiert

gemäß $\quad v_o := u_o \ , \quad v_{i+1} := v_i + h \cdot f(t_i, v_i) \quad$ für $i=0(1)n-1$.

Statt dieser üblichen Formel wird nun jedoch in diesem Beweis die folgende Variante benutzt:

$$(5) \quad \begin{aligned} & v_o := u_o \\ & v_{i+1} := v_i + h \cdot \max\{ f(t,x) \mid t_i \leqq t \leqq t_{i+1} \ , \ v_i - 3M \cdot h \leqq x \leqq v_i + M \cdot h \} \ . \end{aligned}$$

Hierbei sei $M = (m^1, m^2, \dots, m^m)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^m$, und in $J \times \mathbb{R}^m$ gelte für $i=1(1)m$ die Ungleichung $\quad |f^i(t,x)| \leqq m^i$.

Um eine Näherungsfunktion v zu erhalten, werden wie in der klassischen Euler-Cauchyschen Polygonzugmethode die Punkte (t_i, v_i) aus $J \times \mathbb{R}^m$ für $i=0(1)n$ durch Polygonzüge miteinander verbunden. Dabei wird für jede Komponente ein Polygonzug verwendet, das heißt, für jeweils festgehaltenes $j \in \{1,2,\dots,m\}$ werden die Punkte (t_i, v_i^j) für $i=0(1)n$ durch einen Polygonzug miteinander verbunden. Dies ist in Bild 1 für eine Komponente j dargestellt. Die Komponentenfunktion v^j von v ist als durchgezogene Linie gezeichnet, die j-ten Komponenten der Vektoren v_i sind durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

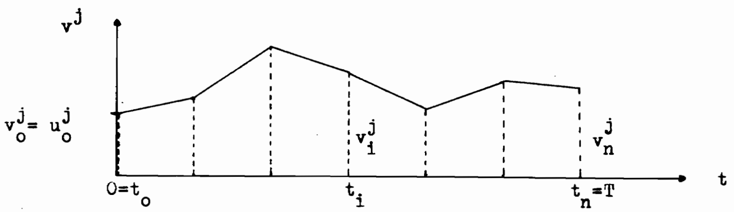

Bild 1 : Beschreibung im Text

Führt man nun diese Konstruktion für die Parameter h, h/2, h/4 usw. aus, so erhält man eine monoton fallende Folge von Näherungsfunktionen, die gegen eine Lösung des gegebenen Problems konvergiert.
Dies soll nun bewiesen werden.

2.Schritt:
Es sei die Schrittweite $h = T/n > 0$ fest gewählt. Für $i=0(1/2)n$ seien Stützstellen t_i gegeben durch $t_i := i\cdot h$. Für $i=0(1)n$ seien Vektoren v_i aus $\mathbb{R}^m$ gemäß (5) unter Verwendung des Parameters h konstruiert. Für $i=0(1/2)n$ seien Vektoren w_i aus $\mathbb{R}^m$ ebenfalls gemäß (5) konstruiert, aber unter Verwendung des Parameters h/2 anstelle von h.
Die durch Ziehen von Polygonzügen zwischen den so konstruierten Punkten (t_i, v_i) für $i=0(1)n$ bzw. (t_i, w_i) für $i=0(1/2)n$ entstehenden Funktionen v bzw. w sind stetige, stückweise lineare Funktionen mit

$$v(t_i) = v_i \qquad \text{für } i=0(1)n$$

und

$$w(t_i) = w_i \qquad \text{für } i=0(1/2)n .$$

Es wird nun gezeigt, daß unter diesen Voraussetzungen die Ungleichung $v(t) \geqq w(t)$ für alle t aus J gilt.

Mit Hilfe von Definition 3.2 lassen sich die zur Konstruktion der Funktionen v und w benutzten Vektoren v_i und w_i neu darstellen.

Definiert man für $i=0(1)n$: $R_i := R(t_i, v_i, h, M)$,

und für $i=0(1/2)n$: $S_i := R(t_i, w_i, h/2, M)$,

dann lassen sich die Vektoren v_i und w_i wie folgt schreiben:

$$(6) \qquad v_o = w_o := u_o \; , \qquad \begin{aligned} v_{i+1} &:= v_i + h\cdot \max f(R_i) && \text{für } i=0(1)n-1 \\ w_{i+1/2} &:= w_i + (h/2)\cdot \max f(S_i) && \text{für } i=0(1/2)n-1/2 . \end{aligned}$$

Hierbei wurde wieder die übliche Schreibweise $\max f(A) = \max \{ f(a) \mid a \in A \}$ verwendet.

Der Beweis der Ungleichung $v \geqq w$ erfolgt nun durch Induktion nach den Stützstellen t_i.

Nach Voraussetzung gilt $w(t_o) = v(t_o) = u_o$, also auch $w(t_o) \leqq v(t_o)$.

Es sei nun $i \in \mathbb{N}$, und es gelte $w(t) \leqq v(t)$ für alle $t \in [0, t_i]$.

Es ist zu zeigen, daß die Ungleichung $w(t) \leqq v(t)$ auch für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ gilt.

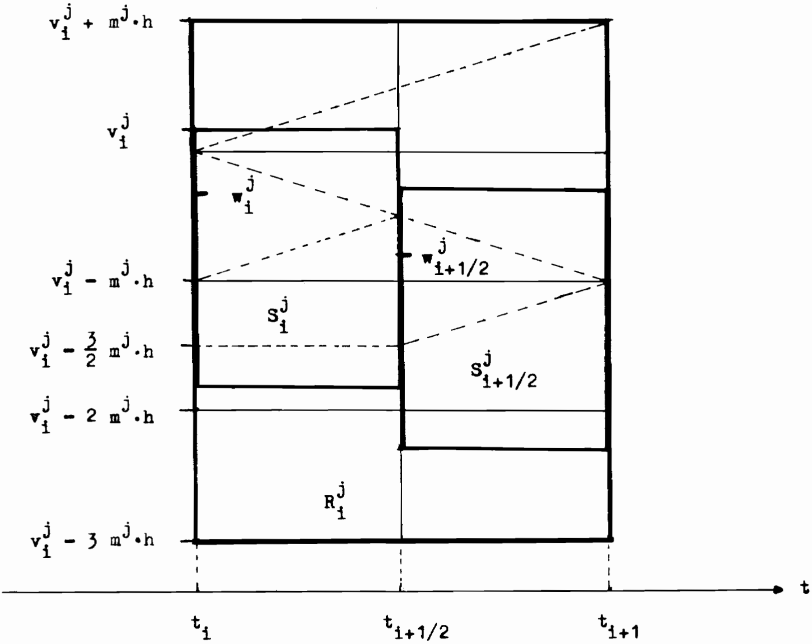

Bild 2: Beschreibung im Text (vergleiche [12])

Eine zeichnerische Darstellung der Situation gibt Bild 2 für eine Komponente j. Dabei sei R_i^j, S_i^j bzw. $S_{i+1/2}^j$ jeweils ein Schnitt durch das Gebiet R_i, S_i bzw. $S_{i+1/2}$. Die Art des Schnittes ist aus der Zeichnung ersichtlich.
Weitere Erläuterungen zu Bild 2 folgen im weiteren Verlauf des Beweises.

Es gibt zwei Indexmengen P und Q mit $P \cup Q = \{1,2,\dots,m\}$, $P \cap Q = \emptyset$ und

(a) $w_i^p \leqq v_i^p - m^p \cdot h$ für alle $p \in P$,

(b) $v_i^q - m^q \cdot h < w_i^q \leqq v_i^q$ für alle $q \in Q$.

Da für alle $p \in P$ die Ungleichungen $|v^{p\prime}| \leqq m^p$ und $|w^{p\prime}| \leqq m^p$ gelten, folgt aus (a) :
Für alle $p \in P$ und für alle $t \in [t_i, t_i+h/2]$ gilt $w^p(t) \leqq v^p(t)$.

Dies läßt sich aus Bild 2 direkt ablesen. Die gestrichelten Geraden, die vom Punkt (t_i, v_i^j) ausgehen, haben die Steigung m^j bzw. $-m^j$. Der Graph der Funktion v^j muß deshalb innerhalb dieses Winkelraums verlaufen, den diese beiden Geraden aufspannen. Die gestrichelte Gerade, die vom Punkt $(t_i, v_i^j - m^j \cdot h)$ ausgeht, hat die Steigung m^j. Wegen (a) verläuft deshalb der Graph von w^j unterhalb dieser Geraden. Somit verläuft der Graph von v^j oberhalb des Graphen von w^j. Die Funktionen können sich frühestens für $t=t_{i+1/2}$ schneiden.

Ist nun Q die leere Menge, so gilt sofort $w(t) \leqq v(t)$ auf $[t_i, t_i+h/2]$.
Es sei nun Q nicht die leere Menge.
Nach Lemma 3.4 gilt die Ungleichung $\max f(R_i) \geqq \max f(S_i)$ (+) .

Für den Fall m=1 läßt sich die Gültigkeit dieser Ungleichung aus Bild 2 direkt ablesen. Es genügt ja, dazu die Inklusion $R_i \supseteq S_i$ zu zeigen. Wie man aus der Zeichnung sieht, gilt diese Inklusion in diesem Fall. Im mehrdimensionalen Fall braucht diese Inklusion allerdings nicht mehr zu gelten, und man muß auf das Lemma 3.4 zurückgreifen.

Nach (6) folgt mit (+) für alle $q \in Q$ die Ungleichung $w^{q\prime} \leqq v^{q\prime}$ auf $(t_i, t_{i+1/2})$.
Damit gilt die Ungleichung $w^q \leqq v^q$ auf $[t_i, t_{i+1/2}]$ für alle $q \in Q$.
Es wurde demnach für jede Komponentenfunktion w^j bzw. v^j $(j=1(1)m)$ die Ungleichung $w^j \leqq v^j$ auf $[t_i, t_{i+1/2}]$ bewiesen. Damit gilt die Ungleichung $w(t) \leqq v(t)$ für alle t aus $[t_i, t_{i+1/2}]$.

In derselben Weise wird nun bewiesen, daß die Ungleichung $w \leqq v$ auch auf $[t_{i+1/2}, t_{i+1}]$ gilt.
Nach (5) gilt die Ungleichung $v(t_{i+1/2}) \leqq v_i + M \cdot h/2$.
Demnach gibt es wieder zwei Indexmengen A und B mit $A \cup B = \{1,2,\dots,m\}$, $A \cap B = \emptyset$ und

(c) $w^a_{i+1/2} \leqq v^a_i - (3/2)m^a \cdot h$ für alle a aus A ,

(d) $v^b_i - (3/2)m^b \cdot h < w^b_{i+1/2} \leqq v^b_i + m^b \cdot h/2$ für alle b aus B .

Da für alle a aus A die Ungleichungen $|v^{a\prime}| \leqq m^a$ und $|w^{a\prime}| \leqq m^a$ gelten, folgt aus (c) sofort :
Für alle a aus A und alle t aus $[t_{i+1/2}, t_{i+1}]$ gilt $w^a(t) \leqq v^a(t)$.

Dies läßt sich wieder aus Bild 2 direkt ablesen. Die gestrichelte Gerade, die vom Punkt $(t_{i+1/2}, v_i^j - (3/2)m^j \cdot h)$ aus nach rechts führt, hat die Steigung m^j. Der Graph der Funktion w^j muß deshalb wegen (c) unterhalb dieser Geraden verlaufen. Wie schon früher gesagt, verläuft der Graph der Funktion v^j innerhalb des Winkelraums, der durch die beiden gestrichelten Geraden gebildet wird, die vom Punkt (t_i, v_i^j) ausgehen. Somit liegt der Graph von v^j stets oberhalb des Graphen von w^j. Die beiden Funktionen können sich frühestens für $t=t_{i+1}$ schneiden.

Ist nun B die leere Menge, so gilt sofort $w \leqq v$ auf $[t_{i+1/2}, t_{i+1}]$.

Es sei nun B nicht die leere Menge.
Nach Lemma 3.4 gilt die Ungleichung $\max f(S_{i+1/2}) \leqq \max f(R_i)$ (‡) .

Für den Fall m=1 läßt sich die Gültigkeit dieser Ungleichung wieder aus Bild 2 direkt ablesen. Es genügt ja, dazu die Inklusion $R_i \supseteq S_{i+1/2}$ zu zeigen. Wie man aus der Zeichnung sieht, gilt diese Inklusion in diesem Fall. Im mehrdimensionalen Fall braucht diese Inklusion aber nicht mehr zu bestehen, und man muß wieder auf das Lemma 3.4 zurückgreifen.

Mit (6) folgt aus (‡) für alle $b \in B$ und alle $t \in (t_{i+1/2}, t_{i+1})$ die Ungleichung $w^{b\prime}(t) \leqq v^{b\prime}(t)$ und damit auch die Ungleichung $w^b(t) \leqq v^b(t)$ für $[t_{i+1/2}, t_{i+1}]$ und alle $b \in B$.
Die gewünschte Ungleichung ist nun für alle Komponentenfunktionen bewiesen, und es gilt $w(t) \leqq v(t)$ für alle $t \in [t_{i+1/2}, t_{i+1}]$.
Damit ist die Ungleichung $w \leqq v$ auf dem gesamten Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ nachgewiesen. Mit Induktion folgt die Gültigkeit dieser Ungleichung nun auf ganz J.

Auf Grund der soeben gezeigten Monotonieeigenschaft bezüglich des Parameters h für Funktionen, die gemäß (5) unter Verwendung verschiedener Werte für den Parameter h konstruiert wurden, läßt sich nun eine monotone Folge von Näherungsfunktionen wie folgt angeben.

Es sei $h_k := T \cdot 2^{-k}$ für jede natürliche Zahl k.

Dann sei v_k die stückweise lineare, stetige Funktion, die gemäß (5) unter Verwendung des Parameters h_k anstelle von h und den Polygonzügen gebildet ist.

Nach der vorangegangenen Überlegung gilt für jede natürliche Zahl k die Ungleichung $v_{k+1}(t) \leq v_k(t)$ für alle t aus J.

Die Funktionenfolge $\{v_k\}$ ist demnach monoton. Ferner ist $v_k(t)$ für alle $t \in J$ und jede natürliche Zahl k nach unten beschränkt durch $u_o - M \cdot t$, und jede der Funktionen v_k genügt einer Lipschitzbedingung mit der von k unabhängigen Lipschitzkonstanten M. Nach Beispiel 1.14 sind dann die Funktionen v_k gleichgradig stetig.

Aus Beschränktheit und Monotonie allein ergibt sich sofort schon die punktweise Konvergenz der Folge $\{v_k\}$ gegen eine Grenzfunktion $u := \lim\limits_{k \to \infty} v_k$.

Damit ist die übliche Vorgehensweise umgangen worden, sich eine konvergente Folge von Näherungsfunktionen mit Hilfe des Satzes von Ascoli-Arzelà zu beschaffen, und der Beweis des Satzes bleibt elementar.

Auf Grund der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionen v_k folgt mit Lemma 1.14, daß die Konvergenz sogar gleichmäßig in ganz J ist, und daß die Grenzfunktion u stetig in J ist.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die Grenzfunktion u eine Lösung des gegebenen AWPs (3),(4) ist. Dies wird in dem folgenden 3. Schritt nachgewiesen.

3.Schritt:

Es sei k eine natürliche Zahl.

Mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Punkten existiert dann $v_k'(t)$ in J, und da v_k stückweise linear ist, gilt gemäß (5) :

Für alle t aus J gibt es ein Element (t_+, x_+) aus $J \times \mathbb{R}^m$ mit

$$v_k'(t) = f(t_+, x_+) \quad , \quad |t - t_+| \leq h_k \quad \text{und} \quad |v_k(t) - x_+| \leq 3M \cdot h_k \quad .$$

Hierbei wurde die Schreibweise $|C| = (|c^1|, |c^2|, \ldots, |c^m|)$ benutzt.

Es sei d(s) ein Stetigkeitsmaß bezüglich f :

$$\max_{k \in \{1,..,m\}} |f^k(t,x) - f^k(t_+)| \leq d(\,|t-t_+| + \sum_{k=1}^{m} |x^k - x_+^k|\,) \quad \text{in } J \times [u_o - M \cdot T, u_o + M \cdot T] \, .$$

Dann gilt die Beziehung $v_k'(t) = f(t,v_k(t)) + A_k(t)$ für alle t aus J, wobei

für $A_k(t)$ die Ungleichung $A_k(t) \leqq d(h_k+3 \sum_{j=1}^{m} m^j \cdot h_k)$ gilt.

Hieraus folgt für alle t aus J die Gleichung

$$v_k(t) = u_o + \int_0^t f(s,v_k(s))\, ds + B_k(t)$$, wobei für $B_k(t)$ die

Ungleichung $B_k(t) \leqq d(h_k + 3 \sum_{j=1}^{m} m^j \cdot h_k) \cdot T$ gilt.

Da wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen v_k für $k \to \infty$ Integration und Grenzübergang vertauschbar sind, folgt für den Grenzübergang $k \to \infty$ für alle t aus J die Beziehung

$$u(t) = u_o + \int_0^t f(s,u(s))\, ds \quad .$$

Dies bedeutet aber, daß die Funktion u eine Lösung des AWPs (3),(4) ist.

Damit ist der Existenzsatz 3.5 vollständig bewiesen.

Bemerkung: Da im Beweis lediglich die Beschränktheit der Funktion f als solche und nicht der Wert der Schranke Verwendung findet, hätte es auch genügt, im Beweis anstatt der m^j für $j=1(1)m$ eine einheitliche Konstante M mit $M \geqq m^j$ für $j=1(1)m$ zu verwenden.

Die in Satz 3.5 bestimmte Lösung ist nicht nur irgendeine beliebige Lösung des AWPs (3),(4). Sie ist sogar die Maximallösung dieses Problems, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.6

Es mögen die Voraussetzungen von Satz 3.5 gelten.
Dann ist die im Beweis von Satz 3.5 konstruierte Lösung u des AWPs (3),(4) sogar die Maximallösung dieses Problems.

Beweis:

Es sei $\hat{u}$ eine weitere Lösung des AWPs (3),(4).

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei die Funktion v_k wie im Beweis zu Satz 3.5 . Es genügt nun zu zeigen, daß die Ungleichung $\hat{u}(t) \leqq v_k(t)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \in J$ gilt.

Für den Grenzübergang $k \to \infty$ erhält man dann nämlich sofort die gewünschte Ungleichung $\hat{u}(t) \leqq u(t)$ für alle t aus J.

Es sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

Der Beweis der Ungleichung $\hat{u}(t) \leqq v_k(t)$ für alle t aus J erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von v_k .

Induktionsanfang: Es gilt $\hat{u}(t_o) \leqq v_k(t_o)$, da $\hat{u}(t_o) = v_k(t_o) = u_o$ ist.

Induktionsvoraussetzung: Es sei p eine natürliche Zahl, und es gelte die Ungleichung $\hat{u}(t) \leqq v_k(t)$ für alle $t \in [t_o, t_p] := [t_o, t_o + p \cdot h_k]$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß auch für $t \in [t_p, t_{p+1}] := [t_p, t_p + h_k]$ die Ungleichung $\hat{u}(t) \leqq v_k(t)$ gilt.

Es gibt zwei Indexmengen C und D mit $C \cup D = \{1,2,\dots,m\}$, $C \cap D = \emptyset$ und

(a) $\hat{u}^c(t_p) \leqq v_k^c(t_p) - 2m^c \cdot h_k$ für alle $c \in C$,

(b) $v_k^d(t_p) - 2m^d \cdot h_k < \hat{u}^d(t_p) \leqq v_k^d(t_p)$ für alle $d \in D$.

Da für alle $c \in C$ die Beziehungen $|\hat{u}^{c\prime}| = |f^c| \leqq m^c$ und $|v_k^{c\prime}| \leqq m^c$ gelten, folgt aus (a) für alle $c \in C$ und alle $t \in [t_p, t_{p+1}]$ die Ungleichung $\hat{u}^c(t) \leqq v_k^c(t)$.

Ist D die leere Menge, so ist damit die Behauptung bewiesen.

Es sei nun D nicht die leere Menge, und es sei d aus D beliebig gewählt.

Dann gilt für alle $t \in (t_p, t_{p+1})$ gemäß (5) die Beziehung

(+) $v_k^{d\prime}(t) = \max\{ f^d(t_+, x) \mid t_p \leqq t_+ \leqq t_{p+1} , v_k(t_p) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_p) + M \cdot h_k \}$.

Nach (b) gelten die beiden Ungleichungen $\hat{u}^d(t_p) \geqq v_k^d(t_p) - 2m^d \cdot h_k$ und $\hat{u}^d(t_p) \leqq v_k^d(t_p)$. Diese sind äquivalent zu den beiden Ungleichungen

$\hat{u}^d(t_p) - m^d \cdot h_k \geqq v_k^d(t_p) - 3m^d \cdot h_k$ und $\hat{u}^d(t_p) + m^d \cdot h_k \leqq v_k^d(t_p) + m^d \cdot h_k$.

Da $|\hat{u}^{d\prime}| \leqq m^d$ ist, liegt demnach $\hat{u}^d(t)$ für alle $t \in [t_p, t_{p+1}]$ in dem bei der Maximumsbildung in (+) für die Komponente x^d zulässigen Argumentbereich.

Da für alle $s \neq d$ ebenso $|\hat{u}^{s\prime}| \leq m^s$ gilt, folgt aus der Induktionsvoraussetzung für alle s und alle $t \in [t_p, t_{p+1}]$ die Ungleichung $\hat{u}^s(t) \leq v_k^s(t_p) + m^s \cdot h_k$.

Damit folgt nun wegen der Quasiisotonie von f aus (+) die Ungleichung

$\hat{u}^{d\prime}(t) \leq v_k^{d\prime}(t)$ für alle $t \in (t_p, t_{p+1})$.

Hieraus erhält man unmittelbar die Ungleichung $\hat{u}^d(t) \leq v_k^d(t)$ für alle t aus $[t_p, t_{p+1}]$.

Da d beliebig aus D gewählt war, gilt nun $\hat{u}(t) \leq v_k(t)$ für alle $t \in [t_p, t_{p+1}]$.

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und die Ungleichung $\hat{u} \leq v_k$ gilt nach Induktion auf ganz J.

Die in Satz 3.5 bestimmte Lösung u des AWPs (3),(4) ist also tatsächlich die Maximallösung dieses Problems.

QED

Bemerkung:

Wie im Eindimensionalen läßt sich auch hier die Minimallösung in analoger Weise bestimmen.

In (5) ist die Maximumsbildung durch Minimumsbildung und die Ungleichung für die Argumentwerte von x durch die Ungleichung $v_i - M \cdot h \leqq x \leqq v_i + 3M \cdot h$ zu ersetzen. Entsprechend ist das in Definition 3.2 erklärte (m+1)-dimensionale Gebiet R zu ersetzen durch $\overline{R}(t,x,h,M) := [t_i, t_{i+1}] \times [v_i - M \cdot h, v_i + 3M \cdot h]$.

Wenn $\{\overline{v}_k\}$ die Folge der gemäß der so geänderten Definition (5) unter Verwendung der Parameter $h_k := 2^{-k} \cdot T$ konstruierten Funktionen ist, dann ist $\{\overline{v}_k\}$ eine isotone Folge, und ihr Grenzwert $\lim\limits_{k \to \infty} \overline{v}_k$ ist die Minimallösung des AWPs (3),(4).

Insgesamt gilt folgendes:

Wenn $\hat{u}$ eine beliebige Lösung des AWPs (3),(4) ist, dann gilt in J für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette $\overline{v}_k \leqq \overline{v}_{k+1} \leqq \hat{u} \leqq v_{k+1} \leqq v_k$.

Dies besagt, daß die angegebene Methode ein numerisches Verfahren ist, das (bezüglich k) monotone Folgen oberer und unterer Schranken für die Lösungen des AWPs (3),(4) liefert.

III INDIREKTE METHODE ZUR BESTIMMUNG EINER LÖSUNG DES INTERVALL-ANFANGSWERTPROBLEMS (1),(2)

Die in diesem Kapitel angegebene Methode läßt sich nur auf ein AWP bei einer einzigen Intervall-Differentialgleichung anwenden. Eine Übertragung für Systeme ist nicht möglich. Deshalb soll für das gesamte Kapitel III vorausgesetzt werden, daß es sich beim AWP (1),(2) um ein AWP bei einer einzigen Intervall-Differentialgleichung handelt.

Das AWP (1),(2) wird auf ein AWP bei einem System von zwei rellen Differentialgleichungen mit quasiisotoner rechter Seite zurückgeführt. Maximal- und Minimallösung dieses Problems lassen sich gemäß Satz II.3.5 bestimmen. Aus diesen lassen sich dann Lösungen des AWPs (1),(2) gewinnen.

Um diese Methode anwenden zu können, muß ferner für das gesamte Kapitel III vorausgesetzt werden, daß die gegebene stetige Funktion F(t,X) in jedem Punkt t aus J inklusionsisoton bezüglich X ist.

III.1 Bestimmung einer Lösung bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit

Die Funktion U läßt sich darstellen als $U = [\underline{u},\overline{u}]$ mit $\underline{u} : J \to \mathbb{R}$ und $\overline{u} : J \to \mathbb{R}$. Nach Lemma II.1.11 läßt sich auch F darstellen als $F = [\underline{f},\overline{f}]$ mit stetigen Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$, $\underline{f} : J \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\overline{f} : J \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Mit diesen Funktionen läßt sich auf Grund von Lemma II.2.3 das AWP (1),(2) in ein äquivalentes AWP bei einem System von zwei reellen Differentialgleichungen umschreiben:

$$(7)\quad \begin{aligned} \underline{u}'(t) &= \underline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]) \\ \overline{u}'(t) &= \overline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]) \end{aligned} \qquad (8)\quad \begin{aligned} \underline{u}(0) &= \underline{u}_0 \\ \overline{u}(0) &= \overline{u}_0 \end{aligned} \quad .$$

Die Äquivalenz der AWPe (1),(2) und (7),(8) beschreibt dann der folgende Satz.

Satz 1.1

Die Funktion U mit $U = [\underline{u},\overline{u}]$ ist genau dann eine Lösung des AWPs (1),(2), wenn die Funktion u mit $u = (\underline{u},\overline{u})$ eine Lösung des AWPs (7),(8) ist.

Bemerkung: Als Lösungen des AWPs (7),(8) können nur solche Funktionen u mit $u = (\underline{u},\overline{u})$ auftreten, für die auf ganz J die Ungleichung $\underline{u}(t) \leqq \overline{u}(t)$ gilt.

Beim AWP (7),(8) treten im Argument der Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ jedoch noch Intervalle auf. Dieses Manko soll durch die folgende "Erweiterung" dieser Funktionen beseitigt werden.

Definition 1.2

Es sei $F = [\underline{f},\overline{f}]$ eine stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann werden Funktionen $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ von $J \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\underline{f}_1(t,x,y) := \begin{cases} \underline{f}(t,[x,y]) & \text{, falls } x \leqq y \text{ gilt} \\ \underline{f}(t,[x,x]) & \text{, falls } x > y \text{ gilt} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\overline{f}_1(t,x,y) := \begin{cases} \overline{f}(t,[x,y]) & \text{, falls } x \leqq y \text{ gilt} \\ \overline{f}(t,[y,y]) & \text{, falls } x > y \text{ gilt} \end{cases} \quad .$$

Bemerkung: Die Funktionen $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ sind stetig.

Satz 1.3

Es sei $F = [\underline{f},\overline{f}]$ eine stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Zu F seien Funktionen $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ gemäß Definition 1.2 gebildet. Ferner seien $\underline{u}_1$ und $\overline{u}_1$ Funktionen von J nach $\mathbb{R}$. Dann gilt:

Die Funktion u_1, die gegeben ist durch $u_1 := (\underline{u}_1,\overline{u}_1)$, ist genau dann eine Lösung des AWPs (7),(8), wenn u_1 eine Lösung des AWPs

$$(9) \qquad u'(t) = f_1(t,u(t)) \quad ,$$

$$(10) \qquad u(0) = (\underline{u}_0,\overline{u}_0)$$

mit $f_1 := (\underline{f}_1,\overline{f}_1)$ ist, und wenn die Ungleichung $\underline{u}_1(t) \leqq \overline{u}_1(t)$ in ganz J gilt.

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition einer Lösung bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit und der Definition von f_1.

Beim AWP (9),(10) treten nun keine Intervalle mehr auf. Die Funktion f_1 besitzt aber noch nicht die nötige Eigenschaft der Quasiisotonie. Durch Variablentransformation und durch Transformation der Funktion f_1 wird nun das AWP (9),(10) in ein äquivalentes AWP mit quasiisotoner rechten Seite übergeführt.

Definition 1.4

Es seien $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ stetige Funktionen von $J \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Dann werden stetige Funktionen $\underline{f}_2$ und $\overline{f}_2$ von $J \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\underline{f}_2(t,x,y) := -\underline{f}_1(t,-x,y) \qquad \text{und}$$

$$\overline{f}_2(t,x,y) := \overline{f}_1(t,-x,y) \quad .$$

Satz 1.6

Es sei F eine stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit $F = [\underline{f}, \overline{f}]$. Ferner sei F(t,X) in jedem Punkt t aus J inklusionsisoton in X. Zu F seien Funktionen $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ gemäß Definition 1.2 gebildet, und mit diesen wiederum Funktionen $\underline{f}_2$ und $\overline{f}_2$ gemäß Definition 1.4 . Die stetige Funktion f_2 von $J \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f_2 := (\underline{f}_2, \overline{f}_2)$.

Dann ist die Funktion $f_2(t,x) = f_2(t,x^1,x^2)$ quasiisoton in x.

Beweis:

Es sind folgende Aussagen zu zeigen:

(a) $\underline{f}_2(t,x,y)$ ist isoton in y ,

(b) $\overline{f}_2(t,x,y)$ ist isoton in x .

zu (a) : Es sei $y_1 \leq y_2$. Dann gilt nach den Definitionen 1.4 und 1.2 :

$$\underline{f}_2(t,x,y_1) = -\underline{f}_1(t,-x,y_1) = \begin{cases} -\underline{f}(t,[-x,y_1]) \text{ , falls } -x \leq y_1 \text{ gilt} \\ -\underline{f}(t,[-x,-x]) \text{ , falls } -x > y_1 \text{ gilt} \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$\underline{f}_2(t,x,y_2) = -\underline{f}_1(t,-x,y_2) = \begin{cases} -\underline{f}(t,[-x,y_2]) \text{ , falls } -x \leq y_2 \text{ gilt} \\ -\underline{f}(t,[-x,-x]) \text{ , falls } -x > y_2 \text{ gilt} \end{cases} \quad .$$

Es gibt die drei Fälle (a1) $-x \leqq y_1 \leqq y_2$, (a2) $y_1 < -x \leqq y_2$ und (a3) $y_1 \leqq y_2 < -x$.

Im Fall (a1) gelten die Beziehungen $\underline{f}_2(t,x,y_1) = -\underline{f}(t,[-x,y_1])$ und $\underline{f}_2(t,x,y_2) = -\underline{f}(t,[-x,y_2])$. Wegen der Inklusionsisotonie von $F = [\underline{f},\overline{f}]$ folgt hieraus die Ungleichung $\underline{f}_2(t,x,y_1) \leqq \underline{f}_2(t,x,y_2)$.

Im Fall (a2) gelten die Beziehungen $\underline{f}_2(t,x,y_1) = -\underline{f}(t,[-x,-x])$ und $\underline{f}_2(t,x,y_2) = -\underline{f}(t,[-x,y_2])$. Wieder folgt die Ungleichung $\underline{f}_2(t,x,y_1) \leqq \underline{f}_2(t,x,y_2)$ aus der Inklusionsisotonie von F.

Im Fall (a3) gilt die Beziehung $\underline{f}_2(t,x,y_1) = -\underline{f}(t,[-x,-x]) = \underline{f}_2(t,x,y_2)$ und damit sofort auch die Ungleichung $\underline{f}_2(t,x,y_1) \leqq \underline{f}_2(t,x,y_2)$.

Damit ist (a) nachgewiesen.

zu (b) : Es sei $x_1 \leqq x_2$. Damit gilt auch die Ungleichung $-x_2 \leqq -x_1$. Nach den Definitionen 1.4 und 1.2 gilt dann :

$$\overline{f}_2(t,x_1,y) = \overline{f}_1(t,-x_1,y) = \begin{cases} \overline{f}(t,[-x_1,y]) & \text{, falls } -x_1 \leqq y \text{ gilt} \\ \overline{f}(t,[y,y]) & \text{, falls } -x_1 > y \text{ gilt} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\overline{f}_2(t,x_2,y) = \overline{f}_1(t,-x_2,y) = \begin{cases} \overline{f}(t,[-x_2,y]) & \text{, falls } -x_2 \leqq y \text{ gilt} \\ \overline{f}(t,[y,y]) & \text{, falls } -x_2 > y \text{ gilt} \end{cases} .$$

Es gibt die drei Fälle (b1) $y < -x_2 \leqq -x_1$, (b2) $-x_2 \leqq y < -x_1$ und (b3) $-x_2 \leqq -x_1 < y$.

Im Fall (b1) gilt die Beziehung $\overline{f}_2(t,x_1,y) = \overline{f}(t,[y,y]) = \overline{f}_2(t,x_2,y)$ und damit sofort die Ungleichung $\overline{f}_2(t,x_1,y) \leqq \overline{f}_2(t,x_2,y)$.

Im Fall (b2) gelten die Beziehungen $\overline{f}_2(t,x_1,y) = \overline{f}(t,[y,y])$ und $\overline{f}_2(t,x_2,y) = \overline{f}(t,[-x_2,y])$. Wegen der Inklusionsisotonie von F folgt hieraus die Ungleichung $\overline{f}_2(t,x_1,y) \leqq \overline{f}_2(t,x_2,y)$.

Im Fall (b3) gelten die Beziehungen $\overline{f}_2(t,x_1,y) = \overline{f}(t,[-x_1,y])$ und $\overline{f}_2(t,x_2,y) = \overline{f}(t,[-x_2,y])$. Wieder folgt die Ungleichung $\overline{f}_2(t,x_1,y) \leqq \overline{f}_2(t,x_2,y)$ aus der Inklusionsisotonie von F.

Damit ist auch (b) gezeigt, und der Satz ist vollständig bewiesen.

Bemerkung: Für die Quasiisotonie der Funktion f_2 ist demnach im wesentlichen die Inklusionsisotonie der Funktion F verantwortlich. Deshalb ist die Voraussetzung dieser Eigenschaft der Funktion F für dieses Kapitel unverzichtbar.

Satz 1.5

Es seien $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ stetige Funktionen von $J \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Zu diesen seien Funktionen $\underline{f}_2$ und $\overline{f}_2$ gemäß Definition 1.4 gebildet. Ferner seien $\underline{u}_1$ und $\overline{u}_1$ Funktionen von J nach $\mathbb{R}$. Dann gilt:

Die Funktion u_1, die gegeben ist durch $u_1 := (\underline{u}_1, \overline{u}_1)$, ist genau dann eine Lösung des AWPs (9),(10), wenn die Funktion u_2, die gegeben ist durch $u_2 = (\underline{u}_2, \overline{u}_2) := (-\underline{u}_1, \overline{u}_1)$, eine Lösung des AWPs

$$(11) \qquad u'(t) = f_2(t, u(t)) \quad ,$$

$$(12) \qquad u(0) = (-\underline{u}_o, \overline{u}_o)$$

mit $f_2 := (\underline{f}_2, \overline{f}_2)$ ist.

Beweis:

Es sei $u_1 = (\underline{u}_1, \overline{u}_1)$ eine Lösung des AWPs (9),(10). Dann gilt:

$$u_2(0) = (-\underline{u}_1(0), \overline{u}_1(0)) = (\underline{u}_o, \overline{u}_o) \quad ,$$

$$\begin{aligned} f_2(t, -\underline{u}_1, \overline{u}_1) &= (\ \underline{f}_2(t, -\underline{u}_1, \overline{u}_1)\ ,\ \overline{f}_2(t, -\underline{u}_1, \overline{u}_1)\ ) \\ &= (\ -\ \underline{f}_1(t, \underline{u}_1, \overline{u}_1)\ ,\ \overline{f}_1(t, \underline{u}_1, \overline{u}_1)\ ) \\ &= (\ -\ \underline{u}_1'\ ,\ \overline{u}_1'\ ) \\ &= u_2' \quad . \end{aligned}$$

Es sei nun $u_2 = (\underline{u}_2, \overline{u}_2) = (-\underline{u}_1, \overline{u}_1)$ eine Lösung des AWPs (11),(12).

Dann gilt:

$$u_1(0) = (\ \underline{u}_1(0)\ ,\ \overline{u}_1(0)\ ) = (\ -\ \underline{u}_2(0)\ ,\ \overline{u}_2(0)\ ) = (\ \underline{u}_o\ ,\ \overline{u}_o\ ) \quad ,$$

$$\begin{aligned} f_1(t, \underline{u}_1, \overline{u}_1) &= (\ \underline{f}_1(t, \underline{u}_1, \overline{u}_1)\ ,\ \overline{f}_1(t, \underline{u}_1, \overline{u}_1)\ ) \\ &= (\ \underline{f}_1(t, -\underline{u}_2, \overline{u}_2)\ ,\ \overline{f}_1(t, -\underline{u}_2, \overline{u}_2)\ ) \end{aligned}$$

$$= (- \underline{f}_2(t,\underline{u}_2,\overline{u}_2) \ , \ \overline{f}_2(t,\underline{u}_2,\overline{u}_2) \ )$$
$$= (- \underline{u}_2' \ , \ \overline{u}_2' \ )$$
$$= (\underline{u}_1' \ , \ \overline{u}_1' \ ) \ = \ u_1' \ .$$

QED

Auf Grund der vorangegangenen Sätze ist nun das Problem, eine Lösung des AWPs (1),(2) bzw. des AWPs (7),(8) zu finden, gleichwertig mit dem Problem, eine Lösung $(\underline{u}_1,\overline{u}_1)$ des AWPs (9),(10) zu finden, für die $\underline{u}_1 \leqq \overline{u}_1$ in J gilt.

Die Lösungen von (9),(10) lassen sich aus den Lösungen von (11),(12) bestimmen. Da es sich beim AWP (11),(12) um ein AWP bei einem System von reellen Differentialgleichungen mit quasiisotoner rechten Seite handelt, was man mit Hilfe von Satz 1.6 sofort sieht, lassen sich gemäß Satz II.3.5 die Maximal- und die Minimallösung dieses Problems konstruktiv bestimmen.

Wie nun gezeigt werden soll, lassen sich aus diesen Lösungen die größte Intervallösung und, falls sie existiert, die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit bestimmen.

Es sei u_{2+} die Minimallösung des AWPs (11),(12), und es gelte $u_{2+} = (\underline{u}_{2+},\overline{u}_{2+})$
es sei u_2^+ die Maximallösung des AWPs (11),(12), und es gelte $u_2^+ = (\underline{u}_2^+,\overline{u}_2^+)$
und es sei u_2 eine beliebige Lösung des AWPS (11),(12) mit $u_2 = (\underline{u}_2,\overline{u}_2)$

Nach Satz 1.5 sind dann die Funktionen u_{1+} , u_1^+ und u_1 , die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} u_{1+} &= (\underline{u}_{1+} \ , \ \overline{u}_{1+}) := (-\underline{u}_{2+} \ , \ \overline{u}_{2+}) \\ u_1^+ &= (\underline{u}_1^+ \ , \ \overline{u}_1^+) := (- \underline{u}_2^+ \ , \ \overline{u}_2^+) \qquad (13) \\ u_1 &= (\underline{u}_1 \ , \ \overline{u}_1) := (- \underline{u}_2 \ , \ \overline{u}_2) \ , \end{aligned}$$

Lösungen des AWPs (9),(10) .
Aus der Maximalitätseigenschaft von u_2^+ bzw. der Minimalitätseigenschaft von u_{2+} folgen ferner die Ungleichungen

$$\underline{u}_{2+} \leqq \underline{u}_2 \leqq \underline{u}_2^+ \qquad \text{und} \qquad \overline{u}_{2+} \leqq \overline{u}_2 \leqq \overline{u}_2^+ \ .$$

Diese sind äquivalent zu den beiden Ungleichungen

$$- \underline{u}_2^+ \leqq - \underline{u}_2 \leqq - \underline{u}_{2+} \qquad \text{und} \qquad \overline{u}_{2+} \leqq \overline{u}_2 \leqq \overline{u}_2^+ \ .$$

Damit gelten aber auch die Ungleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} \underline{u}_1^+ &\leqq \underline{u}_1 \leqq \underline{u}_{1+} \\ \overline{u}_{1+} &\leqq \overline{u}_1 \leqq \overline{u}_1^+ \end{aligned} \quad .$$

Es wird nun gezeigt, daß u_1^+ eine Lösung des AWPs (7),(8) und damit $[\underline{u}_1^+,\overline{u}_1^+]$ eine Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchetdifferenzierbarkeit ist.

Satz 1.7

Es seien $\underline{u}_1^+$ und $\overline{u}_1^+$ wie in (13). Dann ist $u_1^+ = (\underline{u}_1^+ \, , \, \overline{u}_1^+)$ eine Lösung des AWPs (7),(8) .

Beweis:

Wie bereits oben gezeigt wurde, ist die Funktion u_1^+ eine Lösung des AWPs (9),(10) . Nach Satz 1.3 bleibt dann lediglich zu zeigen, daß die Ungleichung $\underline{u}_1^+(t) \leqq \overline{u}_1^+(t)$ für alle t aus J gilt.

Dies gilt genau dann, wenn die Ungleichung $-\underline{u}_2^+(t) \leqq \overline{u}_2^+(t)$ in J gilt.

Es seien $v_k = (\underline{v}_k,\overline{v}_k)$ für natürliche Zahlen k die bei der Konstruktion der Maximallösung des AWPs (11),(12) verwendeten Schrankenfunktionen, und M sei die zur Abschätzung von $|\underline{f}_2|$ und $|\overline{f}_2|$ verwendete Konstante.

Es genügt nun für jede natürliche Zahl k die Ungleichung $-\underline{v}_k(t) \leqq \overline{v}_k(t)$ für alle t aus J nachzuweisen. Für den Grenzübergang $k \to \infty$ folgt dann nämlich die Ungleichung $-\underline{u}_2^+ \leqq \overline{u}_2^+$ in J, und nach Definition von u_1^+ folgt hieraus sofort die gewünschte Ungleichung $\underline{u}_1^+ \leqq \overline{u}_1^+$ in J.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl.

Der Beweis der Ungleichung $-\underline{v}_k(t) \leqq \overline{v}_k(t)$ in J erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von v_k .

Induktionsanfang: Nach Definition von v_k gilt:

$$-\underline{v}_k(0) = -(-\underline{u}_o) = \underline{u}_o \leqq \overline{u}_o = \overline{v}_k(0) \quad .$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $i \in \mathbb{N}$, und es gelte die Ungleichung

$$-\underline{v}_k(t) \leqq \overline{v}_k(t) \quad \text{für alle } t \in [0,t_i] = [0,i\cdot h] \quad .$$

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß die Ungleichung $-\underline{v}_k(t) \leqq \overline{v}_k(t)$ auch für alle $t \in [t_i, t_{i+1}] = [t_i, t_i + h_k]$ gilt.

Nach Definition von v_k gelten für alle $t \in (t_i, t_{i+1})$ die Beziehungen

$$-\underline{v}_k'(t) = -\max \underline{f}_2(R(t_i, v_k(t_i), h_k, M)) \quad \text{und}$$

$$\overline{v}_k'(t) = \max \overline{f}_2(R(t_i, v_k(t_i), h_k, M)) .$$

Nach Definition von $R(t_i, v_k(t_i), h_k, M)$ gelten damit für alle $t \in (t_i, t_{i+1})$ die Beziehungen

$$-\underline{v}_k'(t) = -\max\{\underline{f}_2(t,x) \mid t \in [t_i, t_{i+1}],\ v_k(t_i) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + M \cdot h_k\}$$

und

$$\overline{v}_k'(t) = \max\{\overline{f}_2(t,x) \mid t \in [t_i, t_{i+1}],\ v_k(t_i) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + M \cdot h_k\} .$$

Nach Definition von f_2 folgen für alle t aus (t_i, t_{i+1}) die Gleichungen

$$-\underline{v}_k'(t) = -\max\{-\underline{f}_1(t, -x^1, x^2) \mid t \in [t_i, t_{i+1}],\ v_k(t_i) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + M \cdot h_k\}$$

und

$$\overline{v}_k'(t) = \max\{\overline{f}_1(t, -x^1, x^2) \mid t \in [t_i, t_{i+1}],\ v_k(t_i) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + M \cdot h_k\}.$$

Schreibt man die erste dieser Gleichungen um, so erhält man die Gleichungen

$$(15)\quad \underline{v}_k'(t) = \min\{\underline{f}_1(t, -x^1, x^2) \mid t \in [t_i, t_{i+1}],\ v_k(t_i) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + M \cdot h_k\}$$

und

$$(16)\quad \overline{v}_k'(t) = \max\{\overline{f}_1(t, -x^1, x^2) \mid t \in [t_i, t_{i+1}],\ v_k(t_i) - 3M \cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + M \cdot h_k\}$$

für alle $t \in (t_i, t_{i+1})$.

Es sei nun t aus dem offenen Intervall (t_i, t_{i+1}) beliebig gewählt, und es gelte

$$(17)\quad -\underline{v}_k'(t) = \underline{f}_1(s, -y^1, y^2) .$$

Das Tripel $(s, -y^1, y^2)$ ist ein zulässiger Argumentwert bei der Minimumsbestimmung in (15) und bei der Maximumsbestimmung in (16) .

Es gibt die zwei Fälle (a) $-y^1 \leqq y^2$ und (b) $-y^1 > y^2$.

Im Fall (a) gilt :

$$\underline{v}_k'(t) = \underline{f}_1(s, -y^1, y^2) = \underline{f}(s, [-y^1, y^2]) \leqq \overline{f}(s, [-y^1, y^2]) = \overline{f}_1(s, -y^1, y^2) .$$

Da das Tripel $(s,-y^1,y^2)$ ein zulässiger Argumentwert bei der Maximumsbildung in (16) ist, folgt die Ungleichung $\underline{v}_k'(t) \leqq \overline{v}_k'(t)$.

Im Fall (b) gilt die Gleichung $\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) = \underline{f}(s,[-y^1,-y^1])$.

Der Fall (b) wird weiter unterteilt in die Fälle (b1) und (b2) :

(b1) Es gelte zusätzlich die Ungleichung $-y^1 < \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k$,

(b2) Es gelte zusätzlich die Ungleichung $-y^1 \geqq \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k$ (18) .

Im Fall (b1) gilt wegen der Inklusionsisotonie von F :

$$\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) = \underline{f}(s,[-y^1,-y^1]) \geqq \underline{f}(s,[-y^1,\overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k])$$
$$= \underline{f}_1(s, -y^1, \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k) \quad .$$

Da das Tripel $(s, -y^1, \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k)$ ein zulässiger Argumentwert bei der Minimumsbildung in (15) ist, folgt die Beziehung

$$\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) = \underline{f}_1(s,-y^1,\overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k) \quad .$$

Hieraus folgt wiederum die Beziehung

$$\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) = \underline{f}(s,[-y^1,\overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k]) \leqq \overline{f}(s,[-y^1,\overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k])$$
$$= \overline{f}_1(s,-y^1,\overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k) \quad .$$

Da das Tripel $(s,-y^1,\overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k)$ ein zulässiger Argumentwert bei der Maximumsbildung in (16) ist, erhält man die Ungleichung $\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) \leqq \overline{v}_k'(t)$ und damit auch die Ungleichung $\underline{v}_k'(t) \leqq \overline{v}_k'(t)$.

Im Fall (b2) kann die Ungleichung $-\underline{v}_k(t_i) + 3m^1 \cdot h_k < \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k$ nicht gelten, da sie im Widerspruch zu (18) steht. Würden nämlich beide Ungleichungen gelten, so würde auch die Ungleichung $-y^1 > -\underline{v}_k(t_i) + 3m^1 \cdot h_k$ und mit dieser die Ungleichung $y^1 < \underline{v}_k(t_i) - 3m^1 \cdot h_k$ gelten. Die letzte Ungleichung steht aber im Widerspruch zu (17) und (15) .

Es gilt demnach stets die Ungleichung $-\underline{v}_k(t_i) + 3m^1 \cdot h_k \geqq \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k$.

Der Fall (b2) wird nun nochmals unterteilt in die Fälle (b2.1) und (b2.2) :

(b2.1) Es gelte ferner die Beziehung $-y^1 = \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k$,

(b2.2) Es gelte ferner die Beziehung $-y^1 > \overline{v}_k(t_i) + m^2 \cdot h_k$ (19) .

Im Fall (b2.1) gilt :

$$\begin{aligned}\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) &= \underline{f}(s,[\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k]) \\ &\leqq \overline{f}(s,[\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k]) \\ &= \overline{f}_1(s, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k) \quad .\end{aligned}$$

Da das Tripel $(s, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k)$ ein zulässiger Argumentwert bei der Maximumsbildung in (16) ist, folgt die Ungleichung $\underline{f}_1(s,-y^1,y^2) \leqq \overline{v}_k(t)$. Nach (17) folgt hieraus die Ungleichung $\underline{v}_k'(t) \leqq \overline{v}_k'(t)$.

Macht man im Fall (b2.2) die zusätzliche Annahme, daß die Ungleichung $-\underline{v}_k(t_i) - m^1\cdot h_k > \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k$ gilt, so folgt hieraus sofort die Ungleichung $-\underline{v}_k(t_i) > \overline{v}_k(t_i)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Die Annahme ist demnach falsch, und es gilt deshalb die Ungleichung $-\underline{v}_k(t_i) - m^1\cdot h_k \leqq \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k$.

Da außerdem (19) gilt, und da y^1 ein zulässiger Wert für die erste Komponente des x-Vektors bei der Maximumsbildung in (16) und bei der Minimumsbildung in (15) ist, ist $\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k$ ein zulässiger Argumentwert für die erste Komponente des x-Vektors bei der Minimumsbildung in (15) und bei der Maximumsbildung in (16) .

Damit ist das Tripel $(s, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k, \overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k)$ ein zulässiger Argumentwert bei der Minimumsbildung in (15) und bei der Maximumsbildung in (16).

Wegen (17) und (15) gilt dann :

$$\begin{aligned}-\underline{v}_k'(t) = \underline{f}_1(s,-y^1,y^2) &\leqq \underline{f}_1(s,\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k,\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k) \\ &= \underline{f}(s,[\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k,\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k]) \\ &\leqq \overline{f}(s,[\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k,\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k]) \\ &= \overline{f}_1(s,\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k,\overline{v}_k(t_i) + m^2\cdot h_k) \\ &\leqq \overline{v}_k'(t) \quad .\end{aligned}$$

Es ist nun in allen Fällen nachgewiesen worden, daß die Ungleichung

$-\underline{v}_k'(t) \leqq \overline{v}_k'(t)$ für alle t aus (t_i, t_{i+1}) gilt.

Hieraus folgt für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$ die Ungleichung $-\underline{v}_k(t) \leqq \overline{v}_k(t)$.

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und nach Induktion erhält man die Gültigkeit der Ungleichung $-\underline{v}_k(t) \leqq \overline{v}_k(t)$ für alle t aus J.

QED

Bemerkungen:

1.) Die Funktion U_1^+ , die gegeben ist durch $U_1^+ := [\, \underline{u}_1^+ \, , \, \overline{u}_1^+ \,]$, ist eine Lösung des AWPs (1),(2) , da dieses AWP mit dem AWP (7),(8) im Sinne von Satz 1.1 äquivalent ist.

2.) Nach (14) und nach Definition II.1.12 gilt, daß U_1^+ sogar die größte Intervallösung des Intervall-AWPs (1),(2) ist.

3.) Will man einen dazu analogen Satz für u_{1+} zeigen, so stößt man bei gleicher Vorgehensweise darauf, die Ungleichung

$$\max \left\{ \underline{f}_1(s,-x^1,x^2) \;\middle|\; t_i \leqq s \leqq t_{i+1} \, , \, v_k(t_i) - M\cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + 3\, M\cdot h_k \right\} \leqq$$

$$\leqq \min\left\{ \overline{f}_1(s,-x^1,x^2) \;\middle|\; t_i \leqq s \leqq t_{i+1} \, , \, v_k(t_i) - M\cdot h_k \leqq x \leqq v_k(t_i) + 3\, M\cdot h_k \right\}$$

zu beweisen.

Dies ist sicher ohne weitere Voraussetzungen nicht möglich.

Mit $\underline{u}_{1+}$ und $\overline{u}_{1+}$ erhält man also möglicherweise keine Lösung des AWPs (7),(8) und damit auch keine Lösung des AWPs (1),(2) mehr.

Dennoch sind diese Funktionen nicht ohne Nutzen. Sie lassen sich als "innere Schranken" für die Lösungen des AWPs (7),(8) bzw. (1),(2) verwenden. Nach (14) gelten nämlich für jede Lösung $(\underline{u},\overline{u})$ von (7),(8) bzw. für jede Lösung $[\,\underline{u},\overline{u}\,]$ von (1),(2) die Ungleichungen

$$\underline{u} \leqq \underline{u}_{1+} \quad \text{und} \quad \overline{u}_{1+} \leqq \overline{u} \qquad \text{in J.}$$

Falls sogar die Ungleichung $\underline{u}_{1+} \leqq \overline{u}_{1+}$ in ganz J gilt, dann ist gewährleistet, daß $u_{1+} := (\underline{u}_{1+} \, , \, \overline{u}_{1+})$ eine Lösung des AWPs (7),(8) und $U_{1+} := [\, \underline{u}_{1+} \, , \, \overline{u}_{1+} \,]$ eine Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit ist.

Nach (14) ist U_{1+} dann sogar die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2) .

Eine zeichnerische Darstellung der möglichen Situationen gibt Bild 3 .
Die Darstellung der Funktionen $\underline{u}_{1+}$ und $\overline{u}_{1+}$ durch eine gepunktete Linie charakterisiert dabei den Fall, daß durch diese Funktionen eine intervallwertige Funktion U_{1+} dargestellt werden kann, d.h., daß für alle t aus J die Ungleichung $\underline{u}_{1+}(t) \leqq \overline{u}_{1+}(t)$ gilt. Die Darstellung der Funktionen $\underline{u}_{1+}$ und $\overline{u}_{1+}$ durch gestrichelte Linien charakterisiert den Fall, daß der eben beschriebene Fall nicht eingetreten ist, d.h. die Funktionen $\underline{u}_{1+}$ und $\overline{u}_{1+}$ schneiden sich in J_o . Die Funktionen $\underline{u}_1^+$ und $\overline{u}_1^+$ charakteriesieren in jedem Fall eine intervallwertige Funktion $\overline{U}_1^+$. Sie sind durch eine durchgezogene Linie dargestellt.

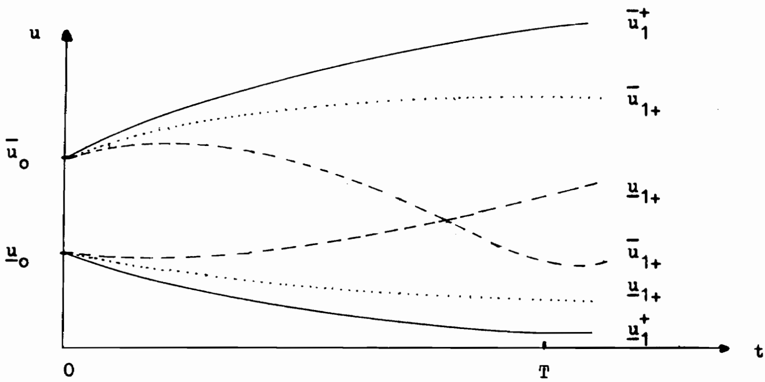

Bild 3 : Beschreibung im Text

III.2 Bestimmung einer Lösung bezüglich der H-Differenzierbarkeit

Wegen der Definition der H-Differenzierbarkeit besitzt das AWP (1),(2) nur dann eine Lösung bezüglich der H-Differenzierbarkeit, wenn die Beziehung $U(0) = [\underline{u}_0, \overline{u}_0] = [0,0]$ gilt.

Das Lösen des AWPs (1),(2) geht dann über in das Lösen der Integralgleichung

$$(20) \qquad U(t) = \int_0^t F(s,U(s))\,ds \quad .$$

Für U wird wieder $[\underline{u},\overline{u}]$ und für F wird wieder $[\underline{f},\overline{f}]$ geschrieben.

Da nur nichtnegative t-Werte betrachtet werden, gilt dann nach Lemma II.2.11 :

$$U(t) = [\underline{u}(t),\overline{u}(t)] = \int_0^t F(s,U(s))\,ds = \left[\int_0^t \underline{f}(s,U(s))\,ds \;,\; \int_0^t \overline{f}(s,U(s))\,ds\right] .$$

Das bedeutet aber, daß sich die Integralgleichung (20) darstellen läßt durch die Integralgleichungen

$$(21) \qquad \underline{u}(t) = \int_0^t \underline{f}(s,[\underline{u}(s),\overline{u}(s)])\,ds \qquad \text{und}$$

$$(22) \qquad \overline{u}(t) = \int_0^t \overline{f}(s,[\underline{u}(s),\overline{u}(s)])\,ds \quad .$$

Die beiden Integralgleichungen (21) und (22) sind äquivalent zu dem AWP (7),(8), wobei in (8) die Anfangswerte $\underline{u}_0$ und $\overline{u}_0$ beide auf den Wert 0 zu setzen sind. Damit lassen sich die größte Intervallösung und, wenn sie existiert, die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H-Differenzierbarkeit durch Lösen des AWPs (7),(8) auf dem im Abschnitt III.1 beschriebenen Weg bestimmen. Existiert die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H-Differenzierbarkeit nicht, so erhält man zumindest wieder "innere Schranken".

III.3 Bestimmung einer Lösung bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit

Mit Hilfe des folgenden Satzes und der Transformation von III.2 läßt sich das Problem auf das in III.1 gelöste Problem zurückführen.

Satz 3.1

Es sei C ein Intervall, und es sei F eine stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

Die Funktion U ist eine Lösung des AWPs (23) $U'(t) = F(t,U(t) + C)$

(24) $U(0) = [0,0]$

bezüglich der H-Differenzierbarkeit, genau dann wenn die Funktion G, die gegeben ist durch $G := U + C$, eine Lösung des AWPs

(25) $U'(t) = F(t,U(t))$

(26) $U(0) = C$

bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit ist.

Beweis:

Es sei U eine Lösung des AWPs (23),(24) bezüglich der H-Differenzierbarkeit. Dann ist U eine H-differenzierbare Funktion. Damit ist aber $G := U + C$ eine H_1-differenzierbare Funktion mit der H_1-Ableitung U'. Dabei ist U' die H-Ableitung von U.

Es gilt ferner die Beziehung $(U+C)(0) = U(0) + C = C$, und für die H_1-Ablei- von G gilt die Beziehung

$$G'(t) = (U+C)'(t) = U'(t) + C'(t) = U'(t) = F(t,U(t) + C) = F(t,G(t)) .$$

Dies heißt aber, die Funktion G ist eine Lösung des AWPs (25),(26) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit.

Es sei U nun eine Lösung des AWPs (25),(26) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit. Dann ist U eine H_1-differenzierbare Funktion. Damit existiert ein Intervall D und eine H-differenzierbare Funktion G mit $U(t) = G(t) + D$ und $U'(t) = G'(t)$ für alle t aus J.

Da G eine H-differenzierbare Funktion ist, gilt die Gleichung $G(0) = [0,0]$.

Hieraus folgt die Gleichung $U(0) = G(0) + D$ und damit auch $D = C$.

Demnach gilt die Gleichung $G(t) + C = U(t)$ für alle t aus J, und es gilt ferner

$$G(t) = \int_0^t G'(s)\,ds = \int_0^t U'(s)\,ds = \int_0^t F(s,U(s))\,ds = \int_0^t F(s,G(s) + C)\,ds .$$

Dies heißt aber, daß die Funktion G, die gegeben ist durch $G(t) + C = U(t)$, eine Lösung des AWPs (23),(24) bezüglich der H-Differenzierbarkeit ist.

QED

Bemerkungen:

1.) Das Auftreten der Konstanten C in (23) macht bei der Lösung des AWPs (23),(24) auf dem in III.2 beschriebenen Weg keine Änderungen notwendig.

2.) Man kann wieder die größte Intervallösung und, falls sie existiert, die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2), diesmal bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit, bestimmen. Dazu bestimmt man die größte bzw. kleinste Intervallösung des AWPs (23),(24) mit $C := U_o$ und addiert jeweils zu ihnen das konstante Intervall U_o. Existiert die kleinste Intervallösung des AWPs (23),(24) mit $C := U_o$ nicht, so lassen sich nur "innere Schranken" für die Lösungen des AWPs (25),(26) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit angeben, die kleinste Intervallösung dieses Problems existiert nicht. Die "inneren Schranken" für das AWP (25),(26) lassen sich ebenfalls durch Addition des Intervalls U_o zu den "inneren Sehranken" des AWPs (23),(24) bestimmen.

III.4 Bestimmung einer Lösung bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit

Wieder wird das Problem auf das vorangegangene Problem zurückgeführt.

Eine Klasse von Lösungen erhält man auf Grund des folgenden Satzes.

Satz 4.1

Es sei C ein Intervall, und es sei F eine stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$.

Dann ist jede Lösung U des AWPs (25),(26) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit auch eine Lösung des AWPs

(27) $U'(t) = F(t,U(t))$

(28) $U(0) = C$

bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit.

Beweis:

Es sei U eine Lösung des AWPs (25),(26) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit.

Dann ist U eine H_1-differenzierbare Funktion.

Nach Lemma II.2.27 ist U dann auch H_2-differenzierbar, und die H_2-Ableitung stimmt mit der H_1-Ableitung überein. Da die Anfangsbedingungen der beiden AWPe übereinstimmen, ist U damit auch eine Lösung des AWPs (27),(28)bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit.

QED

Die gemäß III.3 gewonnene größte Intervallösung und,falls sie existiert, die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit sind also auch Lösungen des AWPs (1),(2) bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit.

Wie später noch bei der "direkten Methode" in Kapitel IV gezeigt werden wird, ist die größte Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit auch die größte Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit. (vergleiche dazu Satz IV.4.1)

III.5 Bestimmung einer Lösung bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit

Der Einfachheit halber soll eine Lösung U nur unter der Klasse von stetig differenzierbaren Intervallfunktionen gesucht werden, für die als Überdeckung des Definitionsbereiches J durch Intervalle J_i (vergleiche Definition II.2.29) die Überdeckung, die nur aus dem Intervall J selbst besteht, eine zulässige Überdeckung ist, d.h., daß sie die in Definition II.2.29(c) geforderten Eigenschaften besitzt. Die zugehörige Familie von reellen Zahlen a_i und Intervallen U_{oi} (vergleiche Definition II.2.29(c)) besteht dann lediglich aus der reellen Zahl Null bzw. dem Intervall U_o .

Gemäß Lemma II.2.32 gelten die Beziehungen $\underline{u}'(t) = \underline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)])$ und $\overline{u}'(t) = \overline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)])$ für alle t aus (0,T) .

Damit geht das AWP (1),(2) über in ein gekoppeltes AWP bei einem System von zwei reellen Differentialgleichungen :

$$\underline{u}'(t) = \underline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]) \quad , \qquad \underline{u}(0) = \underline{u}_o \quad ,$$

$$\overline{u}'(t) = \overline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]) \quad , \qquad \overline{u}(0) = \overline{u}_o \quad .$$

Dies ist aber das AWP (7),(8) , das bereits in III.1 gelöst wurde.

Damit lassen sich nun die größte Intervallösung und, falls sie existiert, die kleinste Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der eingeschränkten Klasse von stetig differenzierbaren Intervallfunktionen angeben. Existiert die kleinste Intervallösung nicht, so erhält man zumindest wieder "innere Schranken" für die Lösungen.

Daß es sich bei der größten Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der eingeschränkten Klasse von stetig differenzierbaren Intervallfunktionen sogar um die größte Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich aller stetig differenzierbaren Intervallfunktionen handelt, wird später noch gezeigt werden. (vergleiche Satz IV.5.1)

IV DIREKTE METHODE ZUR BESTIMMUNG EINER LÖSUNG DES INTERVALL - ANFANGSWERTPROBLEMS (1),(2)

Es soll nun der von WALTER in [12] angegebene elementare Beweis des Peanoschen Existenzsatzes in direkter Weise auf das Intervall-AWP (1),(2) übertragen werden.

Ein erheblicher Vorteil der Vorgehensweise in diesem Kapitel ist, daß man sich nicht auf ein AWP bei einer einzigen Intervall-Differentialgleichung beschränken muß, wie bei der indirekten Methode in Kapitel III, sondern sogar die Existenz der größten Intervallösung eines AWPs bei einem System von Intervall-Differentialgleichungen zeigen kann.

Wieder ist es nötig, für das gesamte Kapitel vorauszusetzen, daß die gegebene Funktion F(t,X) stetig und für alle t aus J inklusionsisoton in X ist.

Ein im Verhältnis zu den Vorteilen unbedeutender Nachteil der direkten Methode besteht darin, daß die Angabe der kleinsten Intervallösung, falls sie existiert, bzw. von "inneren Schranken" nicht mehr möglich ist.

Es wird in diesem Kapitel stets der allgemeine Fall betrachtet, daß es sich bei dem gegebenen AWP (1),(2) um ein AWP bei einem System von Intervall-Differentialgleichungen handelt.

IV.1 Bestimmung einer Lösung bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit

Um einen Existenzsatz für eine Lösung des AWPs (1),(2) beweisen zu können, muß noch eine Definition und ein Hilfssatz vorausgeschickt werden.

Definition 1.1
Es seien $t \in J$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $M \in \mathbb{R}^+$, $X \in I\!I^m(\mathbb{R})$, $X = (X^1, X^2, \ldots, X^m)$, und es gelte $X^j = [\underline{x}^j, \overline{x}^j]$ für $j=1(1)m$.

Dann wird ein Gebiet R von $J \times I\!I^m(\mathbb{R})$ definiert durch

$$R(t,X,h,M,J) := \left\{ (s,Y) \in J \times I\!I^m(\mathbb{R}) \;\middle|\; t \leq s \leq t+h \,,\; \underline{x}^j - M\cdot h \leq \underline{y}^j \leq \underline{x}^j + M\cdot h \text{ und } \overline{x}^j - M\cdot h \leq \overline{y}^j \leq \overline{x}^j + M\cdot h \text{ für } j=1(1)m \right\} .$$

Lemma 1.2

Es seien $t \in J$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $M \in \mathbb{R}^+$. Es seien V, W und Z Intervallvektoren aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, $V = (V^1, V^2, \ldots, V^m)$, $W = (W^1, W^2, \ldots, W^m)$ und $Z = (Z^1, Z^2, \ldots, Z^m)$, und es gelte $V^j = [\underline{v}^j, \overline{v}^j]$, $W^j = [\underline{w}^j, \overline{w}^j]$ und $Z^j = [\underline{z}^j, \overline{z}^j]$ für $j=1(1)m$.

Für $j=1(1)m$ mögen die folgenden Ungleichungen gelten:

$\underline{v}^j \leqq \underline{w}^j$, $\overline{w}^j \leqq \overline{v}^j$, $\underline{v}^j - M \cdot h/2 \leqq \underline{z}^j$ und $\overline{z}^j \leqq \overline{v}^j + M \cdot h/2$.

Ferner sei F eine stetige, inklusionsisotone Funktion von $J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ mit $F = (F^1, F^2, \ldots, F^m)$ und $F^j = [\underline{f}^j, \overline{f}^j]$ für $j=1(1)m$, und es mögen für $j=1(1)m$ die beiden Ungleichungen $|\underline{f}^j| \leqq M$ und $|\overline{f}^j| \leqq M$ gelten.

Dann gelten die Inklusionsbeziehungen

(a) $\sup F(\, R(t,V,h,M,J)\,) \supseteq \sup F(\, R(t,W,h/2,M,J)\,)$ und

(b) $\sup F(\, R(t,V,h,M,J)\,) \supseteq \sup F(\, R(t+h/2,Z,h/2,M,J)\,)$.

Beweis:

$$R(t,V,h,M,J) = \Big\{ (s,Y) \in J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R}) \;\Big|\; t \leqq s \leqq t+h,\ \underline{v}^j - M \cdot h \leqq \underline{y}^j \leqq \underline{v}^j + M \cdot h \text{ und } \overline{v}^j - M \cdot h \leqq \overline{y}^j \leqq \overline{v}^j + M \cdot h \text{ für } j=1(1)m \Big\},$$

$$R(t,W,h/2,M,J) = \Big\{ (s,Y) \in J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R}) \;\Big|\; t \leqq s \leqq t+h/2,\ \underline{w}^j - M \cdot h/2 \leqq \underline{y}^j \leqq \underline{w}^j + M \cdot h/2 \text{ und } \overline{w}^j - M \cdot h/2 \leqq \overline{y}^j \leqq \overline{w}^j + M \cdot h/2 \text{ für } j=1(1)m \Big\},$$

$$R(t+h/2,Z,h/2,M,J) = \Big\{ (s,Y) \in J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R}) \;\Big|\; t+h/2 \leqq s \leqq t+h,\ \underline{z}^j - M \cdot h/2 \leqq \underline{y}^j \leqq \underline{z}^j + M \cdot h/2 \text{ und } \overline{z}^j - M \cdot h/2 \leqq \overline{y}^j \leqq \overline{z}^j + M \cdot h/2 \text{ für } j=1(1)m \Big\}.$$

zu (a): Es sei (t_1, X_1) aus $R(t,W,h/2,M,J)$ beliebig gewählt. Dann gelten die Beziehungen $\underline{w}^j - M \cdot h/2 \leqq \underline{x}^j \leqq \underline{w}^j + M \cdot h/2$ und $\overline{w}^j - M \cdot h/2 \leqq \overline{x}^j \leqq \overline{w}^j + M \cdot h/2$ für $j=1(1)m$. Da nach Voraussetzung die Ungleichungen $\underline{v}^j \leqq \underline{w}^j$ und $\overline{w}^j \leqq \overline{v}^j$ und mit diesen auch die Ungleichungen $\underline{v}^j - M \cdot h \leqq \underline{w}^j - M \cdot h/2$ und $\overline{w}^j + M \cdot h/2 \leqq \overline{v}^j + M \cdot h$ für $j=1(1)m$ gelten, erhält man die Ungleichungen $\underline{v}^j - M \cdot h \leqq \underline{x}^j$ und $\overline{x}^j \leqq \overline{v}^j + M \cdot h$ für $j=1(1)m$. Wegen der Inklusionsisotonie von F gilt dann die Inklusion

$$F(t_1, [\underline{v}^1 - M \cdot h, \overline{v}^1 + M \cdot h], \ldots, [\underline{v}^m - M \cdot h, \overline{v}^m + M \cdot h]) \supseteq F(t_1, X_1) .$$

Das Element $(t_1, [\underline{v}^1 - M \cdot h, \overline{v}^1 + M \cdot h], \ldots, [\underline{v}^m - M \cdot h, \overline{v}^m + M \cdot h])$ ist aber aus $R(t,V,h,M,J)$.

Damit hat man für jedes Element (t_1,X_1) aus $R(t,W,h/2,M,J)$ ein Element (t_2,X_2) aus $R(t,V,h,M,J)$ mit $F(t_1,X_1) \subseteq F(t_2,X_2)$ gefunden. Hieraus folgt die Inklusion (a) unmittelbar.

zu (b) : Es sei (t_1,X_1) aus $R(t+h/2,Z,h/2,M,J)$ beliebig gewählt. Dann gelten für $j=1(1)m$ die Ungleichungen $\underline{z}^j - M\cdot h/2 \leqq \underline{x}^j$ und $\overline{x}^j \leqq \overline{z}^j + M\cdot h/2$. Da nach Voraussetzung die Ungleichungen $\underline{v}^j - M\cdot h/2 \leqq \underline{z}^j$ und $\overline{z}^j \leqq \overline{v}^j + M\cdot h/2$ für $j=1(1)m$ gelten, folgen dann die beiden Ungleichungen $\underline{v}^j - M\cdot h \leqq \underline{x}^j$ und $\overline{x}^j \leqq \overline{v}^j + M\cdot h$ für $j=1(1)m$. Wegen der Inklusionsisotonie von F gilt dann :
$F(t_1,[\underline{v}^1 - M\cdot h,\overline{v}^1 + M\cdot h],\ldots,[\underline{v}^m - M\cdot h,\overline{v}^m + M\cdot h]) \supseteq F(t_1,X_1)$.
Das Element $(t_1,[\underline{v}^1-M\cdot h,\overline{v}^1+M\cdot h],\ldots,[\underline{v}^m-M\cdot h,\overline{v}^m+M\cdot h])$ ist aber aus $R(t,V,h,M,J)$.
Damit hat man für jedes Element (t_1,X_1) aus $R(t+h/2,Z,h/2,M,J)$ ein Element (t_2,X_2) aus $R(t,V,h,M,J)$ mit $F(t_1,X_1) \subseteq F(t_2,X_2)$ gefunden. Hieraus folgt die Inklusion (b) unmittelbar. QED

Bemerkung: Die Menge $I\!I(\mathbb{R})$ mit der Ordnungsrelation $\subseteq$ ist nach Beispiel II.1.17 und Lemma II.1.19 ein bedingt vollständiger Supremumshalbverband. Da F beschränkt ist, ist demnach die Existenz der Suprema gesichert.

Damit sind nun alle nötigen Hilfsmittel vorhanden, um den folgenden Existenzsatz für eine Lösung des AWPs (1),(2) beweisen zu können.

Satz 1.3
Es seien $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $J = [0,T]$, $J_o = (0,T)$. Es sei F eine stetige, inklusionsisotone und beschränkte Funktion von $J \times I\!I^m(\mathbb{R})$ nach $I\!I^m(\mathbb{R})$ mit $F = (F^1,F^2,\ldots,F^m)$ und $F^j = [\underline{f}^j,\overline{f}^j]$ für $j=1(1)m$.
Dann existiert für einen gegebenen Intervallvektor U_o aus $I\!I^m(\mathbb{R})$ mit $U_o = (U_o^1,U_o^2,\ldots,U_o^m)$ und $U_o^j = [\underline{u}_o^j,\overline{u}_o^j]$ für $j=1(1)m$ mindestens eine stetig F-differenzierbare Funktion U von J nach $I\!I^m(\mathbb{R})$ mit

$$U'(t) = F(t,U(t)) \text{ in } J_o \quad \text{und} \quad U(0) = U_o \ .$$

Beweis: Der Beweis gliedert sich in vier Schritte.
Im 1.Schritt wird ein Konstruktionsverfahren für Schrankenfunktionen angegeben.
Im 2.Schritt wird die Konvergenz dieser Schrankenfunktionen nachgewiesen.
Im 3.Schritt wird gezeigt, daß es sich bei der Grenzfunktion dieser Schrankenfunktionen um eine intervallwertige Funktion handelt.

Im 4.Schritt schließlich wird gezeigt, daß die Grenzfunktion eine Lösung des gegebenen AWPs ist.

1.Schritt:

Es wird die folgende Variante des Euler-Cauchyschen Polygonzugverfahrens verwendet.

Es sei n eine natürliche Zahl. Dann werden zu der vorgegebenen Schrittweite $h := T/n$ für $i=0(1)n$ Stützstellen t_i gegeben durch $t_i := i \cdot h$.

Ferner seien für $i=0(1)n$ Intervallvektoren V_i definiert durch

$$
\begin{aligned}
(29)\qquad V_0 &:= U_0 \,, \\
V_{i+1} &:= V_i + h \cdot \sup \Big\{ F(t,X) \;\Big|\; t_i \leqq t \leqq t_{i+1} \,,\ \underline{v}_i^j - M\cdot h \leqq \underline{x}^j \leqq \underline{v}_i^j + M\cdot h \\
&\qquad\qquad \text{und } \overline{v}_i^j - M\cdot h \leqq \overline{x}^j \leqq \overline{v}_i^j + M\cdot h \quad \text{für } j=1(1)m \Big\} \\
&= V_i + h \cdot \sup \Big\{ F(t,[\underline{v}_i^1 - M\cdot h, \overline{v}_i^1 + M\cdot h], \ldots, [\underline{v}_i^m - M\cdot h, \overline{v}_i^m + M\cdot h]) \;\Big| \\
&\qquad\qquad t_i \leqq t \leqq t_{i+1} \Big\} \,.
\end{aligned}
$$

Dabei mögen für $j=1(1)m$ die Ungleichungen $|\underline{f}^j(t,X)| \leqq M$ und $|\overline{f}^j(t,X)| \leqq M$ für alle Elemente (t,X) aus $J \times \mathbb{I}\,^m(\mathbb{R})$ gelten, und die Supremumsbildung werde komponentenweise für die Komponentenfunktionen F^j vorgenommen.

Man erhält nun eine Näherungsfunktion $V = [\underline{v}, \overline{v}]$, wenn man die unteren bzw. oberen Eckpunkte entsprechender Komponenten dieser Intervallvektoren durch je einen Polygonzug miteinander verbindet. Dies ist in Bild 4 für eine Komponentenfunktion $V^j = [\underline{v}^j, \overline{v}^j]$ dargestellt. Die Funktionen $\underline{v}^j$ und $\overline{v}^j$ sind dabei als durchgezogene Linien gezeichnet, und die j-ten Komponenten der Intervallvektoren V_i sind durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

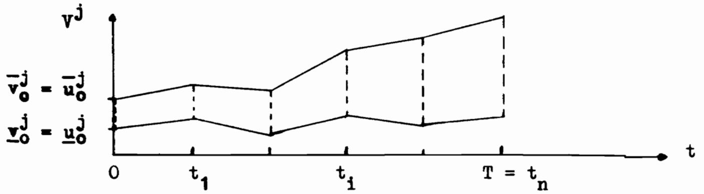

Bild 4 : Beschreibung im Text

Führt man nun diese Konstruktion für die Parameter h, h/2 , h/4 , usw. anstelle von h durch, so erhält man eine Folge von Näherungsfunktionen, die "von außen" gegen eine Lösung des gegebenen AWPs konvergiert.

Dies soll nun im 2.Schritt bewiesen werden.

2. Schritt:

Die Schrittweite $h = T/n > 0$ sei fest gewählt. Ferner seien die Stützstellen t_i aus J für $i=0(1/2)n$ gegeben durch $t_i := i \cdot h$.

Für $i=0(1)n$ seien Intervallvektoren V_i gemäß (29) mit dem Parameter h konstruiert. Für $i=0(1/2)n$ seien ferner Intervallvektoren W_i ebenfalls gemäß (29) aber mit dem Parameter $h/2$ anstatt h konstruiert.

Es seien nun V und W die durch das Polygonzugverfahren aus diesen Intervallvektoren entstandenen Funktionen, und es gelte $V = (V^1, V^2, \ldots, V^m)$, $W = (W^1, W^2, \ldots, W^m)$, $W^j = [\underline{w}^j, \overline{w}^j]$ für $j=1(1)m$ und $V^j = [\underline{v}^j, \overline{v}^j]$ für $j=1(1)m$.

Dann sind die Funktionen V und W und damit auch die Funktionen $V^j, W^j, \underline{v}^j, \overline{v}^j$, $\underline{w}^j$ und $\overline{w}^j$ für $j=1(1)m$ stetig. Die Funktionen $\underline{v}^j, \overline{v}^j, \underline{w}^j$ und $\overline{w}^j$ für $j=1(1)m$ sind sogar stückweise linear. Ferner gelten die Beziehungen

$V(t_i) = V_i$ für $i=0(1)n$ und $W(t_i) = W_i$ für $i=0(1/2)n$.

Für die so konstruierten Funktionen V und W gilt dann die Inklusionsbeziehung

$V(t) \supseteq W(t)$ für alle t aus J, das heißt, es gilt die Inklusion

$V^j(t) \supseteq W^j(t)$ für alle t aus J und $j=1(1)m$.

Der Beweis dieser Inklusionsbeziehung erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von V.

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung gilt: $V(0) = V_0 = U_0 \supseteq U_0 = W_0 = W(0)$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei i eine natürliche Zahl, und es gelte die die Inklusion $V(t) \supseteq W(t)$ für alle t aus $[0, t_i]$.

Zu zeigen ist nun, daß diese Inklusion auch für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$ gilt.

Induktionsschritt: Es genügt, für $j=1(1)m$ die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\begin{aligned} \underline{v}^j(t) &\leqq \underline{w}^j(t) \quad , \\ \overline{v}^j(t) &\geqq \overline{w}^j(t) \end{aligned} \tag{30}$$

für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$ nachzuweisen.

In einem ersten Schritt soll gezeigt werden, daß die Ungleichungen (30) für alle t aus $[t_i, t_{i+1/2}]$ gelten.

Nach Lemma 1.2(a) folgt aus der Induktionsannahme die Inklusion

$$\sup F(\ R(t_i,V(t_i),h,M,J)\ ) \supseteq \sup F(\ R(t_i,W(t_i),h/2,M,J)\ ) \quad .$$

Hiermit folgen aus (29) für j=1(1)m und alle t aus $(t_i,t_{i+1/2})$ die Ungleichungen $\overline{w}^{j\,\prime}(t) \leqq \overline{v}^{j\,\prime}(t)$ und $\underline{w}^{j\,\prime}(t) \geqq \underline{v}^{j\,\prime}(t)$.

Aus diesen Ungleichungen erhält man unmittelbar die beiden Ungleichungen $\overline{w}^j(t) \leqq \overline{v}^j(t)$ und $\underline{w}^j(t) \geqq \underline{v}^j(t)$ für j=1(1)m und alle t aus $[t_i,t_{i+1/2}]$. Dies heißt aber, für alle t aus $[t_i,t_{i+1/2}]$ gilt die Inklusion $V(t) \supseteq W(t)$.

In analoger Weise wird nun in einem zweiten Schritt gezeigt, daß die Ungleichungen (30) auch für alle t aus $[t_{i+1/2},t_{i+1}]$ gelten.

Nach Induktionsvoraussetzung gelten für j=1(1)m die beiden Ungleichungen $\underline{v}^j(t_i) \leqq \underline{w}^j(t_i)$ und $\overline{w}^j(t_i) \leqq \overline{v}^j(t_i)$. Da $|F|$ durch M beschränkt ist, folgen hieraus die Ungleichungen $\underline{v}^j(t_i) - M\cdot h/2 \leqq \underline{w}^j(t_{i+1/2})$ und $\overline{w}^j(t_{i+1/2}) \leqq \overline{v}^j(t_i) + M\cdot h/2$ für j=1(1)m .

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.2(b) erfüllt, und man erhält, wenn man dort den Intervallvektor $W(t_{i+1/2})$ anstelle von Z setzt, die Inklusion

$$\sup F(\ R(t_i,V(t_i),h,M,J)\ ) \supseteq \sup F(\ R(t_{i+1/2},W(t_{i+1/2}),h/2,M,J)\ ) \quad .$$

Aus (29) folgen damit für j=1(1)m und alle t aus $(t_{i+1/2},t_{i+1})$ die beiden Ungleichungen $\underline{w}^{j\,\prime}(t) \geqq \underline{v}^{j\,\prime}(t)$ und $\overline{w}^{j\,\prime}(t) \leqq \overline{v}^{j\,\prime}(t)$.

Aus diesen Ungleichungen erhält man unmittelbar die beiden Ungleichungen $\underline{w}^j(t) \geqq \underline{v}^j(t)$ und $\overline{w}^j(t) \leqq \overline{v}^j(t)$ für j=1(1)m und alle t aus $[t_{i+1/2},t_{i+1}]$. Dies heißt, die Inklusion $W(t) \subseteq V(t)$ gilt auch auf $[t_{i+1/2},t_{i+1}]$ und damit auf dem gesamten Intervall $[t_i,t_{i+1}]$.

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und nach Induktion gilt die Inklusion $W \subseteq V$ auf ganz J.

Mit Hilfe der eben bewiesenen Monotonieeigenschaft bezüglich des Parameters h von gemäß (29) konstruierten Funktionen läßt sich nun eine konvergente Folge von Näherungsfunktionen wie folgt bestimmen.

Für jede natürliche Zahl k sei die Schrittweite h_k definiert durch $h_k := T \cdot 2^{-k}$. Für jedes k sei ferner V_k die gemäß (29) mit dem Parameter h_k anstelle von h und den Polygonzügen konstruierte Funktion, und es gelte $V = (V^1, V^2, \ldots, V^m)$ und $V^j = [\underline{v}^j, \overline{v}^j]$ für $j=1(1)m$.

Die Funktionen $\underline{v}_k^j$ und $\overline{v}_k^j$ sind für alle k aus $\mathbb{N}$ und für $j=1(1)m$ stetig und stückweise linear.

Gemäß der oben gezeigten Monotonieeigenschaft ist für $j=1(1)m$ die Folge $\{\underline{v}_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ isoton bezüglich k und die Folge $\{\overline{v}_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ antiton bezüglich k. Außerdem ist für $j=1(1)m$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $\underline{v}_k^j$ nach oben beschränkt durch $\underline{u}_o^j + M \cdot T$ und die Funktion $\overline{v}_k^j$ nach unten beschränkt durch $\overline{u}_o^j - M \cdot T$. Demnach konvergieren für $j=1(1)m$ die Funktionenfolgen $\{\underline{v}_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\overline{v}_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ gegen Grenzfunktionen $\underline{u}^j$ bzw. $\overline{u}^j$ im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Außerdem erfüllen die Funktionen $\underline{v}_k^j$ bzw. $\overline{v}_k^j$ für $j=1(1)m$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ein Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten M, die nicht von k abhängt. Dann sind aber die Funktionenfolgen $\{\underline{v}_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$, bzw. $\{\overline{v}_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ für $j=1(1)m$ nach Beispiel II.1.13 gleichgradig stetig, und ihre Konvergenz ist gemäß Lemma II.1.14 sogar gleichmäßig, und die Grenzfunktionen sind stetig.

Wie man sieht, ist der Beweis elementar geblieben. Die sonst übliche Vorgehensweise, den Satz von Ascoli-Arzelà zu verwenden, ist wieder umgangen worden. Die konvergente Folge von Näherungsfunktionen wurde explizit angegeben, ihre Konvergenz folgte bereits aus der Monotonie und der Beschränktheit.

3.Schritt:

Es soll nun nachgewiesen werden, daß es sich bei der konstruktiv bestimmten Grenzfunktion $U = (U^1, U^2, \ldots, U^m)$ um eine intervallwertige Funktion handelt, d.h. daß für $j=1(1)m$ und alle t aus J die Ungleichung $\underline{u}^j(t) \leq \overline{u}^j(t)$ gilt.

Man nimmt an, dies wäre falsch.
Dann gibt es einen Index $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ und ein t aus J mit $\underline{u}^j(t) > \overline{u}^j(t)$.
Es seien nun t_1 und j_1 solche mit dieser Eigenschaft.

Da $\lim\limits_{k \to \infty} \underline{v}_k^{j_1} = \underline{u}^{j_1}$ gilt, gibt es eine natürliche Zahl k_1, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > k_1$ die Ungleichung $\underline{v}_k^{j_1}(t_1) > \overline{u}^{j_1}(t_1)$ gilt. Da $\overline{v}_k^{j_1}(t_1)$ für $k \to \infty$ von oben gegen $\overline{u}^{j_1}(t_1)$ konvergiert, gibt es dann einen Index k_2 derart, daß für alle natürlichen Zahlen k mit $k > k_2$ die Ungleichung $\overline{v}_k^{j_1}(t_1) < \underline{v}_{k_1+1}^{j_1}(t_1)$ gilt. Wegen der Isotonie der Funktionen $\underline{v}_k$ und der Antitonie der Funktionen $\overline{v}_k$ bezüglich k gilt dann für alle Indices k mit $k > \max\{k_1,k_2\}$ die Ungleichung $\underline{v}_k^{j_1}(t_1) > \overline{v}_k^{j_1}(t_1)$.

Dies kann aber nicht gelten, da $V_k^{j_1}$ eine intervallwertige Funktion war.

<u>4.Schritt:</u>

Es bleibt nun noch lediglich zu zeigen, daß die Grenzfunktion U eine Lösung des gegebenen AWPs ist.

Für jede natürliche Zahl k existieren stückweise die Ableitungen $\underline{v}_k^{j\prime}(t)$ und $\overline{v}_k^{j\prime}(t)$ für $j=1(1)m$ und für alle t aus J ausgenommen auf der jeweils endlichen Zahl der Stützstellen.

Für $j=1(1)m$ und jedes t aus J, für das diese Ableitungen existieren, gibt es nach (29) zwei Elemente (t_1,X_1) und (t_2,X_2) aus $J \times I\!I^m(\mathbb{R})$ mit

$|t - t_1| \leq h_k$, $|t - t_2| \leq h_k$, $|\underline{v}_k^j(t) - \underline{x}_1^j| \leq 2M \cdot h_k$, $|\overline{v}_k^j(t) - \overline{x}_1^j| \leq 2M \cdot h_k$,

$|\underline{v}_k^j(t) - \underline{x}_2^j| \leq 2M \cdot h_k$, $|\overline{v}_k^j(t) - \overline{x}_2^j| \leq 2M \cdot h_k$, $\underline{v}_k^{j\prime}(t) = \underline{f}^j(t_1,X_1)$ und

$\overline{v}_k^{j\prime}(t) = \overline{f}^j(t_2,X_2)$.

Für $j=1(1)m$ sei nun $d_1^j(s)$ ein Stetigkeitsmaß für $\underline{f}^j$ und $d_2^j(s)$ ein Stetigkeitsmaß für $\overline{f}^j$ auf $J \times \{X \in I\!I^m(\mathbb{R}) \mid \underline{u}_o^j - M \cdot T \leq \underline{x}^j$ und $\overline{x}^j \leq \overline{u}_o^j + M \cdot T$ für $j=1(1)m\}$:

$$|\underline{f}^j(t_1,X_1) - \underline{f}^j(t_2,X_2)| \leq d_1^j\Big(|t_1 - t_2| + \sum_{i=1}^{m} (|\underline{x}_1^i - \underline{x}_2^i| + |\overline{x}_1^i - \overline{x}_2^i|)\Big) \quad ,$$

$$|\overline{f}^j(t_1,X_1) - \overline{f}^j(t_2,X_2)| \leq d_2^j\Big(|t_1 - t_2| + \sum_{i=1}^{m} (|\underline{x}_1^i - \underline{x}_2^i| + |\overline{x}_1^i - \overline{x}_2^i|)\Big) \quad .$$

Dann gelten die Gleichungen

$$\underline{v}_k^{j\prime}(t) = \underline{f}^j(t,[\underline{v}_k^1(t),\overline{v}_k^1(t)],\dots,[\underline{v}_k^m(t),\overline{v}_k^m(t)]) + A_{1k}^j(t) \qquad \text{und}$$

$$\overline{v}_k^{j\prime}(t) = \overline{f}^j(t,[\underline{v}_k^1(t),\overline{v}_k^1(t)],\dots,[\underline{v}_k^m(t),\overline{v}_k^m(t)]) + A_{2k}^j(t) \qquad \text{, wobei}$$

$|A_{1k}^j(t)| \leqq d_1^j(h_k + 2m\cdot 2M\cdot h_k)$ und $|A_{2k}^j(t)| \leqq d_2^j(h_k + 2m\cdot 2M\cdot h_k)$ ist, für $j=1(1)m$.

Hieraus folgen für $j=1(1)m$ die beiden Beziehungen

$$\underline{v}_k^j(t) = \underline{u}_0^j + \int_0^t \underline{f}^j(s,(V_k^1(s),V_k^2(s),\dots,V_k^m(s)))\, ds + B_{1k}^j(t) \qquad \text{und}$$

$$\overline{v}_k^j(t) = \overline{u}_0^j + \int_0^t \overline{f}^j(s,(V_k^1(s),V_k^2(s),\dots,V_k^m(s)))\, ds + B_{2k}^j(t) \qquad \text{, wobei}$$

$|B_{1k}^j(t)| \leqq T\cdot d_1(h_k + 2m\cdot 2M\cdot h_k)$ und $|B_{2k}^j(t)| \leqq T\cdot d_2(h_k + 2m\cdot 2M\cdot h_k)$ gilt.

Für den Grenzübergang $k \longrightarrow \infty$ ergeben sich für $j=1(1)m$ die Gleichungen

$$\underline{u}^j(t) = \underline{u}_0^j + \int_0^t \underline{f}^j(s,(U^1(s),U^2(s),\dots,U^m(s)))\, ds = \underline{u}_0^j + \int_0^t \underline{f}^j(s,U(s))\, ds \ ,$$

(31)

$$\overline{u}^j(t) = \overline{u}_0^j + \int_0^t \overline{f}^j(s,(U^1(s),U^2(s),\dots,U^m(s)))\, ds = \overline{u}_0^j + \int_0^t \overline{f}(s,U(s))\, ds \ .$$

Hierbei wurde benutzt, daß man Grenzübergang und Integration wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $\underline{v}_k^j$ gegen $\underline{u}^j$ bzw. der $\overline{v}_k^j$ gegen $\overline{u}^j$ vertauschen darf.

Für $j=1(1)m$ folgt nun aus (31) , daß $\underline{u}^j$ differenzierbar ist in J_0 mit der Ableitung $\underline{f}^j$, und daß $\overline{u}^j$ differenzierbar ist in J_0 mit der Ableitung $\overline{f}^j$.

Mit Lemma II.2.3 folgt hieraus, daß für $j=1(1)m$ die Funktion $U^j = [\underline{u}^j,\overline{u}^j]$ Fréchet-differenzierbar ist in J_0 mit der F-Ableitung $(\underline{f}^j,\overline{f}^j)$.

Da für gleiches Argument stets $\underline{f}^j \leqq \overline{f}^j$ für $j=1(1)m$ gilt, ist die F-Ableitung nach Korollar II.2.4 sogar gegeben durch $[\underline{f}^j,\overline{f}^j] = F^j$.

Aus (31) folgt auch sofort die Gültigkeit der Anfangsbedingungen

$U^j = [\underline{u}^j(0),\overline{u}^j(0)] = [\underline{u}_0^j,\overline{u}_0^j]$ für $j=1(1)m$.

Damit ist nachgewiesen, daß die Funktion U eine Lösung des gegebenen AWPs ist.

Der Beweis des Existenzsatzes 1.3 ist nun vollständig erbracht.

Bemerkungen:

1.) Die Menge $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit der Ordnungsrelation $\subseteq$ ist nach Beispiel II.1.17 und Lemma II.1.19 ein bedingt vollständiger Supremumshalbverband. Da F beschränkt ist, ist demnach die Existenz des Supremums in (29) gesichert.

2.) Der Beweis ist konstruktiv. Man erhält ein numerisches Verfahren, das zu einer vorgegebenen Anfangszerlegung des Intervalls J (im Beweis wurde als Anfangszerlegung des Intervalls J das gesamte Intervall J selbst gewählt) eine monotone Folge äußerer Schranken für eine Lösung des gegebenen AWPs liefert.
Die Folge hängt wesentlich von der gewählten Anfangszerlegung ab. Es gibt beliebig viele solcher Folgen. Sie konvergieren jedoch alle, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Wie im folgenden Satz gezeigt wird, ist die in Satz 1.3 bestimmte Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit sogar die größte Intervallösung dieses Problems.

Satz 1.4
Es mögen die Voraussetzungen von Satz 1.3 gelten.
Dann ist die im Beweis zu Satz 1.3 bestimmte Lösung U des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit die größte Intervallösung dieses Problems.

Beweis:

Es sei U_1 eine beliebige Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit. Die Funktionen V_k für $k \in \mathbb{N}$ seien wie im Beweis von Satz 1.3 . Es genügt nun zu zeigen, daß für alle t aus J die Inklusion

(++) $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle natürlichen Zahlen k gilt. Für den Grenzübergang $k \to \infty$ erhält man damit nämlich die gewünschte Inklusion $U(t) \supseteq U_1(t)$ für alle t aus J.

Der Beweis der Inklusion (++) erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von V_k .

Es sei k eine beliebige natürliche Zahl.

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung gilt: $U_1(0) = U_o = V_k(0)$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei i eine natürliche Zahl, und es gelte die Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle t aus $[0,t_i]$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß die Inklusionsbeziehung auch für alle t aus $[t_i,t_{i+1}]$ gilt.

Nach Lemma II.2.3 gelten die Gleichungen

$$(32) \qquad \begin{aligned} \underline{u}_1^{j\,\prime}(t) &= \underline{f}^j(t,U_1(t)) , \\ \overline{u}_1^{j\,\prime}(t) &= \overline{f}^j(t,U_1(t)) \end{aligned}$$

in J_o für $j=1(1)m$.

Wegen der Beschränktheit von F kann dann U_1 für t aus $[t_i,t_{i+1}]$ nur Werte Y aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ annehmen, für die die Beziehungen

$\underline{y}^j \in [\underline{u}_1^j - M\cdot h_k, \underline{u}_1^j + M\cdot h_k]$ und $\overline{y}^j \in [\overline{u}_1^j - M\cdot h_k, \overline{u}_1^j + M\cdot h_k]$ für $j=1(1)m$ gelten.

Da ferner nach Induktionsvoraussetzung für $j=1(1)m$ die Ungleichungen $\underline{v}_k^j(t_i) \leq \underline{u}_1^j(t_i)$ und $\overline{u}_1^j(t_i) \leq \overline{v}_k^j(t_i)$ gelten, gilt für alle t aus $[t_i,t_{i+1}]$ wegen der Inklusionsisotonie von F die Inklusion

$F(t,U_1(t)) \subseteq F(t,[\underline{v}_k^1(t_i)-M\cdot h_k, \overline{v}_k^1(t_i)-M\cdot h_k],\dots,[\underline{v}_k^m(t_i)-M\cdot h_k, \overline{v}_k^m(t_i)+M\cdot h_k])$.

Wegen (29) folgt hieraus für $j=1(1)m$ und alle t aus (t_i,t_{i+1}) die Gültigkeit der beiden Ungleichungen $\underline{v}_k^{j\,\prime}(t) \leq \underline{u}_1^{j\,\prime}(t)$ und $\overline{u}_1^{j\,\prime}(t) \leq \overline{v}_k^{j\,\prime}(t)$.

Wegen der Stetigkeit der Funktionen folgen die beiden Ungleichungen $\underline{v}_k^j(t) \leq \underline{u}_1^j(t)$ und $\overline{u}_1^j(t) \leq \overline{v}_k^j(t)$ für $j=1(1)m$ und alle t aus $[t_i,t_{i+1}]$.

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und nach Induktion gilt die Inklusion $V_k(t) \supseteq U_1(t)$ auf ganz J.

QED

Bemerkung:

Die Konstruktion von inneren Schranken bzw. der kleinsten Intervallösung, falls sie existiert, ist mit der direkten Methode nicht mehr möglich, wenn man nicht weitere Voraussetzungen für die Funktion F bereitstellt.
Bei der Konstruktion würden nämlich die zu (29) analogen Gleichungen lauten:

$$V_0 := U_0 \,,\; V_{i+1} := V_i + \inf \left\{ F(t,X) \;\middle|\; t_i \leqq t \leqq t_{i+1} \,,\; \underline{v}_i^j - M\cdot h \leqq \underline{x}^j \leqq \underline{v}_i^j + M\cdot h \right.$$
$$\left. \text{und } \overline{v}_i^j - M\cdot h \leqq \overline{x}^j \leqq \overline{v}_i^j + M\cdot h \quad \text{für } j=1(1)m \right\} .$$

Da aber $(\mathbb{I}(\mathbb{R}), \subseteq)$ lediglich ein Supremums-Halbverband ist, braucht dieses Infimum nicht zu existieren(vergleiche hierzu Beispiel II.1.20).

Gibt es jedoch eine natürliche Zahl k derart, daß das oben beschriebene Infimum der Funktion F auf dem Gebiet $R(t_i, V(t_i), h, M, J)$

für $i=0(1)T/h_k - 1$ existiert, so läßt sich analog der Vorgehensweise bei der Bestimmung der größten Intervallösung im Beweis zu Satz 1.3 auch die kleinste Intervallösung bestimmen.
Als Anfangszerlegung ist die Zerlegung in T/h_k Intervalle der Länge h_k zu wählen.

Die an die Funktion F hier gestellte Bedingung ist jedoch weitreichend.
Es muß nämlich gelten:
Für $j=1(1)m$ und $i=0(1)T/h_k - 1$ gibt es reelle Zahlen a_i^j und b_i^j mit $a_i^j \leqq b_i^j$

und $\quad \underline{f}^j(t,X) \leqq a_i^j \quad$ und $\quad \overline{f}^j(t,X) \geqq b_i^j$

für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$ und alle X aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ mit $\underline{v}_i^s - M\cdot h_k \leqq \underline{x}^s$ und $\overline{x}^s \leqq \overline{v}_i^s + M\cdot h_k$ für $s=1(1)m$.

Bild 5 gibt dies für eine Komponentenfunktion $F^j = [\underline{f}^j, \overline{f}^j]$ für $t \in [t_i, t_{i+2}]$ wieder. Die schraffierten Gebiete sind dabei die für die Funktionen $\underline{f}^j$ und $\overline{f}^j$ "verbotenen" Bereiche, d.h., ihre Funktionswerte für die oben angegebenen Argumentwerte liegen stets außerhalb. Für einen zulässigen festen Vektor X aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ verläuft dann der Graph der Funktion $\underline{f}^j(t,X)$ bzw. $\overline{f}^j(t,X)$ für t aus $[t_i, t_{i+2}]$ etwa in der in der Zeichnung dargestellten Weise.

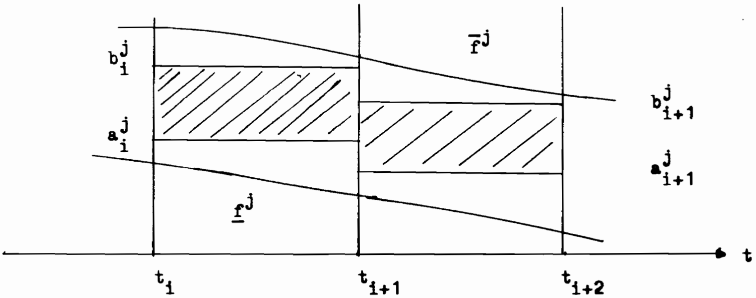

Bild 5 : Beschreibung im Text

Wie man leicht sieht, sind diese Voraussetzungen an die Funktion F aber schon für so einfache Funktionen wie $F(t,X) := [t,t]$ nicht mehr erfüllt.

Dies besagt aber lediglich, daß das direkte Verfahren hier nicht anwendbar ist, über die Nichtexistenz der kleinsten Intervallösung wird keine Aussage gemacht.

IV.2 Bestimmung einer Lösung bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit

Alle in Abschnitt IV.1 gezeigten Sätze gelten auch dann, wenn man den Begriff der Fréchet-Differenzierbarkeit durch den der H_1-Differenzierbarkeit ersetzt.
Die Beweise können nahezu wörtlich übernommen werden.
Es sind lediglich die beiden folgenden Änderungen vorzunehmen:

(a) Im 4.Beweisschritt von Satz 1.3 werden die Gleichungen (31) zusammengefaßt zu

$$(33) \quad U^j(t) = \left[\underline{u}_o^j + \int_0^t \underline{f}^j(s,U(s))\,ds\ ,\ \overline{u}_o^j + \int_0^t \overline{f}^j(s,U(s))\,ds\right]$$

für j=1(1)m . Dies ist auf Grund der im 3.Beweisschritt von Satz 1.3 gezeigten Ungleichung $\underline{u}^j \leq \overline{u}^j$ für j=1(1)m möglich.

Da die Gleichung (33) für beliebige Anfangswerte, also auch für den Fall $\underline{u}_o^j = \overline{u}_o^j = 0$, gilt, wird durch die beiden Integrale ein Intervall charakterisiert, und die Gleichung (33) läßt sich gemäß der Definition der Addition zweier Intervalle auch schreiben als

$$U^j(t) = U_o^j + \left[\int_0^t \underline{f}^j(s,U(s))\, ds \,, \int_0^t \overline{f}^j(s,U(s))\, ds \right] .$$

Nach Lemma II.2.11 läßt sich diese Gleichung umschreiben in

$$U^j(t) = U_o^j + \int_0^t F^j(s,U(s))\, ds .$$

Nach Definition II.2.7 ist für j=1(1)m die Funktion P^j von J nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch $P^j(t) := \int_0^t F^j(s,U(s))\, ds$, eine H-differenzierbare Funktion mit der H-Ableitung F^j.

Nach Definition II.2.15 ist dann für j=1(1)m die Funktion U^j eine H_1-differenzierbare Funktion mit der H_1-Ableitung F^j.

Die Anfangsbedingung (2) ist nach Konstruktion von U erfüllt.

Damit ist U eine Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit.

(b) Im Beweis von Satz 1.4 folgen die Gleichungen (32) diesmal aus Korollar II.2.13 unter Verwendung der Tatsache, daß nur nichtnegative t-Werte betrachtet werden, und daß die Funktionen $\underline{u}_1^j$, $\overline{u}_1^j$, $\underline{f}^j$ und $\overline{f}^j$ für j=1(1)m stetig sind.

Bemerkung:

Die konstruktiv bestimmte Funktion U ist eine Lösung des AWPs (1),(2) sowohl bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit als auch bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit. Sie ist sogar in beiden Fällen die größte Intervallösung.

IV.3 Bestimmung einer Lösung bezüglich der H-Differenzierbarkeit

Auf Grund der Definition der H-Differenzierbarkeit ist das AWP (1),(2) nur dann lösbar, wenn für j=1(1)m die Gleichung $U_o^j = [0,0]$ gilt .

(vergleiche dazu Lemma II.2.12)

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so läßt sich das in Abschnitt IV.2 Gesagte wörtlich für die H-Differenzierbarkeit anstatt der H_1-Differenzierbarkeit übernehmen.
Wieder ist die konstruktiv bestimmte Lösung U die größte Intervallösung.

IV.4 Bestimmung einer Lösung bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit

Der Satz 1.3 über die Existenz einer Lösung des AWPs (1),(2) ist auch dann richtig, wenn man die H_1-Differenzierbarkeit durch die H_2-Differenzierbarkeit ersetzt.
Da die im Beweis zu Satz 1.3 bestimmte Lösung U des AWPs (1),(2) bezüglich der H_1-Differenzierbarkeit eine H_1-differenzierbare Funktion ist, ist U nach Lemma II.2.27 auch H_2-differenzierbar, und H_1-Ableitung und H_2-Ableitung stimmen überein.

Im Fall der Fréchet- und der H_1-Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit einer Lösung bereits implizit durch die Differenzierbarkeit gegeben. Im Fall der H_2-Differenzierbarkeit ist dies nicht der Fall.
Eine H_2-differenzierbare Funktion braucht nämlich nicht stetig zu sein.
Zum Beispiel ist die Funktion P von J nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch

$$P(t) := [1,1] \quad \text{für } t \in [0,T/2) \quad \text{und} \quad P(t) := [2,2] \quad \text{für } t \in [T/2,T] ,$$

H_2-differenzierbar aber nicht stetig.

Will man nun nur stetige Funktionen als Lösungen zulassen, so ist im Fall der H_2-Differenzierbarkeit die Stetigkeit in der Definition der Lösung explizit zu fordern. Aus diesem Grund wurde auch in der Problemstellung in I.2 bei der allgemeinen Definition des Lösungsbegriffes von jeder Lösung explizit die Stetigkeit verlangt.

Ferner spielt die Stetigkeit der Lösungen beim nun folgenden Beweis des Analogons zu Satz 1.4 eine entscheidende Rolle. Ohne diese Forderung wäre ein Beweis dieses Analogons nicht möglich.

Satz 4.1
Die gemäß dem Beweis von Satz 1.3 bestimmte Lösung U des AWPs (1),(2) bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit ist die größte Intervallösung dieses Problems bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit.

__Beweis:__

Es sei U_1 eine beliebige Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit, und es gelte $U_1 = (U_1^1, U_1^2, \ldots, U_1^m)$ und $U_1^j = [\underline{u}_1^j, \overline{u}_1^j]$ für $j=1(1)m$. Die Funktionen V_k für k aus $\mathbb{N}$ seien wie im Beweis von Satz 1.3 .

Es genügt, für jede natürliche Zahl k die Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle t aus J zu zeigen. Beim Grenzübergang $k \to \infty$ bleibt diese Inklusion nämlich erhalten, und man erhält die Inklusion $U_1(t) \subseteq U(t)$ für alle t aus J. Dies ist aber gerade die Behauptung des Satzes.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl.

Der Beweis der Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ in J erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von V_k.

Induktionsanfang: Nach Konstruktion von V_k gilt die Beziehung

$$U_1(t_o) = U_1(0) = U_o \subseteq U_o = V_k(0) = V_k(t_o) \ .$$

Induktionsannahme: Es sei nun i eine natürliche Zahl, und es gelte die Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle t aus $[0,t_i]$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß diese Inklusionsbeziehung auch für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$ gilt.

Da für j=1(1)m die Komponentenfunktion U_1^j von U_1 eine H_2-differenzierbare Funktion ist, existiert für jedes j eine Indexmenge I^j und dazu konvexe Mengen M_s^j mit $\bigcup_{s \in I^j} M_s^j = J$, und für jedes s aus I^j existiert eine Zahl a_s^j aus M_s^j derart, daß die Funktion U_s^j , die gegeben ist durch $U_s^j := U_1^j | M_s^j$, auf M_s^j eine $H_2(a_s^j)$-differenzierbare Funktion ist.

Dies bedeutet, für j=1(1)m und jedes s aus I^j existiert eine H_1-differenzierbare Funktion G_s^j von $M^j_{s,-a_s^j}$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ mit

$$U_s^j(t) = G_s^j(t - a_s^j) \quad \text{und} \quad G_s^{j\,\prime}(t - a_s^j) = U_s^{j\,\prime}(t) = U_1^{j\,\prime}(t) = F^j(t, U_1(t))$$

für alle t aus M_s^j .

Da für j=1(1)m die Funktionen U_1^j stetig sind, sind auch die Funktionen G^j von $\bigcup_{s \in I^j} M^j_{s,-a_s^j}$ nach $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, die gegeben sind durch $G^j | M^j_{s,-a_s^j} = G_s^j$ für alle s aus I^j , stetig.

Für j=1(1)m und alle s aus I^j werden G^j_s bzw. G^j dargestellt als
$G^j_s = [\underline{g}^j_s, \overline{g}^j_s]$ bzw. $G^j = [\underline{g}^j, \overline{g}^j]$.
Für j=1(1)m , alle s aus I^j und alle t aus M^j_s gilt nun:

$$G^{j\prime}(t - a^j_s) = G^{j\prime}_s(t - a^j_s) = U^{j\prime}_s(t) = U^{j\prime}_1(t) = F^j(t, U_1(t)) \quad .$$

Da F durch M beschränkt ist, sind auch die Ableitungen $G^{j\prime}$ und damit auch jeweils deren beide Komponenten $\underline{g}^{j\prime}$ und $\overline{g}^{j\prime}$ für j=1(1)m durch M beschränkt, und es gelten für j=1(1)m und alle s aus I^j die beiden Ungleichungsketten

$$\underline{u}^j_1(t_i) - M \cdot h_k \leqq \underline{g}^j(t - a^j_s) \leqq \underline{u}^j_1(t_i) + M \cdot h_k \qquad \text{und}$$

$$\overline{u}^j_1(t_i) - M \cdot h_k \leqq \overline{g}^j(t - a^j_s) \leqq \overline{u}^j_1(t_i) + M \cdot h_k \qquad \text{für alle t aus } [t_i, t_{i+1}] \cap M^j_s \, .$$

Da nach Induktionsvoraussetzung die Inklusion $U_1(t_i) \subseteq V_k(t_i)$ gilt, gelten dann auch für j=1(1)m und alle s aus I^j die Ungleichungsketten

$$\underline{v}^j_k(t_i) - M \cdot h_k \leqq \underline{g}^j(t - a^j_s) \leqq \underline{v}^j_k(t_i) + M \cdot h_k \qquad \text{und}$$

$$\overline{v}^j_k(t_i) - M \cdot h_k \leqq \overline{g}^j(t - a^j_s) \leqq \overline{v}^j_k(t_i) + M \cdot h_k \qquad \text{für alle t aus } [t_i, t_{i+1}] \cap M^j_s \, .$$

Gemäß (29) und der Definition von G gilt damit für j=1(1)m und für alle $i \in I^k$:

$$\underline{v}^{j\prime}_k(t) \leqq \underline{g}^{j\prime}(t - a^j_s) \quad \text{und} \quad \overline{v}^{j\prime}_k(t) \geqq \overline{g}^{j\prime}(t - a^j_s) \quad \text{für alle } t \in (t_i, t_{i+1}) \cap M^j_s \, .$$

Damit gelten für j=1(1)m und alle s aus I^j die Ungleichungen

$$\underline{v}^j_k(t) \leqq \underline{g}^j(t - a^j_s) \quad \text{und} \quad \overline{v}^j_k(t) \geqq \overline{g}^j(t - a^j_s) \quad \text{für alle t aus } [t_i, t_{i+1}] \cap M^j_s \, ,$$

das heißt, es gilt die Inklusion $V^j_k(t) \supseteq G^j(t - a^j_s)$.

Nach Definition von G gilt dann für j=1(1)m und alle s aus I^j die Inklusion $U^j_s(t) \subseteq V^j_k(t)$ für alle t aus $[t_i, t_{i+1}] \cap M^j_s$ und damit nach Definition der Funktionen U^j_s die Inklusionsbeziehung $U^j_1(t) \subseteq V^j_k(t)$ für alle $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und der Satz ist bewiesen.

IV.5 Bestimmung einer Lösung bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit

Wie bei der Suche nach einer Lösung bezüglich der H_2-Differenzierbarkeit, wo die größte Intervallösung bereits in der Teilmenge der H_1-differenzierbaren Funktionen lag, kann man sich auch hier auf eine Teilmenge der stetig differenzierbaren I-Funktionen beschränken, nämlich die Teilmenge, für die als Überdeckung des Definitionsgebietes J im Sinne von Definition II.2.29(b) das Intervall J selbst zulässig ist, d.h., daß es die in Definition II.2.29(c) geforderten Eigenschaften besitzt.
Diese Funktionen sollen als "einfach" stetig differenzierbare I-Funktionen bezeichnet werden.

Alle in IV.1 gezeigten Sätze gelten auch dann, wenn man den Begriff der Fréchet-Differenzierbarkeit durch den Begriff der einfach stetigen Differenzierbarkeit ersetzt.
Die Beweise können wieder nahezu wörtlich übernommen werden.
Lediglich folgende Änderungen sind vorzunehmen:

Im 4.Beweisschritt von Satz 1.3 werden die Gleichungen (31) wie in IV.2 zusammengefaßt zu

$$(33)\quad U^j(t) = \left[\underline{u}_o^j + \int_0^t \underline{f}^j(s,U(s))\,ds \;,\; \overline{u}_o^j + \int_0^t \overline{f}^j(s,U(s))\,ds \right]$$

für j=1(1)m . Dies ist wegen der im 3.Beweisschritt von Satz 1.3 für j=1(1)m gezeigten Ungleichung $\underline{u} \leqq \overline{u}$ in J möglich.

Da die Gleichung (33) wieder für beliebige Anfangswerte, also auch für den Fall $\underline{u}_o = \overline{u}_o = 0$, gilt, wird durch die beiden Integrale ein Intervall charakterisiert, und die Gleichung (33) läßt sich gemäß der Definition der Addition zweier Intervalle auch schreiben als

$$U^j(t) = U_o^j + \left[\int_0^t \underline{f}^j(s,U(s))\,ds \;,\; \int_0^t \overline{f}^j(s,U(s))\,ds \right] .$$

Gemäß Definition II.2.28 gilt damit die Gleichung

$$(34)\quad U^j(t) = U_o^j + \int_0^t F^j(s,U(s))\,ds \qquad \text{für } j=1(1)m .$$

Dies heißt aber, die Funktion U^j ist für j=1(1)m einfach stetig differenzierbar auf J mit der stetigen Ableitung F^j.

Ferner ist für j=1(1)m die Anfangsbedingung $U^j(0) = U_o^j$ erfüllt.

Die Funktion U ist demnach die gesuchte Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der einfach stetigen Differenzierbarkeit.

Eine zweite Änderung ist im Beweis von Satz 1.4 nötig.
Dort folgen die Gleichungen (32) diesmal aus Lemma II.2.30 unter Einbeziehung der Tatsache, daß nur nichtnegative t-Werte betrachtet werden.

Die in IV.1 bestimmte Lösung U ist demnach auch die größte Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der einfach stetigen Differenzierbarkeit.

Da die einfach stetig differenzierbaren Funktionen eine Teilmenge der stetig differenzierbaren Funktionen sind, ist die in IV.1 bestimmte Lösung auch eine Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit.

Wie der nächste Satz zeigt, ist die Lösung U sogar die größte Intervallösung des AWPs (1),(2) bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit.
Beim Beweis dieses Satzes kann wieder auf die explizite Forderung, daß jede Lösung in J stetig ist, nicht verzichtet werden.

<u>Satz 5.1</u>
Die gemäß dem Beweis von Satz 1.3 bestimmte Lösung U des AWPs (1),(2) bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit ist die größte Intervallösung dieses Problems bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit.

<u>Beweis:</u>
Es sei U_1 eine beliebige Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der stetigen Differenzierbarkeit. Die Funktionen V_k für k aus $\mathbb{N}$ seien wie im Beweis von Satz 1.3 .
Es genügt wieder, für jede natürliche Zahl k die Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle t aus J zu zeigen. Beim Grenzübergang $k \to \infty$ bleibt diese Inklusion nämlich erhalten, und man erhält die Inklusion $U_1(t) \subseteq U(t)$ für alle t aus J. Dies ist aber gerade die Behauptung des Satzes.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl.
Der Beweis der Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ in J erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von V_k .
Induktionsanfang: Nach Konstruktion von V_k gilt die Beziehung

$$U_1(t_o) = U_1(0) = U_o \subseteq U_o = V_k(0) = V_k(t_o) \quad .$$

Induktionsannahme: Es sei nun i eine natürliche Zahl, und es gelte die Inklusionsbeziehung $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle t aus $[0,t_i]$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß diese Inklusionsbeziehung auch für alle t aus $[t_i,t_{i+1}]$ gilt.

Da für j=1(1)m die Funktion U_1^j stetig differenzierbar ist, gilt nach Lemma II.2.32 , daß für j=1(1)m die Funktionen $\underline{u}_1^j$ und $\overline{u}_1^j$ stetig differenzierbar sind in J mit Ausnahme von abzählbar vielen Stellen, und daß $\underline{u}_1^j(t)$ und $\overline{u}_1^j(t)$ entweder den Wert $\underline{f}^j(t,U_1(t))$ oder $\overline{f}^j(t,U_1(t))$ annehmen.

Da für j=1(1)m die Funktionen $\underline{u}_1^j$ und $\overline{u}_1^j$ stetig sind, und da $|\underline{f}^j|$ und $|\overline{f}^j|$ durch M beschränkt sind, können $\underline{u}_1^j(t)$ und $\overline{u}_1^j(t)$ für t aus $[t_i,t_{i+1}]$ höchstens Werte aus dem Intervall $[\,\underline{u}_1^j(t_i) - M\cdot h_k\ ,\ \overline{u}_1^j(t_i) + M\cdot h_k\,]$ annehmen.

Da nach Induktionsvoraussetzung die Inklusion $U_1(t_i) \subseteq V_k(t_i)$ gilt, gilt für alle t aus t_i,t_{i+1} wegen der Inklusionsisotonie von F die Inklusion

$F(t,U_1(t)) \subseteq F(t,[\underline{v}_k^1(t_i)-M\cdot h_k,\overline{v}_k^1(t_i)+M\cdot h_k],\ldots,[\underline{v}_k^m(t_i)-M\cdot h_k,\overline{v}_k^m(t_i)+M\cdot h_k])$.

Damit gelten auf (t_i,t_{i+1}) für j=1(1)m wegen (29) f.ü. die Ungleichungen

$$\underline{u}_1^{j\,\prime}(t) \geqq \underline{v}_k^{j\,\prime}(t) \quad \text{und} \quad \overline{u}_1^{j\,\prime}(t) \leqq \overline{v}_k^{j\,\prime}(t) \quad .$$

Wegen der Stetigkeit von $\underline{u}_1^j$, $\overline{u}_1^j$, $\underline{v}_k^j$ und $\overline{v}_k^j$ für j=1(1)m folgen hieraus die Beziehungen $\underline{u}_1^j(t) \geqq \underline{v}_k^j(t)$ und $\overline{u}_1^j(t) \leqq \overline{v}_k^j(t)$ für j=1(1)m und alle t aus $[t_i,t_{i+1}]$, d.h. es gilt die Inklusion $U_1(t) \subseteq V_k(t)$ für alle t aus $[t_i,t_{i+1}]$.

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und der Satz ist bewiesen.

__Bemerkung:__

Mit Hilfe der direkten Methode hat man nun eine einzige Funktion U gefunden, die eine Lösung des AWPs (1),(2) bezüglich der Fréchet-Differenzierbarkeit, der H_1-Differenzierbarkeit, der H_3-Differenzierbarkeit, der einfach stetigen Differenzierbarkeit, der stetigen Differenzierbarkeit und für den Fall $U_0^j = [\,0,0\,]$ auch bezüglich der H-Differenzierbarkeit ist.

Ferner ist diese Lösung U in allen Fällen die größte Intervallösung.

V ABSCHÄTZUNG VON LÖSUNGEN VON MENGEN VON REELLEN ANFANGSWERTPROBLEMEN DURCH DIE GRÖSSTEN INTERVALLÖSUNGEN VON INTERVALL - ANFANGSWERTPROBLEMEN

In diesem Kapitel wird stets der allgemeine Fall betrachtet, daß es sich bei den vorliegenden AWPen um AWPe bei Systemen von Differentialgleichungen bzw. Intervall-Differentialgleichungen handelt. Mit J werde ferner stets das Intervall $[0,T]$ mit einer positiven reellen Zahl T bezeichnet.

Fragestellung und Formulierung der folgenden Abschätzungssätze stammen aus Arbeiten und Vorlesungen von NICKEL. Es wird versucht, mit Hilfe des in dieser Arbeit eingeführten Begriffes der größten Intervallösung von AWPen bei Intervall-Differentialgleichungen analoge Sätze zu zeigen.

V.1 Abschätzung bei vorgegebenem Intervall-AWP

Gegeben ist eine Funktion F von $J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ und ein Intervallvektor U_o aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$. Die Funktion F sei stetig und inklusionsisoton. Gesucht sind Klassen von reellen AWPen der Art $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = a$ mit Funktionen f von $J \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$, deren Lösungen sich durch die größte Intervallösung des AWPs $U'(t) = F(t,U(t))$, $U(0) = U_o$ abschätzen lassen.

Satz 1.1

Es sei U_o ein Intervallvektor aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, $U_o = (U_o^1, U_o^2, \dots, U_o^m)$, und es sei F eine stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, $F = (F^1, F^2, \dots, F^m)$ und $F^j = [\underline{f}^j, \overline{f}^j]$ für $j=1(1)m$. Ferner sei $F(t,X)$ inklusionsisoton in X.
Es sei U die größte Intervallösung des AWPs $U'(t) = F(t,U(t))$, $U(0) = U_o$, und es gelte $U = (U^1, U^2, \dots, U^m)$.
Es sei f eine nichtnotwendigerweise stetige Funktion von $J \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$, und es gelte $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$.
Ferner gelte für jede Lösung $\hat{u}$ eines AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = a$ mit a aus U_o die Ungleichungskette

$$\underline{f}^j(t,[\hat{u}^1(t),\hat{u}^1(t)],\dots,[\hat{u}^m(t),\hat{u}^m(t)]) \leqq f^j(t,\hat{u}^1(t),\dots,\hat{u}^m(t)) \leqq$$
$$\leqq \overline{f}^j(t,[\hat{u}^1(t),\hat{u}^1(t)],\dots,[\hat{u}^m(t),\hat{u}^m(t)])$$

für alle t aus J und $j=1(1)m$.

Dann gilt für jeden Vektor u_o aus $\mathbb{R}^m$ mit $u_o = (u_o^1, u_o^2, \ldots, u_o^m)$ und $u_o^j \in U_o^j$ für $j=1(1)m$:

Für jede Lösung u_1 des reellen AWPs (35) $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_o$ mit $u_1 = (u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^m)$ gilt die Beziehung

$$u_1(t) \in U(t) \text{ , d.h. } u_1^j(t) \in U^j(t) \text{ für } j=1(1)m \text{ , für alle } t \text{ aus } J.$$

Beweis:

Es sei u_o^j aus U_o^j für $j=1(1)m$ beliebig gewählt, und es sei $u_o = (u_o^1, u_o^2, \ldots, u_o^m)$. Die Funktion U sei wie im Beweis zu Satz IV.1.3 mit Hilfe der Schrankenfunktionen V_k konstruiert.

Es genügt nun zu zeigen, daß jede Lösung u_1 des AWPs (35) mit diesen beliebig gewählten Anfangsbedingungen für jede natürliche Zahl k die Beziehung $u_1(t) \in V_k(t)$ für alle t aus J erfüllt. Die Behauptung des Satzes folgt dann nämlich hieraus sofort durch den Grenzübergang $k \to \infty$.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl, und es sei u_1 eine beliebige Lösung des AWPs (35) mit den gewählten Anfangsbedingungen.

Der Beweis dafür, daß für alle t aus J die Beziehung $u_1(t) \in V_k(t)$ gilt, erfolgt durch Induktion nach den Stützstellen t_i von V_k .

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung und nach (29) gilt die Beziehung

$$u_1(t_o) = u_1(0) = u_o \in U_o = V_k(0) = V_k(t_o) .$$

Induktionsannahme: Es sei nun i eine natürliche Zahl, und es gelte die Beziehung $u_1(t) \in V_k(t)$ für alle t aus $[0,t_i]$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß diese Beziehung auch für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$ gilt.

Da die Ungleichungen $|\underline{f}^j| \leq M$ und $|\overline{f}^j| \leq M$ für $j=1(1)m$ gelten, gilt wegen $\underline{f}(t,[u_1(t),u_1(t)]) \leq f(t,u_1(t)) \leq \overline{f}(t,[u_1(t),u_1(t)])$ auch die Ungleichung $|f^j(t,u_1(t))| \leq M$ für $j=1(1)m$.

Hiermit folgen aus der Induktionsvoraussetzung die beiden Ungleichungen $\underline{u}_1^j(t) \geqq \underline{v}_k^j(t_i) - M\cdot h_k$ und $\overline{u}_1^j(t) \leqq \overline{v}_k^j(t_i) + M\cdot h_k$ für j=1(1)m und alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$.

Da ferner für j=1(1)m die Ungleichungskette

$$\underline{f}^j(t,[u_1(t),u_1(t)]) \leqq f^j(t,u_1(t)) \leqq \overline{f}^j(t,[u_1(t),u_1(t)])$$

für alle t aus J gilt, folgt hiermit aus (29) die Ungleichungskette

$$\underline{v}_k^{j\,\prime}(t) \leqq u_1^{j\,\prime}(t) \leqq \overline{v}_k^{j\,\prime}(t) \quad \text{für } j=1(1)m \text{ und alle } t \text{ aus } (t_i, t_{i+1}) .$$

Da die Funktionen u_1^j , $\underline{v}_k^j$ und $\overline{v}_k^j$ für j=1(1)m stetig sind, folgt für j=1(1)m die Beziehung $\underline{v}_k^j(t) \leqq u_1^j(t) \leqq \overline{v}_k^j(t)$ für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$.

Damit gilt die Beziehung $u_1(t) \in V_k(t)$ für alle t aus $[t_i, t_{i+1}]$.

Der Induktionsschritt ist damit vollzogen, und der Satz ist bewiesen.

Bemerkungen:

1.) Über die Funktion f ist außer der Abschätzung durch die Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ nichts weiter vorausgesetzt, sie braucht z.B. nicht stetig zu sein. Ferner braucht für diese Funktion f eine Lösung des AWPs (35) nicht zu existieren. Der Satz macht lediglich eine Aussage über existierende Lösungen dieses AWPs.

2.) Die im Satz angegebene Abschätzung der Funktion f durch die Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ ist speziell dann erfüllt, wenn für j=1(1)m die Funktion f^j stetig und die Funktion F^j eine inklusionsisotone Intervallerweiterung zu f^j ist.

3.) Der Satz gibt nicht nur eine Abschätzung der Lösungen des AWPs (35) für eine fest gewählte Funktion f, sondern sogar eine Abschätzung der Lösungen aller AWPe mit beliebigen rechten Seiten f und beliebigen Anfangswerten u_o , sofern nur die Anfangswerte u_o^j durch $\underline{u}_o^j$ und $\overline{u}_o^j$ und die Komponentenfunktionen f^j durch die Funktionen $\underline{f}^j$ und $\overline{f}^j$ in der im Satz angegebenen Weise für j=1(1)m abgeschätzt werden können.

Es soll nun anhand eines Beispiels gezeigt werden, daß die in Satz 1.1 gegebene Abschätzung im allgemeinen nicht "optimal" ist.

Beispiel 1.2

Die Funktionen $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : J \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$f(t,z) := t + z \qquad \text{und}$$

$$F(t,[x,y]) = [\underline{f}(t,[x,y]),\overline{f}(t,[x,y]) := [t + x - \mathrm{span}[x,y] \, , \, t + y + \mathrm{span}[x,y]] \, .$$

Es sei ferner $U_o = [\underline{u}_o, \overline{u}_o]$ ein Intervall.

Wie man sofort sieht, ist F eine inklusionsisotone Intervallerweiterung zu f .

Es sei nun $U^+ = [\underline{u}, \overline{u}]$ die größte Intervallösung des AWPs

$U'(t) = F(t,U(t))$, $U(0) = U_o$.

Dann gilt nach Satz 1.1 für jede reelle Zahl u_o aus U_o :

Jede Lösung $\hat{u}$ des AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_o$ liegt in U^+, d.h. es gilt die Beziehung $\underline{u}(t) \leqq \hat{u}(t) \leqq \overline{u}(t)$ für alle t aus J.

Es seien nun u_1 die Minimallösung des AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = \underline{u}_o$ und u_2 die Maximallösung des AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = \overline{u}_o$.

Da f(t,z) isoton in t und in z ist, gilt dann für jede Lösung $\hat{u}$ des AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_o$ mit beliebigem u_o aus U_o auch die Abschätzung $u_1(t) \leqq \hat{u}(t) \leqq u_2(t)$ für alle t aus J.
Nach Satz 1.1 gelten in J die Ungleichungen $\underline{u}(t) \leqq u_1(t)$ und $u_2(t) \leqq \overline{u}(t)$.
Die durch die größte Intervallösung gegebene Abschätzung wäre nun optimal, wenn die Gleichungen $\underline{u} \equiv u_1$ und $\overline{u} \equiv u_2$ in J gelten würden.

Daß dies im allgemeinen jedoch nicht der Fall ist, wird nun gezeigt.

Als erster soll der Fall untersucht werden, daß es sich bei U_o nicht um ein entartetes Intervall handelt, d.h., es soll die Beziehung $\underline{u}_o \neq \overline{u}_o$ gelten.

Wegen der Isotonie von f gilt dann für alle t aus J die Ungleichung $u_1(t) < u_2(t)$ und damit auch die Ungleichung $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$.

Ferner gelten nach Definition von f und F die Gleichungen

$f(t,u_1(t)) = t + u_1(t)$,

$f(t,u_2(t)) = t + u_2(t)$,

$\overline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]) = t + \overline{u}(t) + \operatorname{span}[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]$ und

$\underline{f}(t,[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]) = t + \underline{u}(t) - \operatorname{span}[\underline{u}(t),\overline{u}(t)]$.

Da die Ungleichungskette $\underline{u}(t) \leqq u_1(t) < u_2(t) \leqq \overline{u}(t)$ für alle t aus J gilt, folgen hieraus für alle t aus J_0 die beiden Ungleichungen

$$\underline{u}'(t) < u_1'(t) \quad \text{und} \quad \overline{u}'(t) > u_2'(t) \quad .$$

Dies bedeutet aber, daß für alle t aus (0,T] die beiden Ungleichungen

$$\underline{u}(t) < u_1(t) \quad \text{und} \quad \overline{u}(t) > u_2(t) \quad \text{gelten.}$$

Die Abschätzung durch die größte Intervallösung U^+ ist demnach nicht optimal.

Als zweiter wird nun der Fall untersucht, daß die Beziehung $\underline{u}_0 = \overline{u}_0 =: u_0$ gilt.

Dann liegt nur noch ein einziges reelles AWP vor, dessen Minimallösung die Funktion u_1 und dessen Maximallösung die Funktion u_2 ist.

Ist dieses AWP nun nicht eindeutig lösbar, dann gilt die Beziehung $u_1 \not\equiv u_2$, und aus Stetigkeitsgründen existiert ein Teilintervall I von J mit

$$u_1(t) < u_2(t) \quad \text{für alle t aus I.}$$

Es sei I ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein abgeschlossenes Intervall. Dann gilt nach Satz 1.1 die Ungleichung $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$ für alle t aus I. Damit ist der zweite Fall auf den ersten Fall zurückgeführt, und nach den dort angestellten Überlegungen gelten die beiden Ungleichungen

$$\underline{u}(t) < u_1(t) \quad \text{und} \quad \overline{u}(t) > u_2(t) \quad \text{für alle t aus I.}$$

Wieder ist die durch die größte Intervallösung U^+ gegebene Abschätzung nicht optimal.

Hat das reelle AWP nun eine eindeutig bestimmte Lösung, so unterscheidet man zwei Fälle.

Als erster Fall wird angenommen, daß das Intervallproblem keine eindeutig bestimmte Lösung hat. Dann gilt aber für gewisse t aus J die Ungleichung $\underline{u}(t) < \overline{u}(t)$. Nach Satz 1.1 gilt dann für diese t mindestens eine der beiden Ungleichungen $\underline{u}(t) < \hat{u}(t)$ oder $\hat{u}(t) < \overline{u}(t)$.

Die Abschätzung ist demnach wieder nicht optimal.

Hat als zweiter Fall aber das Intervallproblem ebenfalls eine eindeutig bestimmte Lösung, so ist diese gegeben durch $[\hat{u},\hat{u}]$.

Das Intervall-AWP hat also "dieselbe" Lösung wie das reelle Problem.

In diesem einen Fall ist die Abschätzung durch die größte Intervallösung trivialerweise optimal.

Bemerkung:

Falls die Funktion f bekannt ist, ist es im zweiten Fall zu umständlich, die größte Intervallösung des Intervall-AWPs zu bestimmen, um die Lösungen des reellen AWPs abzuschätzen.

Man kann nämlich die Maximal- und die Minimallösung des reellen AWPs gemäß der von WALTER in [12] angegebenen Methode direkt bestimmen.

Es soll im nun Folgenden eine Klasse von reellen AWPen bestimmt werden, deren Lösungen sich durch die größte Intervallösung eines gegebenen Intervall-AWPs in optimaler Weise abschätzen lassen.

Dazu wird der folgende Hilfssatz benötigt.

Lemma 1.3 [8]

Es seien $\underline{f}$ und $\overline{f}$ stetige Funktionen von $J \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$, und $\underline{f}(t,x)$ und $\overline{f}(t,x)$ seien quasiisoton in x. Ferner sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von Funktionen mit

$\mathfrak{F} \subseteq \{ f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \mid \underline{f}(t,x) \leqq f(t,x) \leqq \overline{f}(t,x)$ für alle t aus J und $x \in \mathbb{R}^m \}$,

und es gelte $\underline{f} \in \mathfrak{F}$ und $\overline{f} \in \mathfrak{F}$.

Es sei U_o ein Element aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, $U_o = (U_o^1, U_o^2, \ldots, U_o^m)$, und es sei

$U_o^j = [\underline{u}_o^j, \overline{u}_o^j]$ für $j=1(1)m$. Ferner sei A eine Menge von Vektoren aus $\mathbb{R}^m$

mit der Eigenschaft $A \subseteq U_o$, d.h. für jedes Element $a = (a^1, a^2, \ldots, a^m)$

aus A gilt die Beziehung $a^j \in U_o^j$ für $j=1(1)m$.

Die Vektoren $\underline{u}_o := (\underline{u}_o^1, \underline{u}_o^2, \ldots, \underline{u}_o^m)$ und $\overline{u}_o := (\overline{u}_o^1, \overline{u}_o^2, \ldots, \overline{u}_o^m)$ seien aus A.

Es seien $u_+ = (u_+^1, u_+^2, \ldots, u_+^m)$ die Minimallösung des AWPs $u'(t) = \underline{f}(t,u(t))$,

$$u(0) = \underline{u}_o \;,$$

und $u^+ = (u^{+1}, u^{+2}, \ldots, u^{+m})$ die Maximallösung des AWPs $u'(t) = \overline{f}(t,u(t))$,

$$u(0) = \overline{u}_o \;.$$

Ferner sei $\{\hat{u}\}$ die Menge aller Lösungen der AWPe

$$u'(t) = f(t,u(t)) \quad \text{in } J_o, \quad u(0) = a$$

für alle Funktionen f aus $\mathfrak{F}$ und alle Vektoren a aus A.

Dann gilt die Inklusion $\{\hat{u}\} \subseteq [u_+, u^+]$,und es gelten die Beziehungen

$$u_+ \in \{\hat{u}\} \qquad \text{und} \qquad u^+ \in \{\hat{u}\} \;.$$

Beweis:

Die folgenden Überlegungen brauchen nicht im ganzen Intervall $[0,T]$ zu gelten. Sie sind jeweils in demjenigen größten Teilintervall von $[0,T]$ durchzuführen, in dem die betrachteten Lösungen existieren.

Es sei f aus $\mathfrak{F}$ und a aus A beliebig gewählt.

Für jede Lösung $\hat{u}$ des AWPs $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = a$ gilt dann die Beziehung $\hat{u}'(t) = f(t,\hat{u}(t)) \leqq \overline{f}(t,\hat{u}(t))$ und die Beziehung $\hat{u}(0) = a \leqq \overline{u}_o$.

Die Maximallösung u^+ existiert nach bekannten Sätzen(vergleiche [11]) und läßt sich von oben beliebig genau durch eine auf J stetig differenzierbare Funktion v approximieren, die Lösung der Differentialungleichung

$v' > \overline{f}(t,v)$, $v(0) > \overline{u}_o$ ist. Nach der Theorie der Differentialungleichungen (vergleiche [11]) ist dann $\hat{u} < v$, und damit in der Grenze $\hat{u} \leqq u^+$ wie behauptet.

Die andere Ungleichung wird genau so bewiesen.

QED

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun der folgende Abschätzungssatz zeigen.

Satz 1.4

Es sei U_o ein Intervallvektor aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, und es gelte $U_o = (U_o^1, U_o^2, \ldots, U_o^m)$ und $U_o^j = [\underline{u}_o^j, \overline{u}_o^j]$ für j=1(1)m . Die Vektoren $\underline{u}_o$ und $\overline{u}_o$ seien gegeben durch $\underline{u}_o := (\underline{u}_o^1, \underline{u}_o^2, \ldots, \underline{u}_o^m)$ bzw. $\overline{u}_o := (\overline{u}_o^1, \overline{u}_o^2, \ldots, \overline{u}_o^m)$.

Es sei F eine stetige und inklusionsisotone Funktion von $J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, und es gelte $F = (F^1, F^2, \ldots, F^m)$ und $F^j = [\underline{f}^j, \overline{f}^j]$ für j=1(1)m .

Die Funktion U_1 mit $U_1 = (U_1^1, U_1^2, \ldots, U_1^m)$ und $U_1^j = [\underline{u}_1^j, \overline{u}_1^j]$ für j=1(1)m sei die größte Intervallösung des AWPs $U'(t) = F(t,U(t))$, $U(0) = U_o$.

Die Funktionen $\underline{u}_1$ und $\overline{u}_1$ von J nach $\mathbb{R}^m$ seien gegeben durch $\underline{u}_1 := (\underline{u}_1^1, \underline{u}_1^2, \ldots, \underline{u}_1^m)$ bzw. $\overline{u}_1 := (\overline{u}_1^1, \overline{u}_1^2, \ldots, \overline{u}_1^m)$.

Ferner sei $\{\hat{u}\}$ eine nichtleere Menge von Lösungen reeller AWPe mit der Eigenschaft

(36) $\{\hat{u}\} = \{ u : J \to \mathbb{R}^m \mid$ Es gibt eine Funktion $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit $u'(t) = f(t,u(t))$ und $f(t,u(t)) \in F(t,U_1(t))$ für alle t aus J_o, und es gibt einen Vektor a aus U_o mit $u(0) = a \}$.

Dann gilt die Beziehung $\quad \operatorname{intv}\{\hat{u}\} = [\underline{u}_1, \overline{u}_1]$,

d.h. es gelten die Beziehungen $\underline{u}_1 \in \{\hat{u}\}$, $\overline{u}_1 \in \{\hat{u}\}$, sowie

$u^j(t) \in [\underline{u}_1^j(t), \overline{u}_1^j(t)]$ für alle t aus J , j=1(1)m und jede Funktion u aus $\{\hat{u}\}$.

Beweis:

Es seien $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ Funktionen von $J \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$, die gegeben sind durch $\underline{f}_1(t,y) := \underline{f}(t,U_1(t))$ bzw. $\overline{f}_1(t,y) := \overline{f}(t,U_1(t))$ für alle t aus J und alle y aus $\mathbb{R}^m$. Dabei seien $\underline{f}$ und $\overline{f}$ gegeben durch $\underline{f} := (\underline{f}^1, \underline{f}^2, \ldots, \underline{f}^m)$ bzw. $\overline{f} := (\overline{f}^1, \overline{f}^2, \ldots, \overline{f}^m)$. Die Funktionen $\underline{f}_1(t,y)$ und $\overline{f}_1(t,y)$ sind quasiisoton in y, da sie von y überhaupt nicht abhängen.

Es seien nun $\overline{u}_2$ die Maximallösung des AWPs $u'(t) = \overline{f}_1(t,u(t))$, $u(0) = \overline{u}_o$ und $\underline{u}_2$ die Minimallösung des AWPs $u'(t) = \underline{f}_1(t,u(t))$, $u(0) = \underline{u}_o$.

Ihre Existenz ist wegen der Quasiisotonie von $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ gesichert.

Mit Lemma 1.3 erhält man die Inklusionsbeziehung $\{\mathring{u}\} \subseteq [\underline{u}_2,\overline{u}_2]$.
Ferner sind nach Definition von $\underline{f}_1$ und $\overline{f}_1$ und nach (36) die Funktionen $\underline{u}_2$ und $\overline{u}_2$ aus der Menge $\{\mathring{u}\}$. Es gelten daher die Gleichungen

$$\underline{u}_2'(t) = \underline{f}(t,[\underline{u}_1(t),\overline{u}_1(t)]) \quad , \quad \underline{u}_2(0) = \underline{u}_o \quad ,$$

$$\overline{u}_2'(t) = \overline{f}(t,[\underline{u}_1(t),\overline{u}_1(t)]) \quad , \quad \overline{u}_2(0) = \overline{u}_o \quad .$$

Hieraus folgen sofort die Identitäten $\underline{u}_1 \equiv \underline{u}_2$ und $\overline{u}_1 \equiv \overline{u}_2$.
Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Bemerkungen:

1.) Für die in (36) auftretenden Funktionen f ist außer der dort angegebenen Abschätzung nichts weiter verlangt, insbesondere ist nicht die Stetigkeit erforderlich.

2.) Durch die größte Intervallösung eines gegebenen Intervall-AWPs erhält man demnach eine optimale Abschätzung für die Lösungen der Klasse von reellen AWPen, bei denen die Ableitung jeder Lösung "innerhalb" der Ableitung der größten Intervallösung des Intervall-AWPs verläuft.

V.2 Abschätzung bei vorgegebener Menge von reellen AWPen

Eine für die Praxis wesentlich interessantere Aufgabe als die in 1 betrachtete besteht nun darin, eine Abschätzung für die Lösungen einer Klasse von reellen AWPen mit einer vorgegebenen Menge von rechten Seiten $\{f\}$ und einer vorgegebenen Menge von Anfangswerten $\{u_o\}$ zu bestimmen.
In Lemma 1.3 wurde dieses Problem für den Fall gelöst, daß es sich bei den die Menge der rechten Seiten $\{f\}$ begrenzenden Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ um quasiisotone Funktionen handelte.
Man erhielt dort eine optimale Einschließung der Lösungen der reellen AWPe durch die Maximallösung eines dort angegebenen reellen AWPs und die Minimallösung eines ebenfalls angegebenen zweiten reellen AWPs.

Da für ein AWP bei einem System von reellen Differentialgleichungen mit beliebiger stetiger rechten Seite f die Maximallösung und die Minimallösung i.a. nicht existieren, wird die Abschätzung für die Lösungen einer gegebenen Klasse von reellen AWPen nicht optimal sein.

Eine mehr oder weniger grobe Abschätzung läßt sich aber mit Hilfe von Satz 1.1 angeben.

Satz 2.1

Es sei $\{f\}$ eine Menge von Funktionen von $J \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$. Ferner sei $\{u_o\}$ eine Menge von Vektoren aus $\mathbb{R}^m$. Es sei U_o ein Intervallvektor aus $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, und für alle Vektoren u_o aus $\{u_o\}$ gelte die Beziehung $u_o \in U_o$. Ferner sei F eine inklusionsisotone stetige Funktion von $J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{I}^m(\mathbb{R})$, und für jede Lösung $\hat{u}$ des AWPs (36) $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = u_o$
mit f aus $\{f\}$ und u_o aus $\{u_o\}$ gelte die Ungleichungskette

$\underline{f}(t,[\hat{u}(t),\hat{u}(t)]) \leqq f(t,\hat{u}(t)) \leqq \overline{f}(t,[\hat{u}(t),\hat{u}(t)])$.

Es sei U die größte Intervallösung des AWPs $U'(t) = F(t,U(t))$, $U(0) = U_o$.
Es sei $\{\hat{u}\}$ die Menge der Lösungen aller AWPe der Art (36) mit f aus $\{f\}$ und u_o aus $\{u_o\}$.

Dann gilt die Beziehung $\{\hat{u}\} \subseteq U$.

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1.1 .

Bemerkung:

Um den Satz anwenden zu können, ist es nun nötig, sich auf irgendeine Weise eine Funktion F mit den im Satz geforderten Eigenschaften zu beschaffen.

Ist die Menge $\{f\}$ der rechten Seiten durch zwei stetige Funktionen $\underline{f}$ und $\overline{f}$ aus $\{f\}$ in der Weise beschränkt, daß für jede Lösung $\hat{u}$ eines AWPs der Art (36) mit f aus $\{f\}$ und u_o aus $\{u_o\}$ die Ungleichungskette

$$\underline{f}(t,\hat{u}(t)) \leqq f(t,\hat{u}(t)) \leqq \overline{f}(t,\hat{u}(t))$$

gilt, so läßt sich eine Funktion F mit den gewünschten Eigenschaften aus einer inklusionsisotonen Intervallerweiterung F_1 der Funktion $\underline{f}$ und einer inklusionsisotonen Intervallerweiterung F_2 der Funktion $\overline{f}$ bestimmen.

Es sei etwa $F_1^j = [\underline{f}_1^j, \overline{f}_1^j]$, $F_2^j = [\underline{f}_2^j, \overline{f}_2^j]$ und $F^j = [\underline{f}_3^j, \overline{f}_3^j]$ für $j=1(1)m$.

Dann wird die Funktion F definiert durch

$$\underline{f}_3^j(t,X) := \min\{\underline{f}_1^j(t,X) \; , \; \underline{f}_2^j(t,X)\} \qquad \text{und}$$

$$\overline{f}_3^j(t,X) := \max\{\overline{f}_1^j(t,X) \; , \; \overline{f}_2^j(t,X)\}$$

für $j=1(1)m$ und alle Elemente (t,X) aus $J \times \mathbb{I}^m(\mathbb{R})$.

Der zur Abschätzung der Anfangswerte benutzte Intervallvektor U_o ist stets wie folgt zu wählen.

Es sei $U_o = (U_o^1, U_o^2, \ldots, U_o^m)$, und es sei $U_o^j = [\underline{u}_o^j, \overline{u}_o^j]$ für $j=1(1)m$.

Dann setzt man $\underline{u}_o^j := \inf\limits_{a \in \{u_o\}} a^j$ und $\overline{u}_o^j := \sup\limits_{a \in \{u_o\}} a^j$ für $j=1(1)m$.

Literaturverzeichnis

[1] ALEFELD , G. und HERZBERGER , J. : Einführung in die Intervallrechnung Bibliographisches Institut, Mannheim,Wien,Zürich (1974)

[2] AUMANN , R.J. : Integral of set-valued functions , J.Math.Anal.Appl. 12 (1965) 1 - 12

[3] BIRKHOFF , G. : Lattice Theory, 3rd ed., Am.Math.Soc. (1967) Colloquium Publications, Vol. XXV

[4] KENNEDY , H.C. : Is there an elementary proof of Peano's existence theorem for first order differential equations? , Am.Math.Monthly 76 (1969) 1043 - 1045

[5] MOORE , R.E. , W. STROTHER and C.T. YANG : Interval Integrals , LMSD , Sunnyvale (1960)

[6] MOORE , R.E. : Interval Analysis , Prentice - Hall, Englewood Cliffs,N.Y. (1966)

[7] NICKEL , K. :Verbandstheoretische Grundlagen der Intervallmathematik, Lecture Notes in Computer Science 29 , Interval Mathematics, p. 251 - 262 , Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1975)

[8] NICKEL , K. : Ein Zusammenhang zwischen Aufgaben monotoner Art und Intervallmathematik, Lecture Notes in Mathematics 631 , Numerical Treatment of Differential Equations, p. 121 - 132, Springer Verlag Berlin,Heidelberg,New York (1978)

[9] RATSCHEK , H. und SCHRÖDER , G. : Über die Ableitung von intervall-wertigen Funktionen, Computing 7 , 172 - 187 , (1971)

[10] RATSCHEK , H. : Mittelwertsätze für Intervallfunktionen, Beiträge zur Numerischen Mathematik 6 , 133 - 144 , (1977)

[11] WALTER, W.: Differential- und Integral - Ungleichungen, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 2, Springer Verlag Berlin (1964)

[12] WALTER, W.: There is an elementary proof of Peano's existence theorem, Am. Math. Monthly 78, 170 - 173, (1971)

[13] WALTER, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2.,korr. Auflage, Heidelberger Taschenbücher Band 110, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (1976)