



Семинар «Интервальный анализ и его приложения»
27 января 2025

Центры информационного множества

Сергей Жилин

szhilin@gmail.com

CSort, Барнаул

План

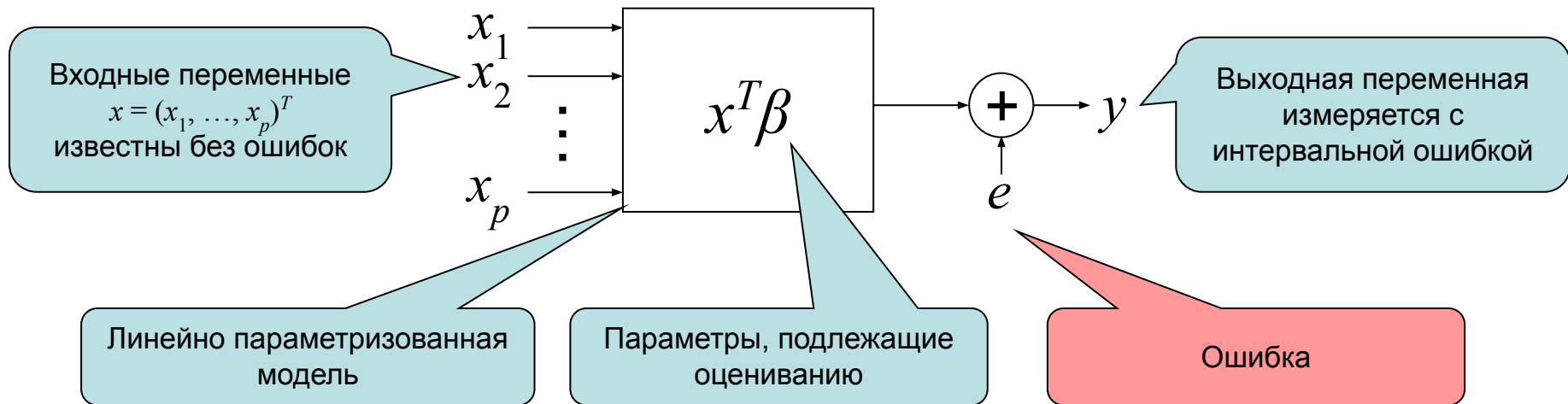
- ❑ Интервальный подход к оцениванию параметров зависимости
- ❑ Способы построения центра информационного множества
- ❑ Экспериментальное численное исследование центров
- ❑ Результаты
- ❑ Заключение

Центры информационного множества

Интервальный подход к оцениванию параметров зависимости

Восстановление зависимости при интервальной ошибке

□ Структура модели



□ “Интервальная ошибка” = “Неизвестная, но ограниченная”:

$$e \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

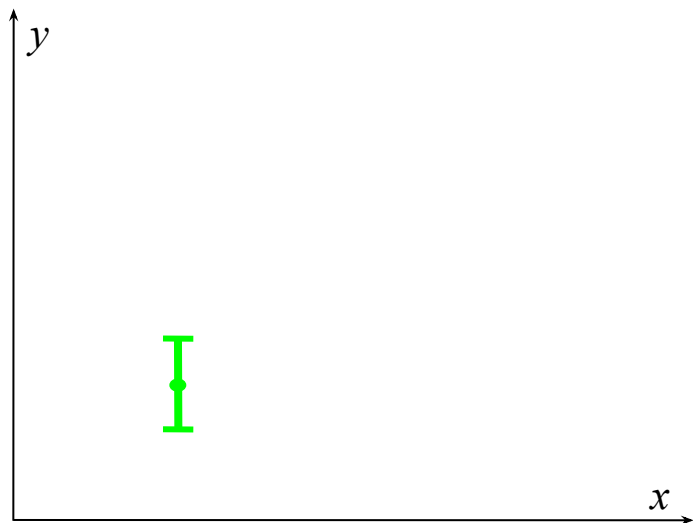
Годы и авторы

- ❑ 1962 Л.В. Канторович
- ❑ 1970 С.И. Спивак и др.
- ❑ 1982 G. Belforte, M. Milanese et al.
- ❑ 1983 Н.М. Оскорбин и др.
- ❑ 1986 J.P. Norton
- ❑ 1987 С.И. Кумков и др.
- ❑ 1987 E. Walter, H. Piet-Lahanier
- ❑ 1989 А.П. Вошинин и др.
- ❑ 1993 P.L. Combettes
- ❑ 2000 О.Е. Родионова, А.Л. Померанцев
- ❑ 2003 А.А. Подружко, А.С. Подружко
- ❑ 2010 С.П. Шарый

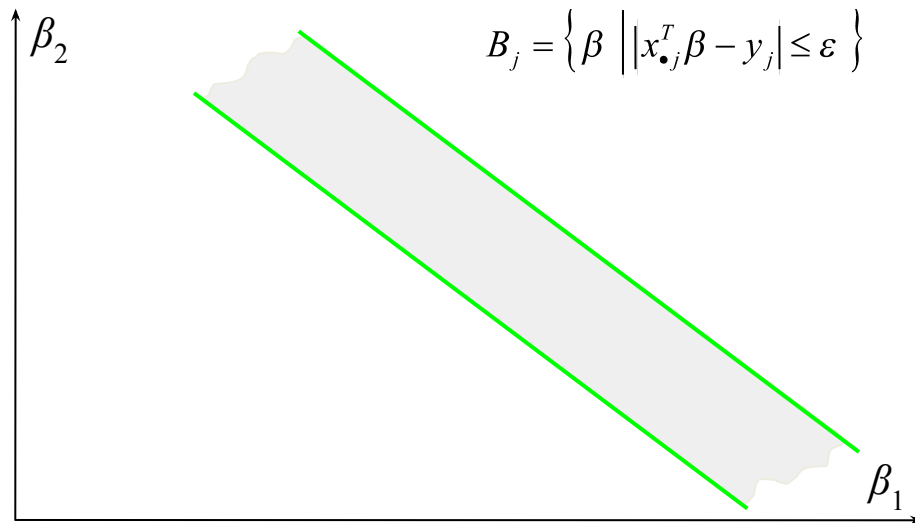
Интервальный подход к оцениванию параметров

□ Модель $y = \beta_1 + \beta_2 x$

Пространство переменных (x, y)



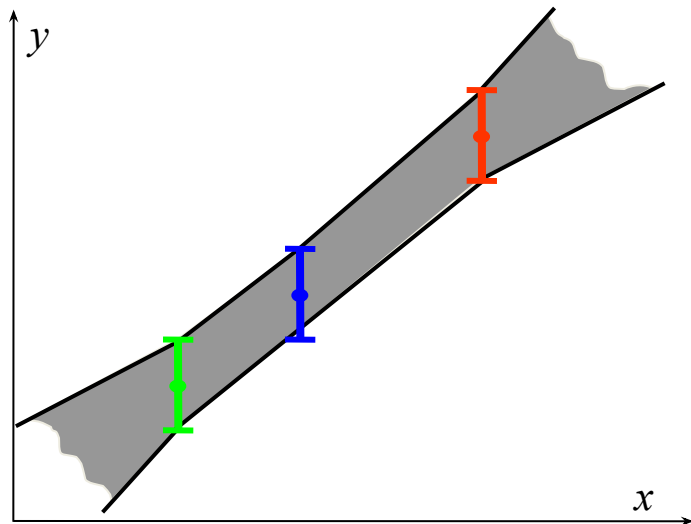
Пространство параметров (β_1, β_2)



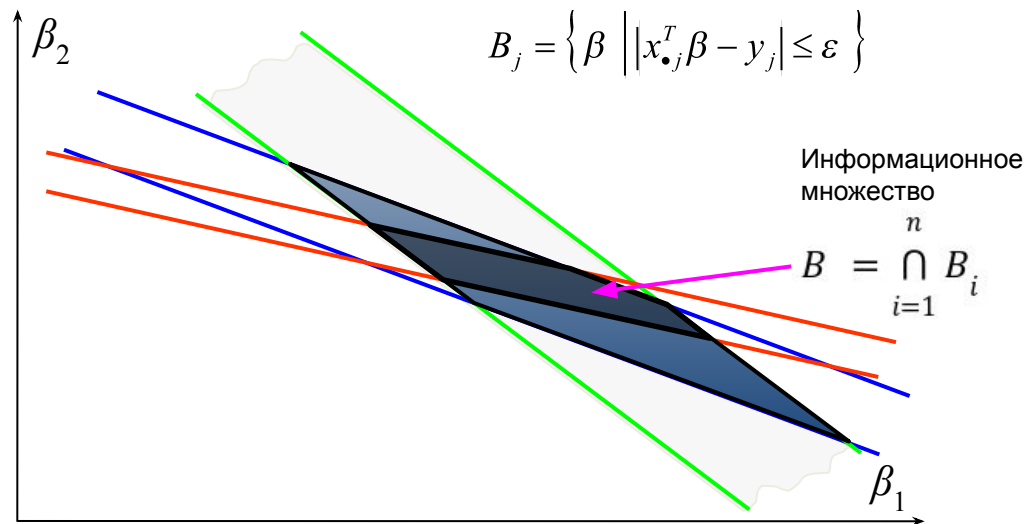
Интервальный подход к оцениванию параметров

□ Модель $y = \beta_1 + \beta_2 x$

Пространство переменных (x, y)



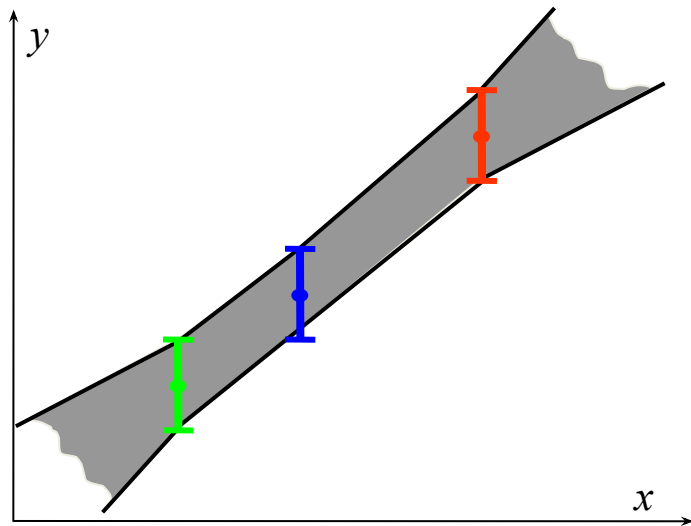
Пространство параметров (β_1, β_2)



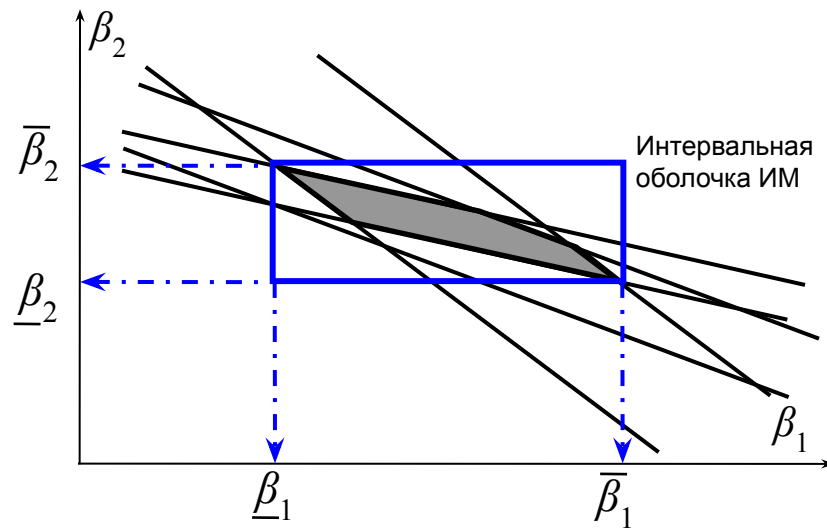
Интервальный подход к оцениванию параметров

□ Модель $y = \beta_1 + \beta_2 x$

Пространство переменных (x, y)



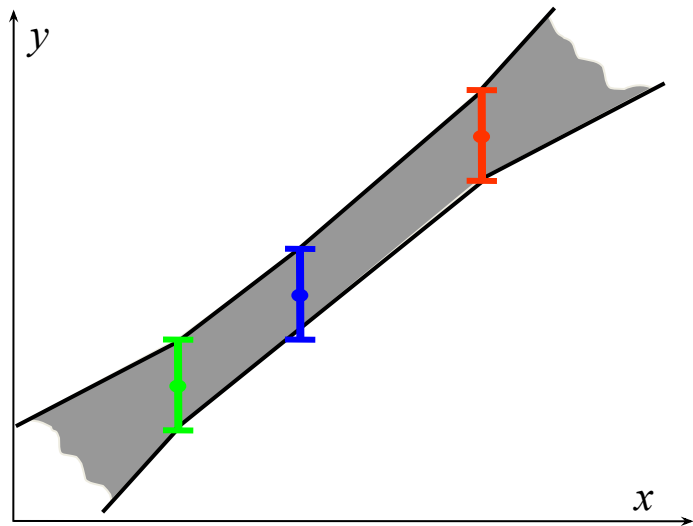
Пространство параметров (β_1, β_2)



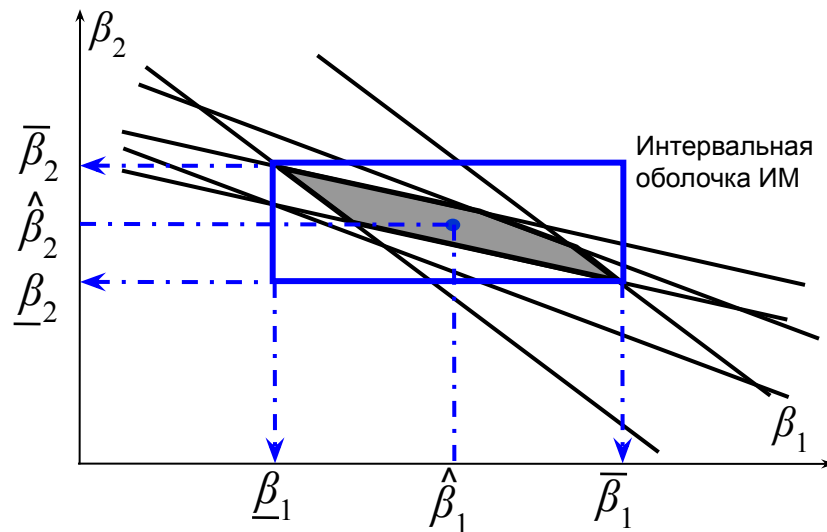
Интервальный подход к оцениванию параметров

□ Модель $y = \beta_1 + \beta_2 x$

Пространство переменных (x, y)



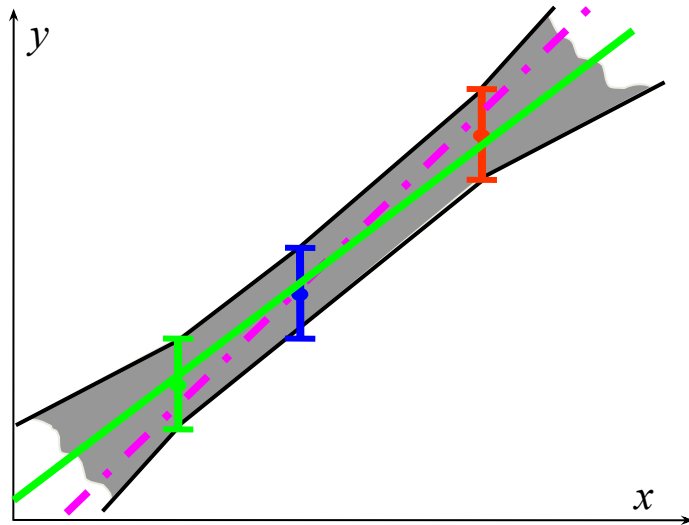
Пространство параметров (β_1, β_2)



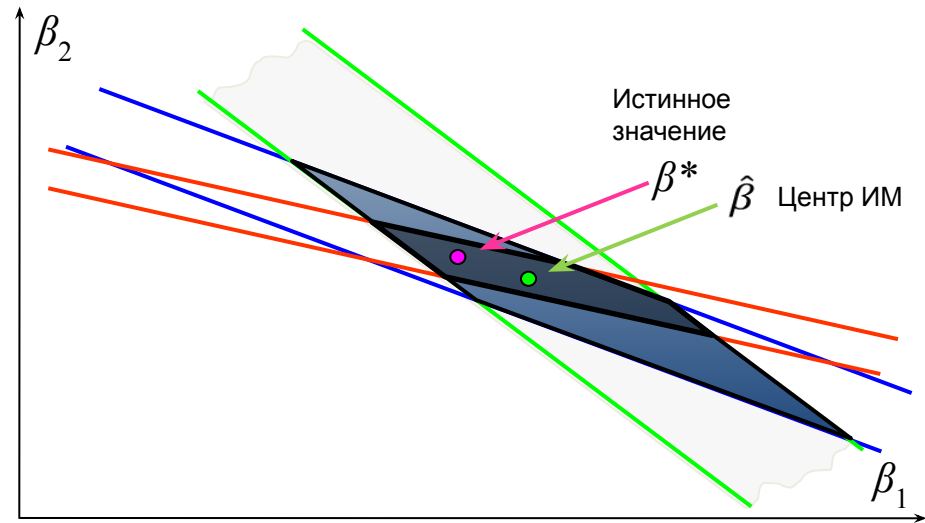
Интервальный подход к оцениванию параметров

□ Модель $y = \beta_1 + \beta_2 x$

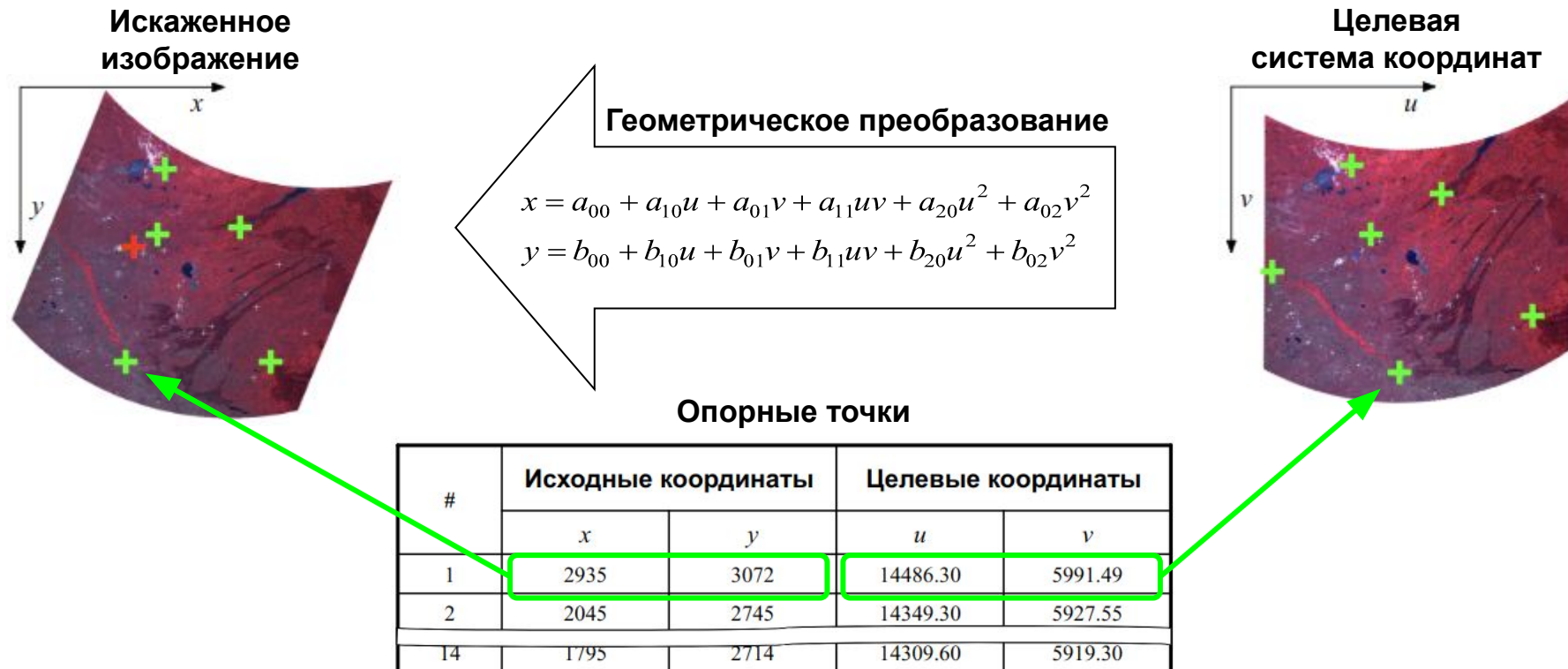
Пространство переменных (x, y)



Пространство параметров (β_1, β_2)



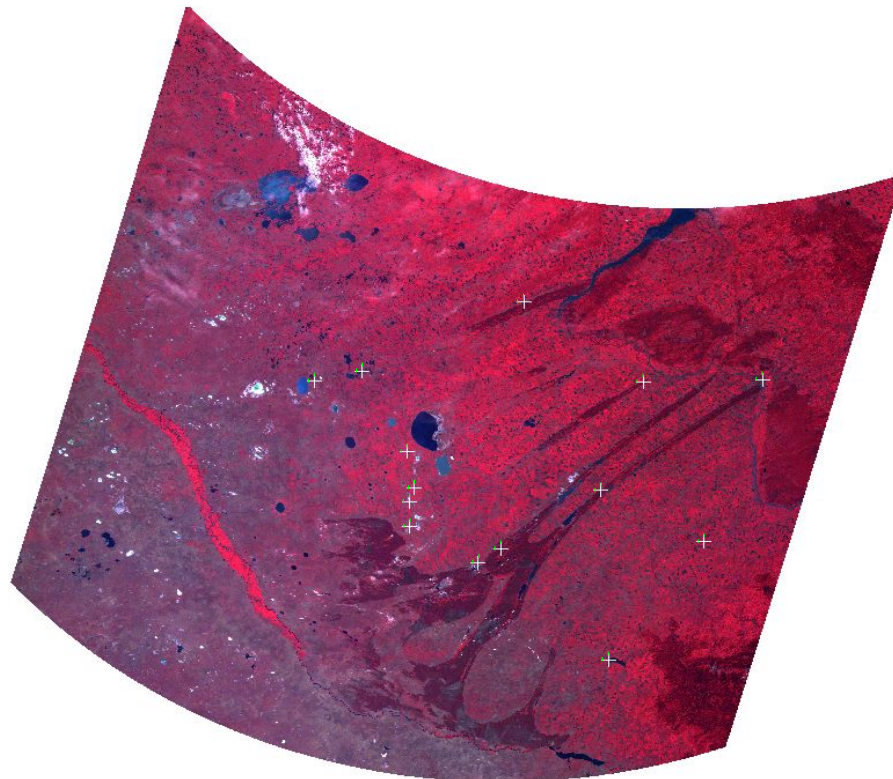
Геометрическая коррекция изображений



Жилин С.И. Нестатистические методы и модели построения и анализа зависимостей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук – Барнаул, 2004.

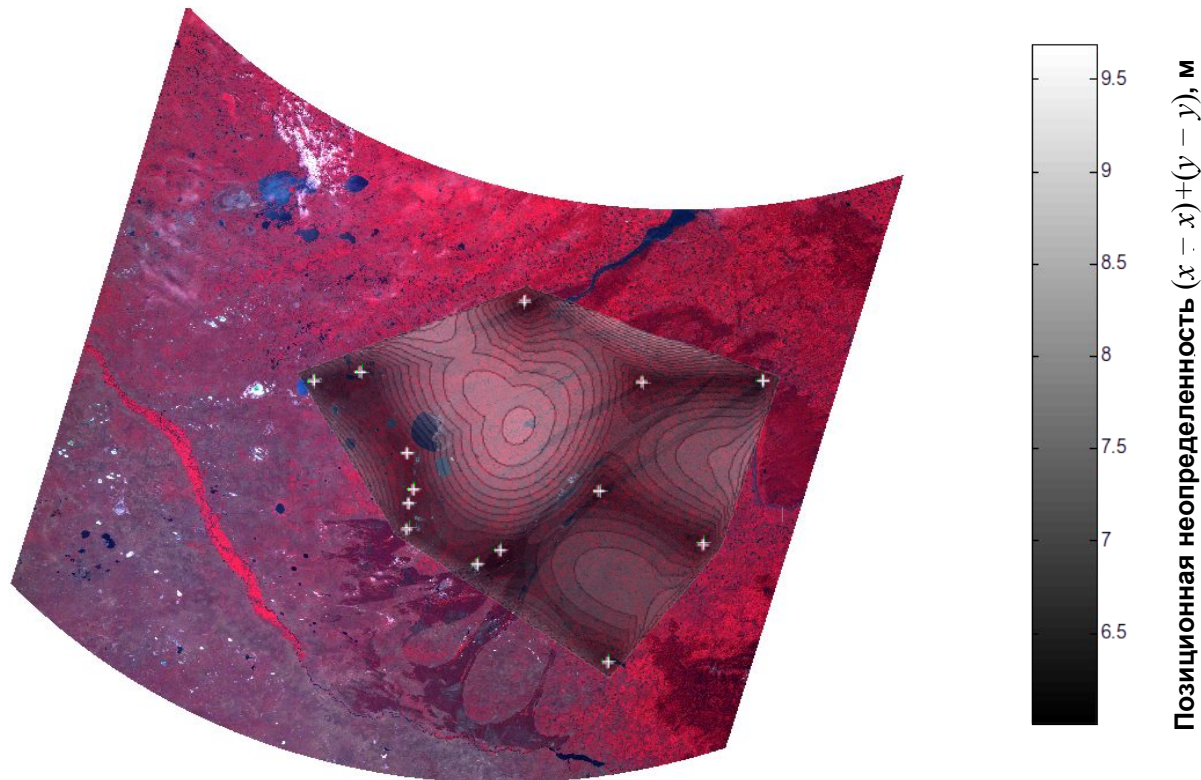
Геометрическая коррекция изображений

Откорректированное изображение

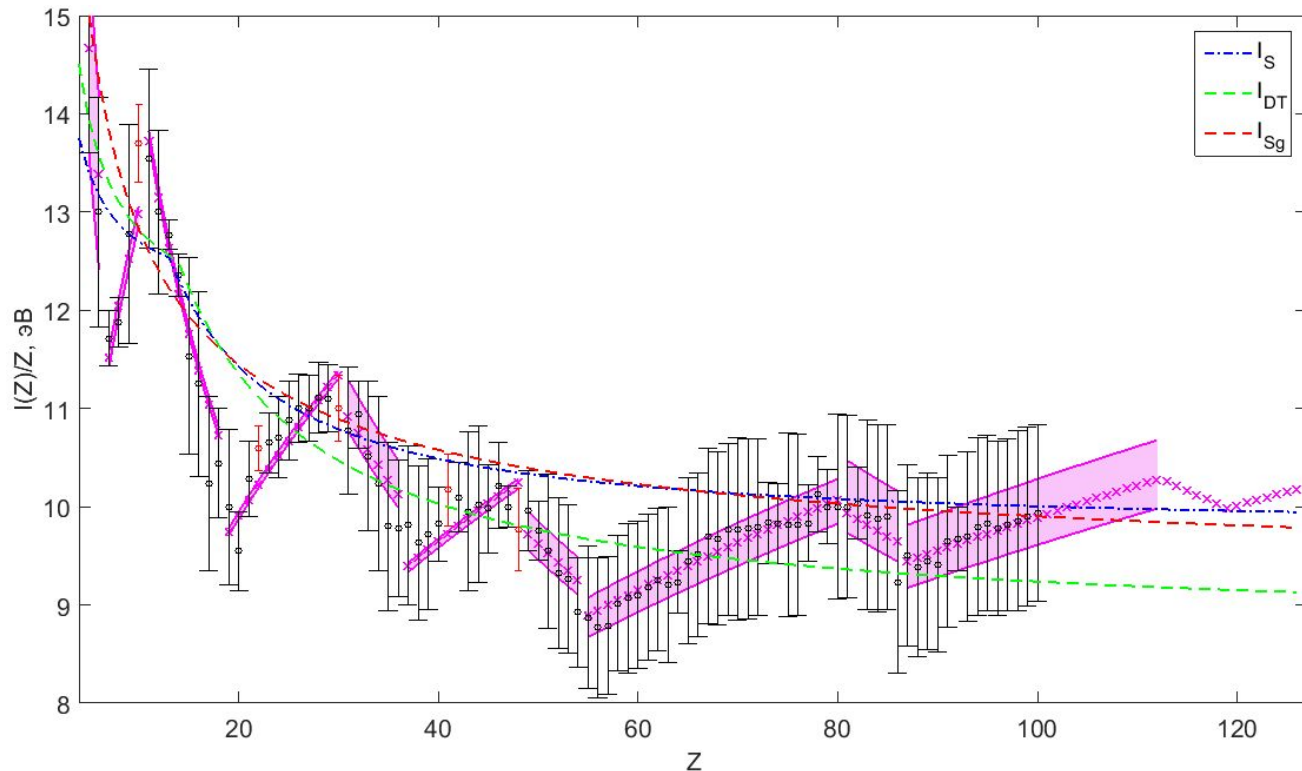


Геометрическая коррекция изображений

Откорректированное изображение + карта неопределенности



Полуэмпирическая формула для средней энергии возбуждения вещества



Смоляр В.А., Маглеванный И.И., Жилин С.И. Интервальный подход к построению полуэмпирической формулы для средней энергии возбуждения вещества // Сборник трудов Всероссийской конференции. по математике "МАК-2016". — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2016. — С. 107–109.

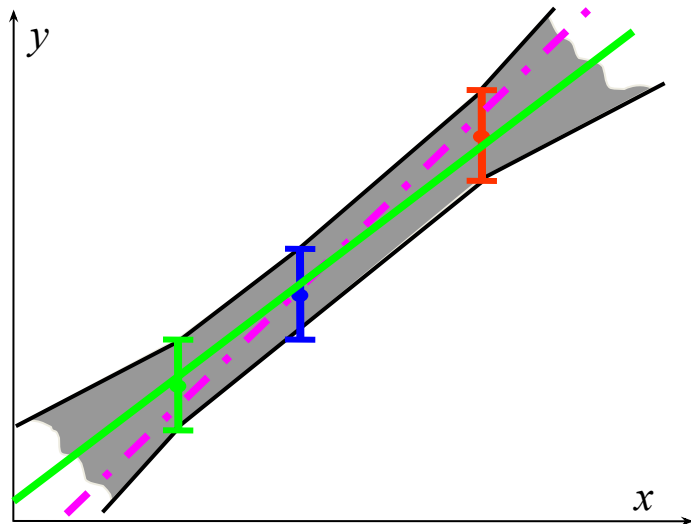
Центры информационного множества

Способы построения центра

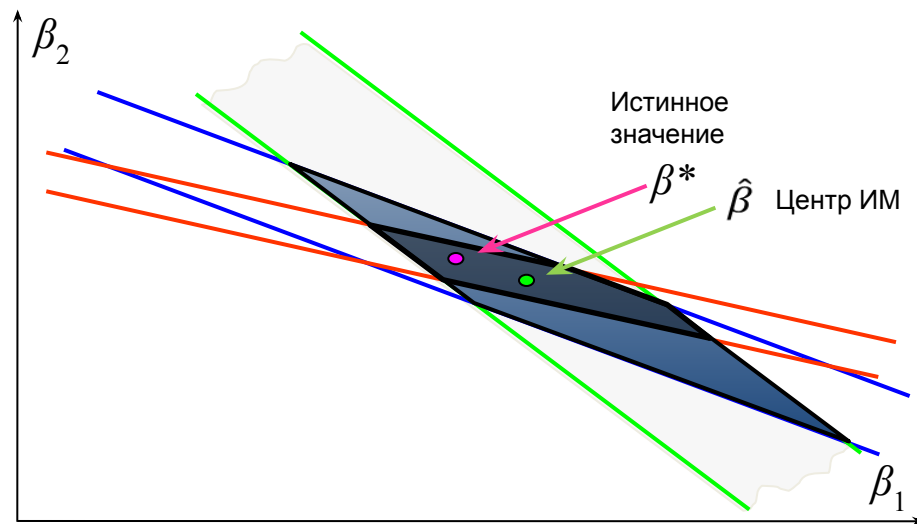
Интервальный подход к оцениванию параметров

□ Модель $y = \beta_1 + \beta_2 x$

Пространство переменных (x, y)



Пространство параметров (β_1, β_2)



Центры информационного множества

☐ Центр внешней интервальной оболочки	outer
☐ Чебышёвский центр (центр максимального вписанного шара)	chebyshev
☐ Центр минимального описанного шара (чебышёвский центр)	meb
☐ Аналитический центр	analytic
☐ L_1 -центр	L1
☐ Центр Оскорбина	oskorbin
☐ Центр максимума согласования	mmc
☐ Середина максимальной диагонали	maxdiag
☐ Центр, минимизирующий среднее расстояние до вершин	minmeandist
☐ Центр тяжести (центроид)	gravity
☐ Центр максимального вписанного эллипсоида	mie
☐ Центр минимального описанного эллипсоида	mvee
☐ Центр максимальной плотности	maxdensity

Центр внешней интервальной оболочки

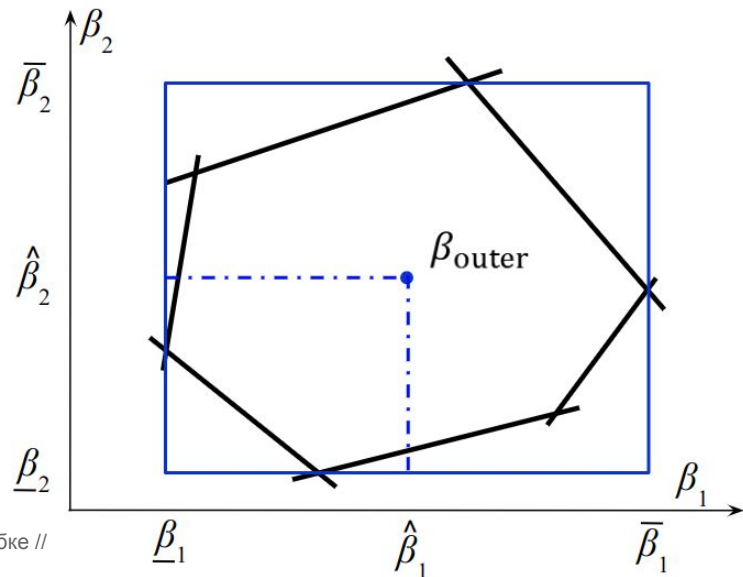
□ β_{outer} — центральная точка внешней интервальной оболочки ИМ

$$\square B = \left([\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1], \dots, [\underline{\beta}_p, \overline{\beta}_p] \right) :$$

$$\underline{\beta}_i = \min_{\beta \in B} \beta_i, \quad \overline{\beta}_i = \max_{\beta \in B} \beta_i, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\beta_{outer} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p) :$$

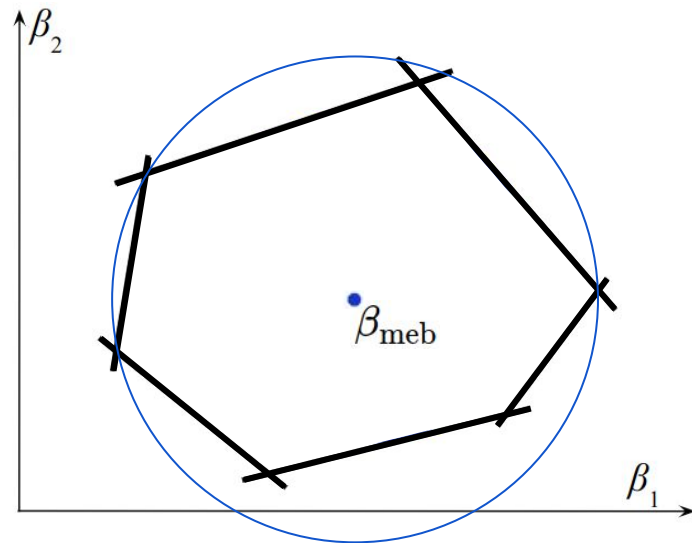
$$\beta_i = \frac{1}{2} (\underline{\beta}_i + \overline{\beta}_i), \quad i = 1, \dots, p$$



Центр минимального описанного шара (чебышёвский центр)

□ Центр минимального описанного шара β_{meb} — наилучший в худшем случае

$$\beta_{\text{meb}} = \min_{\hat{\beta} \in B} \max_{\beta \in B} \|\hat{\beta} - \beta\|^2$$



Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56, No. 7. – С. 76-81.

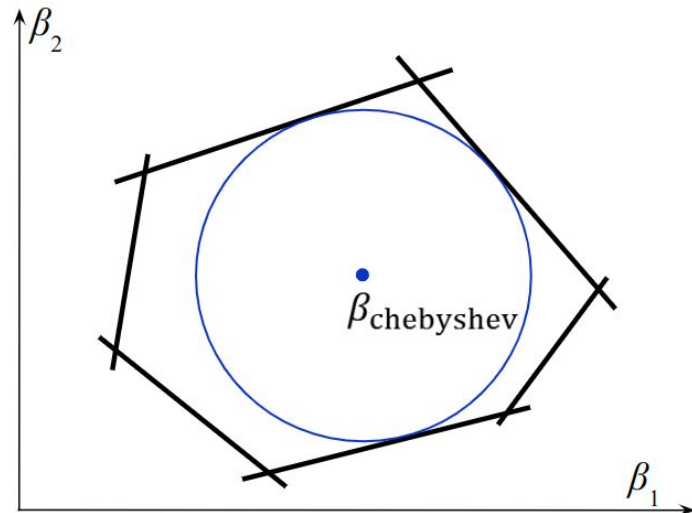
Центр Чебышёва (центр максимального вписанного шара)

□ Чебышевский центр $\beta_{\text{chebyshev}}$ — наиболее глубокая точка в ИМ

$$\beta_{\text{chebyshev}}(B) = \operatorname{argmax} \operatorname{dist}(\beta, \mathbb{R}^p \setminus B)$$

maximize r

subject to $x_i \beta + r \|x_i\|_2 \leq y_i + \varepsilon_i,$
 $-x_i \beta - r \|x_i\|_2 \leq -y_i + \varepsilon_i,$
 $i = 1, \dots, n;$
 $r \geq 0$



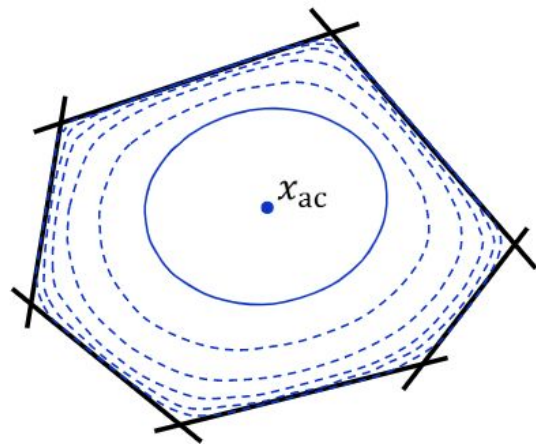
Аналитический центр

Аналитический центр множества, описываемого совокупностью линейных неравенств

$$a_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

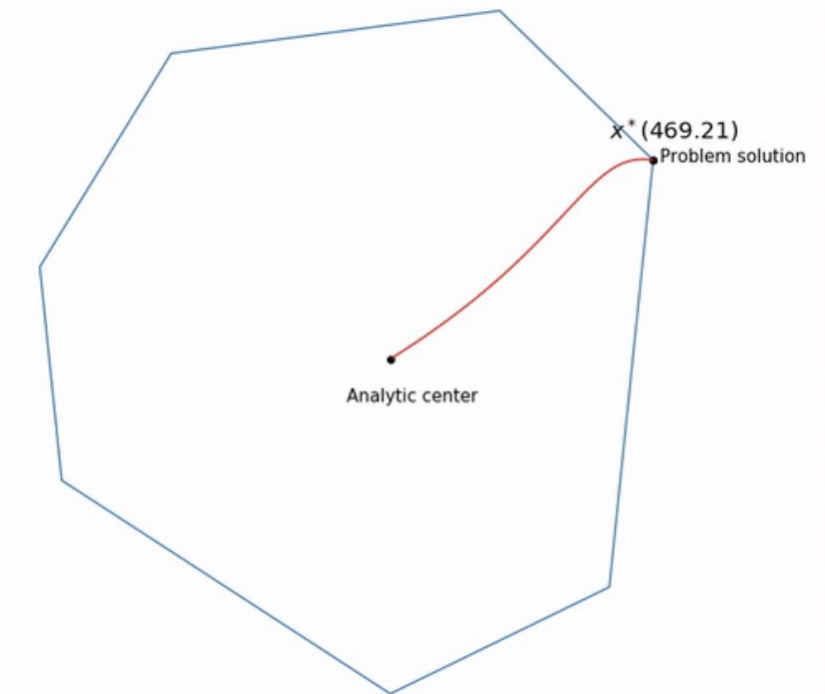
есть решение задачи безусловной оптимизации

$$\text{minimize} \quad - \sum_{i=1}^m \log(b_i - a_i x)$$



Аналитический центр

Аналитический центр — стартовая точка центрального пути в методах внутренней точки



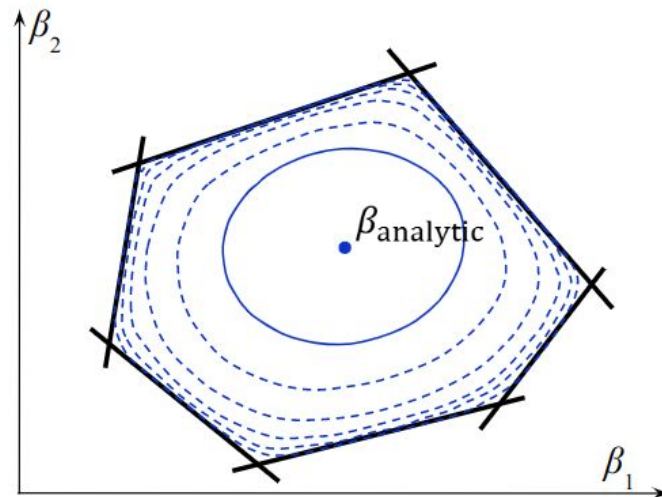
<https://habr.com/ru/articles/428794/>

Аналитический центр

- Аналитический центр β_{analytic} — точка, минимизирующая произведение расстояний до граничных плоскостей ИМ

$$\text{minimize } -\sum_{i=1}^n \log(y_i + \varepsilon_i - x_i \beta) + \log(-y_i + \varepsilon_i + x_i \beta)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & y_i + \varepsilon_i - x_i \beta \geq 0, \\ & -y_i + \varepsilon_i + x_i \beta \geq 0, \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

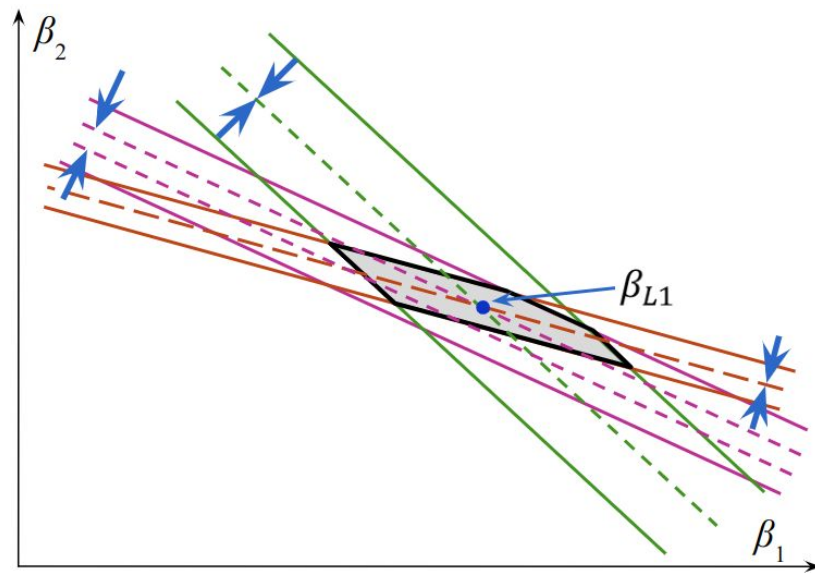


L_1 -центр

- L_1 -центр β_{L1} — аргумент минимума суммы коэффициентов масштабирования интервалов ошибок

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^n w_i$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & x_i \beta - \varepsilon_i w_i \leq y_i, \\ & -x_i \beta - \varepsilon_i w_i \leq -y_i, \\ & w_i \geq 0, \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$



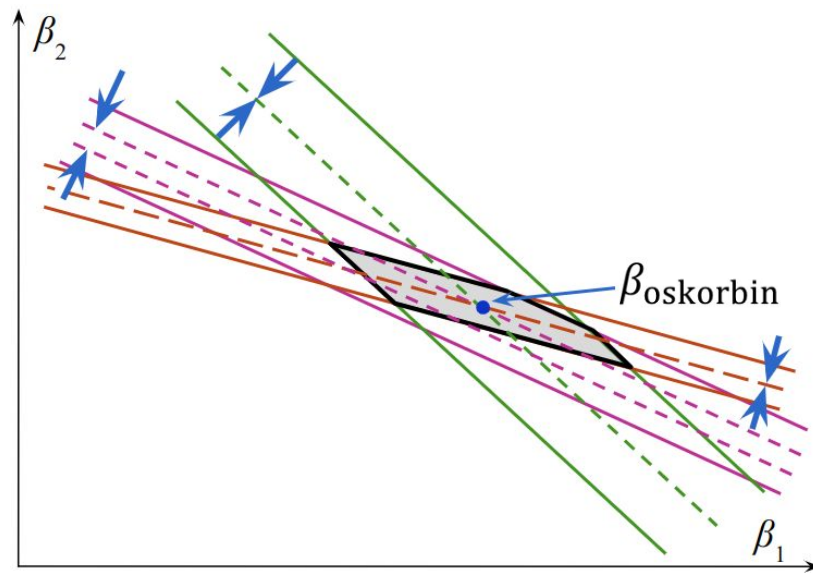
Жилин С.И. Нестатистические методы и модели построения и анализа зависимостей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук – Барнаул, 2004.

Центр Оскорбина

- Центр Оскорбина β_{oskorbin} — L_1 -центр с дополнительным ограничением равенства всех коэффициентов масштабирования w_i : $w_i = w$

minimize w

subject to $x_i\beta - \varepsilon_i w \leq y_i,$
 $-x_i\beta - \varepsilon_i w \leq -y_i,$
 $w \geq 0,$
 $i = 1, \dots, n.$

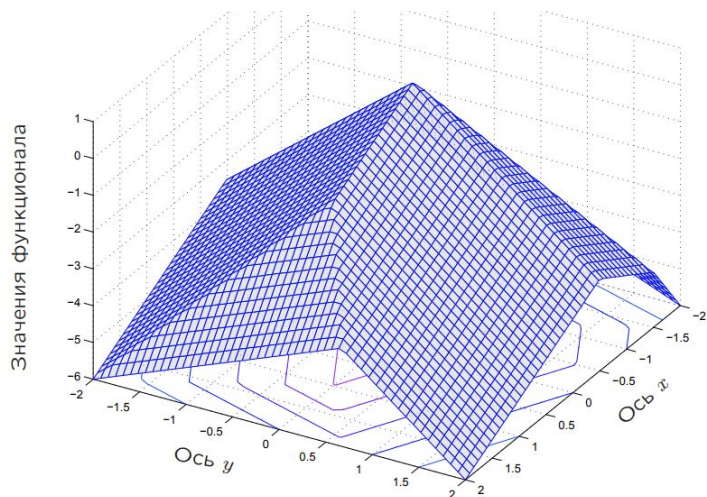


Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённости // Известия Алтайского государственного университета. – 1998. – №. 1 (5). – С. 37-40. (Программа MCN, АлтГУ, Барнаул, 1987).

Центр максимума согласования

Распознающий функционал для интервального вектора $\mathbf{b}$ и точечной матрицы $\mathbf{A}$

$$U_{ss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}$$

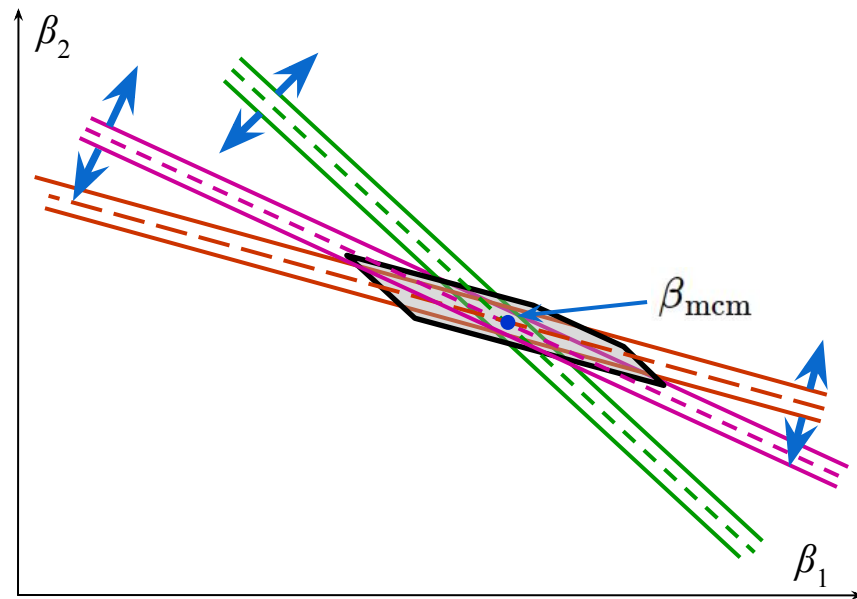


Шарый С.П. Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Изв. АН. Теория и сист. управления, 2017 (6), 3–19.

Центр максимума согласования

- ❑ Центр максимума согласования β_{mcm} — первая точка, появляющаяся при равномерном раздувании интервалов вокруг значений y_i

$$\beta_{\text{mcm}} = \arg \max_{\beta \in B} \text{Uss}(\beta, X, [y - \varepsilon, y + \varepsilon])$$



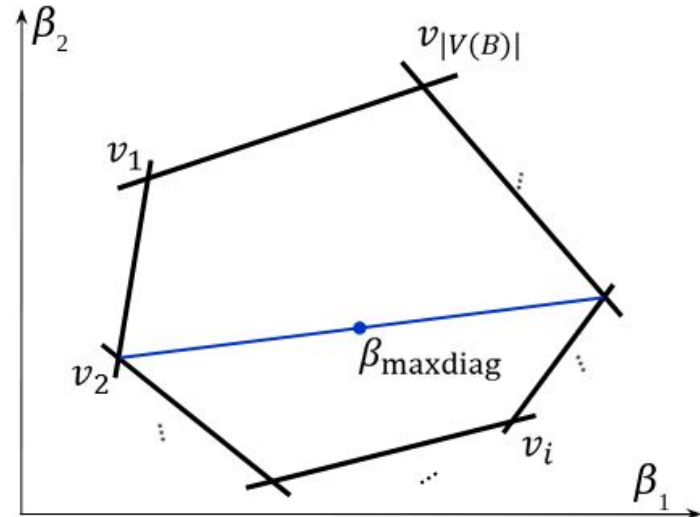
Центр максимальной диагонали

- ❑ Центр максимальной диагонали $\beta_{\max\text{diag}}$ — средняя точка между наиболее удаленными вершинами ИМ

$$\beta_{\max\text{diag}} = \frac{1}{2}(v_1^* + v_2^*)$$

$$(v_1^*, v_2^*) = \arg \max_{v_1, v_2 \in V(B)} \text{dist}(v_1, v_2)$$

$V(B) = \{v_i\}$ — множество вершин
информационного
множества B

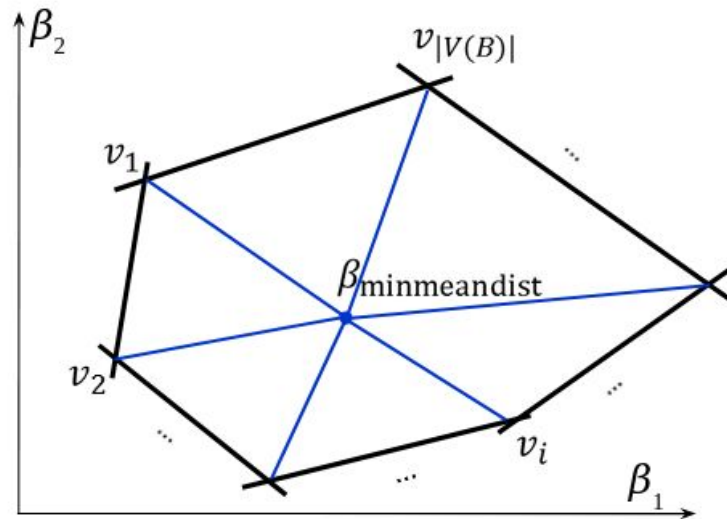


Центр, наиболее точный в среднем

- ❑ Центр тяжести $\beta_{\min\text{meandist}}$ — точка, наименее удаленная (в среднем) от вершин информационного множества

$$\text{minimize } \frac{1}{|V(B)|} \sum_{i=1}^{|V(B)|} \text{dist}(v_i, \beta)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & x_i \beta \leq y_i + \varepsilon_i, \\ & -x_i \beta \leq -y_i + \varepsilon_i, \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

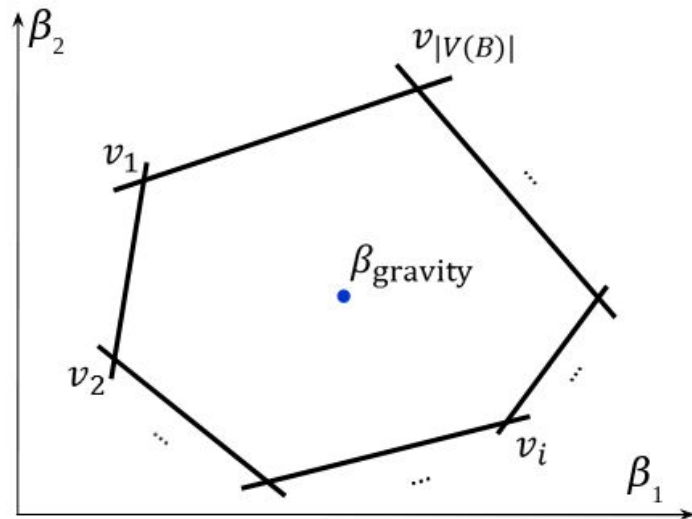


Вошинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56, No. 7. – С. 76-81.

Центр тяжести (центроид)

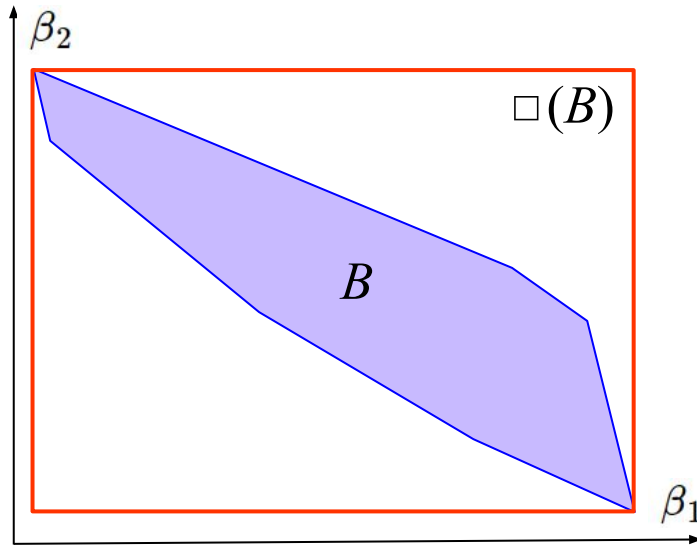
- ❑ Центр тяжести β_{gravity} — точка с усреднёнными координатами вершин ИМ

$$\beta_{\text{gravity}} = \overline{V(B)}$$



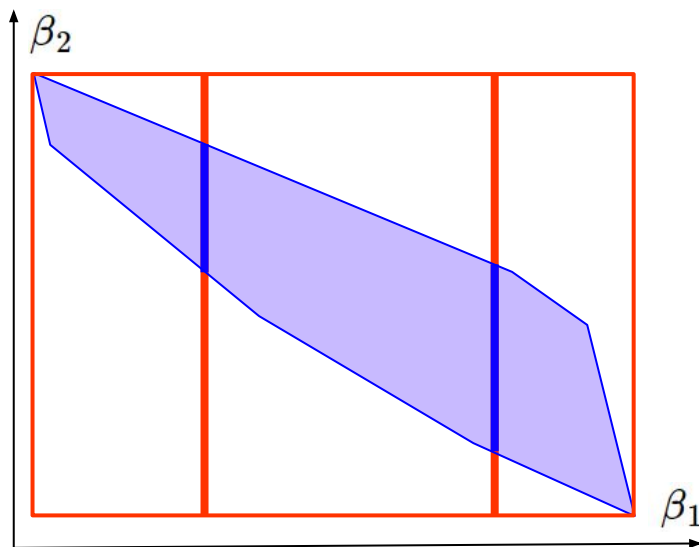
Плотность интервальных оценок

$$\text{density}(\square(B)) = \frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(\square(B))}$$

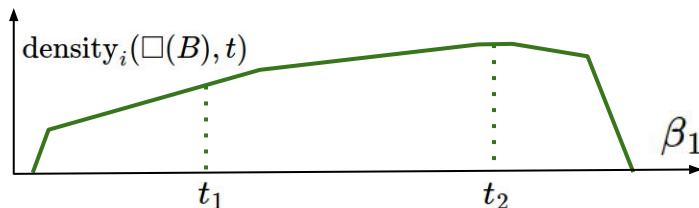


Плотность интервальных оценок

$$\text{density}(\square(B)) = \frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(\square(B))}$$

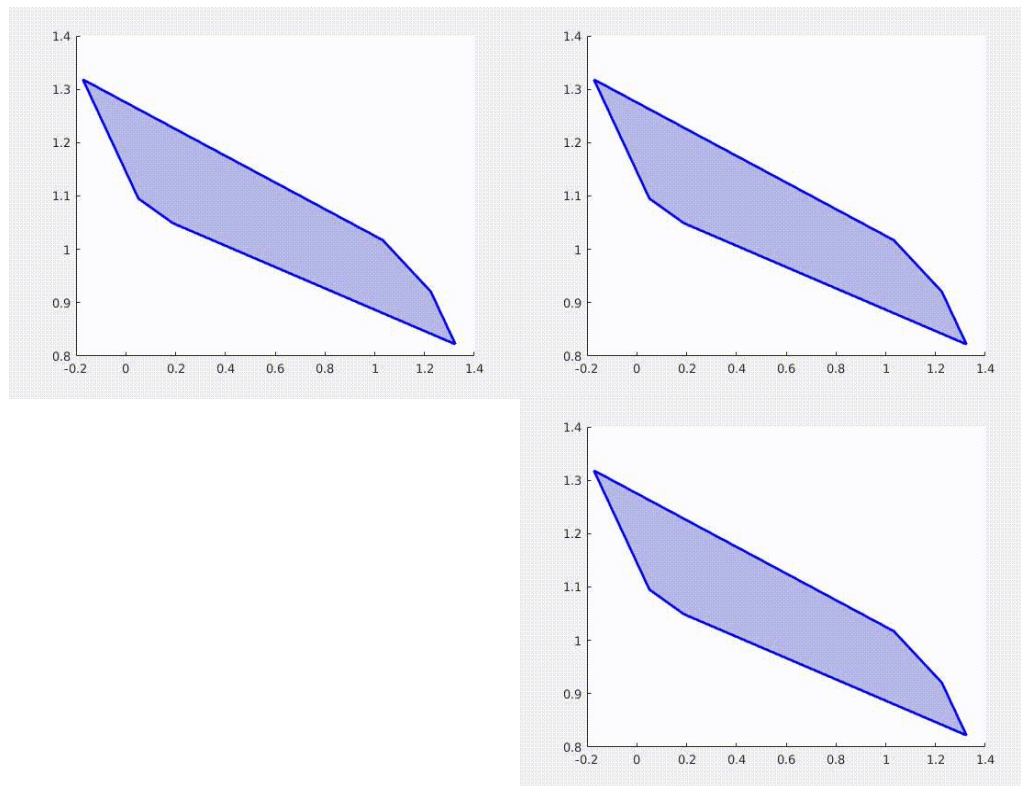


$$\text{density}_i(\square(B), t) = \frac{\text{vol}(B |_{\beta_i=t})}{\text{vol}(\square(B) |_{\beta_i=t})}$$



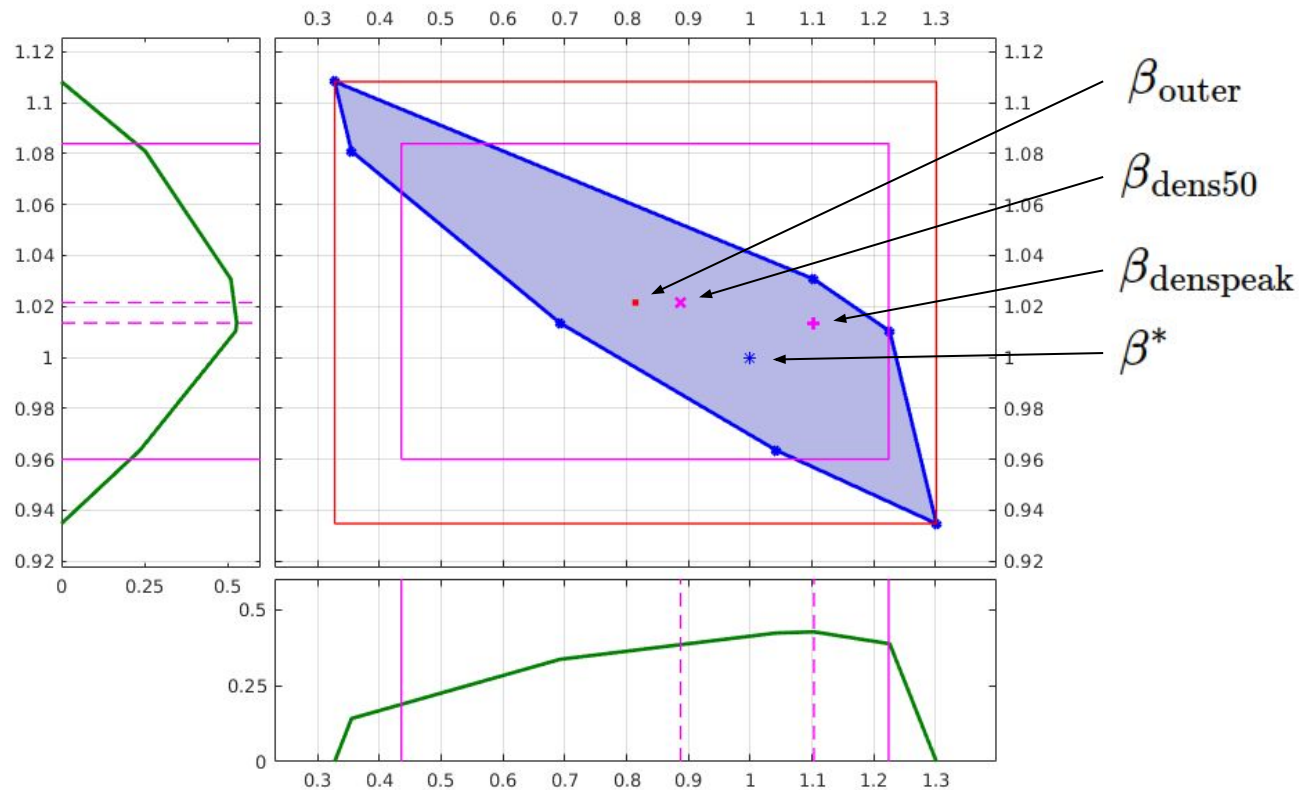
Жилин С.И. Плотность интервальных оценок // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике "МАК-2017" — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017

Плотность интервальных оценок



Жилин С.И. Плотность интервальных оценок // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике "МАК-2017" — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017

Центр максимальной плотности



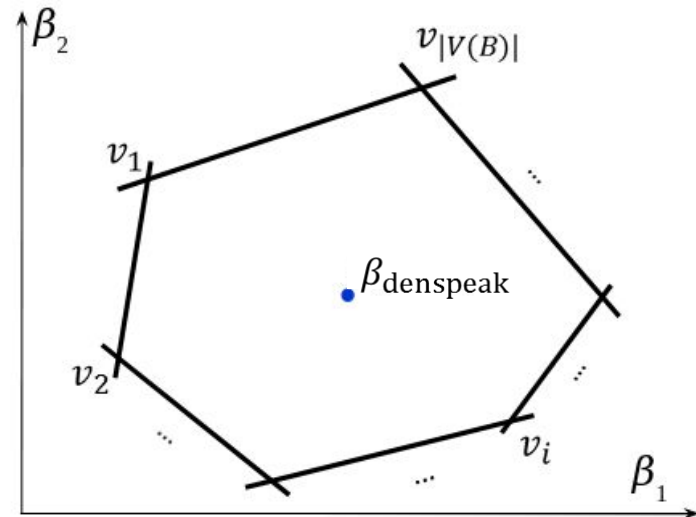
Жилин С.И. Плотность интервальных оценок // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике "МАК-2017" — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017

Центр максимальной плотности

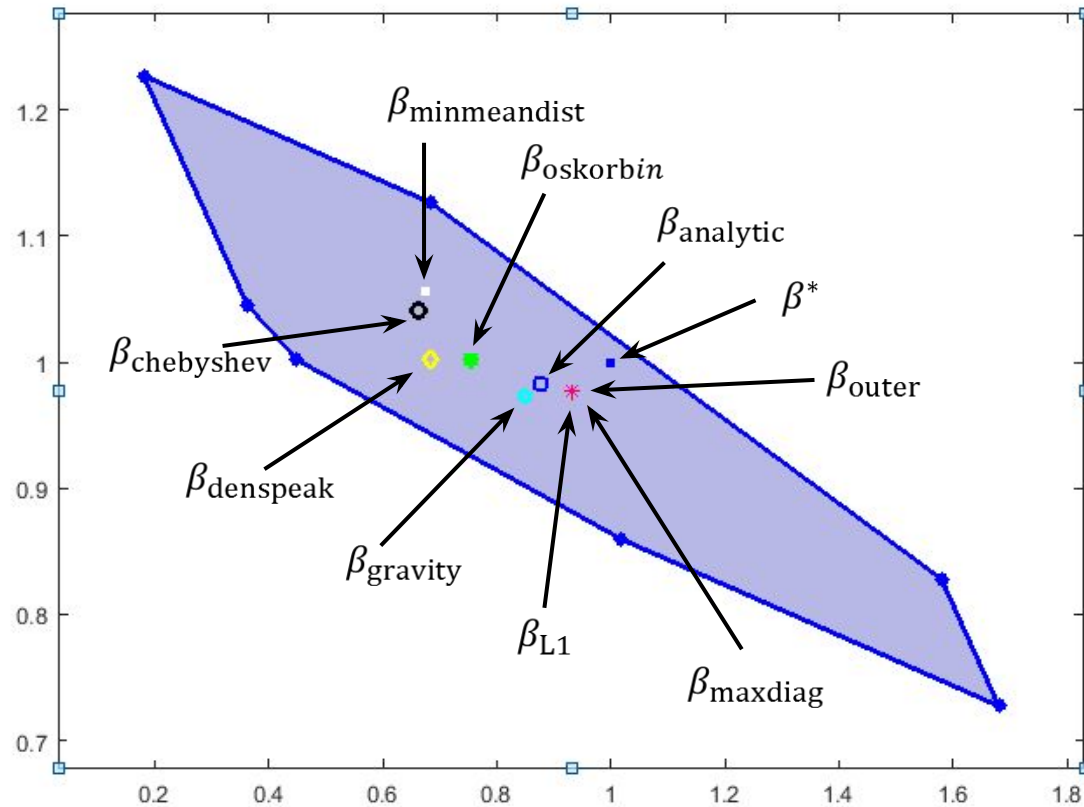
- Центр максимальной плотности β_{denspeak} — точка, задаваемая аргументами максимумов по координатным функциям плотности интервальной оценки ИМ

$$d_i = \arg \max_t \text{density}_i(\square(B), t)$$

$$\beta_{\text{denspeak}} = (d_1, \dots, d_p)$$



Центры ИМ: пример



Энциклопедия центров треугольника

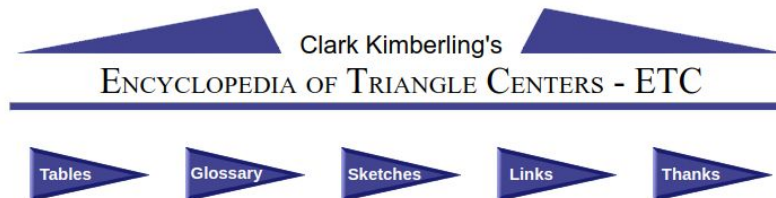
❑ 66000 точек
(на 22.01.2025)

❑ Описание центра
включает:

- трилинейные и барицентрические координаты
- связь с линиями, на которых они лежат
- связь с другими идентифицированными точками

❑ Именуются по фамилиям авторов или по названиями звёзд

- X(770) названа точкой Акамара



This is PART 1: Introduction and Centers X(1) - X(1000)

PART 1: Introduction and Centers X(1) - X(1000)	PART 2: Centers X(1001) - X(3000)	PART 3: Centers X(3001) - X(5000)
PART 4: Centers X(5001) - X(7000)	PART 5: Centers X(7001) - X(10000)	PART 6: Centers X(10001) - X(12000)
PART 7: Centers X(12001) - X(14000)	PART 8: Centers X(14001) - X(16000)	PART 9: Centers X(16001) - X(18000)
PART 10: Centers X(18001) - X(20000)	PART 11: Centers X(20001) - X(22000)	PART 12: Centers X(22001) - X(24000)
PART 13: Centers X(24001) - X(26000)	PART 14: Centers X(26001) - X(28000)	PART 15: Centers X(28001) - X(30000)
PART 16: Centers X(30001) - X(32000)	PART 17: Centers X(32001) - X(34000)	PART 18: Centers X(34001) - X(36000)
PART 19: Centers X(36001) - X(38000)	PART 20: Centers X(38001) - X(40000)	PART 21: Centers X(40001) - X(42000)
PART 22: Centers X(42001) - X(44000)	PART 23: Centers X(44001) - X(46000)	PART 24: Centers X(46001) - X(48000)
PART 25: Centers X(48001) - X(50000)	PART 26: Centers X(50001) - X(52000)	PART 27: Centers X(52001) - X(54000)
PART 28: Centers X(54001) - X(56000)	PART 29: Centers X(56001) - X(58000)	PART 30: Centers X(58001) - X(60000)
PART 31: Centers X(60001) - X(62000)	PART 32: Centers X(62001) - X(64000)	PART 33: Centers X(64001) - X(66000)
PART 34: Centers X(66001) - X(68000)	PART 35: Centers X(68001) - X(70000)	PART 36: Centers X(70001) - X(72000)

<https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

Энциклопедия геометрии многоугольников

MATHEMATICS

Chris van Tienhoven



Geometry

MATHEMATICS

Chris van Tienhoven



Geometry

ENCYCLOPEDIA OF QUADRI-FIGURES (EQF)

This encyclopedia is dedicated to Quadri-figures.

A QUADRI-FIGURE is a figure consisting of 4 points and/or 4 lines.

EQF-DEFINITIONS

Quadrangle points and other objects

A quadrangle is a geometrical figure consisting of 4 points.

There is no order in these points.

Abbreviation: **QA**

PROPERTIES

A Quadrangle has:

- 6 connecting lines
- 4 component triangles
- 3 component quadrilaterals
- 1 diagonal triangle

Quadrilateral points and other objects

A quadrilateral is a geometrical figure consisting of 4 lines.

There is no order in these lines.

Abbreviation: **QL**

Quadricon points and other objects

A quadricon is a geometrical figure consisting of 4 consecutive points and 4 consecutive connecting lines.

There is a cyclic order in these points & lines.

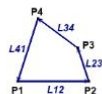
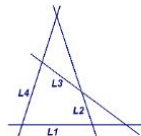
Abbreviation: **QG**

A Quadrilateral has:

- 6 intersection points
- 4 component triangles
- 3 component quadrilaterals
- 1 diagonal triangle

A Quadricon has:

- 2 pairs of opposite lines
- 2 pairs of opposite points
- 2 diagonals
- 1 third diagonal
- 1 diagonal crosspoint



<https://chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia>

ENCYCLOPEDIA OF POLYGON GEOMETRY (EPG)

This encyclopedia is dedicated to Poly-figures.

*A Poly-figure is a figure consisting of n points and/or n lines,
where n is a natural number.*

EPG-DEFINITIONS

Points and other objects in an n-Point Configuration

An **n-Point** is a geometrical figure consisting of n points,
where n is a natural number.

There is no order in these points.

Abbreviation: **nP**

Points and other objects in an n-Line Configuration

An **n-Line** is a geometrical figure consisting of n lines,
where n is a natural number.

There is no order in these lines.

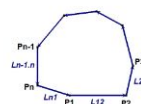
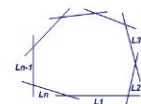
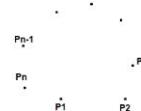
Abbreviation: **nL**

Points and other objects in an n-Gon Configuration

An **n-Gon** is a geometrical figure consisting of n
consecutive points and n consecutive connecting lines,
where n is a natural number.

There is a cyclic order in these points & lines.

Abbreviation: **nG**



<https://chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia-of-poly-geometry>

Центры информационного множества

Экспериментальное численное исследование центров

Вопросы

- ❑ Как точность точечного оценивания параметров зависимости с помощью различных центров ИМ зависит от
 - вида распределения ошибки y ,
 - количества наблюдений n ,
 - размерности p ?
- ❑ Значительно ли различаются отклонения различных центров от истинного значения параметров?
- ❑ Какой из центров ИМ “лучше”
 - Какой метод точнее?
 - Какой метод чаще других оказывается точнее?
 - Какой метод чаще других даёт неточные оценки?

Идея

Для зависимости $y = X\beta$ с известными параметрами $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ повторять N раз

Симулировать данные

$$D_{p,n} = (X, y, \varepsilon)$$



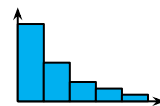
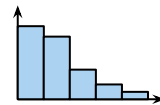
Вычислить $\hat{\beta}_{\text{method}}$,
каждым методом



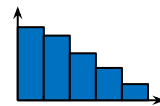
Вычислить
 $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta}_{\text{method}})$
для каждого method



Распределения
 $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta}_{\text{method}})$
для каждого метода



⋮



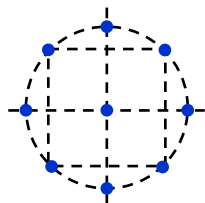
Сравнить
распределения
 $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta}_{\text{method}})$

Симуляция данных

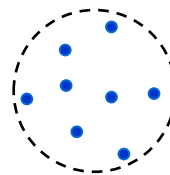
□ План эксперимента X

Пассивный

Полнофакторный, Бокса — Бенкена, центральный композитный, ...

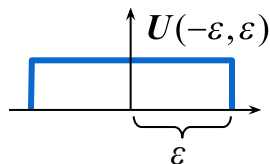


Случайный равномерный в шаре

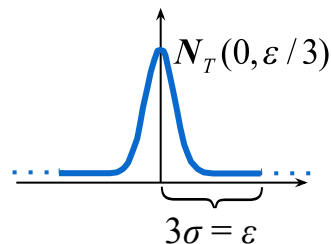


□ Распределение ошибки измерения y

Равномерное



Усеченное нормальное

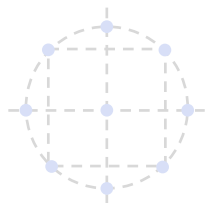


Симуляция данных

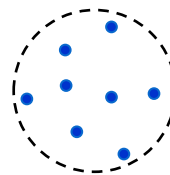
- План эксперимента X

Пассивный

Полнофакторный, Бокса — Бенкена, центральный композитный, ...

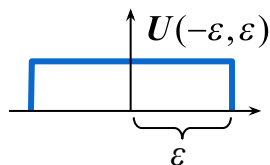


Случайный равномерный в шаре

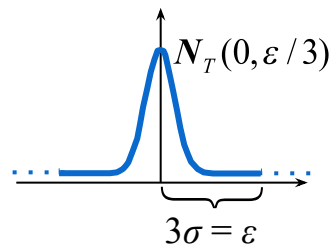


- Распределение ошибки измерения y

Равномерное

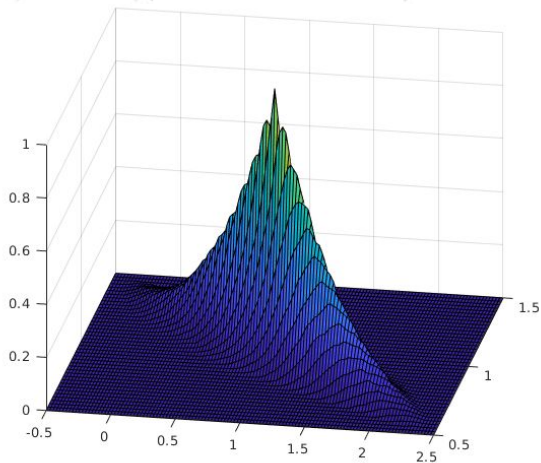
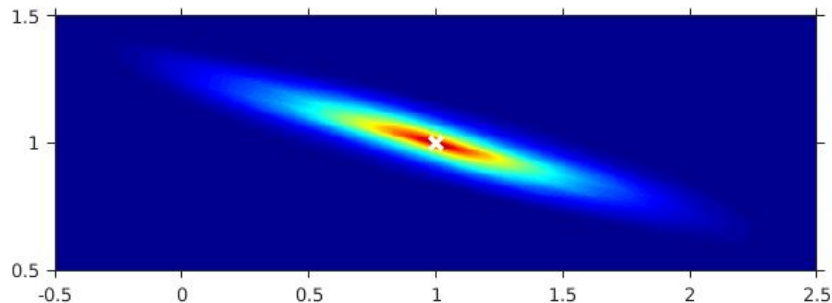


Усеченное нормальное

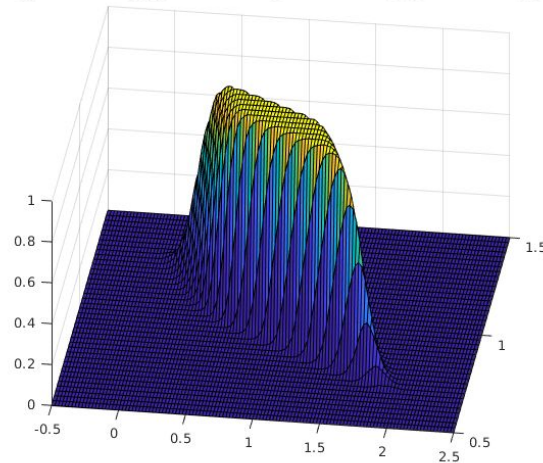
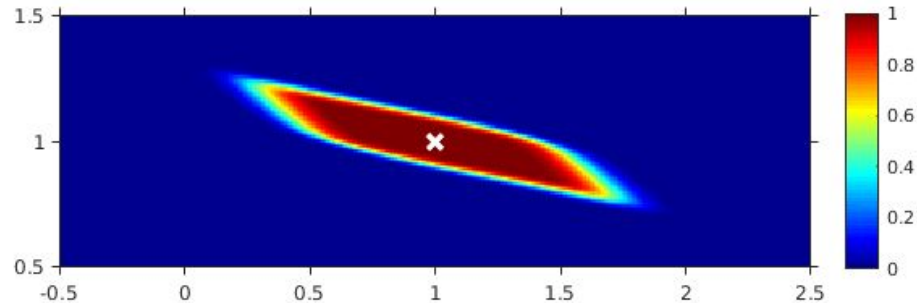


Вероятность принадлежности точек (β_1, β_2) ИМ

$$U(-\varepsilon, \varepsilon)$$

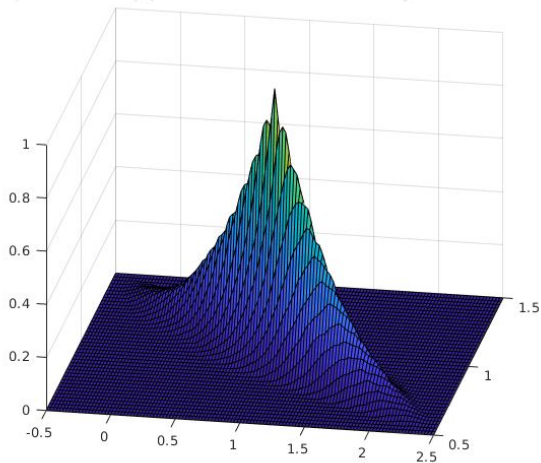
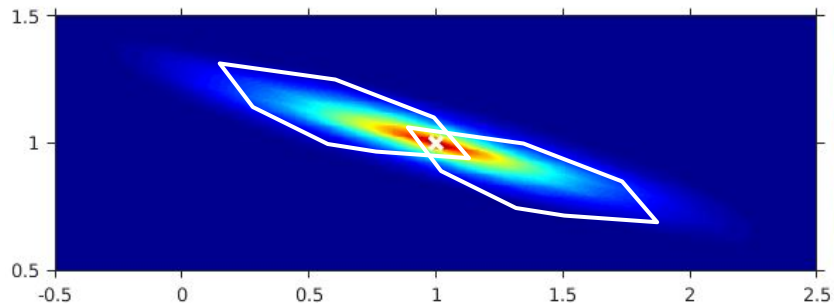


$$N_T(0, \varepsilon / 3)$$

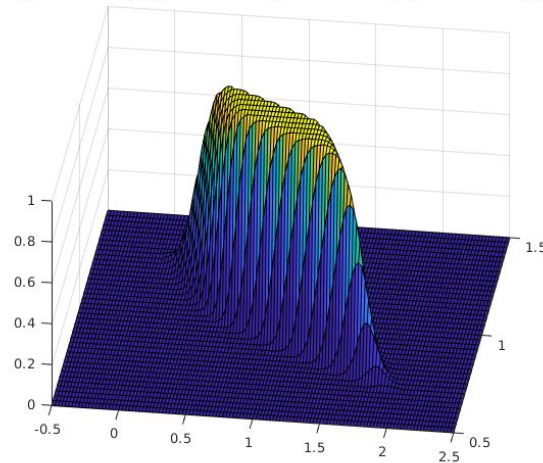
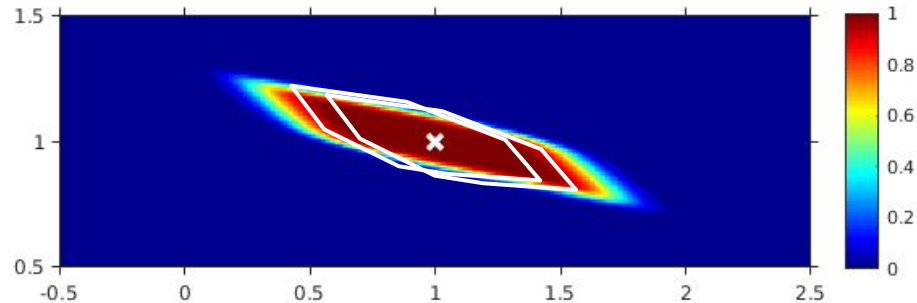


Вероятность принадлежности точек (β_1, β_2) ИМ

$$U(-\varepsilon, \varepsilon)$$



$$N_T(0, \varepsilon / 3)$$



Сценарий

Subalgorithm $dist = \text{SIMULATE} (methods, error_type, p, n_max, NX, NY)$

Input:

$methods$	list of center estimation methods;
$error_type$	error distribution type;
p	dimension of parameters vector $\beta \in \mathbb{R}^p$;
n_max	maximum number of observations in an estimation experiment
NX	number of X simulation runs
NY	number of y simulation runs

Output: $dist$ $(3p - 1) \times NX \times NY \times |methods|$ -array of values of $dist(\beta^*, \hat{\beta})$

begin

...

end.

Сценарий

Subalgorithm $dist = \text{SIMULATE}(methods, error_type, p, n_{max}, NX, NY)$

...

begin

$\beta^* := (1, 2, \dots, p)$

for $n := p + 1$ **to** n_{max} **do**

for $i := 1$ **to** NX **do**

$X :=$ Generate n points from $\mathbb{R}^p$ uniformly distributed in zero-centered ball

for $j := 1$ **to** NY **do**

$y^* := X\beta^*$

$e :=$ Generate random n -vector

 from distribution $error_type$ with the support $[-\varepsilon, \varepsilon]$

$y := y^* + e$

for each $method$ **in** $methods$ **do**

$\hat{\beta}_{method} :=$ Estimate center of FPS

 for model $y = X\beta + e$ and data (X, y, ε) using $method$

$dist(n, i, j, method) := dist(\beta^*, \hat{\beta})$

end;

Сценарий

Algorithm **MAIN**

begin

$methods := \{\text{outer, chebyshev, L1, oskorbin, analytic,}$
 $\text{maxdiag, minmeandist, gravity, maxdensity}\}$

$p_{min} := 2$

$p_{max} := 5$

$n_{max} := 21$

$NX := 100$

$NY := 50$

for $p := p_{min}$ **to** p_{max} **do**

$error_type := \text{'uniform'}$

$dist_U(p) := \text{SIMULATE}(methods, error_type, p, n_{max}, NX, NY)$

$error_type := \text{'truncated_normal'}$

$dist_N(p) := \text{SIMULATE}(methods, error_type, p, n_{max}, NX, NY)$

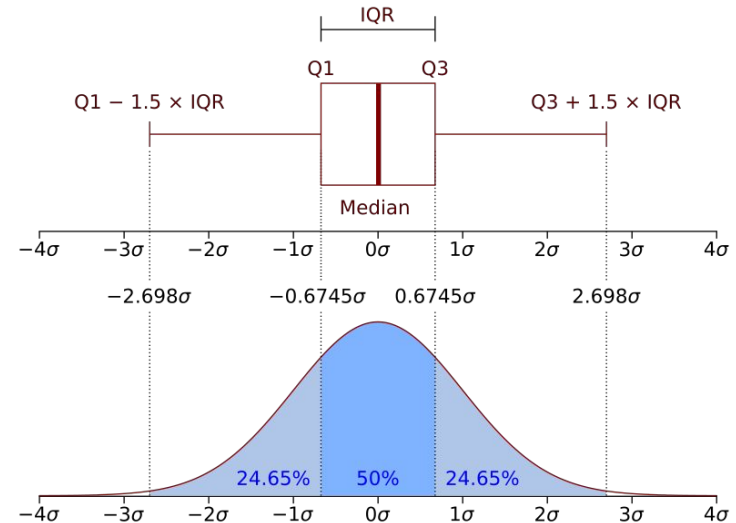
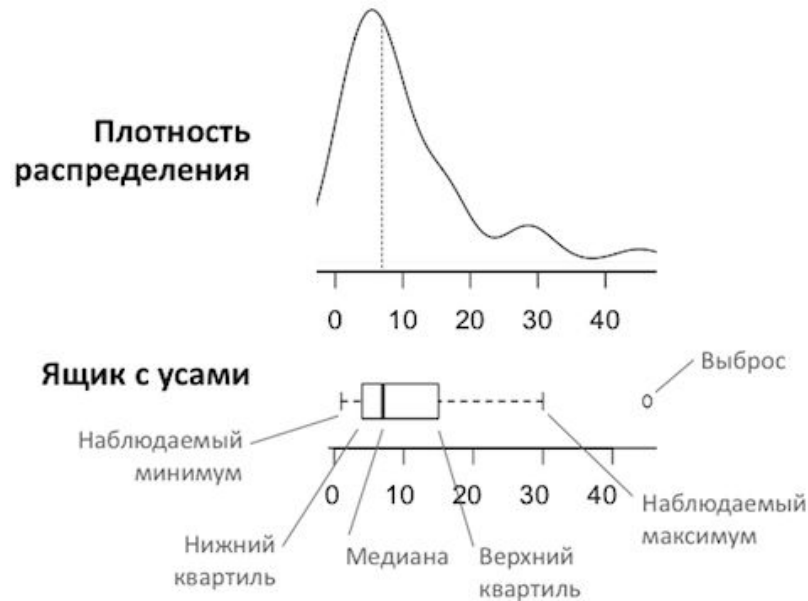
end.

Центры информационного множества

Результаты

Диаграмма размаха (box plot)

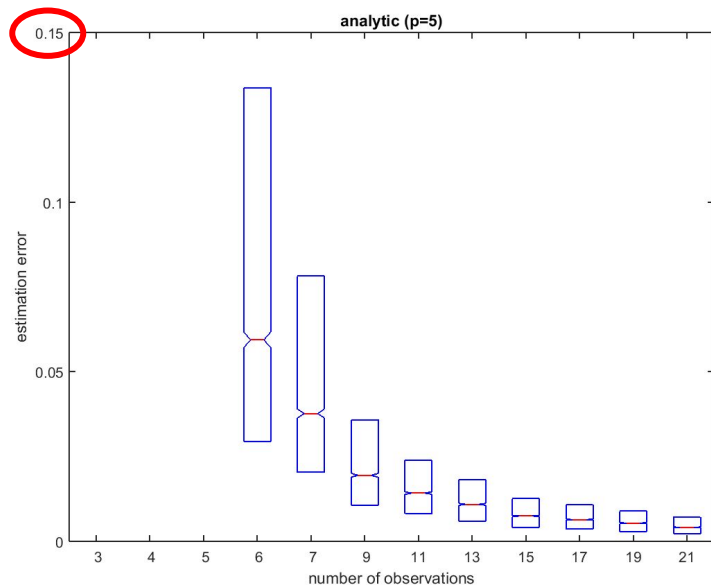
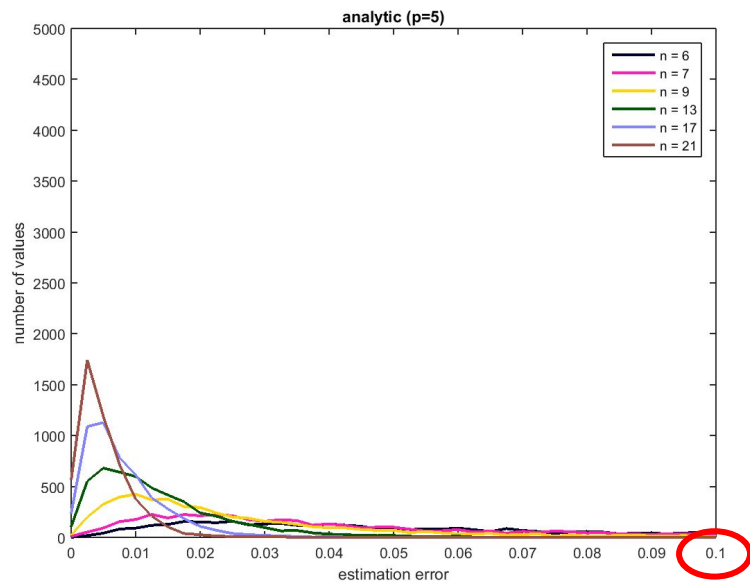
- ❑ Ящик с усами, усиковая диаграмма, коробчатая диаграмма, блочная диаграмма с ограничителями выбросов
- ❑ Box-and-whiskers diagram, box-and-whiskers plot, box plot



https://ru.wikipedia.org/wiki/Ящик_с_усами

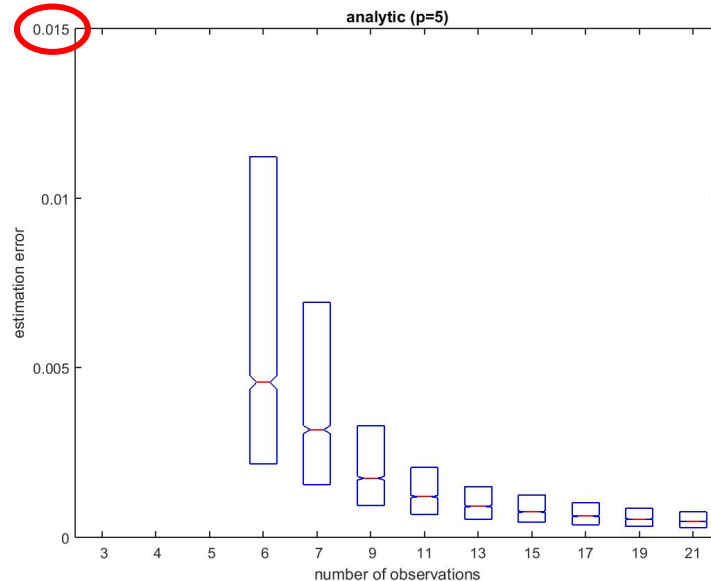
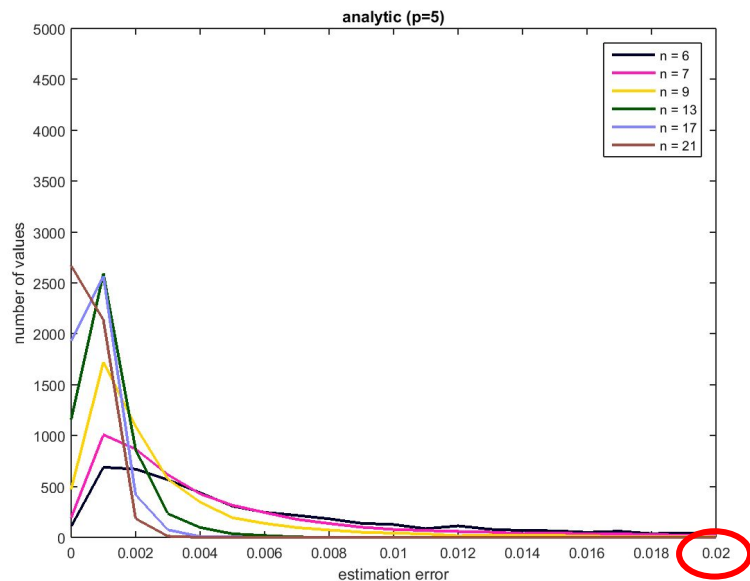
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки

Аналитический центр



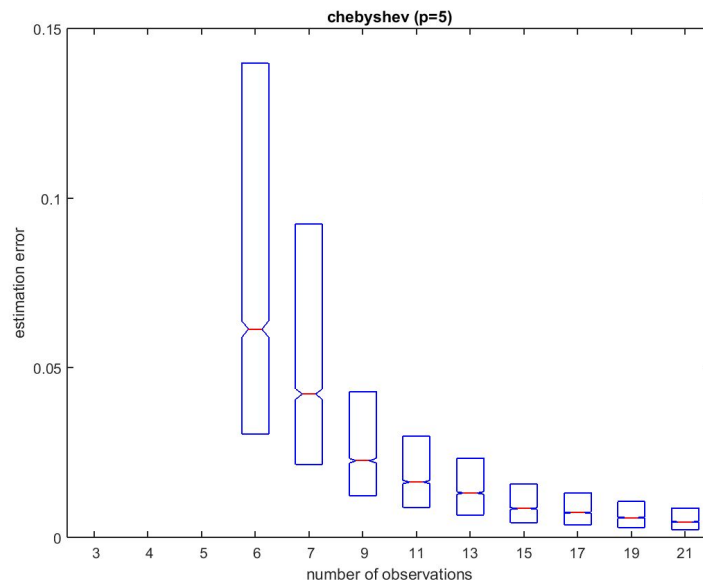
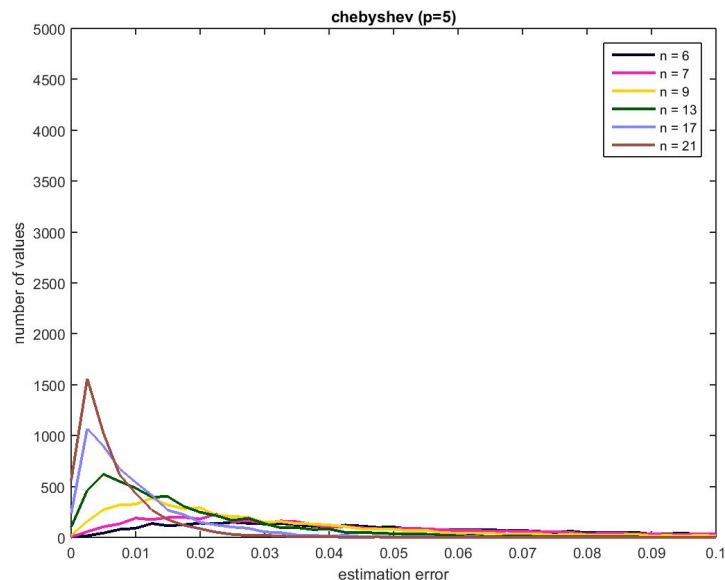
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки

❑ Аналитический центр



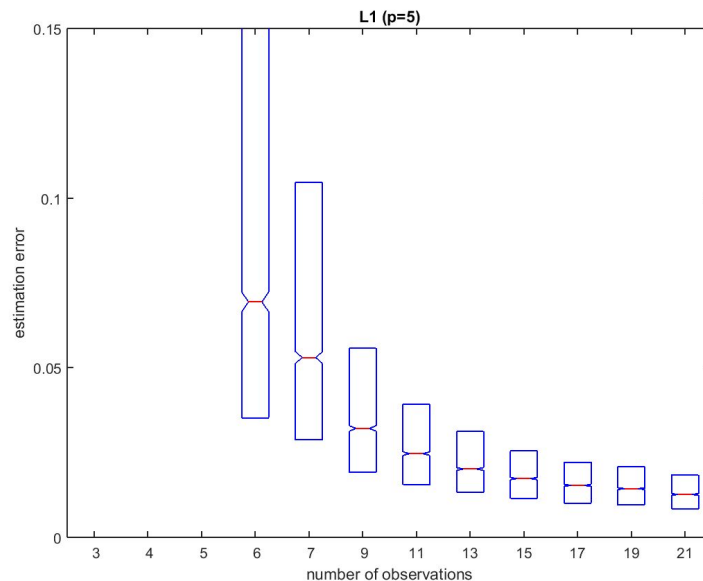
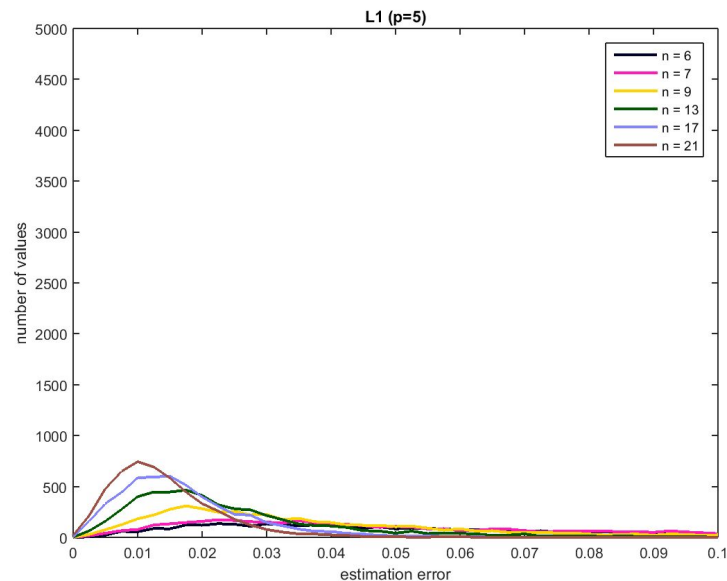
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки

❑ Чебышёвский центр (центр вписанного шара)



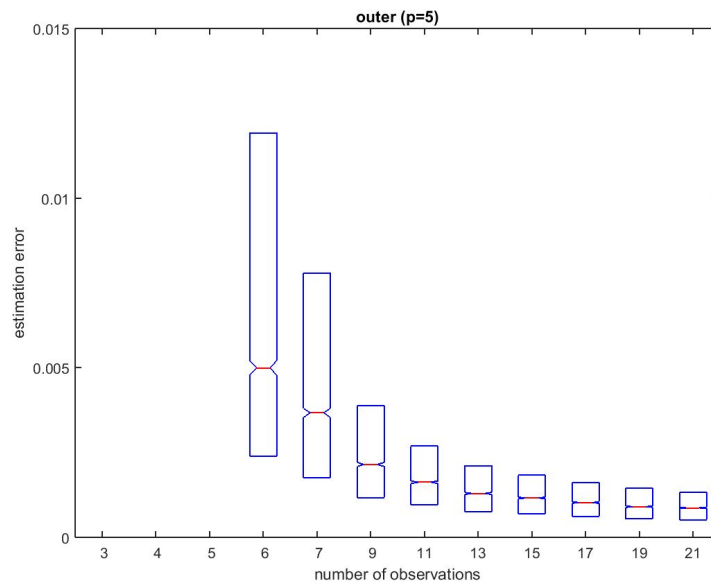
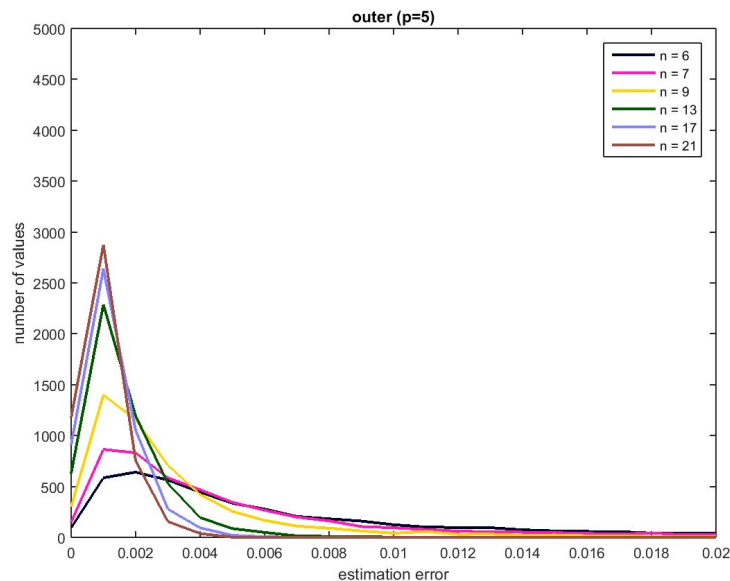
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки

□ L_1 -центр



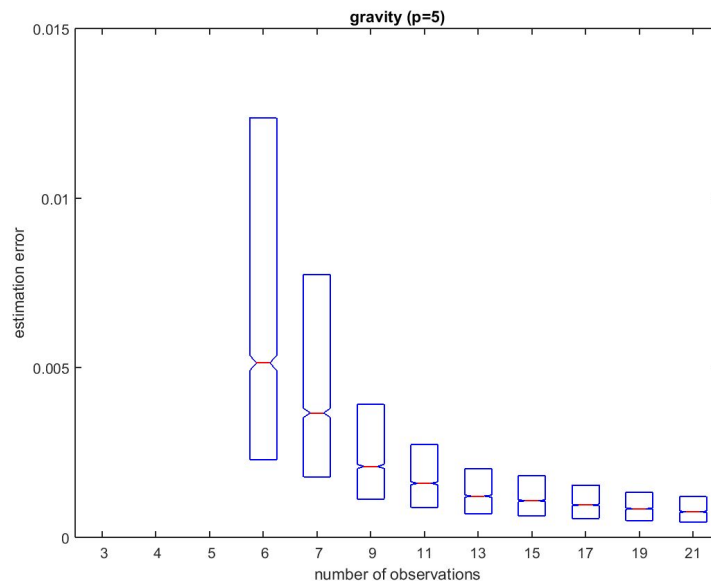
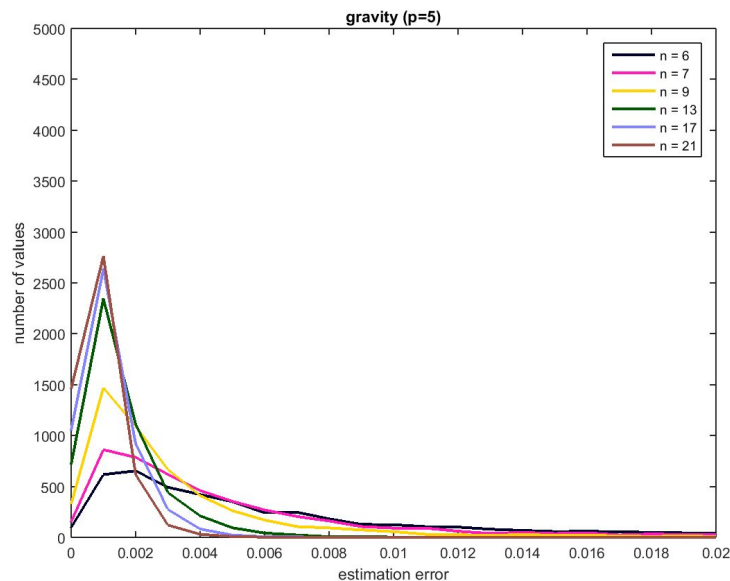
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки

□ Центр внешней интервальной оболочки

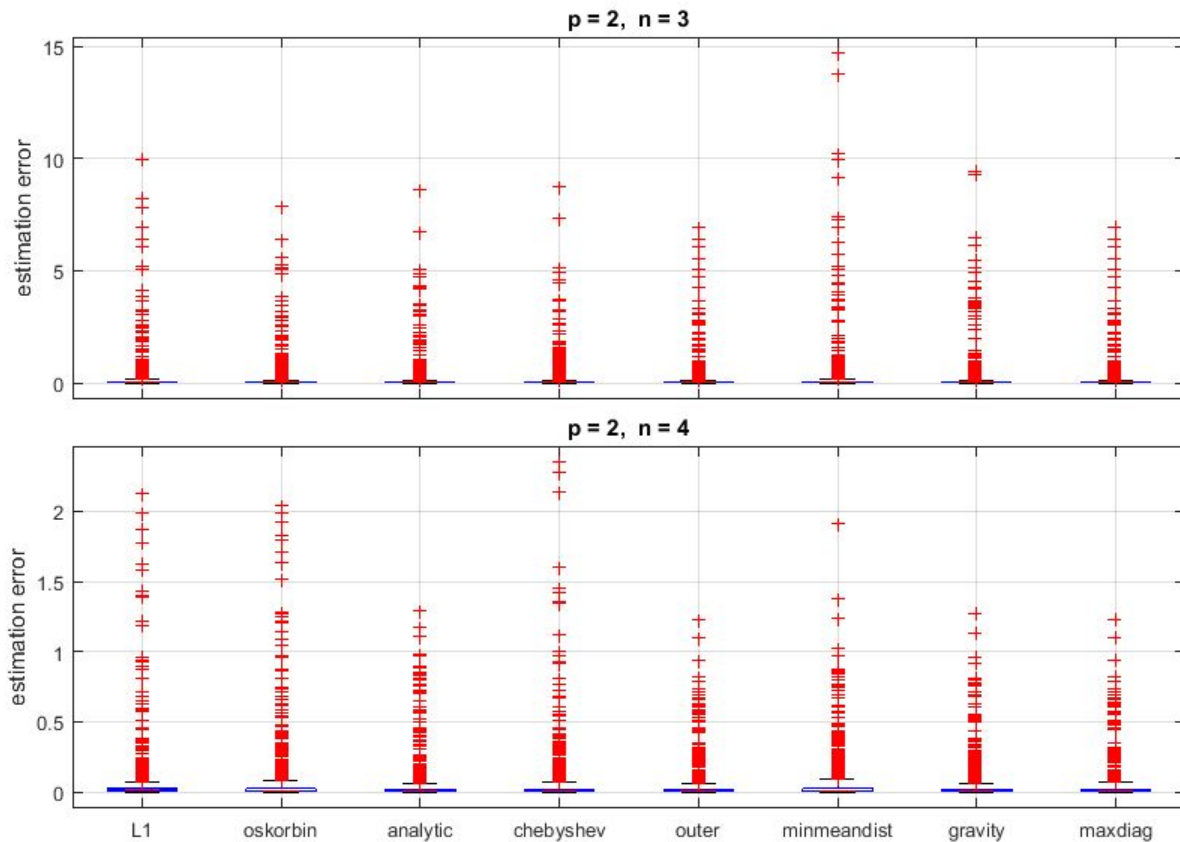


Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки

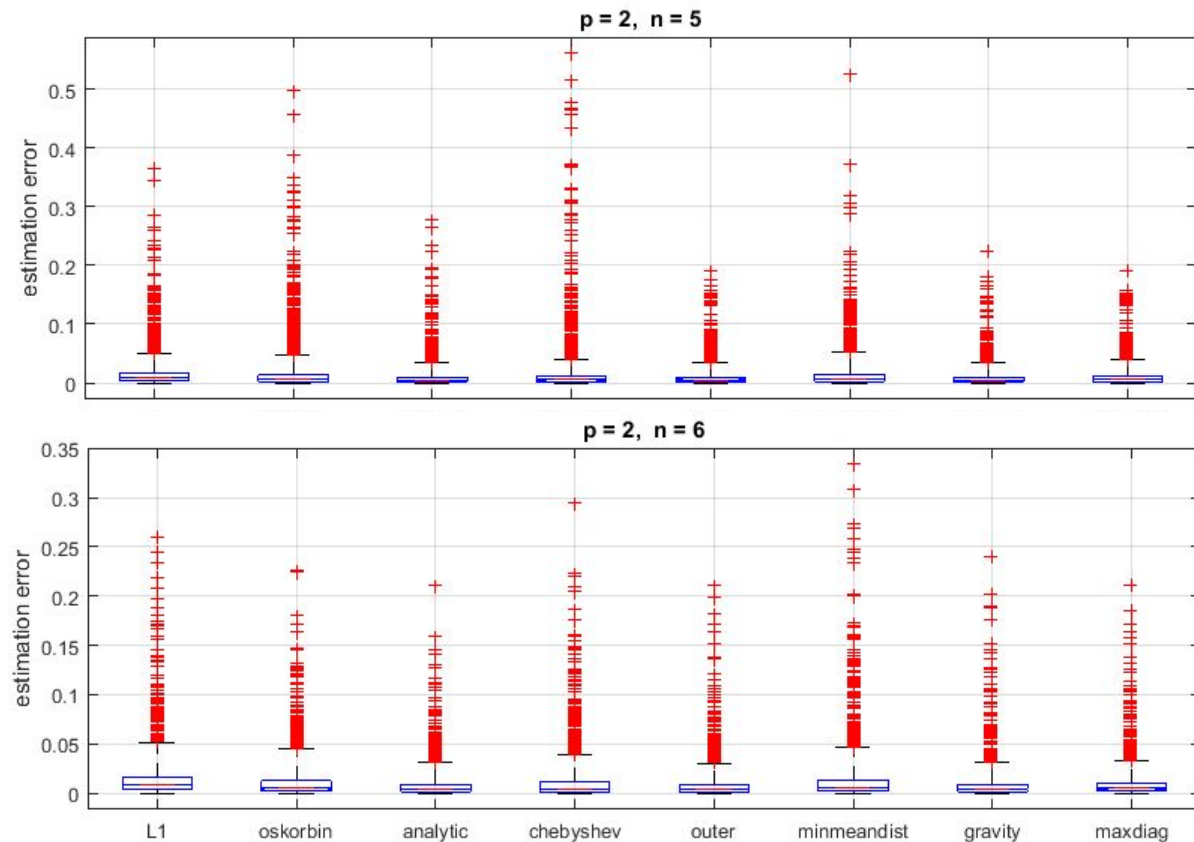
□ Центр тяжести (центроид)



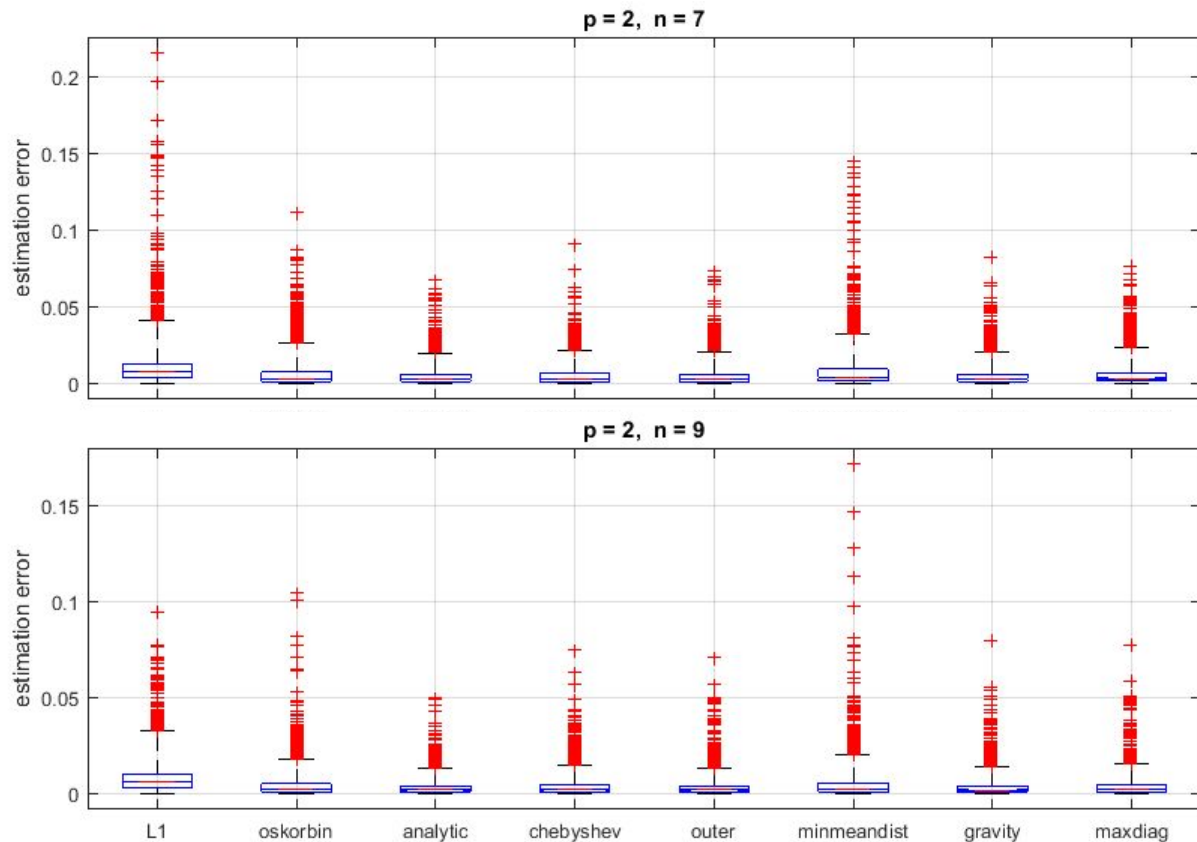
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



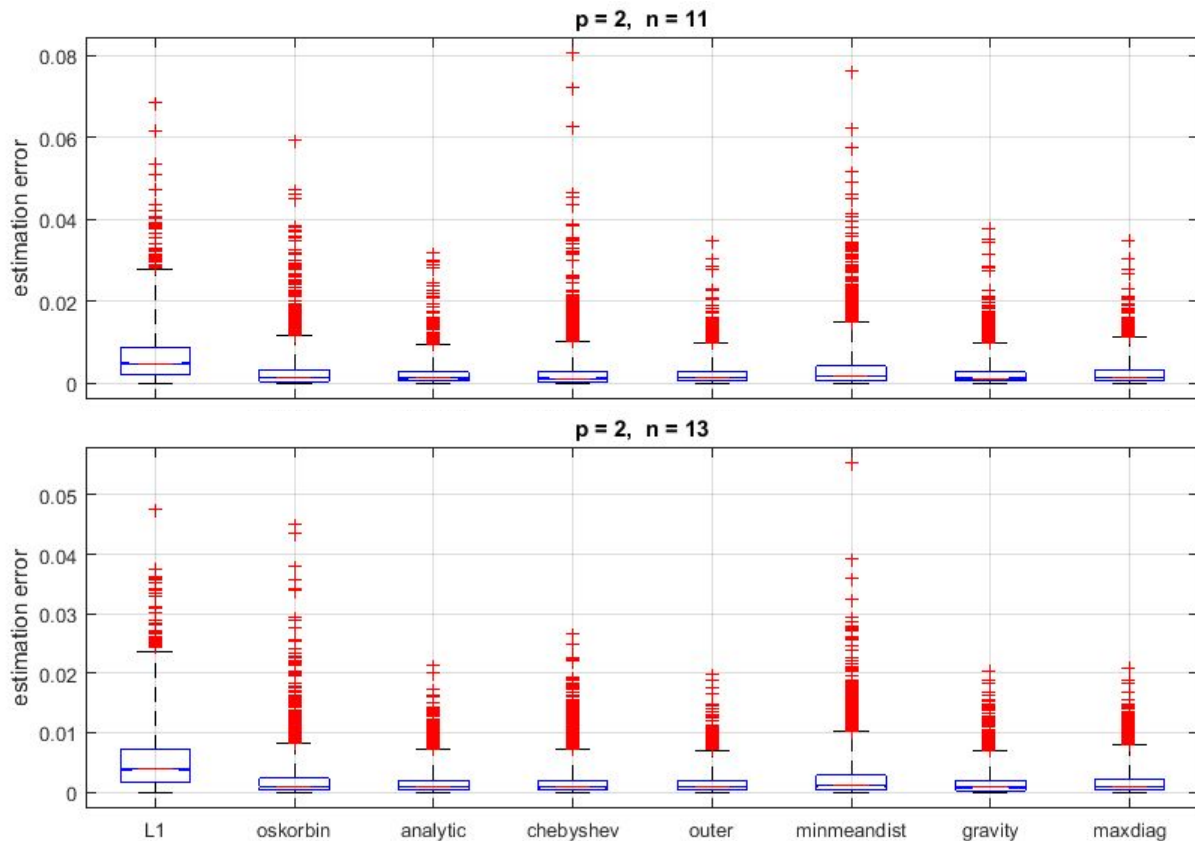
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



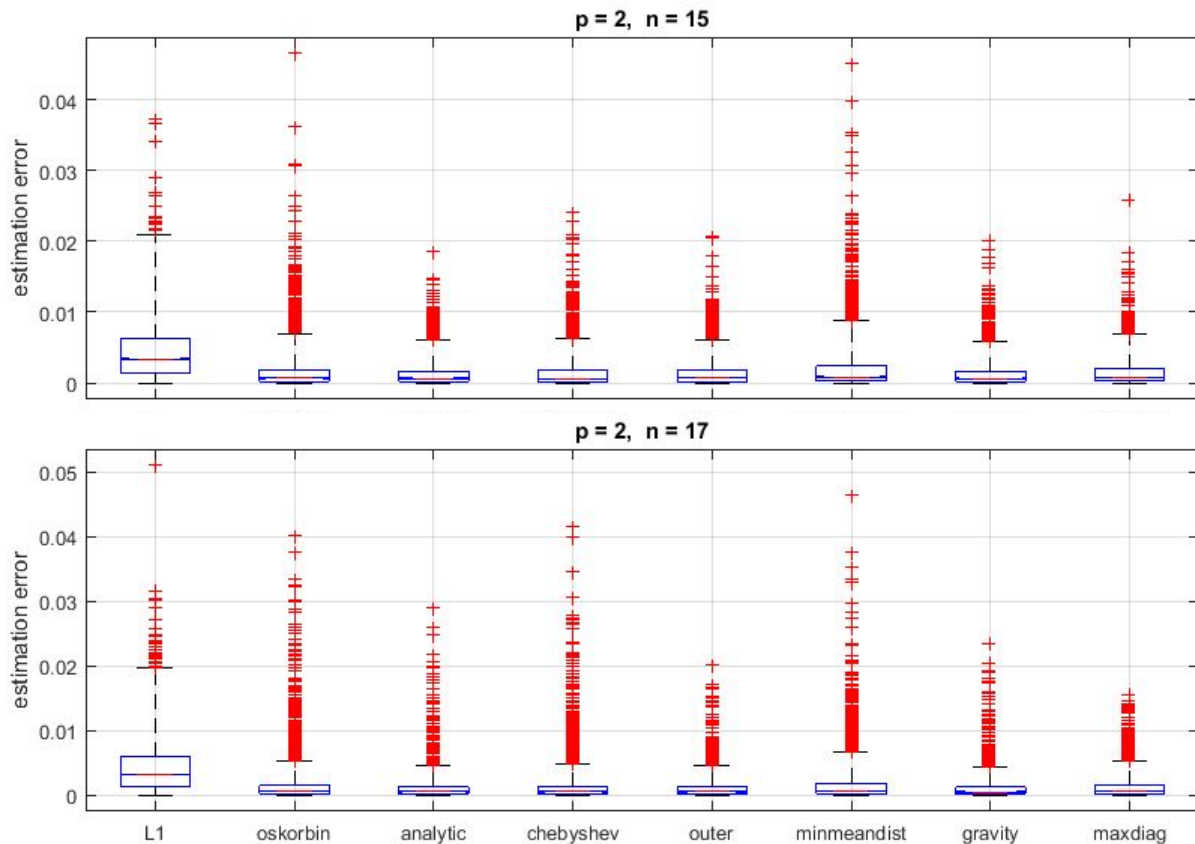
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



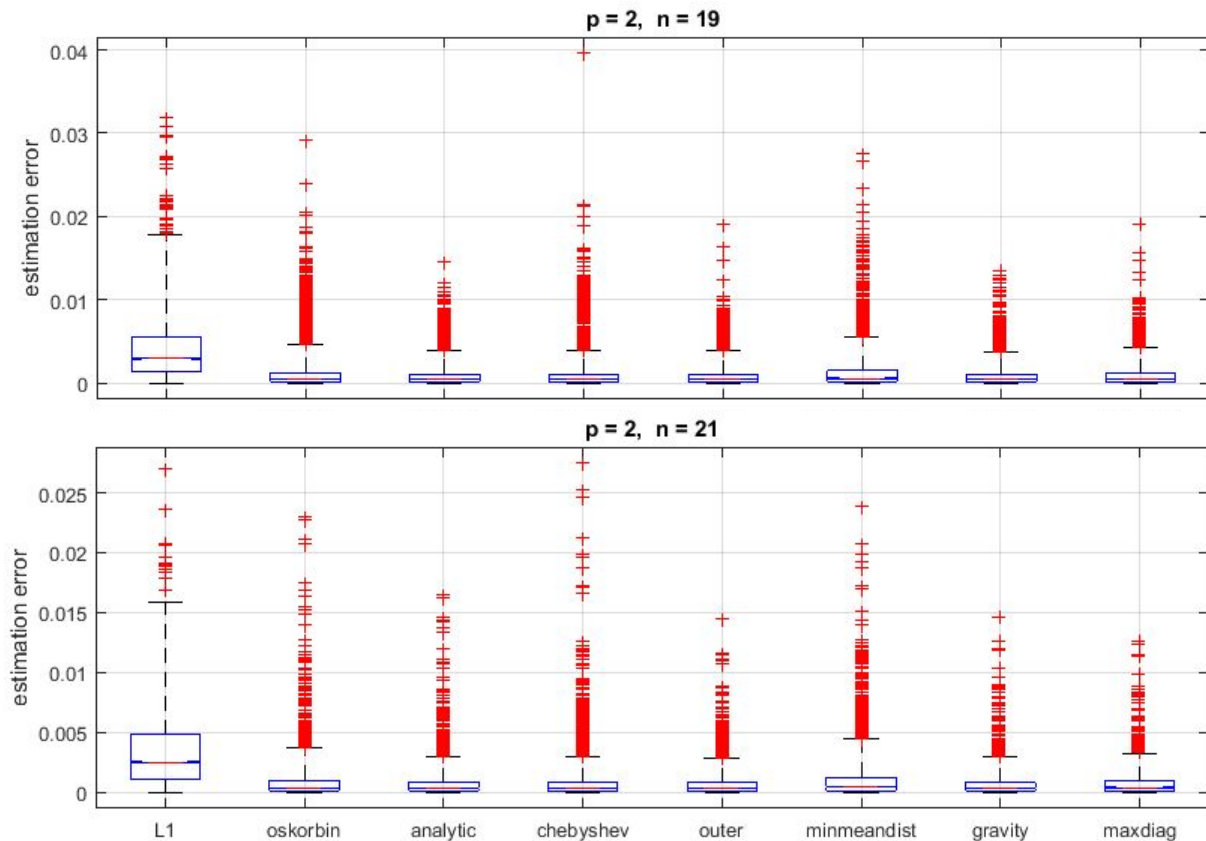
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



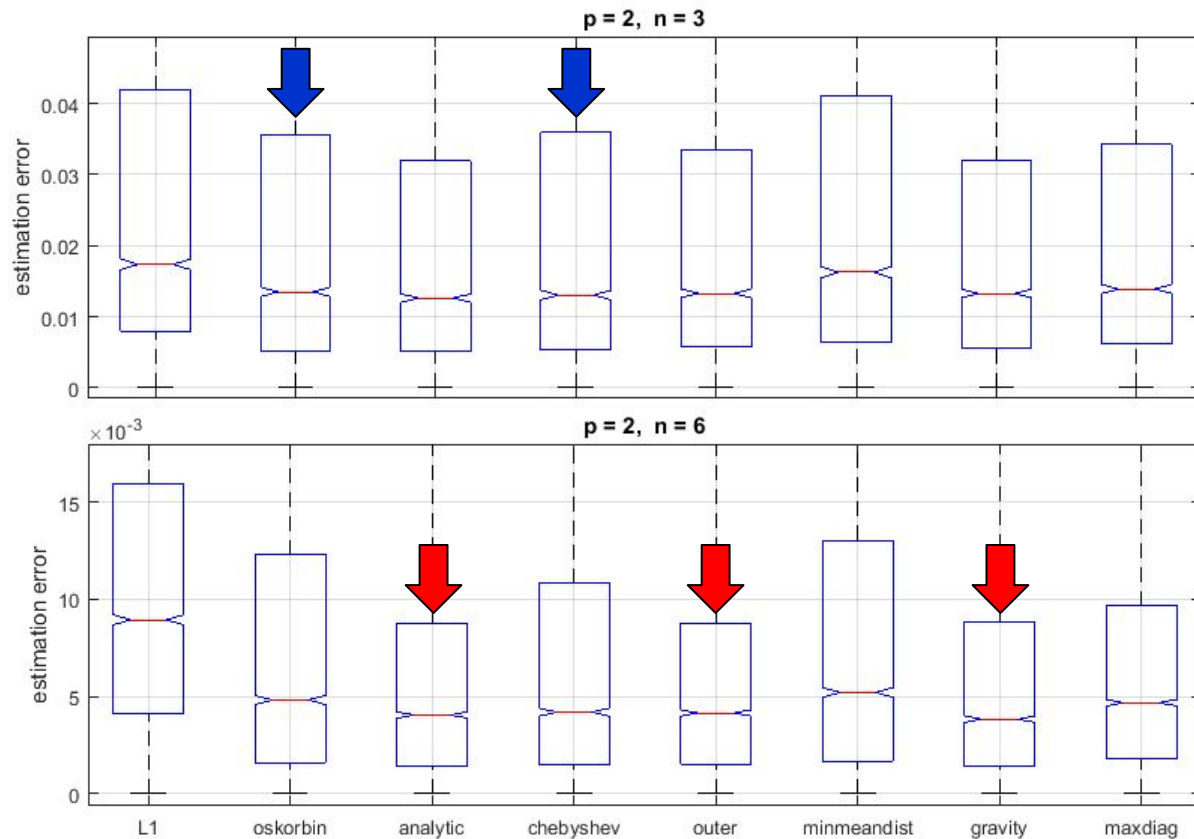
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



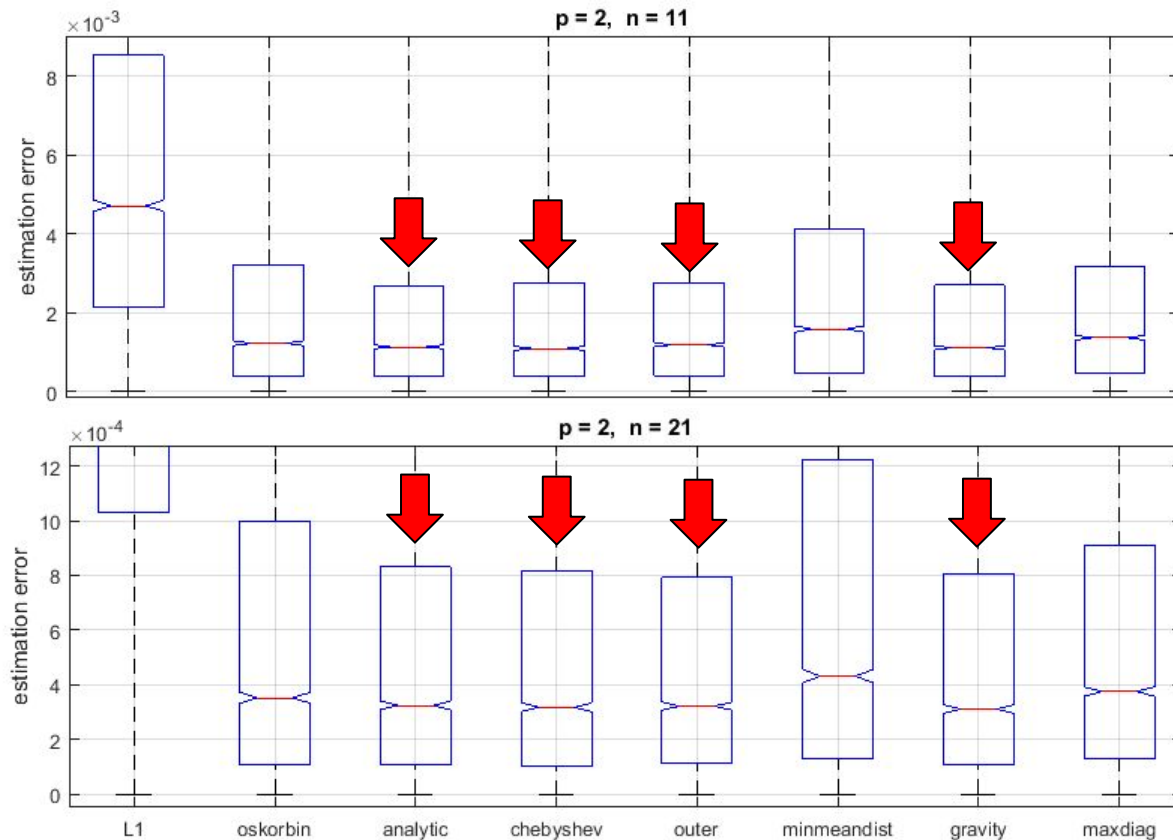
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



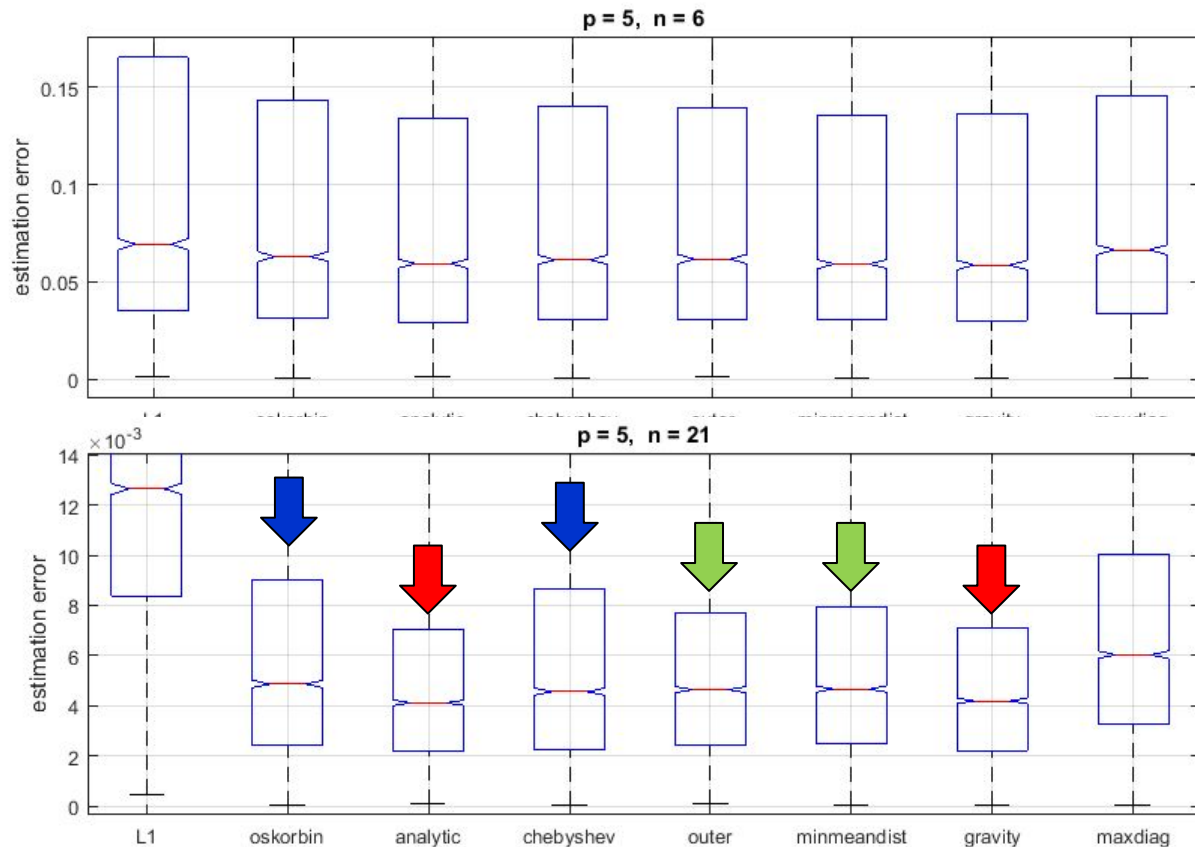
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



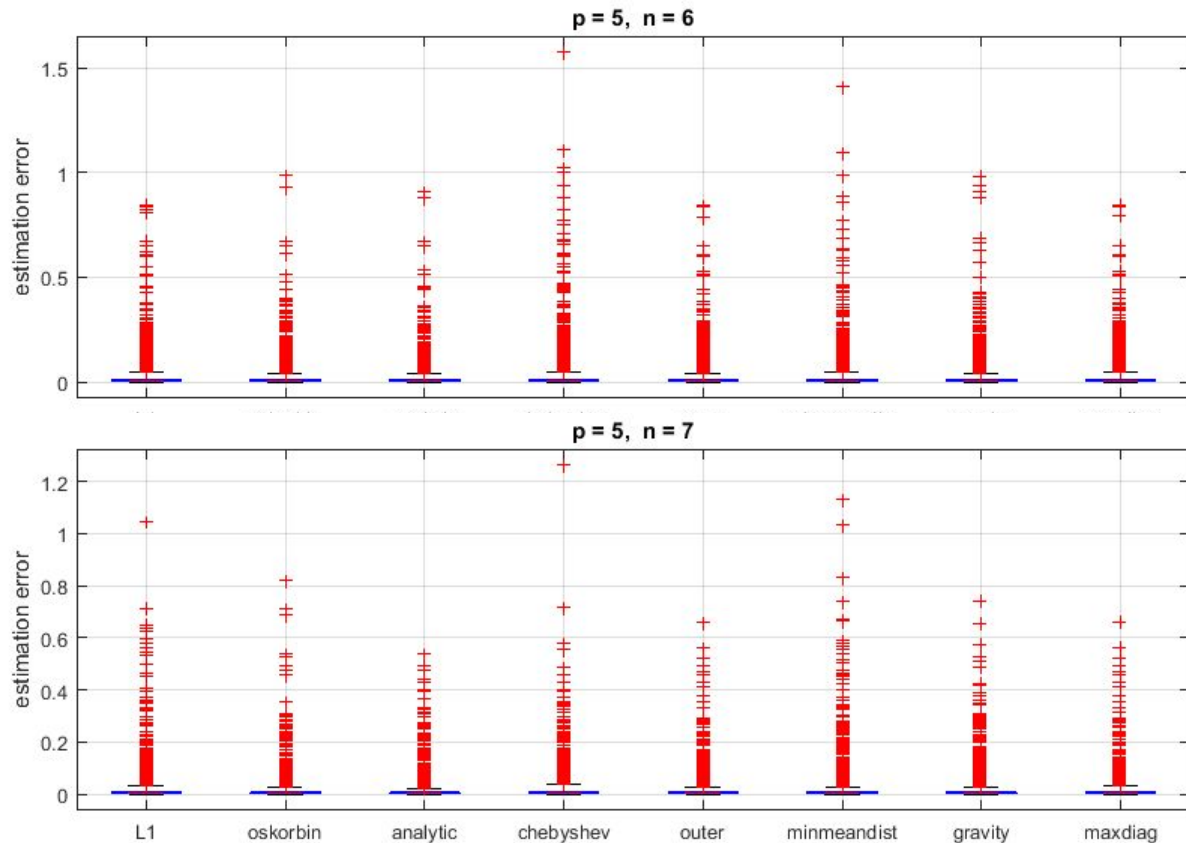
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



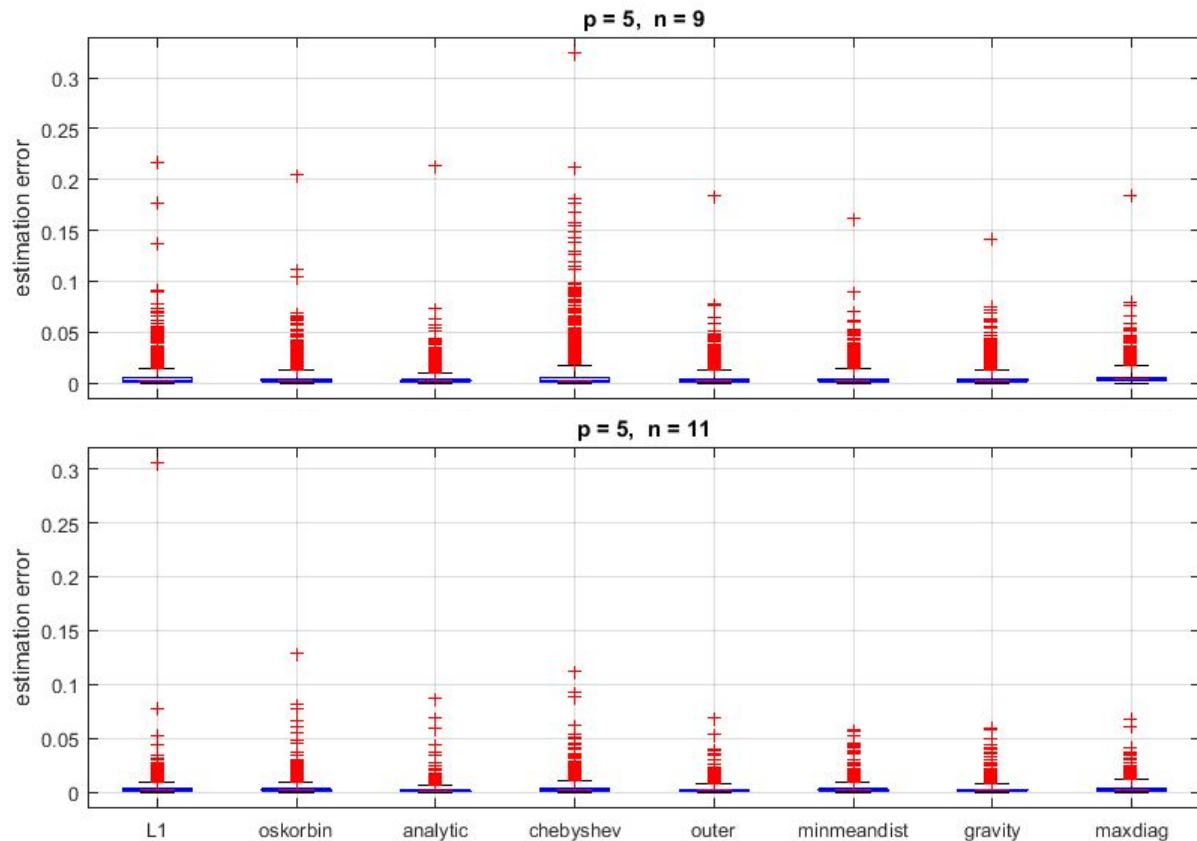
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для равномерной ошибки



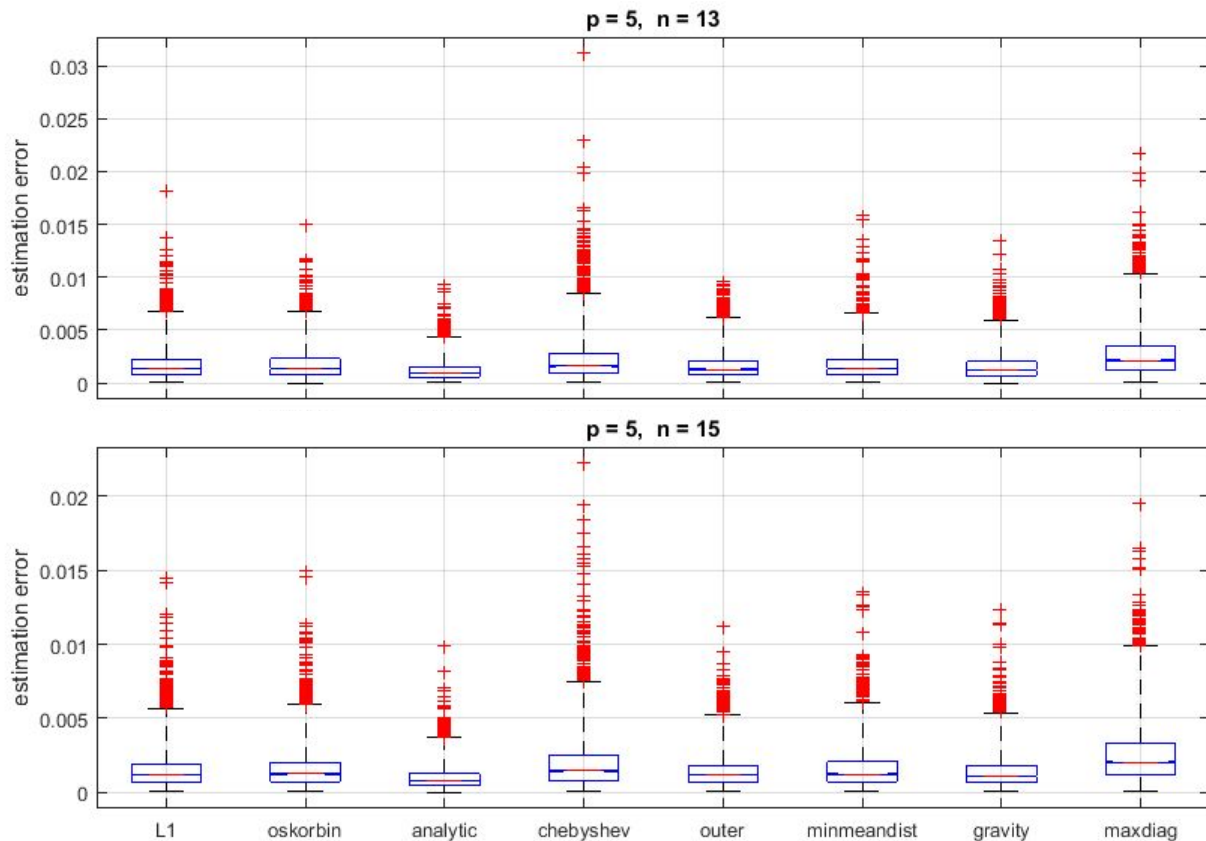
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки



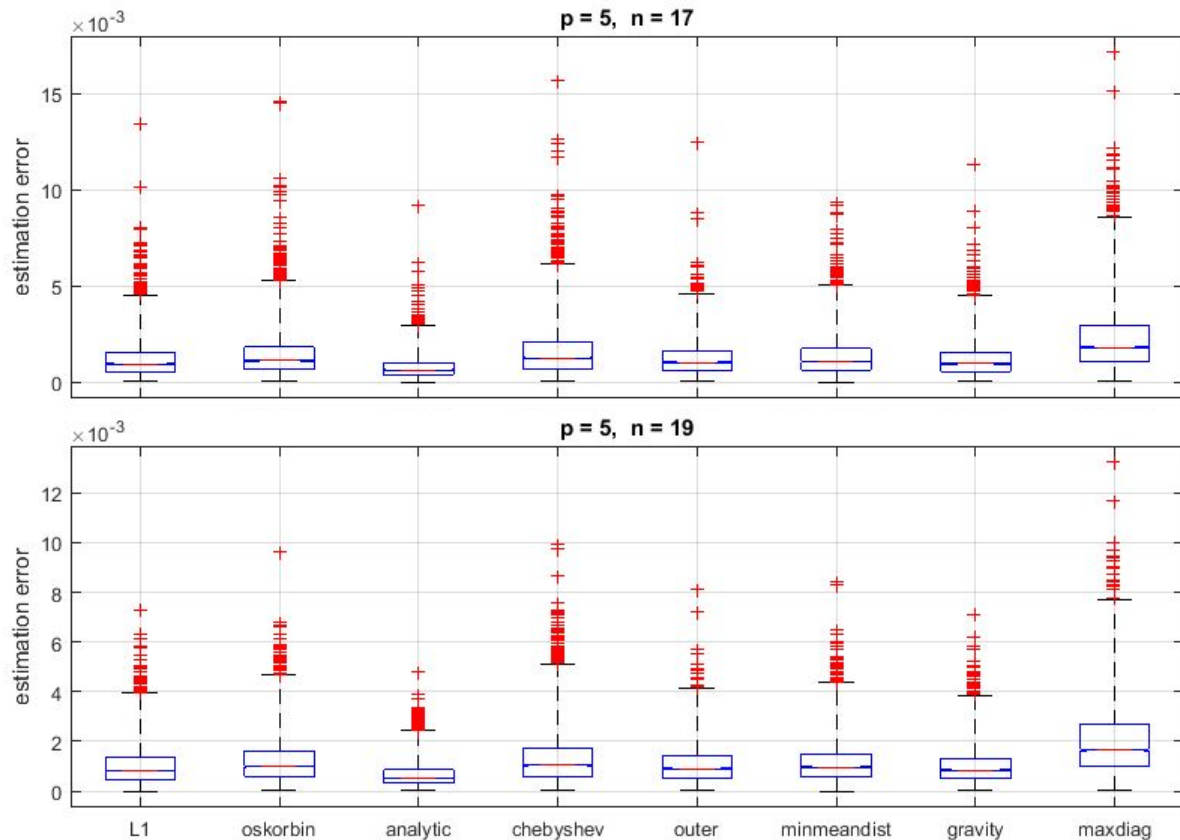
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки



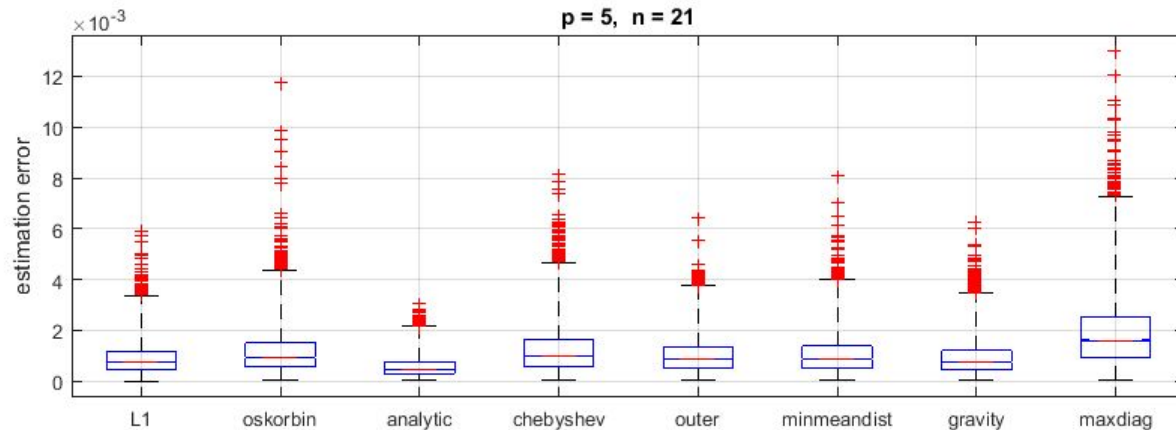
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки



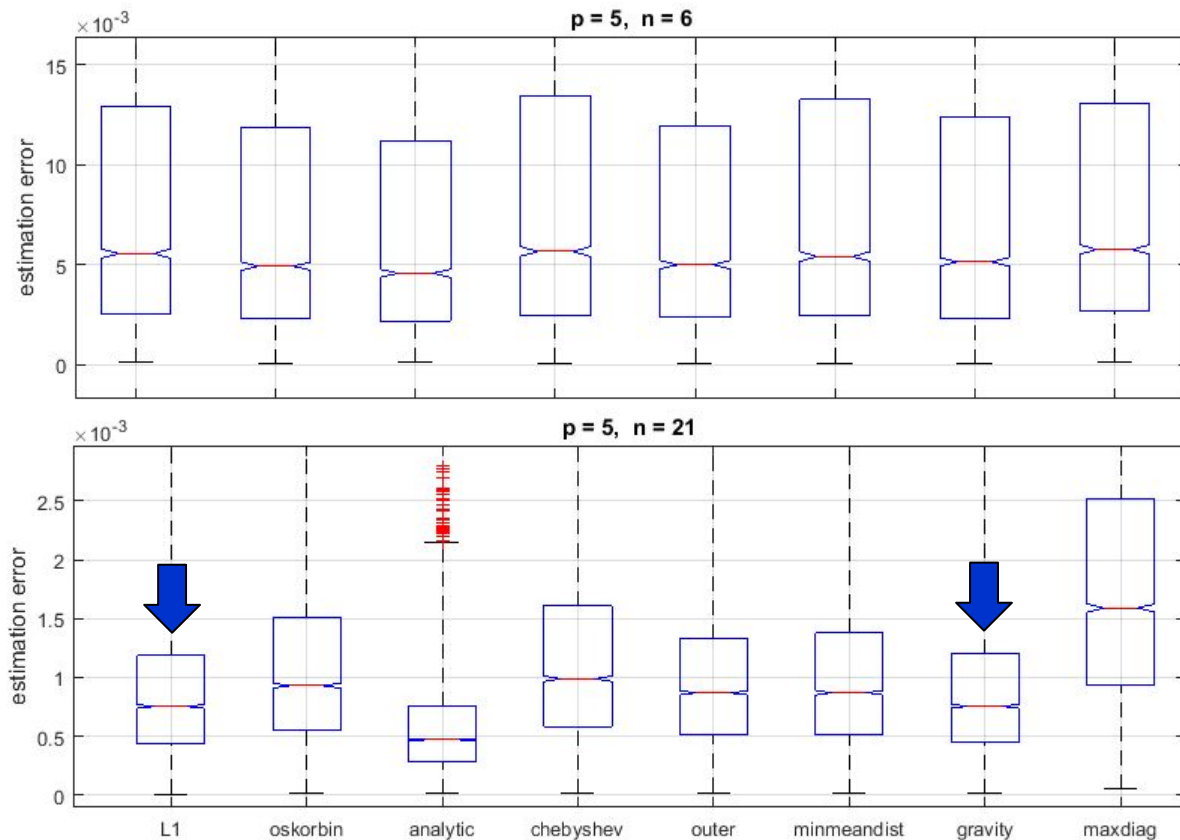
Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки



Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки



Распределение $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ для усеч. нормальной ошибки



Центры информационного множества

Заключение

Заключение

- ❑ Аналитический центр — претендент на лучший метод точечного оценивания (?)
- ❑ Дополнительные исследования необходимы для
 - других центров информационного множества
 - других моделей зависимостей
 - поведения центров
 - при других распределениях ошибки (бимодальном, несимметричном, ...)
 - на хвостах распределений (наихудшие случаи)
 - при активном планировании эксперимента
 - при наличии выбросов

Вопросы?

- ❑ Интервальный подход к оцениванию параметров зависимости
- ❑ Способы построения центра информационного множества
- ❑ Экспериментальное численное исследование центров
- ❑ Результаты
- ❑ Заключение

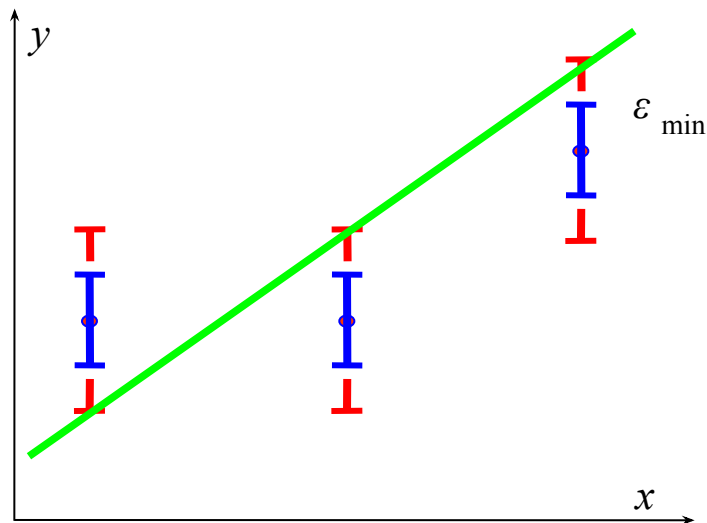
Центры информационного множества

APPENDIX

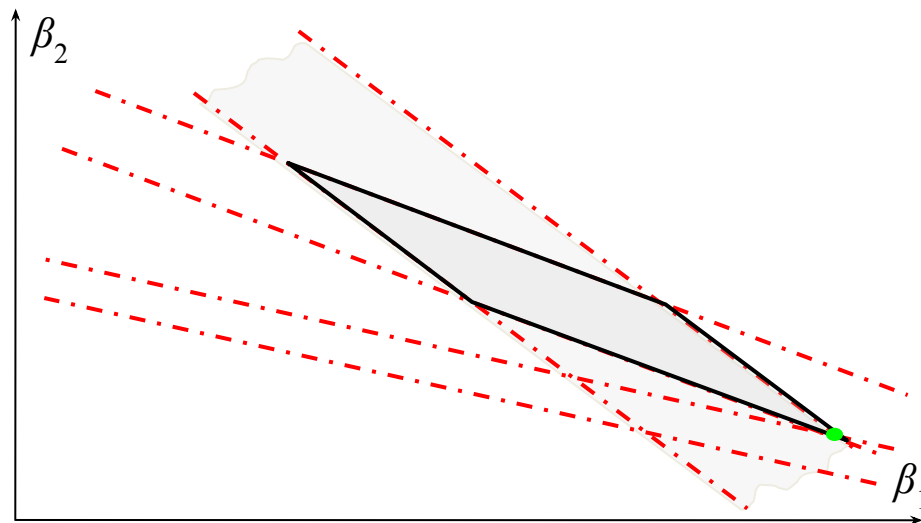
Интервальный подход к оцениванию параметров

- Lower limit error level $\varepsilon_{\min}$ is a measure of data and model consistency

Пространство переменных (x, y)

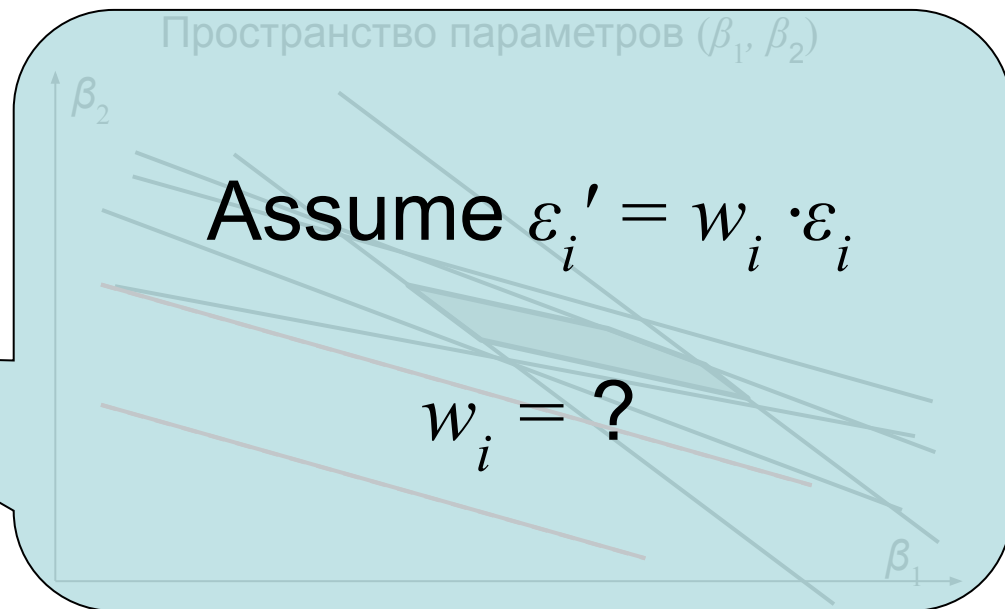
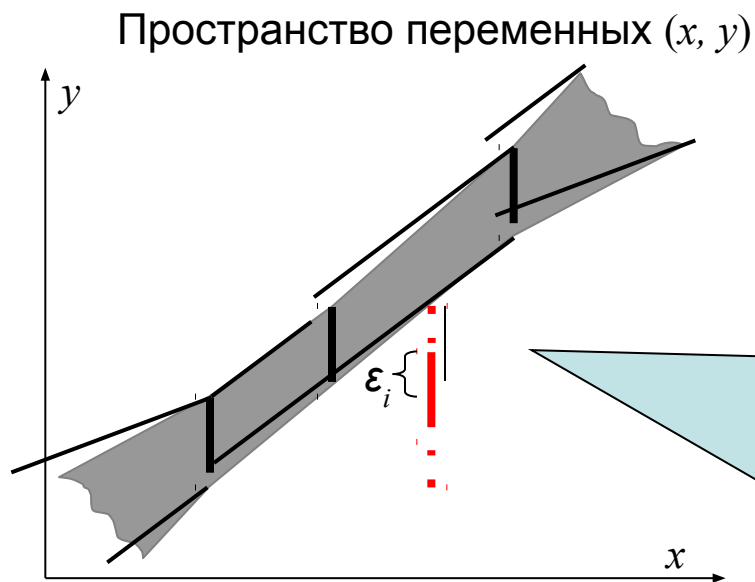


Пространство параметров (β_1, β_2)



Outliers detection

- How much must we expand the declared error interval in order to «correct» an outlier (to make FPS non-empty)?



Outliers detection

- Weights w_j may be found from the following optimization problem

$$\min_{\beta, w} \sum_{i=1}^n w_i \quad (1)$$

FPS with “elastic” borders

$$y_i - w_i \varepsilon_i \leq f(x_i, \beta) \leq y_i + w_i \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

...or “freeze” some error intervals

$$w_i \geq 1, \quad i = 1, \dots, k \quad (3)$$

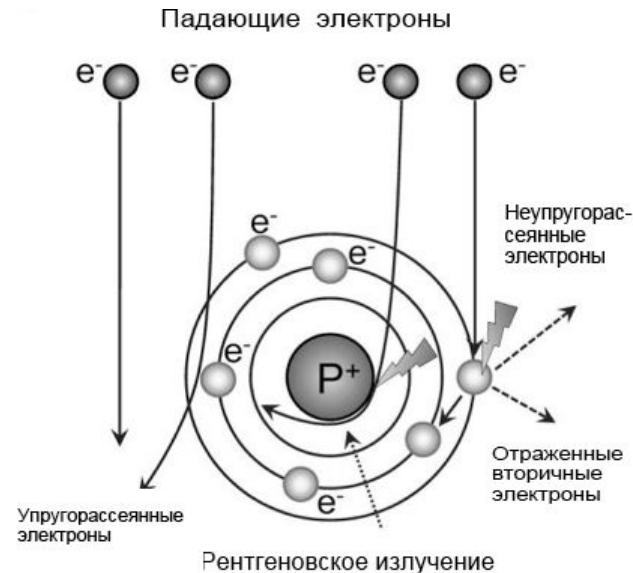
$$-w_i = 1, \quad i = k + 1, \dots, n \quad (4)$$

Some observations may have the same accuracy

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = \dots = w_{i_1}, \\ &\text{\scriptsize}, \\ w_{i_m+1} &= w_{i_m+2} = \dots = w_n \end{aligned} \tag{5}$$

Взаимодействие частиц с веществом

- ❑ Проходя через вещество и взаимодействуя с его атомами, заряженная частица постепенно теряет энергию
- ❑ Тормозная способность вещества характеризуется величиной удельных потерь энергии dE/dx , где dE – энергия, теряемая в слое толщиной dx



Взаимодействие частиц с веществом

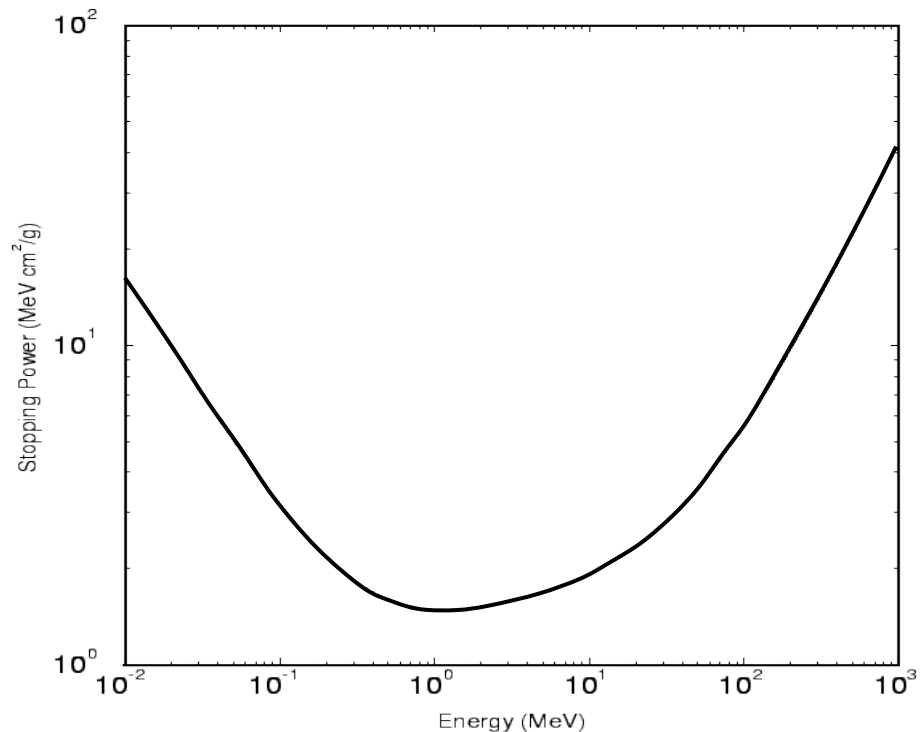
- Для электрона с энергией, превышающей энергию связи электронов K -оболочки, тормозную способность вещества даёт формула Бете – Блоха

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2\pi}{\beta^2} n_e r_0^2 m_e c^2 \left[\ln \left(\frac{m_e c^2 T_e}{I^2} \frac{\beta^2}{2(1 - \beta^2)} \right) - \left(2\sqrt{1 - \beta^2} - 1 + \beta^2 \right) \ln 2 + 1 - \beta^2 \right]$$

где m_e – масса электрона; T_e – кинетическая энергия электрона; c – скорость света; $\beta = v/c$; v – скорость частицы; n_e – плотность электронов вещества; I – средняя энергия возбуждения атомов вещества среды; r_0 – радиус электрона.

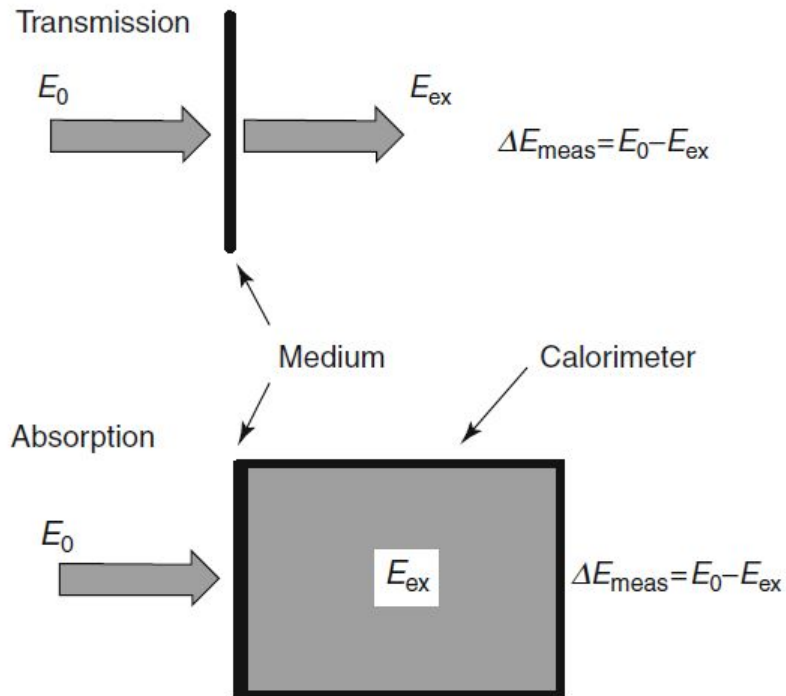
Взаимодействие частиц с веществом

□ Тормозная способность алюминия



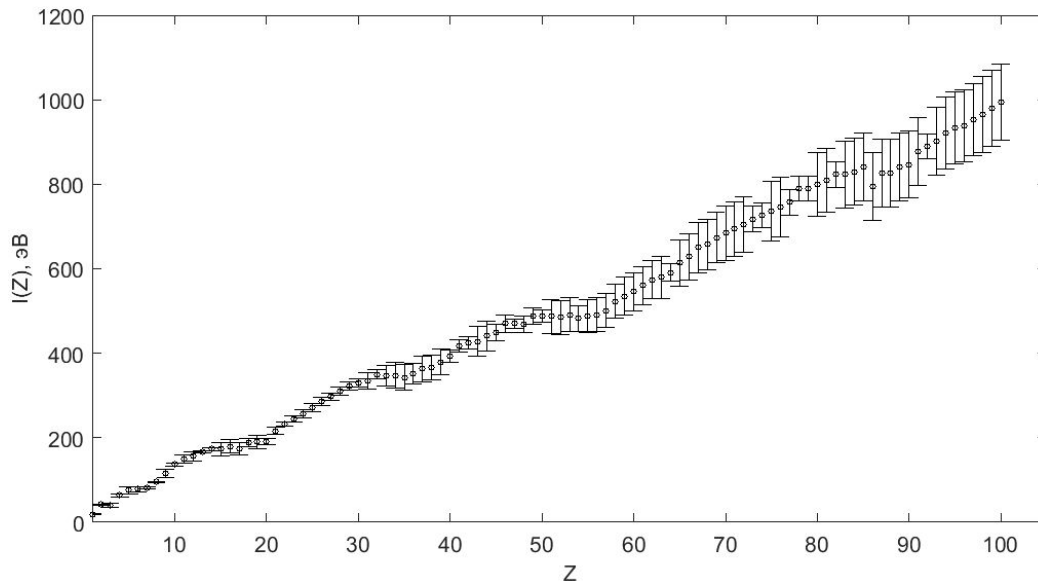
Средняя энергия возбуждения вещества (СЭВВ)

□ Экспериментальное измерение СЭВВ



Средняя энергия возбуждения вещества (СЭВВ)

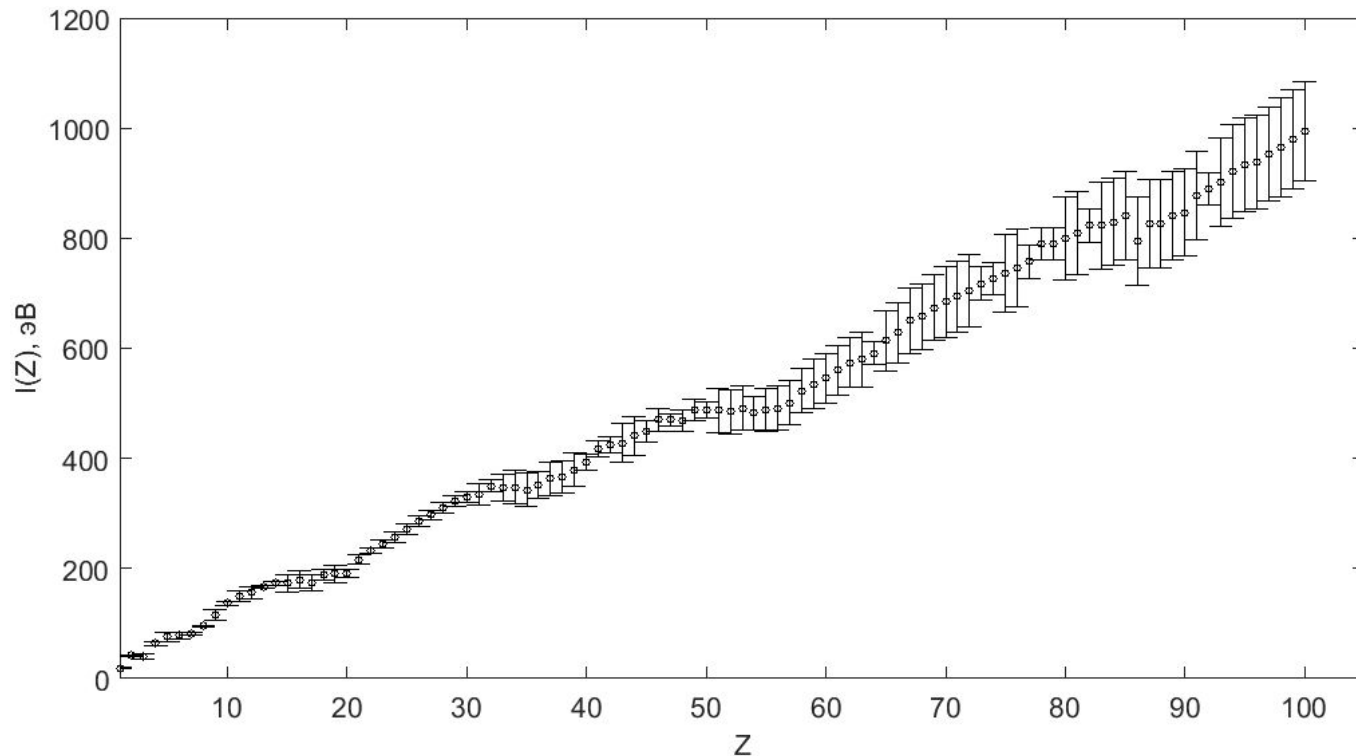
❑ Экспериментальные значения СЭВВ



1. Berger M.J., Coursey J.S., Zucker M.A., Chang J. Stopping Power and Range Tables for Electrons, Positrons, and Helium Ions, NIST, Physical Measurement Laboratory, <http://nist.gov/pml/data/star/>
2. Berger M.J., Inokuti M., Anderson H.H. et al. Stopping Powers for Electrons and Positrons, ICRU Report 37, (1984)
3. Stopping Powers and Ranges for Protons and Alpha Particles, ICRU Report 49 (1993), <http://physics.nist.gov/PhysRefData/>

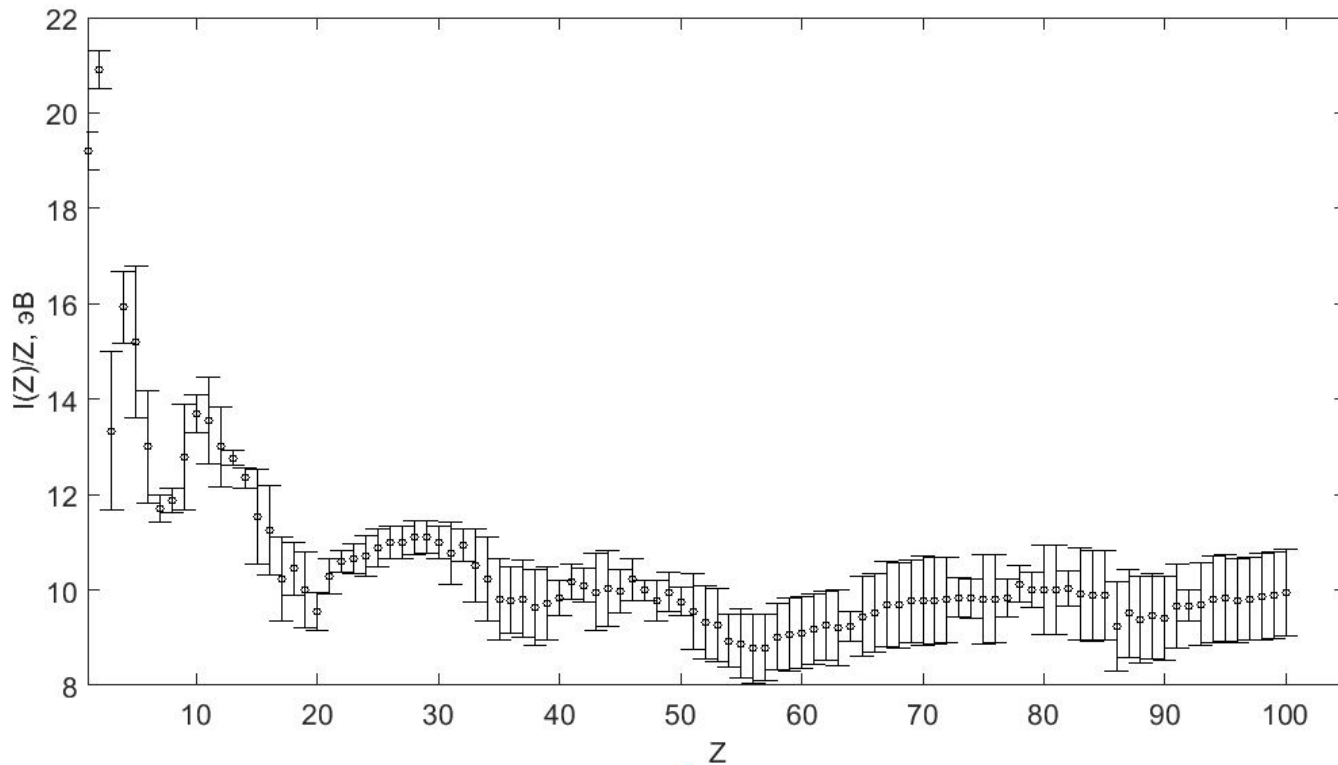
Средняя энергия возбуждения вещества (СЭВВ)

□ Экспериментальные значения СЭВВ



Средняя энергия возбуждения вещества (СЭВВ)

- Экспериментальные значения СЭВВ в расчете на один электрон



Известные формулы для СЭВВ

- ❑ Формула Штернхеймера⁴ (1963):

$$\frac{I_S}{Z} = \begin{cases} 12 + 7/Z \text{ eV}, & Z < 13; \\ 9.76 + 58.8Z^{-1.19} \text{ eV}, & Z \geq 13, \end{cases}$$

- ❑ Формула Далтона – Тёрнера⁵ (1968):

$$I_{DT} = \begin{cases} 11.2 + 11.7Z \text{ eV}, & Z \leq 13; \\ 52.8 + 8.71Z \text{ eV}, & Z > 13. \end{cases}$$

- ❑ Формула Сегрэ⁶ (1977):

$$I_{Sg} = 9.1(Z + 1.9Z^{1/3}) \text{ eV}, Z \geq 4$$

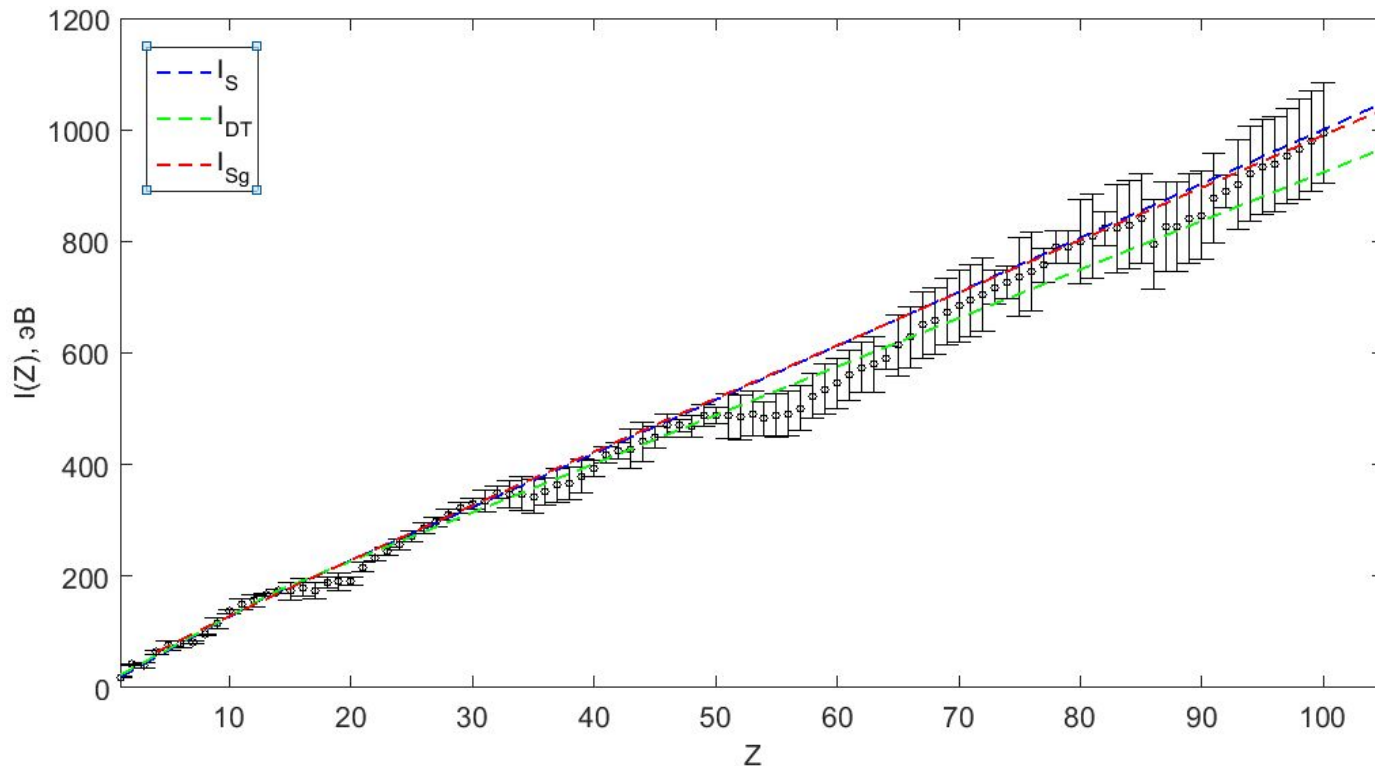
4. Ahlen S.P. Theoretical and experimental aspects of the energy loss of relativistic heavily ionizing particles // Reviews of Modern Physics 52 (1), 1980, pp 121. DOI:10.1103/RevModPhys.52.121

5. Dalton P., Turner J.E. New evaluation of mean excitation energies for use in radiation dosimetry // Health Physics 15(3), 1968, pp. 257-262.

6. Segrè E. Nuclei and particles. 2nd ed. Reading: Benjamin/Cummings; 1977.

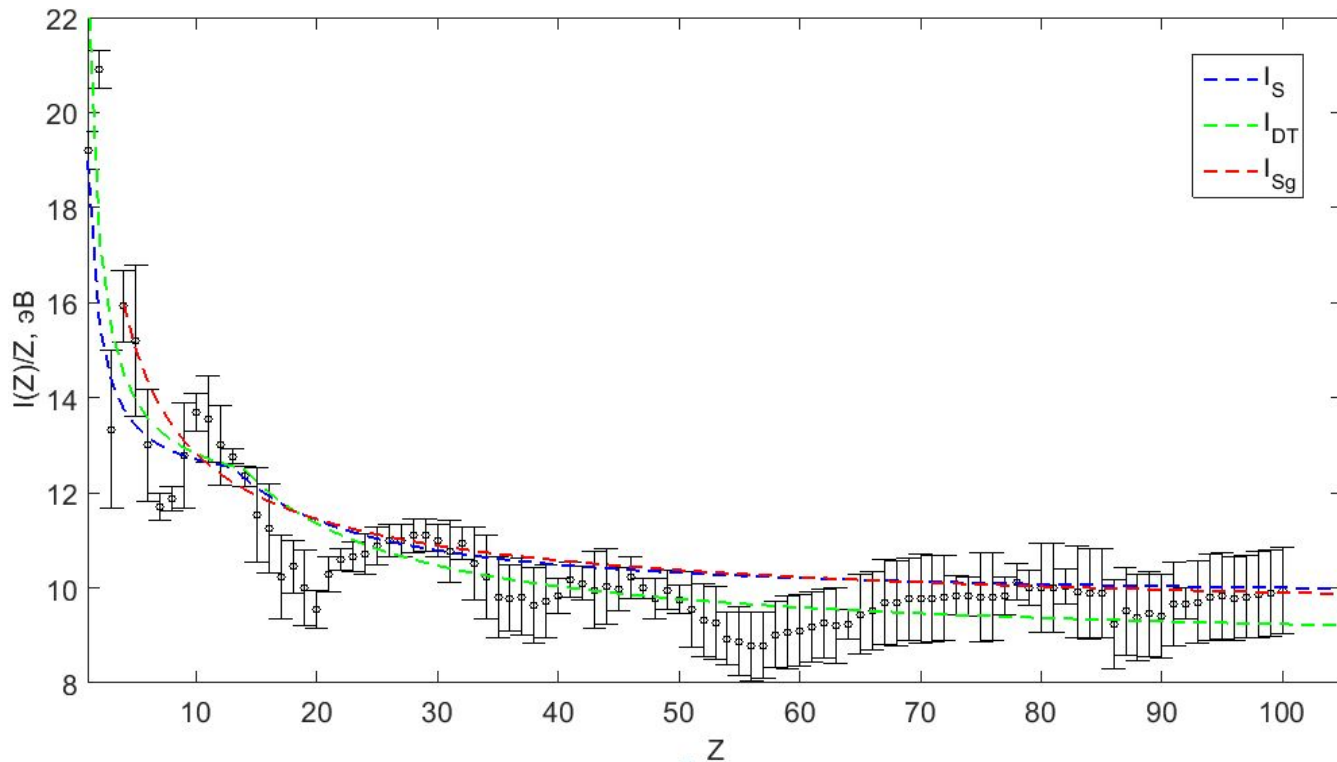
Средняя энергия возбуждения вещества (СЭВВ)

- Экспериментальные значения СЭВВ и известные модели



Средняя энергия возбуждения вещества (СЭВВ)

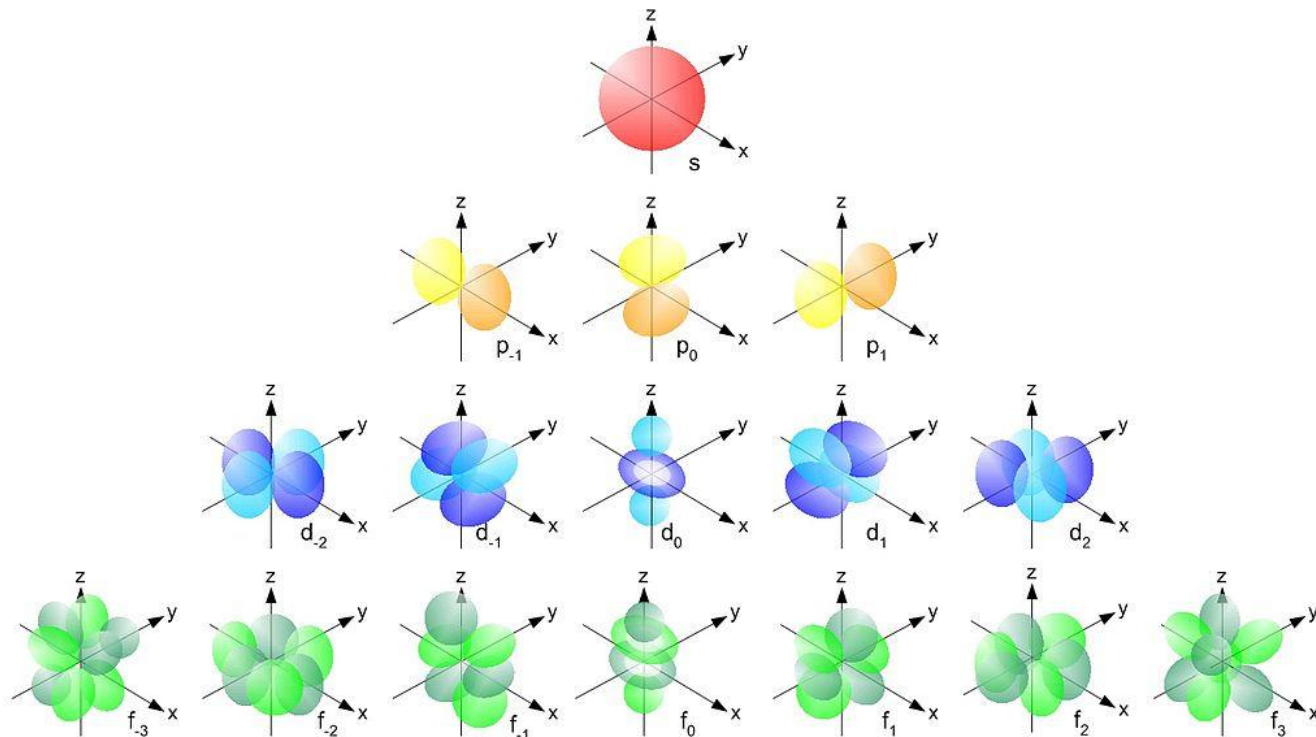
- Экспериментальные значения СЭВВ в расчете на один электрон



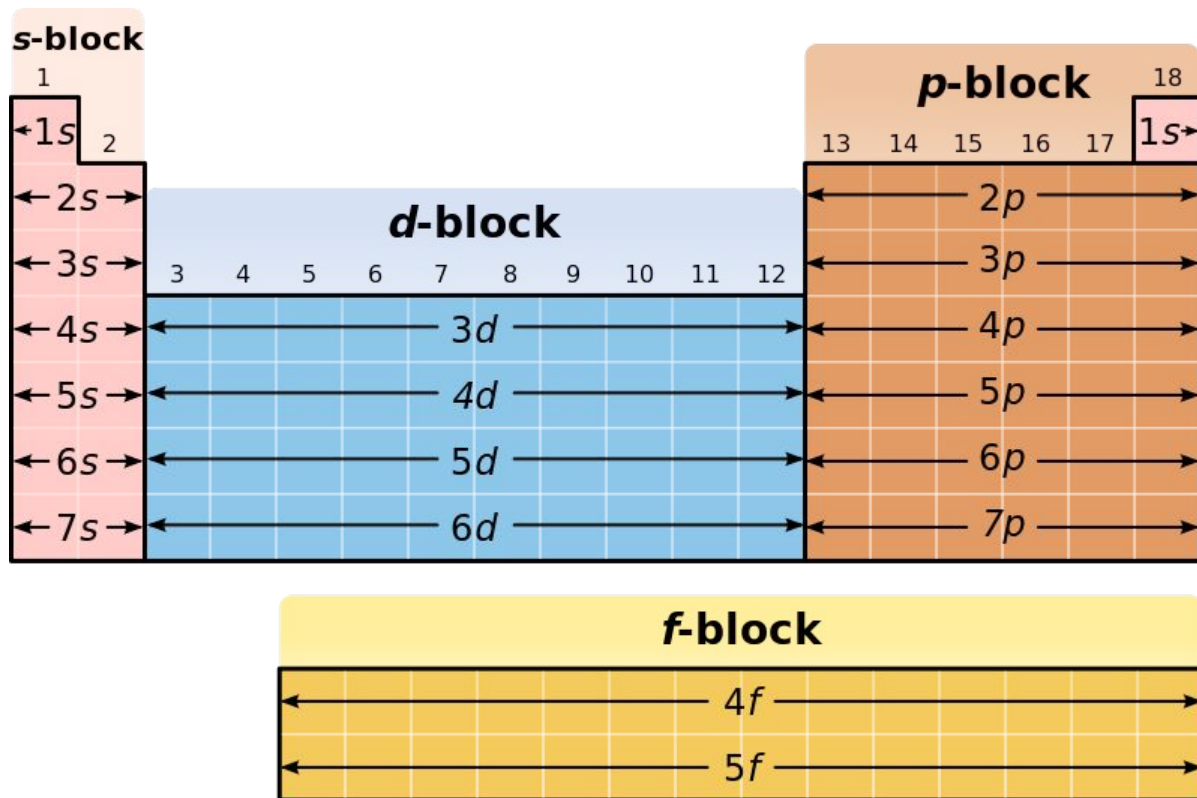
Современная периодическая таблица

Group→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
↓Period																		
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	* 71 Lu	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	* 103 Lr	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Uut	114 Fl	115 Uup	116 Lv	117 Uus	118 Uuo
			* 57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb		
			* 89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No		

Блоковая диаграмма периодической таблицы



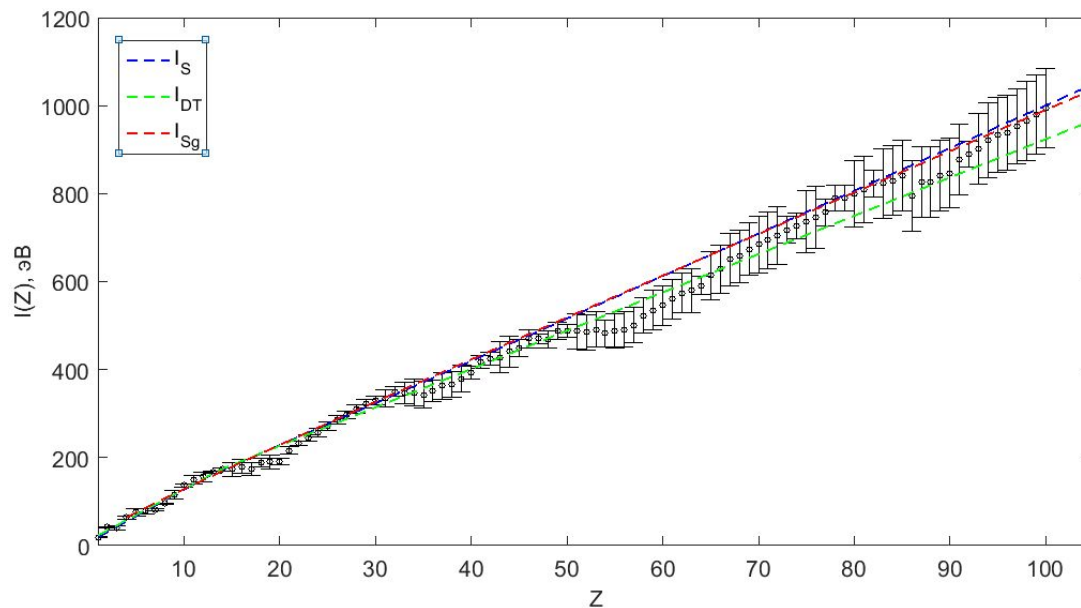
Блоковая диаграмма периодической таблицы



Теория Томаса – Ферми (модель атома)

- СЭВВ пропорциональна атомному номеру в степени 4/3 с коэффициентом C порядка нескольких эВ:

$$I = CZ^{4/3}$$



Известные формулы для СЭВВ

- ❑ Формула Штернхеймера⁴ (1963):

$$\frac{I_S}{Z} = \begin{cases} 12 + 7/Z \text{ eV}, & Z < 13; \\ 9.76 + 58.8Z^{-1.19} \text{ eV}, & Z \geq 13, \end{cases}$$

- ❑ Формула Далтона – Тёрнера⁵ (1968):

$$I_{DT} = \begin{cases} 11.2 + 11.7Z \text{ eV}, & Z \leq 13; \\ 52.8 + 8.71Z \text{ eV}, & Z > 13. \end{cases}$$

- ❑ Формула Сегрэ⁶ (1977):

$$I_{Sg} = 9.1(Z + 1.9Z^{1/3}) \text{ eV}, Z \geq 4$$

4. Ahlen S.P. Theoretical and experimental aspects of the energy loss of relativistic heavily ionizing particles // Reviews of Modern Physics 52 (1), 1980, pp 121. DOI:10.1103/RevModPhys.52.121

5. Dalton P., Turner J.E. New evaluation of mean excitation energies for use in radiation dosimetry // Health Physics 15(3), 1968, pp. 257-262.

6. Segrè E. Nuclei and particles. 2nd ed. Reading: Benjamin/Cummings; 1977.

Предлагаемая полуэмпирическая модель

- ❑ Сохраняется общая структура модели Томаса – Ферми

$$I = C_n^\alpha Z^\alpha,$$

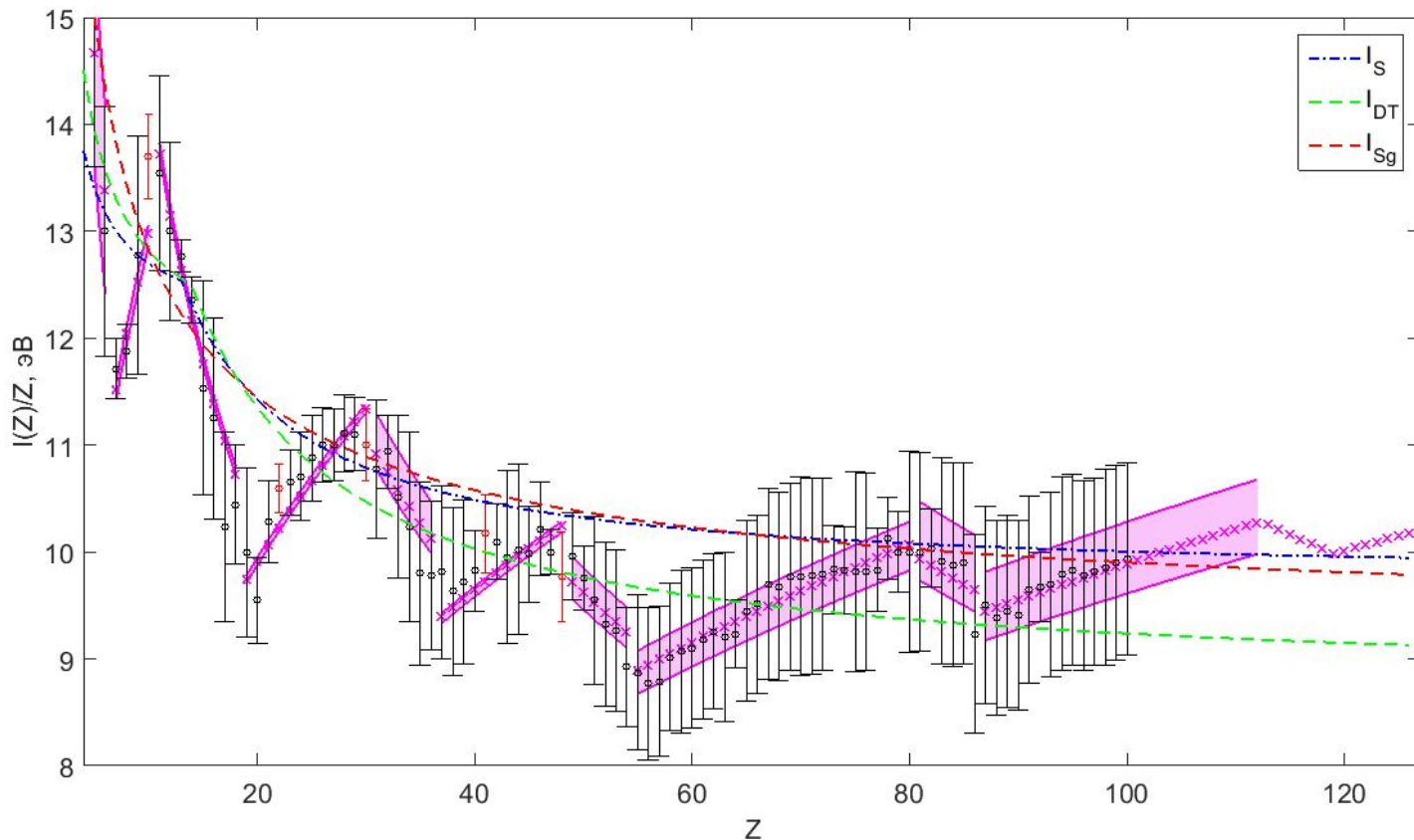
НО

$$\alpha = \begin{cases} 4/3 & \text{для } s-, d-, f - \text{ и } g - \text{блоков;} \\ 1/2 & \text{для } p\text{-блоков.} \end{cases}$$

- ❑ Коэффициенты C_n^α подгоняются⁷ под экспериментальные

7. Zhilin S.I. Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems 88 (1), 2007, P. 60-68. DOI:10.1016/j.chemolab.2006.10.004

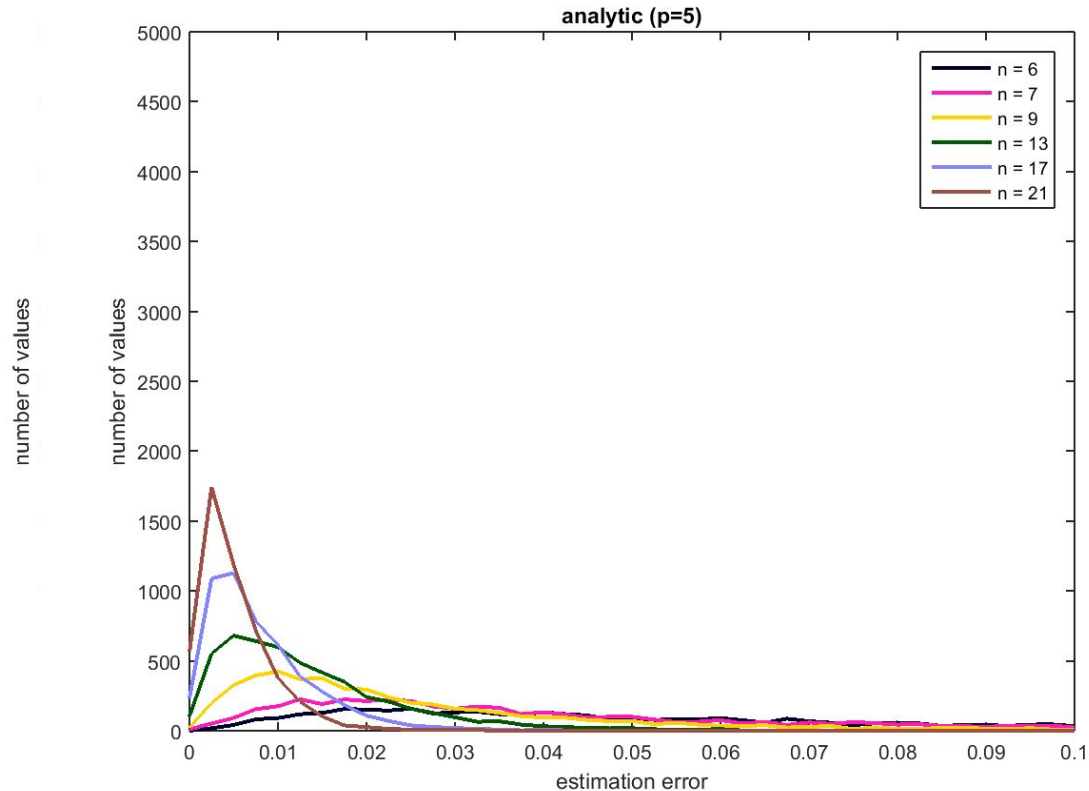
Множество допустимых моделей $I = C_n^\alpha Z^\alpha$



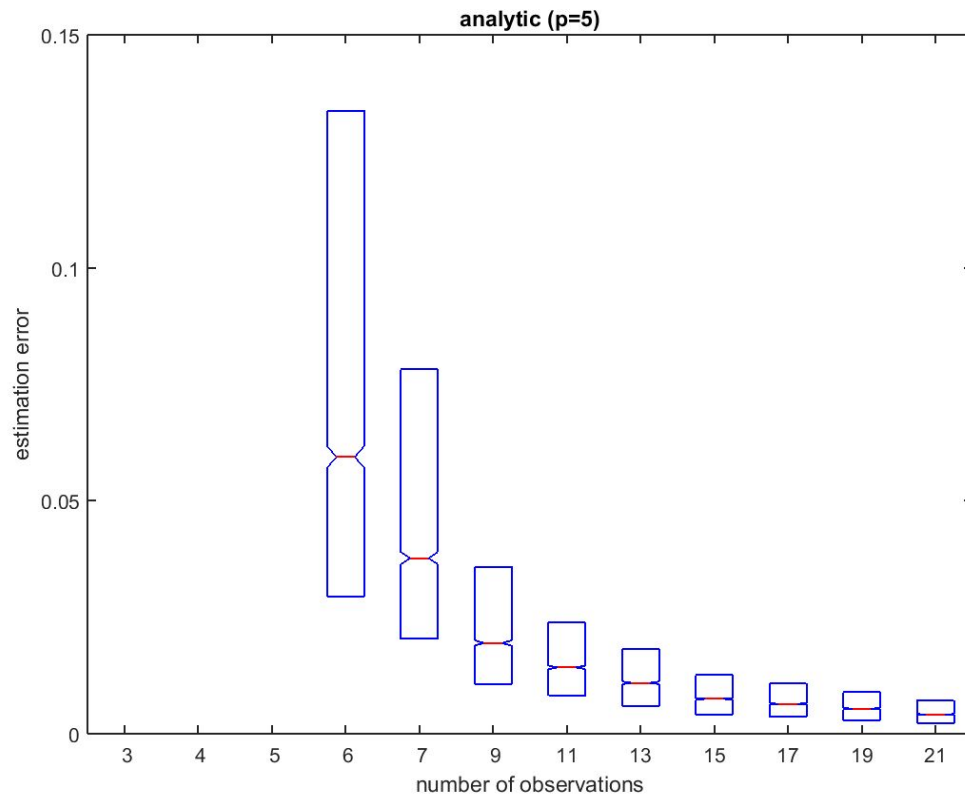
References

1. Zhilin S.I. Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error
// Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems 88 (1), 2007, P. 60-68.
DOI:10.1016/j.chemolab.2006.10.004

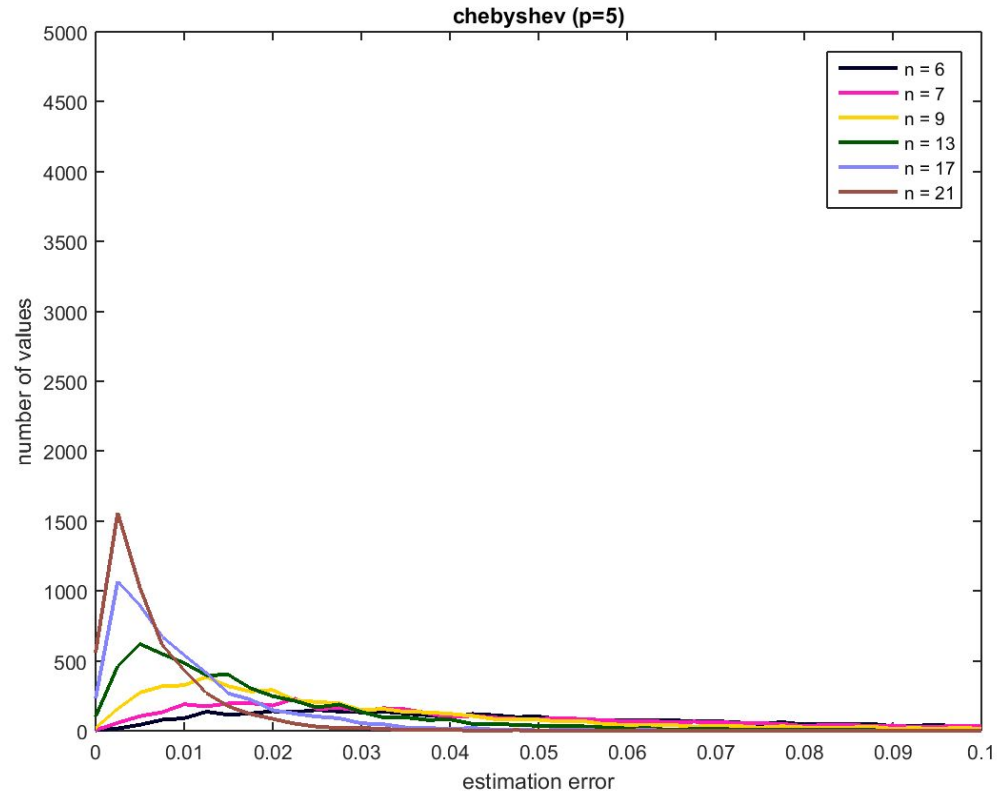
Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for uniform y -error



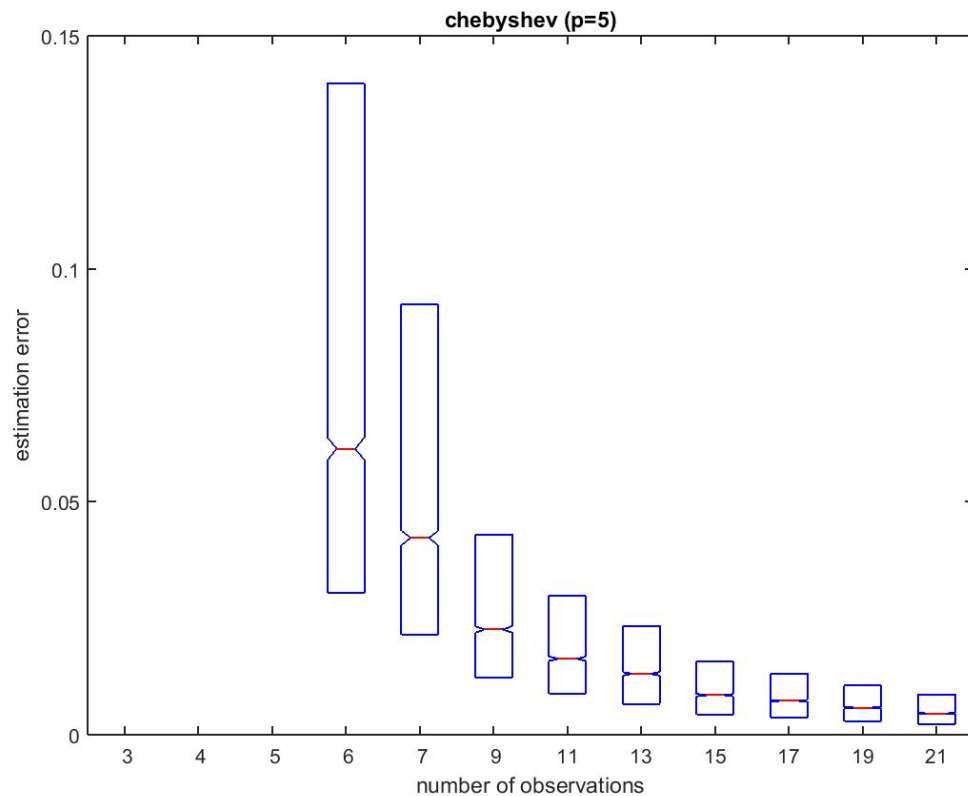
Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for uniform y -error



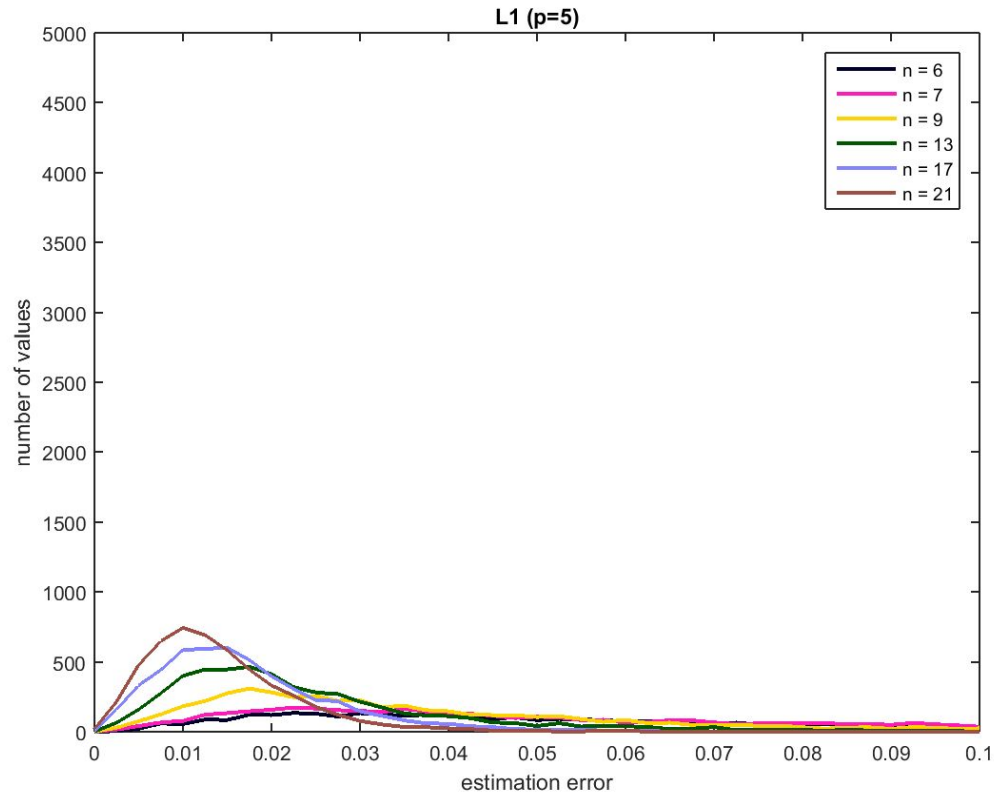
Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for uniform y -error



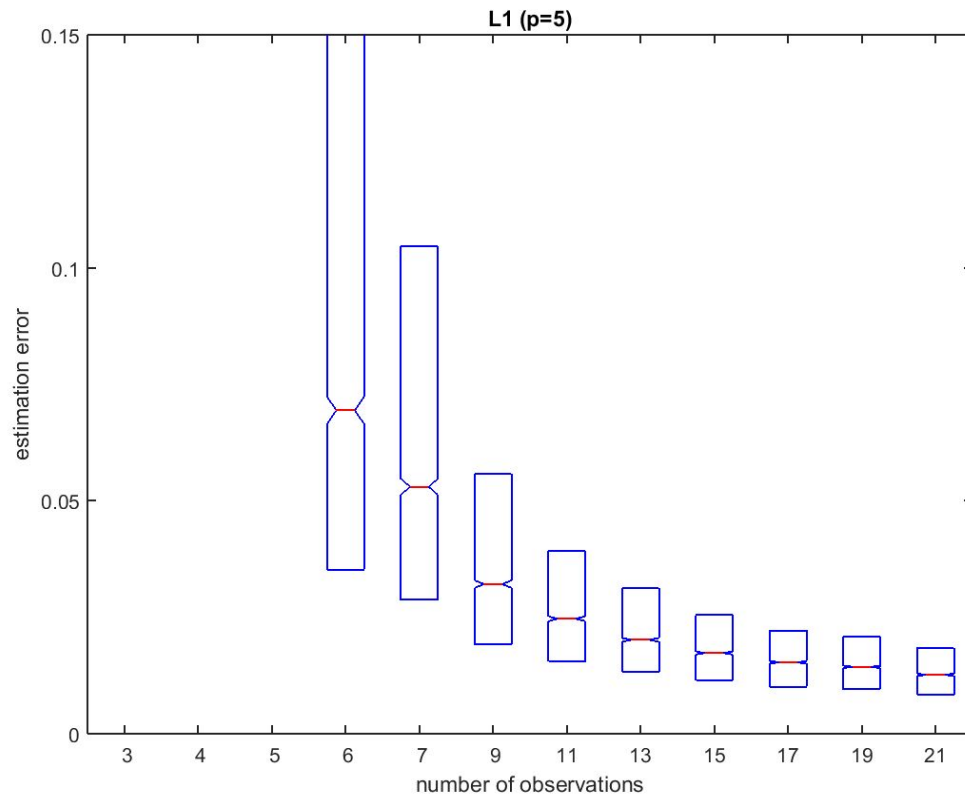
Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for uniform y -error



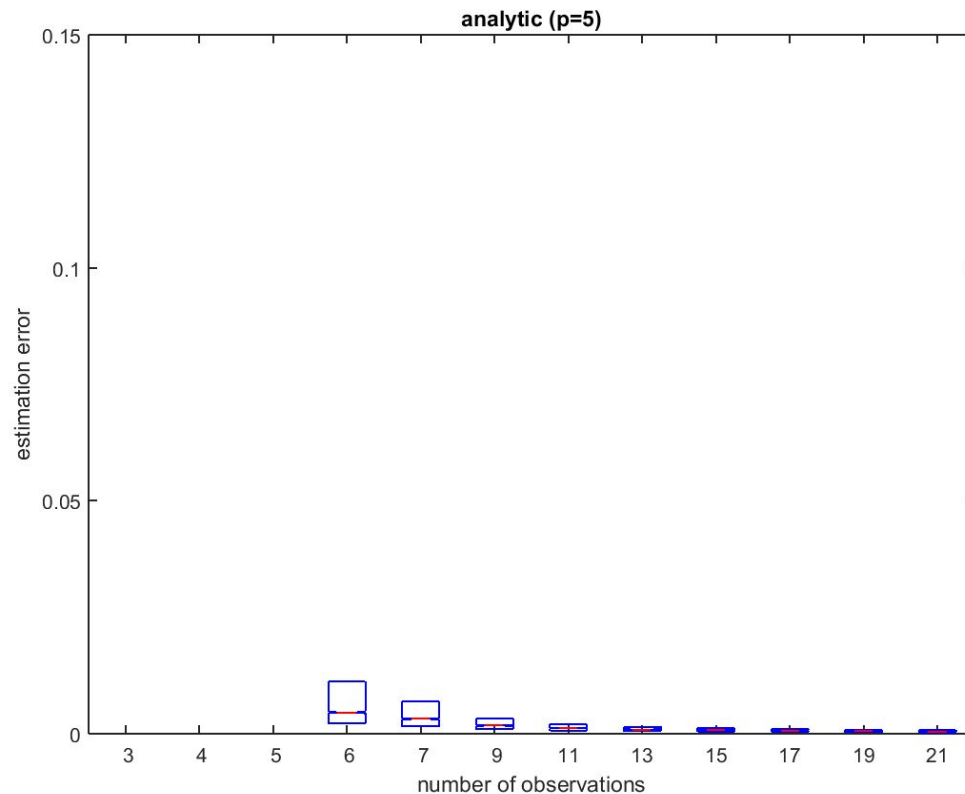
Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for uniform y -error



Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for uniform y -error



Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for trunc. normal y -error



Distribution of $\text{dist}(\beta^*, \hat{\beta})$ for trunc. normal y -error

