

**РЕГРЕССИОННЫЙ И ИНТЕРВАЛЬНЫЙ  
ПОДХОДЫ В ЗАДАЧЕ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ  
НЕСОВМЕСТНОЙ  
ВЫБОРКЕ ИЗМЕРЕНИЙ  
ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА**

**С. И. Кумков**

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского  
Уральского Отделения Российской Академии Наук,  
Екатеринбург, Россия, kumkov@imm.uran.ru

Всероссийский web-семинар по интервальному анализу  
Новосибирск, 31 октября 2022

Цель исследования – пример совместного применения  
регрессионного подхода (МНК) и методов Интервального  
Анализа в задаче восстановления зависимости  
электрохимического процесса: ситуация неопределенности  
и хаотических выбросов положительного знака  
при несовместной выборке измерений

# Исследование вязкости расплавленного электролита

– эксперимент дает зашумленную выборку измерений; выборка измерений имеет структуру

$$v(T_n) = v_n = v^*(T_n) + e_n + \chi_n, n = \overline{1, N}, \quad (1)$$

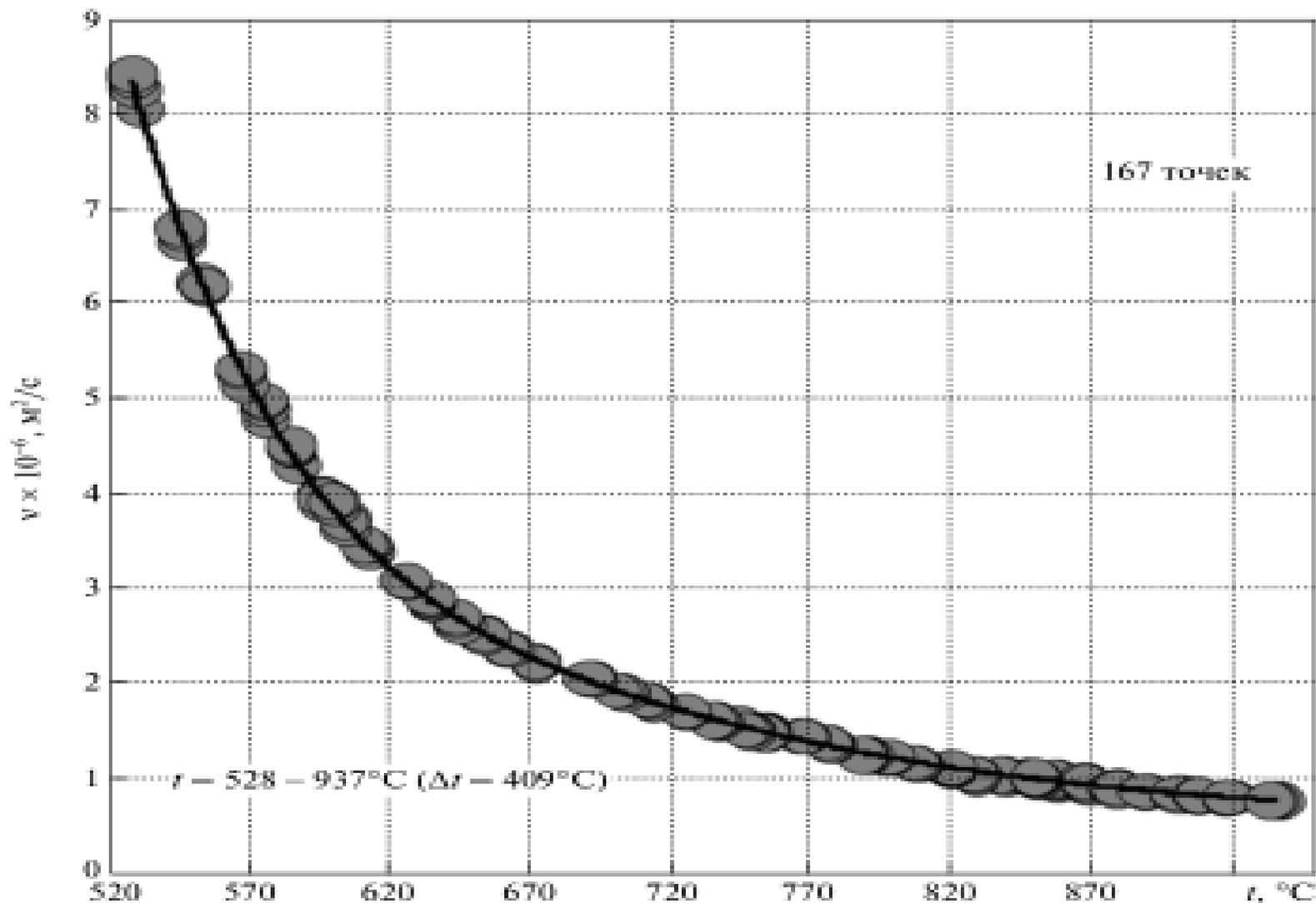
где  $N$  — объем выборки;  $v_n$  — измерение вязкости ( $\times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек) при температуре  $T_n$  (градусы Цельсия);  $v^*(T)$  — измеряемое истинное значение;  $e_n$  — погрешность измерения ( $\times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек);  $\chi_n$  — хаотическая компонента погрешности измерения ( $\times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек); **специфика эксперимента:** зашумление  $\chi_n > 0$  всегда положительно;

– истинный процесс надежно описывается функцией

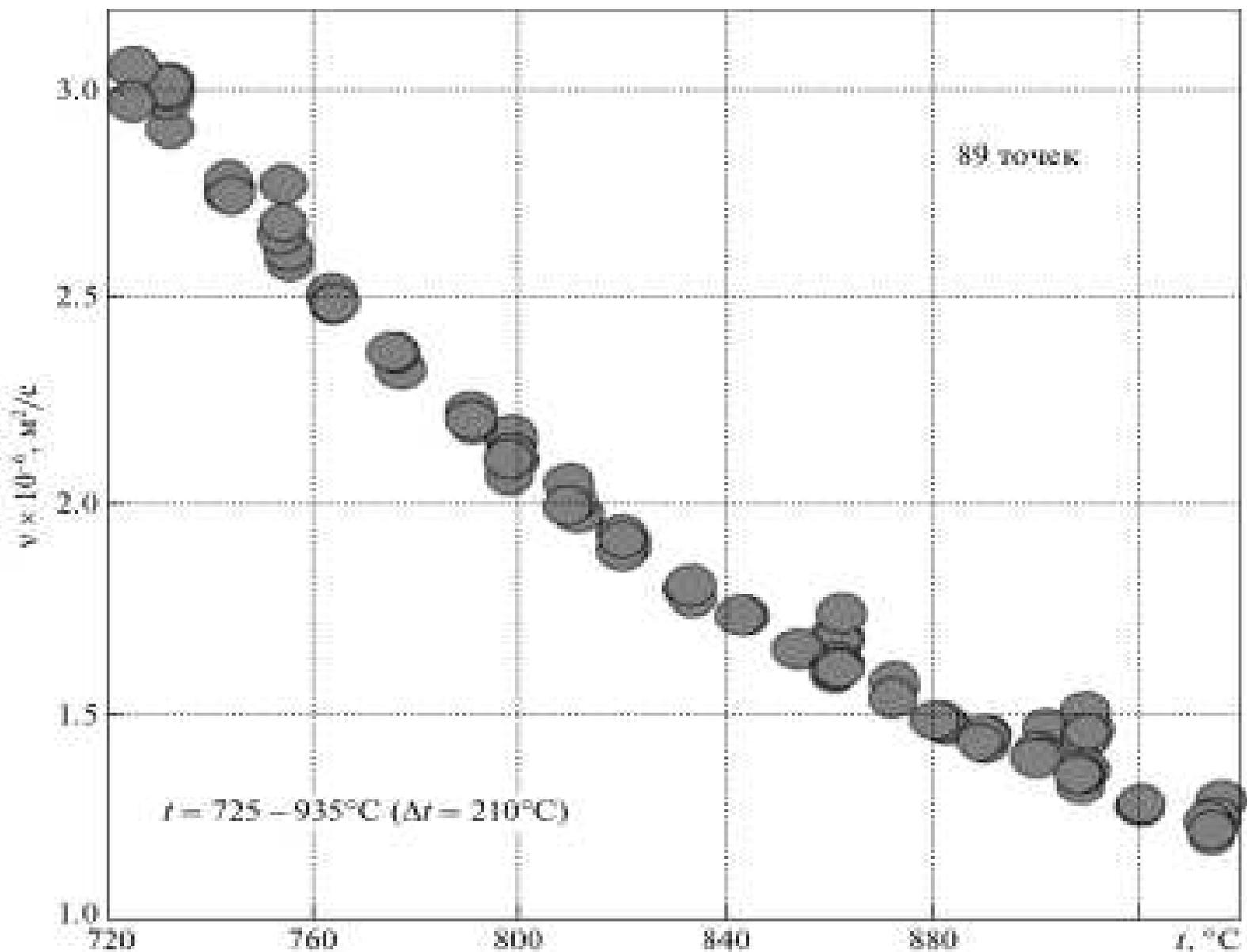
$$v^*(T) = v_0 \exp(E_A/RT). \quad (2)$$

**Требуется:** построить информационное множество  $\Upsilon(v_0, E_A)$  параметров  $v_0, E_A$  и коридор совместных зависимостей.

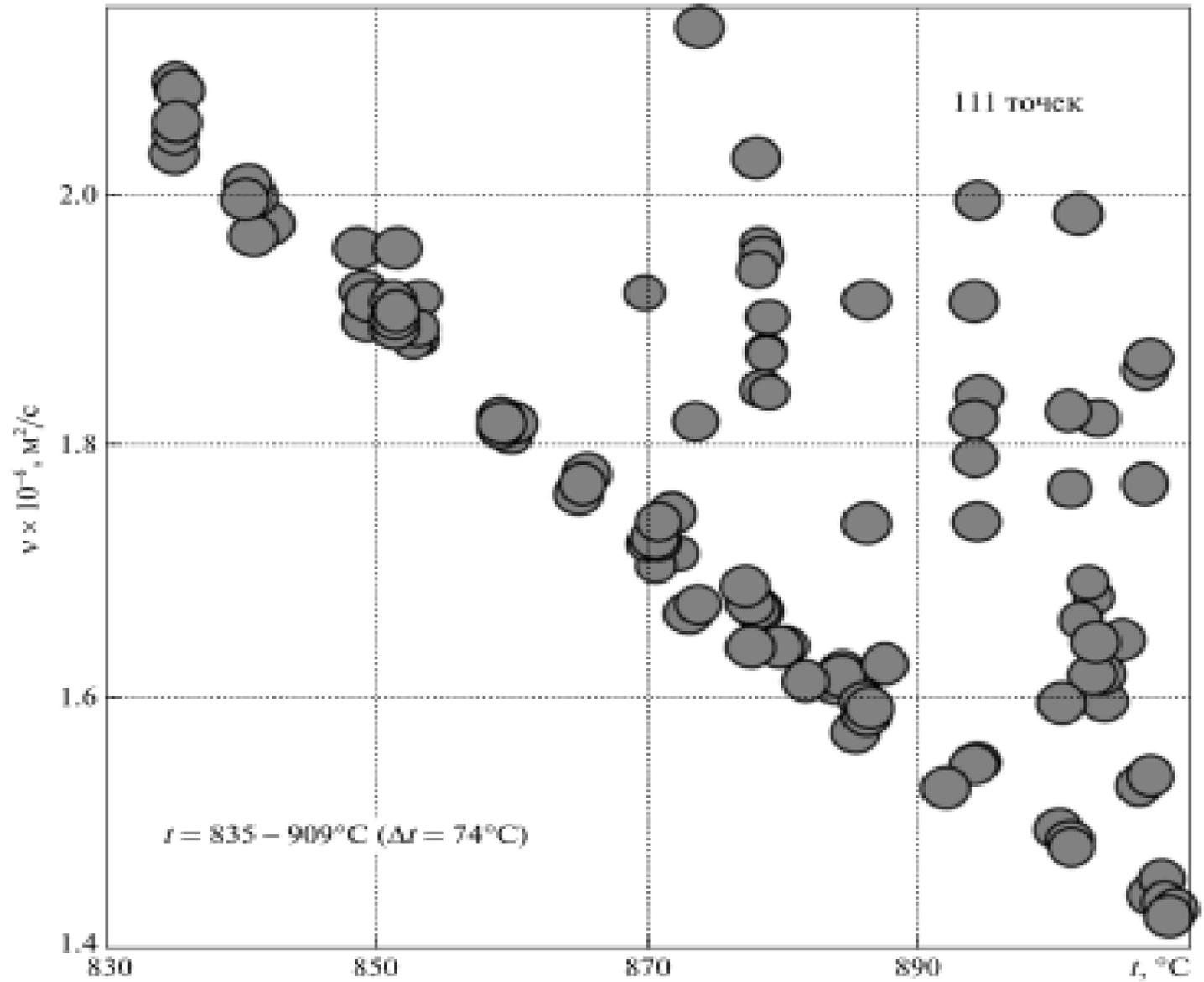
# Пример 1: “хорошая” выборка без хаотического зашумления (рис. 1)



Пример 2: “умеренно” зашумленная выборка (рис. 2)



Пример 3: сильно зашумленная выборка (рис. 3)



## Ситуация

---

Поясним принятый подход на примере обработки выборки измерений расплавленного электролита  $\text{NoCl}_3$ , показанных на Рис. 2. Данный пример интересен тем, что хаотические искажения явно присутствуют практически во всем температурном диапазоне, но имеют малый пренебрежительный уровень, сравнимый с уровнем собственных измерительных (инструментальных и методических) погрешностей эксперимента. Это затрудняет “ручной” отсев таких выбросов.

## Оценка величины погрешности (по выборке Рис. 2)

Основные процедуры:

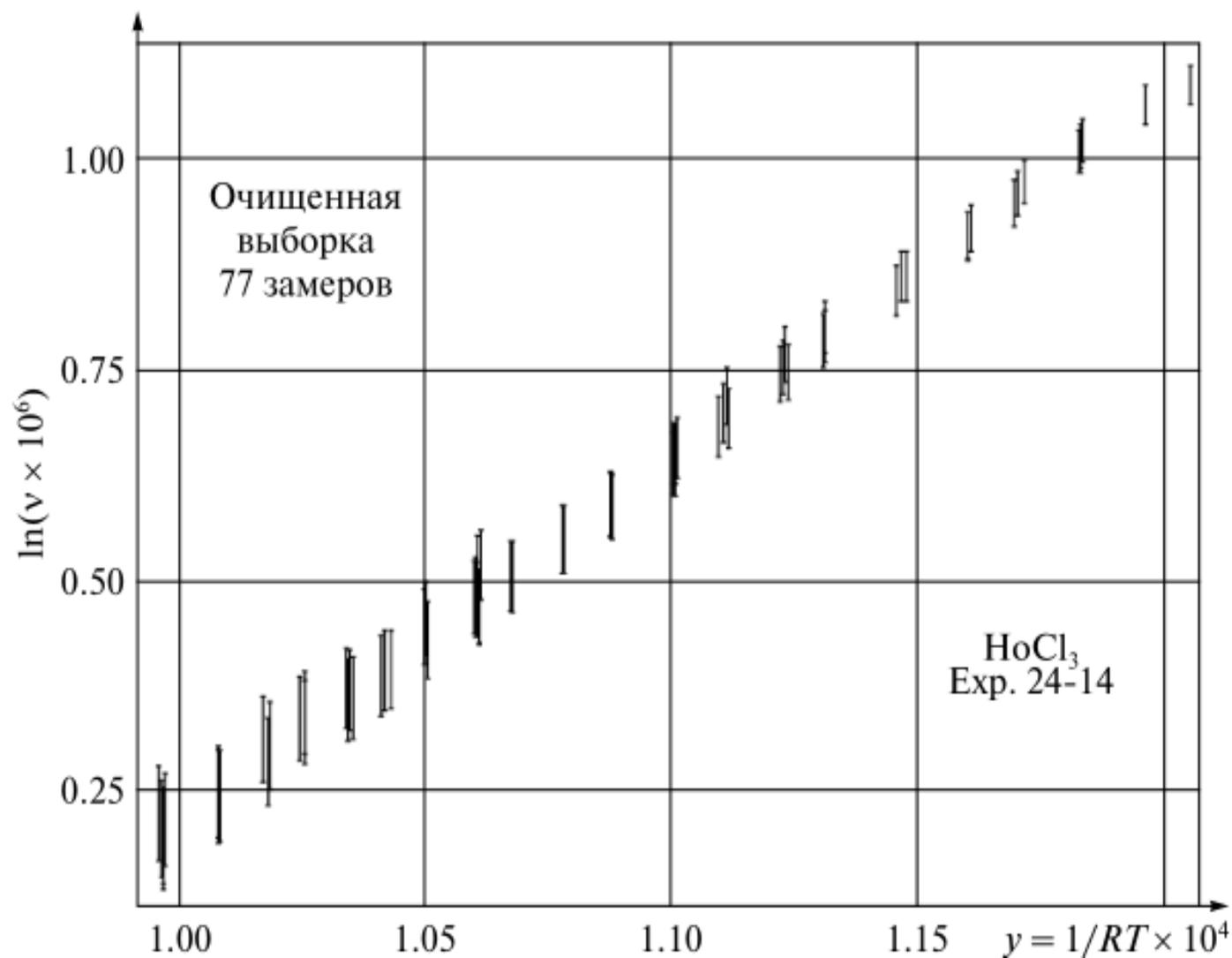
- используем “хороший” участок Рис. 2 (без явных выбросов) для оценки фактического уровня измерительной погрешности.
- задается некоторая с “запасом” исходная величина  $e_{\max}$  ограничения на погрешность измерений при которой выборка Рис. 2 заведомо является совместной, т.е. ее информационное множество параметров *непусто*;
- строится набор интервалов неопределенности  $H_n = [v_n - e_{\max}, v_n + e_{\max}]$ ,  $n = \overline{1, N}$  измерений;
- для простоты вычислительных процедур производится переход к логарифмическому масштабу интервалов неопределенности и вспомогательной линейной зависимости процесса от вспомогательной переменной  $y$  (Рис. 4);
- выполняется расчет соответствующего набора парциальных информационных множеств, и их пересечением находится непустое информационное множество  $\Upsilon(e_{\max}, v_0, E_A)$  параметров.

## Оценка величины погрешности (по выборке Рис. 2)

- путем вариации *вниз* величины  $e_{\max}$  (взятой с запасом) до вырождения информационного множества параметров  $\Upsilon(e_{\max}, v_0, E_A)$  в точку находится минимальная величина  $e_{\max}^*$ , являющаяся оценкой снизу фактического уровня ограничения *измерительной* погрешности;
- отметим, эта величина  $e_{\max}^*$  определяется *в условиях отсутствия хаотических компонент*;
- для дальнейших расчетов экспериментатор на основании своего опыта задает величину этого ограничения с разумным “запасом”  $\beta$ :  
 $e_{\max} = \beta e_{\max}^*$ ; практически, величина  $\beta$  задается на уровне 1.1 – т.е. с запасом в  $\approx +10\%$ .

При обработке случая Рис. 2 ограничение на максимальную величину инструментальной погрешности полагалось  $e_{\max} = 0.045 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек.

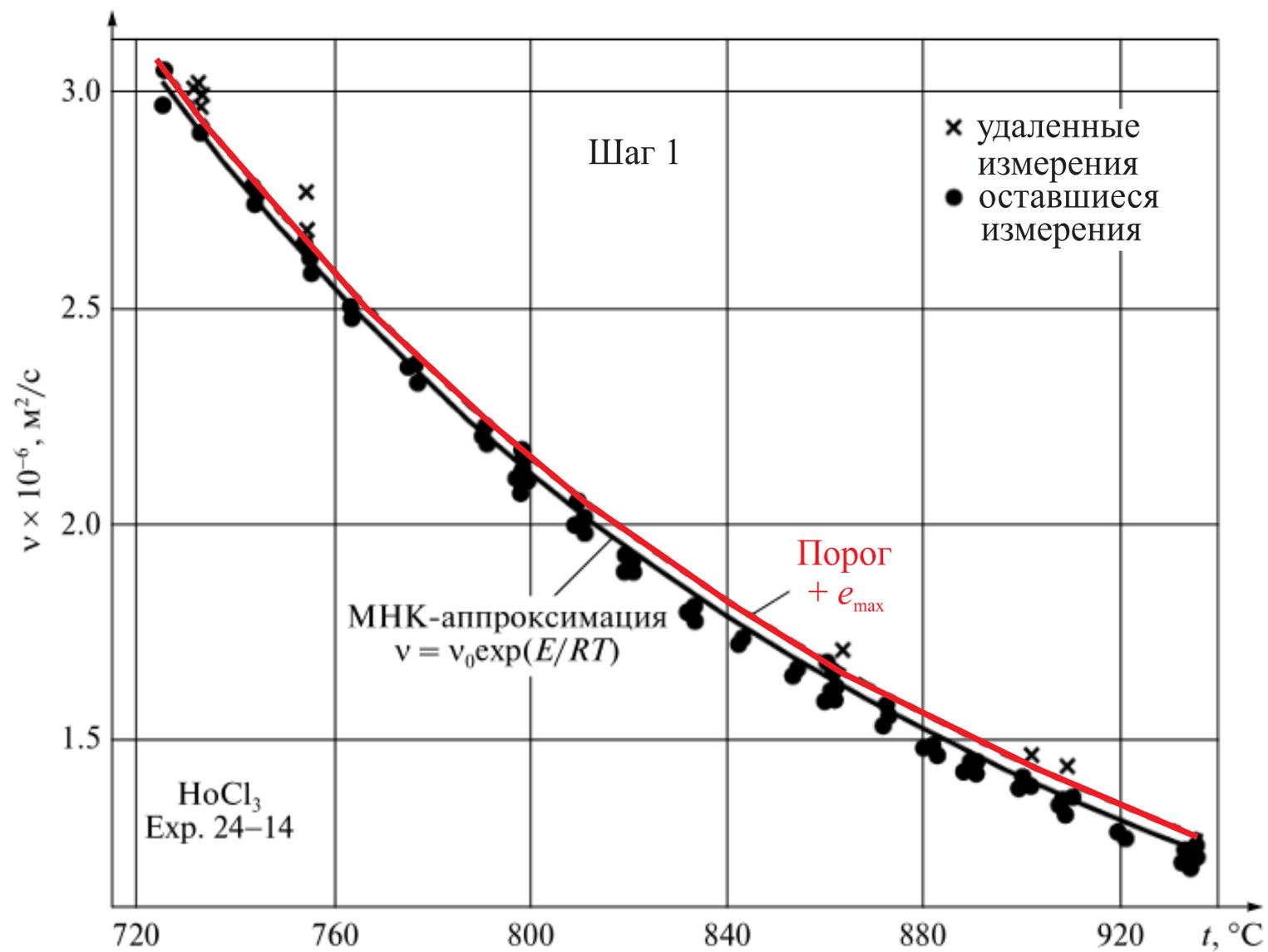
**Упрощение вычислений: переход к логарифмическому масштабу, к преобразованной линейной зависимости и совокупности интервалов неопределенности (рис. 4)**



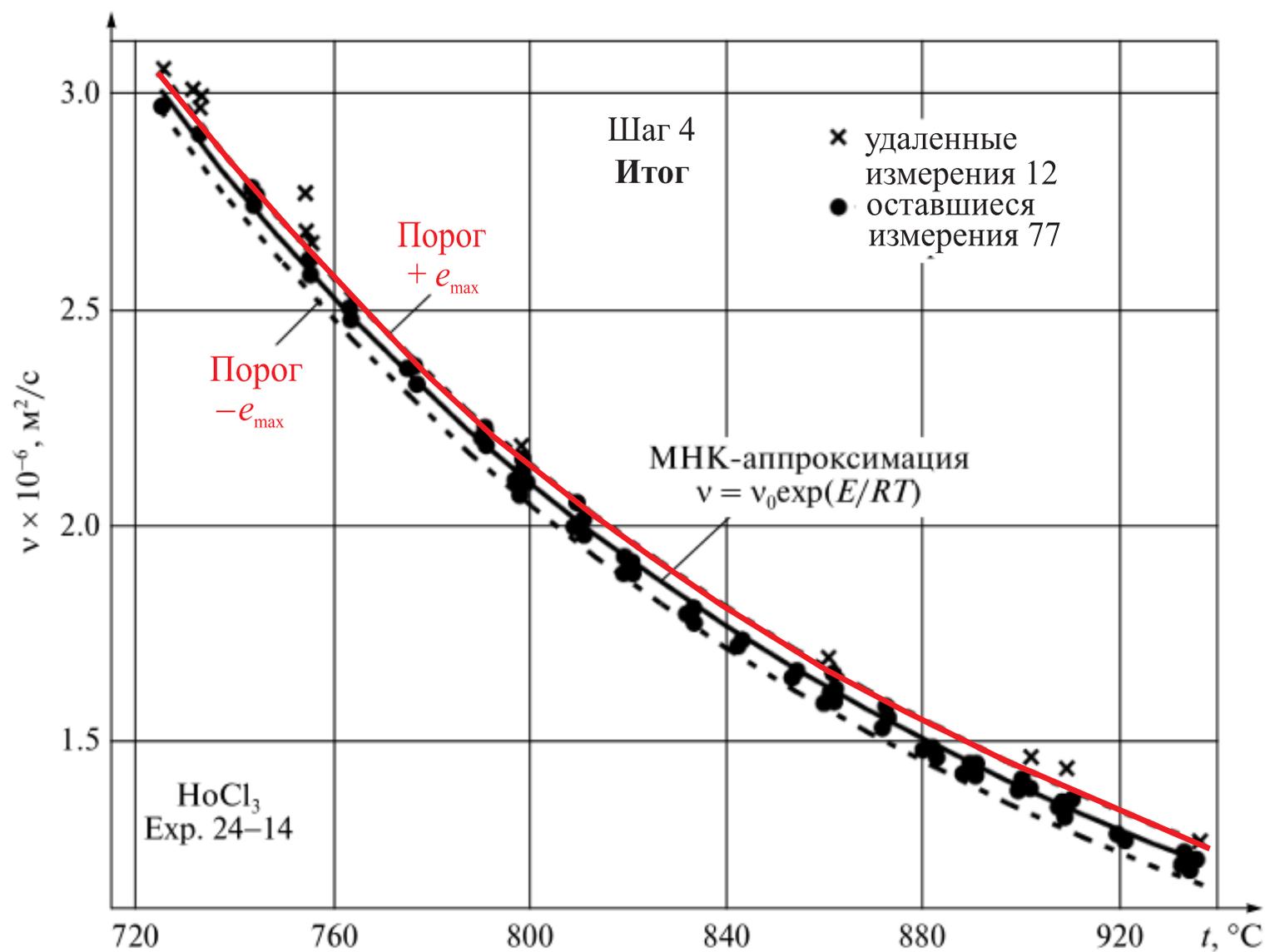
## Процедуры выявления и удаления выбросов

- по текущей выборке рассчитывается её МНК-апроксимация;
- далее используется информация о положительности хаотических компонент погрешностей: по заданной величине  $e_{\max}$ , относительно данной кривой выставляется верхний порог  $+e_{\max}$  (рис. 4);
- измерения, отклоняющиеся вверх от кривой МНК более чем на  $e_{\max}$ , объявляются выбросами и удаляются из текущей выборки;
- эта последовательность операций циклически повторяется до останова по отсутствию удаляемых выбросов.

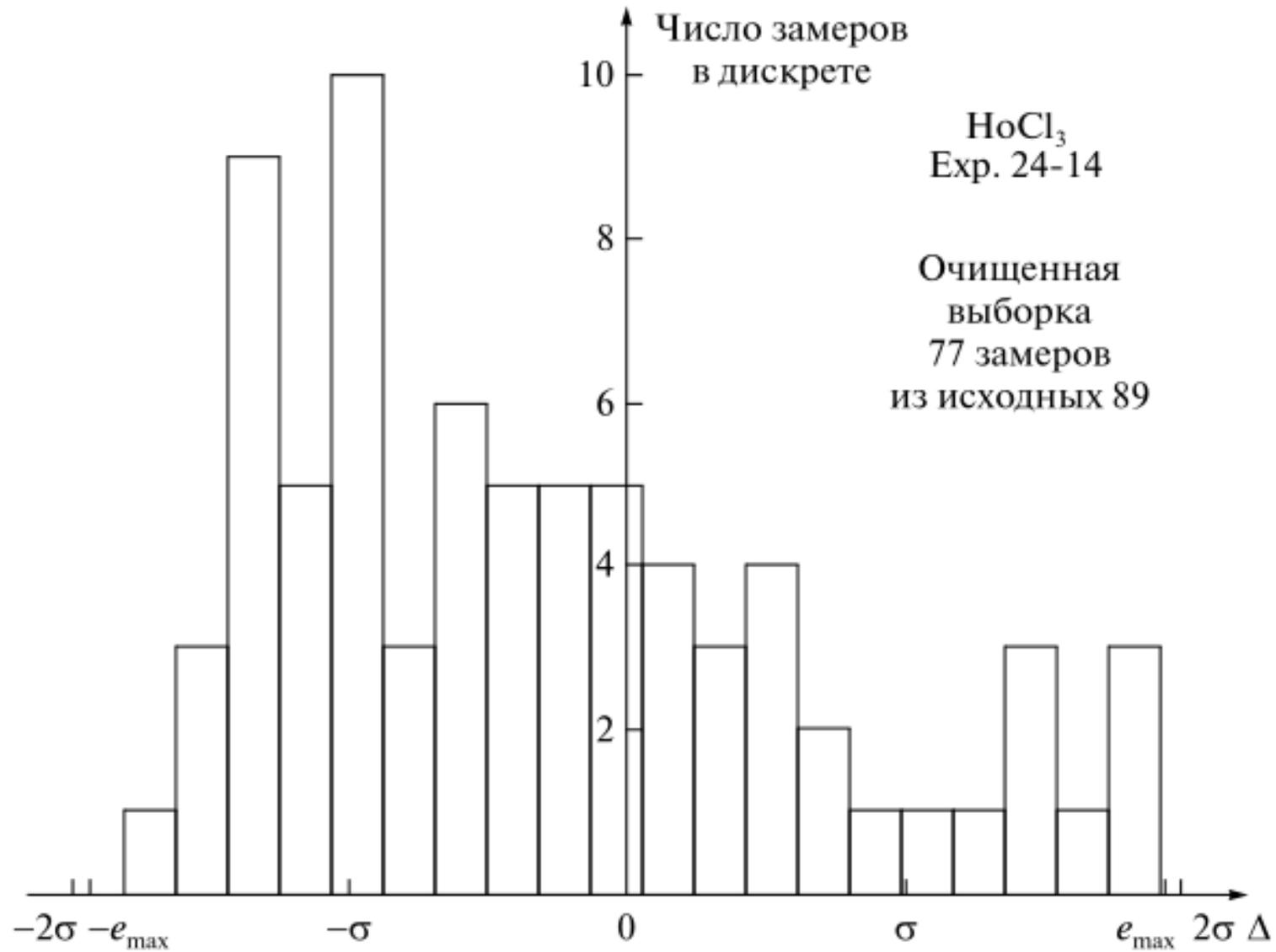
## “Очищенная” выборка после 1-го шага (рис. 5)



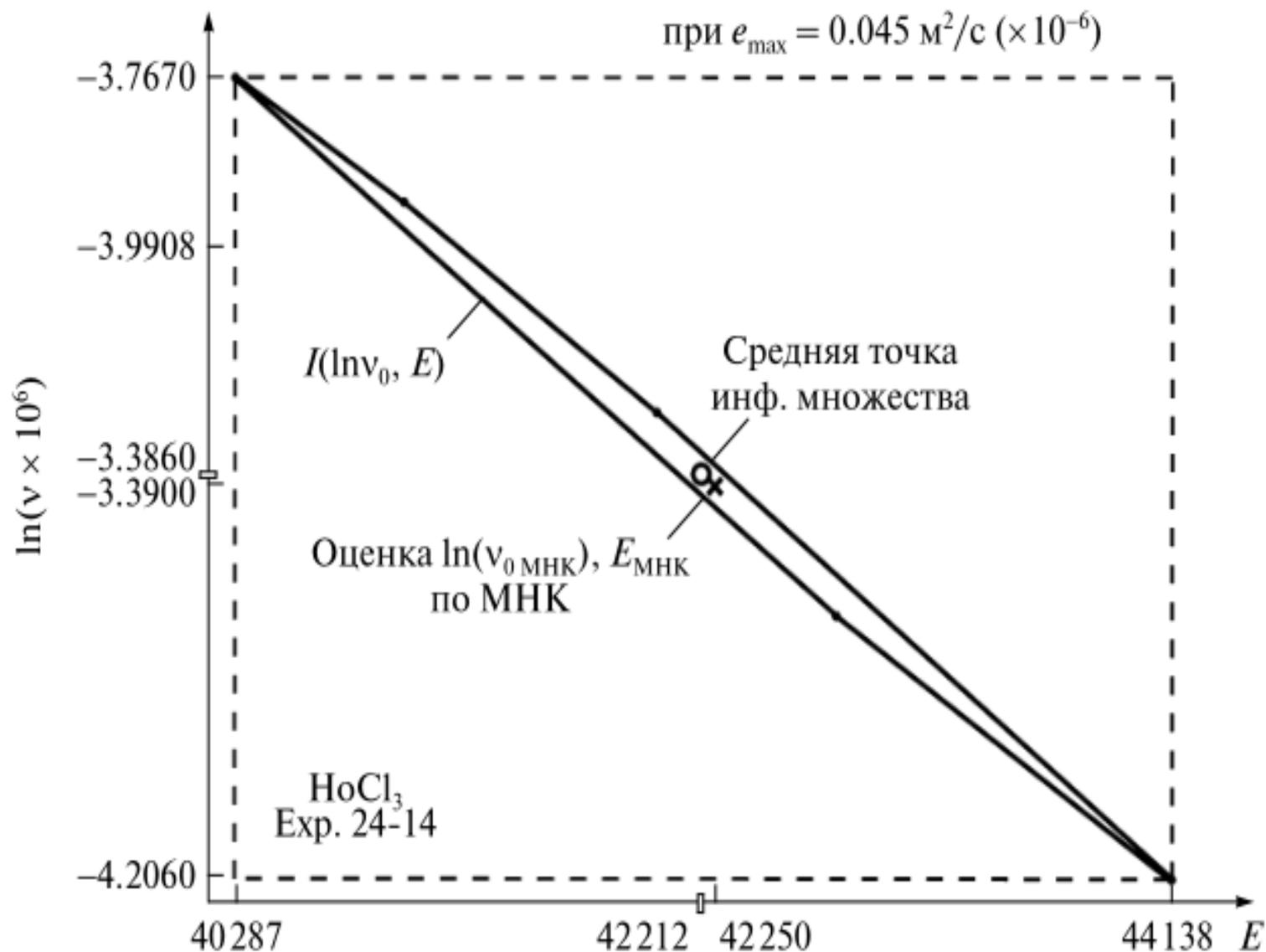
## Итоговая “очищенная” выборка без выбросов после 4-х шагов их удаления (рис. 6)



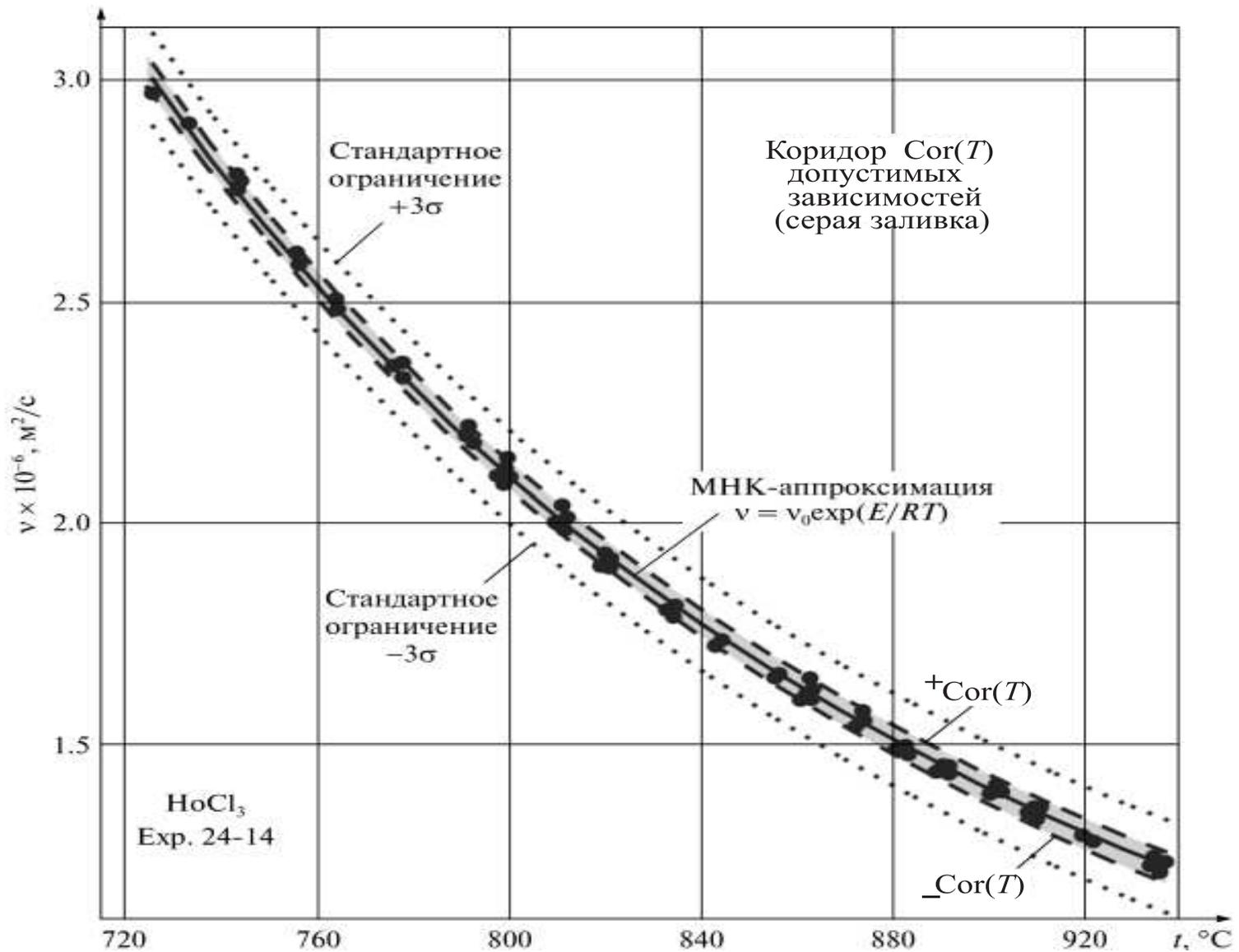
# Гистограмма отклонений измерений в “очищенной” выборке (рис. 7)



# Информационное множество параметров $\ln(v_0), E_A$ “очищенной” выборки (рис. 8)



# Коридор совместных зависимостей “очищенной” выборки (рис. 9)



## ***ИСТОЧНИК***

---

1. А.М. Потапов, С.И. Кумков, Ю. Сато. Обработка экспериментальных данных по вязкости, содержащих случайные выбросы одного знака // Расплавы. 2010, 3, стр.48–63.