О пользе интервальных ограничений на переменные

Зоркальцев Валерий Иванович
д.т.н., заведующий лабораторией
Байкальского государственного университета,
г. Иркутск

Научный семинар
«Интервальный анализ и его приложения»,
Новосибирск, 2024 г.

На переменные в математических моделях всегда можно ввести двусторонние ограничения

1. Польза от этого:

   - для систем линейных уравнений,

   - для моделей в виде систем линейных неравенств,

   - для задач линейного программирования.

2. Возможности и преимущества использования двусторонних ограничений при поиске направлений улучшения решений в алгоритмах метода внутренних точек.

3. *Некоторые постановки моделей планирования производства и распределения ресурсов (воспоминания навеянные докладом А.В.Лакеева и И.А.Шарой).*

О чрезмерном использовании определителей

- В линейной алгебре, в том числе при изучении темы «Линейные уравнения» неоправданно большая роль отводится определителям.

- В частности через расчеты определителей нередко дают алгоритмы решения систем линейных уравнений, **предлагают выяснять вопрос о несовместности этих систем.**

- При этом упускается, что матрицы системы могут быть и не «квадратными», расчет определителя матрицы при размерностях уже в десятки и тем более в сотни и т.д. уравнений и переменных требует мноооого времени, а для выяснения вопроса несовместности лучше пользоваться теоремой Фредгольма.

Теорема Фредгольма

При любой матрице A размера $m \times n$, любом векторе $b \in R^m$,

- либо существует вектор $x \in R^n$, такой что

$$Ax = \mathrm{b}, \qquad \text{(а)}$$

- либо существует вектор $u \in R^m$, такой что

$A^T u = 0, \;\; b^T u = 1$ (любому ненулевому числу). (б)

Неудобство в том, что из-за погрешностей счета равенство $A^T u = 0$ может точно не достигаться при вычислениях.

Доказательство теоремы Фредгольма

- Рассмотрим задачу минимизации квадрата невязок:
$$F(x) = (b - Ax)^T(b - Ax) \to min,$$

- Пусть ее решением являются векторы $\bar{x}$, $\bar{u} = (b - \mathrm{A}\bar{x})$.

- Тогда обязательно
$$2A^T\bar{u} = -\nabla F(\bar{x}) = 0,$$

$$b^T\bar{u} = F(\bar{x})$$

(если и только если исходная система несовместна, то эта величина положительная).

Теорема об альтернативах систем линейных неравенств при введении интервальных ограничений на переменные

Заданы векторы $\bar{x}$, $\underline{x}$.

Теорема. Либо имеет решение система уравнений и неравенств

$$Ax = b, \quad \underline{x} \le x \le \overline{x},$$

либо существует решение u неравенства

$$b^T u + \overline{x}^T (A^T u)_+ + \underline{x}^T (A^T u)_- < 0.$$

Здесь $\quad (a)_+ = \max(0, a), \qquad (a)_- = \min(0, a).$

Не требуется точного выполнения равенства $A^T u = 0$.

Получили большой первый «плюс» от введения интервальных ограничений на переменные

- К сожалению учебные курсы по линейной алгебре заканчиваются на линейных уравнениях. Надо их обязательно продолжить до линейных неравенств. Более общий, но очень важный объект. Он включает в том числе линейное, квадратичное и даже выпуклое программирование.
- В этих целях издано учебное пособие: *Зоркальцев В.И., Киселева М.А. «Системы линейных неравенств» - Иркутский Университет, 2007, 127 с.* Реальную помощь оказывали И.И.Еремин, Ю.Г. Евтушенко, А.И.Голиков, Н.Н. Астафьев.
- В целях экономии, при дополнении линейной алгебры неравенствами, можно убрать определители. Об этом писал еще Гейл.

Решение системы неравенств с двусторонними ограничениями двойственными алгоритмами внутренних точек

Фиктивная задача ЛП:

$$Ax = b, \quad \overline{x} \geq x \geq \underline{x}, \quad 0^T x \to min.$$

Двойственная задача:

$$A^T u - v + w = 0, \quad v \geq 0, \ w \geq 0,$$

$$b^T u - \overline{x}^T v + \underline{x}^T w \to max.$$

Возможная стартовая точка для двойственного алгоритма метода внутренних точек:

$$u = 0, \quad v_j = w_j = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Второй «большой плюс» от введения двусторонних ограничений на переменные

Возможность эффективного использования эффективного двойственного метода внутренних точек для задачи ЛП с однородными ограничениями равенствами.

Решением исходной задачи будут множители Лагранжа при оптимальном плане (с нулевым оптимальном значении целевой функции) двойственной задачи!

Несовместность исходной системы будет в том и только в том случае, если у приведенной двойственной задачи ЛП целевая функция при одном из допустимых решений окажется положительной.

Важные факты о задачах линейного программирования

- «Прямая» и «двойственная» задачи линейного программирования обладают свойством «**симметричной двойственности**»: двойственная к двойственной является исходной задачей.
- Либо обе задачи имеют оптимальные решения, либо обе не имеют.
- Среди оптимальных решений имеются решения, для которых условие дополняющей нежёсткости выполняется в строгой форме – это относительно внутренние точки оптимальных решений исходной и двойственной задач (оптимальные решения с минимальными набором активных ограничений).Такие решения использовались в предложенном мной алгоритме чебышёвской аппроксимации не нуждающимся в условии Хаара (был доклад на этом семинаре).

Важные факты о задачах линейного программирования

- Обе двойственные задачи не имеют оптимального решения в том и только в том случае, если хотя бы одна из них не имеет допустимого решения (ограничения противоречивые).
- Возможны три случая отсутствия оптимальных решений: 1) обе задачи не имеют допустимых решений; 2,3) одна из задач не имеет допустимых решений, вторая имеет и в этом случае ее целевая функция не ограничена в области допустимых решений по направлению требуемого улучшения.
- Для доказательства противоречивости ограничений достаточно доказать наличие решения у альтернативной системы линейных неравенств (достаточно указать такое решение).

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств

- Эти теоремы имеют важную роль во многих разделах прикладной математики. У них есть много вариантов формулировок, например, в Е-бурржской школе (от С.Н.Черникова, И.И.Еремина) они имеют вид теорем о неравенствах следствиях.
- Общий вид, которым предлагается пользоваться – каждой системе линейных неравенств соответствует другая система с теми же исходными параметрами (но по другому организованными в виде системы) такая, что заранее известно - одна и только одна из этих двух систем имеет решение, а вторая не имеет.
- Системы «**симетрично двойственные».**

Примеры альтернативных систем линейных неравенств

Теорема Фаркаша: одно и только одно из двух множеств пусто:

- $X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$,
- $\widetilde{U} = \{v \in R^m : A^T v \leq 0, \;\; b^T v > 0\}$.

Теорема: Задан вектор с $\in R^n$. Одно и только одно из двух множеств пусто:

- $U = \{u \in R^m : g(u) \geq 0\}$, где $g(u) = c - A^T u$.
- $\tilde{X} = \{s \in R^n : As = 0, s \geq 0, \; c^T s < 0\}$.

Стандартная задача ЛП и двойственная к ней

Пусть $\bar{X}, \bar{U}$ множества оптимальных решений стандартной задачи ЛП и двойственной к ней задачи

- $c^T x \to min, \quad x \in X,$
- $b^T u \to max, \quad u \in U.$

Возможны четыре случая;

1) $X \neq \emptyset, \quad U \neq \emptyset,$ тогда $\bar{X} \neq \emptyset, \bar{U} \neq \emptyset, \quad \tilde{X} = \emptyset, \widetilde{U} = \emptyset$;
2) $\tilde{X} \neq \emptyset, \quad \widetilde{U} = \emptyset,$ тогда $X \neq \emptyset, \quad U = \emptyset, \quad \bar{X} = \emptyset, \bar{U} = \emptyset;$
3) $\tilde{X} = \emptyset, \quad \widetilde{U} \neq \emptyset,$ тогда $X = \emptyset, \quad U \neq \emptyset, \quad \bar{X} = \emptyset, \bar{U} = \emptyset;$
4) $\tilde{X} \neq \emptyset, \quad \widetilde{U} \neq \emptyset,$ тогда $X = \emptyset, \quad U = \emptyset, \quad \bar{X} = \emptyset, \bar{U} = \emptyset.$

Развитие, теоретическое обоснование, экспериментальные исследования алгоритмов внутренних точек, их приложения в моделях электроэнергетики

Рис. Процесс оптимизации разными алгоритмами

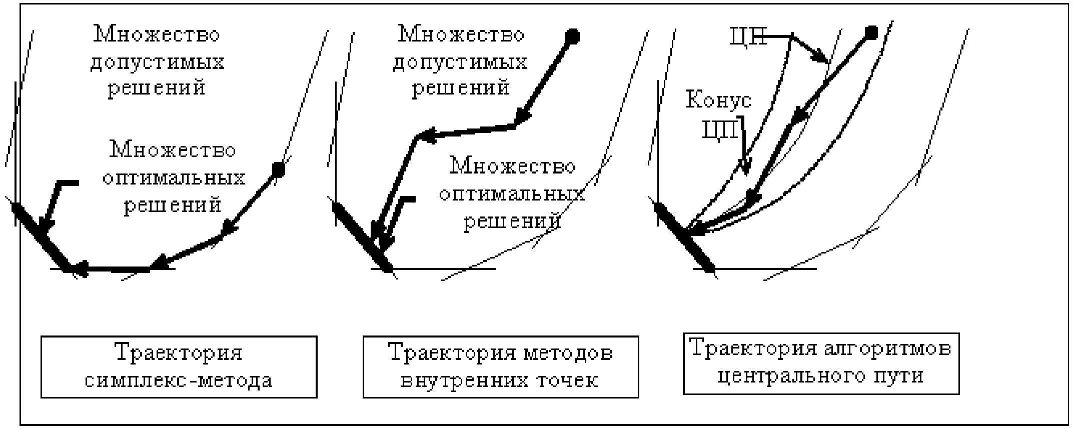


Табл. Количество итераций для решения или идентификации несовместности линеаризованной задачи расчета режимов электроэнергетических систем и для поиска решения одной сложной тестовой задачи.

Алгоритмы	Совместные задачи $\approx(40\times 80)$	Несовмест.задачи $\approx(40\times 80)$	Тестовый пример (201×201)
А (прямой)	9.5 (3-13)	1.6 (1-5)	19
D (двойственный.)	5.9 (3-8)	1 (все 1)	9
Центрального пути	8.0 (2-11)	1 (все 1)	11

Если в исходной «стандартной» задаче вместо условия неотрицательности переменных использовать интервальные ограничения на переменные (в том числе наряду с условием неотрицательности ввести ограничения «сверху» на значения переменных), то двойственная задача обязательно будет иметь допустимые решения.

Число вариантов ситуаций сокращается до двух:

1. Система ограничений исходной задачи совместна. Тогда альтернативная система задающая множество рецессивных направлений двойственной задачи пусто. Оптимальное решение есть.

2.Система ограничений исходной задачи несовместна. Альтернативная система задающая множество рецессивных направлений двойственной задачи не пусто. В процессе оптимизации проверка на принадлежность вырабатываемых векторов множеству рецессивных направлений позволит выявить факт противоречивочти ограничений исходной задачи.

В этом случае легко сформировать стартовую точу для двойственных алгоритмов внутренних точек, удовлетворяющую всем ограничениям двойственной задачи, в том числе ограничениям неравенствам в строгой форме. Это еще один «плюс» от интервальных ограничений.

Возможная польза от интервальных ограничений в алгоритмах внутренних точек

Далее излагаются «прямые» алгоритмы внутренних точек, осуществляющих монотонное улучшение решения задачи **ЛП в стандартной форме**.

Алгоритмы названы комбинированными, поскольку сочетают в едином процессе две цели:

1) минимизация невязок ограничений равенств;
2) минимизация целевой функции.

Семейство комбинированных алгоритмов внутренних точек

1. Стартовой точкой может служить любой вектор $x^0 > 0$, в т.ч. не удовлетворяющий ограничениям-равенствам $Ax = b$.
2. Предлагаемое правило выбора шага позволяет ускорить вычислительнйы процесс, достигнуть сверхлинейной скорости сходимости.
3. Аксиоматические условия на выбор весовых коэффициентов позволяют использовать широкий набор конкретных правил их задания, в т.ч. для ускорения вычислительного процесса и повышения его устойчивости. Вместо правила

$$d_j^k = \left(x_j^k\right)^2$$

вводится общее условие: существуют функции σ, $\overline{\sigma}$ такие, что

$$\overline{\sigma}(\alpha) \geq \sigma(\alpha) > 0, \ \forall \alpha > 0,$$

при которых

$$\overline{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \sigma(x_j^k), \ j = 1, \ldots, n.$$

Семейство комбинированных алгоритмов

Итерационный переход. Задан $x^k \in R^n, \; x^k > 0$.
1. Вычисляем вектор невязок балансовых ограничений $r^k = b - Ax^k$.
2. Вспомогательная задача: вычисляем $d^k \in R^n, \; u^k \in R^n$ из условий

$$\overline{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \sigma(x_j^k), \; j = 1, \ldots, n,$$

$$u^k = arg \min_{u \in R^m} \Phi_k(u) - 2(r^k)^T u,$$

где

$$\Phi_k(u) = \sum d_j^k \left(g_j(u)\right)^2, \; g(u) = c - A^T u.$$

3. Находим направление улучшения

$$s_j^k = -d_j^k g_j^k, j = 1, \ldots, n.$$

Семейство комбинированных алгоритмов

4. Вычисляем шаг: при $\gamma \in (0, 1)$

$$\lambda_k = \gamma \cdot \max \left\{ \lambda : x^k + \lambda s^k \geq 0 \right\},$$

что равносильно

$$\lambda_k = \max \left\{ \lambda : x^k + \lambda s^k \geq (1 - \gamma) x^k \right\},$$

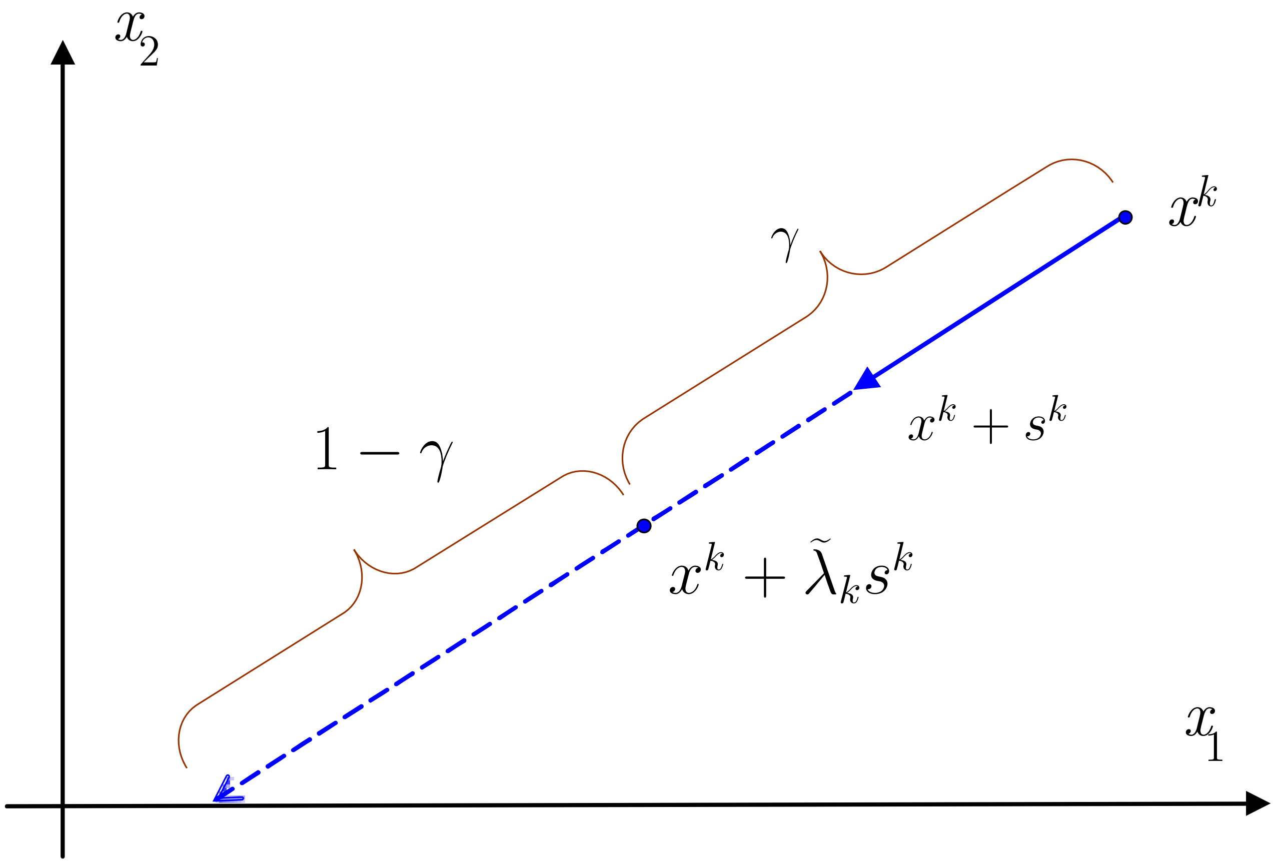
полагаем $\lambda_k := \min \{1, \lambda_k\}$, если $r^k \neq 0$.

5. Осуществляем итеративный переход

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k.$$

Геометрическая иллюстрация алгоритма выбора шага

$$\widetilde{\lambda}_k = \max\left\{\lambda : \; x^k + \lambda s^k \geq (1-\gamma)x^k\right\}$$



Вспомогательная задача поиска направления улучшения

При заданном векторе весовых коэффициентов d^k

$$s^k = arg\min\left\{c^T s + \frac{1}{2}\sum\left(s_j\right)^2/d_j^k : As = r^k\right\}.$$

Множители Лагранжа ограничений составляют вектор u^k.
Представление направления корректировки решения в виде двух составляющих:

$$s^k = \hat{s}^k + \check{s}^k,$$

где

$$\check{s}^k = arg\min_{s\in R^n}\left\{\frac{1}{2}\sum\left(s_j\right)^2/d_j^k : As = r^k\right\}$$

– направление ввода в область допустимых решений,

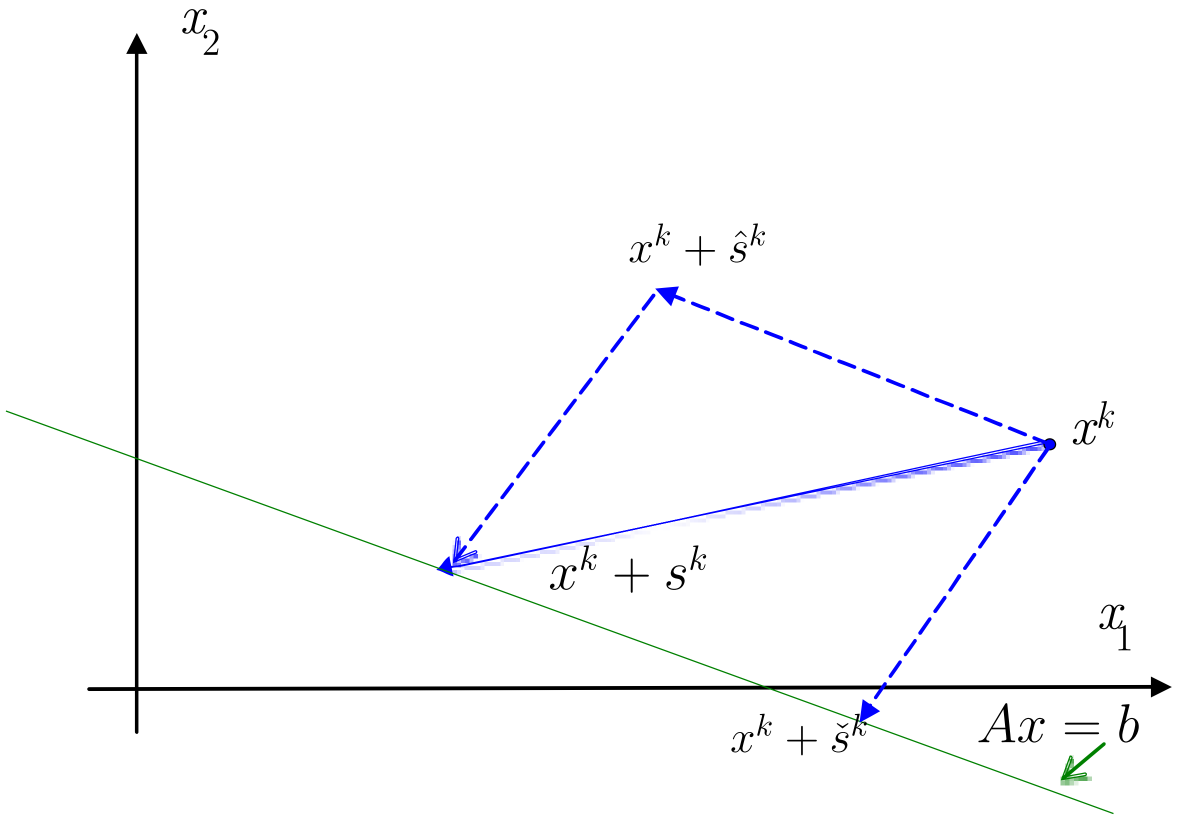
$$\hat{s}^k = arg\min\left\{c^T s + \frac{1}{2}\sum\left(s_j\right)^2/d_j^k : As = 0\right\}$$

– направление улучшения решений в области допустимых решений.

Геометрическое представление направления корректировки

$\check{s}$ – направление ввода в область допустимых решений,

$\hat{s}$ – направление оптимизации.



Изменение по итерациям невязок балансовых ограничений

Справедливо равенство

$$r^{k+1} = (1-\lambda_k)r^k. \tag{4}$$

Действительно,

$$r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = b - A(x^k + \lambda_k s^k) = (b - Ax^k) - \lambda_k A s^k = r^k - \lambda_k r^k.$$

Равенство (??) объясняет почему $\lambda_k \leq 1$ при $r^k \neq 0$. Выделяются два этапа вычислений:

1. Ввод в область допустимых решений

Если $r^k \neq 0$, то $||r^{k+1}|| < ||r^k||$.

2. Оптимизация

Если $r^k = 0$, то $r^{k+1} = 0,\ c^T x^{k+1} < c^T x^k$.

Комбинированный алгоритм полезен также для противодействия накапливаемым погрешностям в решении вспомогательной задачи – для борьбы с „выпадением“ из области допустимых решений в процессе оптимизации в ней.

Система усиливающихся требований к правилам выбора весовых коэффициентов

$$\exists\ \overline{\sigma}, \sigma :\ \forall \alpha > 0\ \overline{\sigma}(\alpha) \geq \sigma(\alpha) > 0;$$

$$\overline{\sigma}(\alpha) \to 0 \text{ при } \alpha \to 0;$$

$$\overline{\sigma}\left(x_j^k\right) \geq d_j^k \geq \sigma\left(x_j^k\right).$$

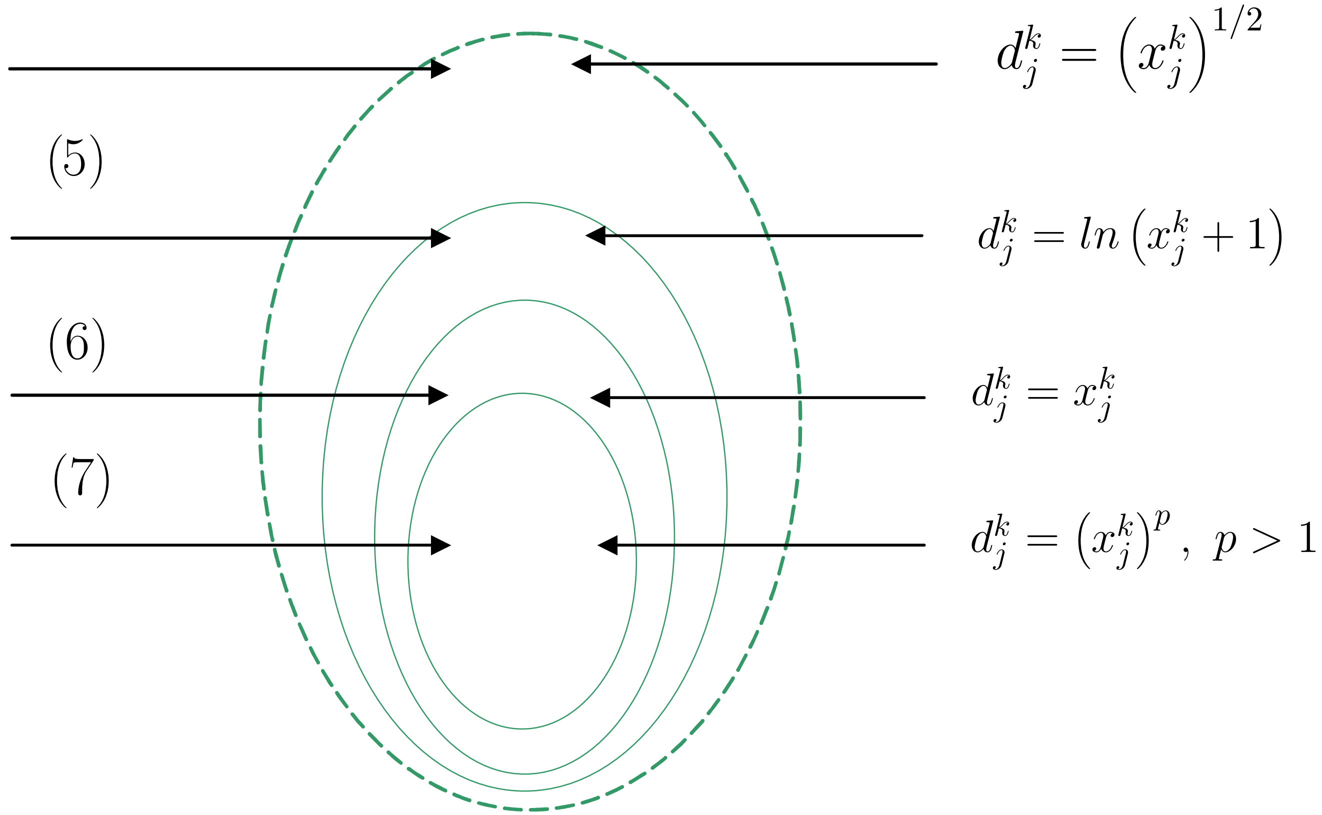
Усиливающиеся требования:

$$\overline{\sigma}(\alpha) = O(\alpha), \tag{5}$$

$$\frac{\overline{\sigma}(\alpha)}{\sigma(\beta)} = O\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \tag{6}$$

$$\frac{\overline{\sigma}(\alpha)}{\sigma(\beta)} = o\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{7}$$

Система усиливающихся требований к правилам выбора весовых коэффициентов



Свойства процессов оптимизации для невырожденных задач

$$\frac{\|u^k - \bar{u}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Свойства класса алгоритмов (без предположения о невырожденности задачи)

$$\frac{||u^k - \bar{u}||}{\|x^k - \bar{x}\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Влияние погрешностей в решении вспомогательной задачи на вычислительный процесс

Пусть $Ax^k = b$ и вместо $As^k = 0$ имеем

$$As^k = \epsilon^k.$$

Тогда после итерационного перехода получаем

$$r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = b - A(x^k + \lambda_k s^k) = b - Ax^k - \lambda_k As^k = r^k - \lambda_k \epsilon = \lambda_k \epsilon^k.$$

Если $\lambda_k \to \infty$, то малые ϵ^k могут приводить (и приводят) к большим отклонениям от допустимого решения.

Алгоритмы, сочетающие преимущества алгоритмов с $d_j^k = \left(x_j^k\right)^2$ и $d_j^k = x_j^k$

Положим при некотором $\epsilon > 0$

$$d_j^k = x_j^k / \max\left\{\epsilon, \left|g_j(u^{k-1})\right|\right\}.$$

В этом случае d_j^k не является функцией только от x_j^k (зависти и от u^{k-1}), но существуют σ, $\overline{\sigma}$, при которых

$$\overline{\sigma}\left(x_j^k\right) \geq d_j^k \geq \sigma\left(x_j^k\right).$$

Доказана для процесса оптимизации в допустимой области таких алгоритмов (при условии невырожденности) возможность сверхлинейной скорости сходимости при $\gamma_k \to 1$. При этом шаг λ_k будет ограниченным сверху. Эксперименты подтвердили хорошую скорость сходимости и устойчивость к погрешностям.

Направления развития - разработка методов решения вспомогательной задачи, учитывающих:

1) возможность неточного решения на начальных итерациях;

2) наличие хорошего приближения на последующих;

3) интервальное определение коэффициентов.

По одному из вариантов двойственных алгоритмов внутренних точек вспомогательная задача имеет вид: найти векторы $x \in R^n, d \in R^n$, удовлетворяющие условиям

$$(A^T A + D)x = f^k,$$

$$\text{D = diag } d, \qquad d1^k \leq d \leq d2^k.$$

При заданных $f^k, d1^k, d2^k,$ из R^n, $d1^k < d2^k$.

Задача ЛП с двусторонними ограничениями

Исходная задача ЛП

$$Ax = b, \quad \overline{x} \geq x \geq \underline{x}, \quad c^T x \to min.$$

Двойственная задача:

$$A^T u - v + w = c, \quad v \geq 0, \; w \geq 0.,$$

$$b^T u - \overline{x}^T v + \underline{x}^T w \; \to \; min.$$

Возможная стартовая точка для двойственного алгоритма метода внутренних точек:

$$u = 0, \qquad v_j = \left(-c_j\right)_+ + 1, \qquad w_j = \left(c_j\right)_+ + 1,$$

$j = 1, \dots, n.$

Четыре типа ограничений неравенств

1. **Физические (технические, материальные) ограничения.**
2. **Ограничения, вводимые на основе оценок областей ожидаемых значений переменных модели.**
3. **Ограничения- неравенства вводимы в алгоритм вычислений для повышения точности этих вычислений.**
4. **Ограничения на возможные отклонения данных из-за погрешностей вычислений.**

Наверное их надо по разному учитывать и описывать.

Проблема для размышлений.

Некоторые постановки моделей планирования производства и распределения ресурсов (воспоминания навеянные докладом А.Лакеева и И. Шарой на этом семинаре)

Разработка планов включала три этапа.

1. *Задания «сверху вниз» о необходимости составления плана и его предварительные ориентиры.*

2. *Разработка и агрегирование планов «снизу вверх». Предварительные попытки согласования на своих уровнях.*

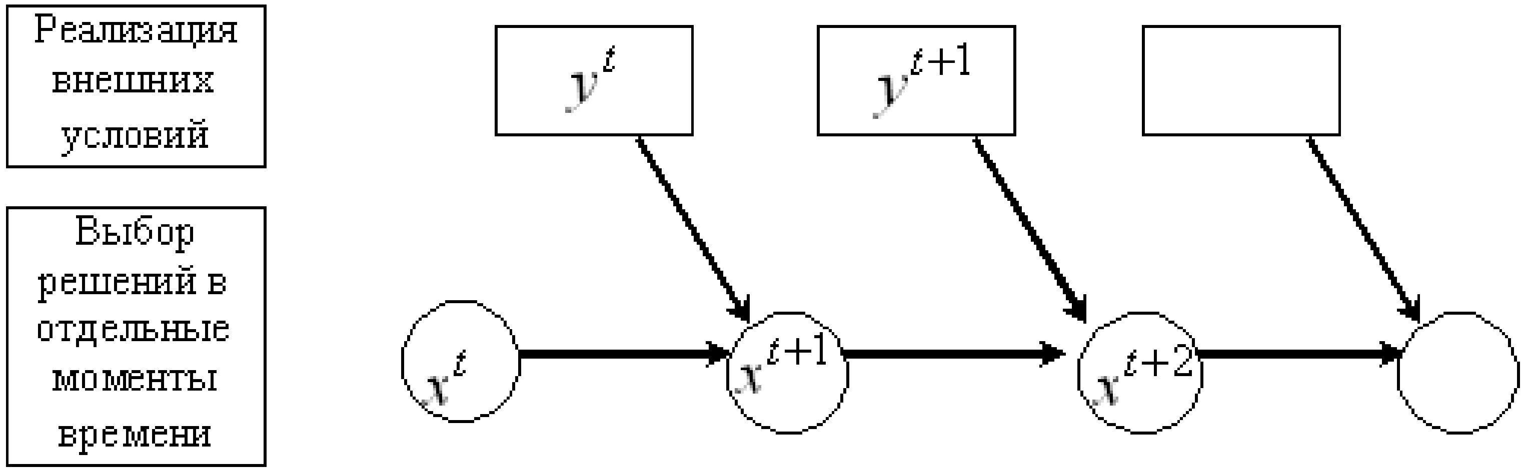
3. *Разработка и утверждение планов верху (Госплан, СМ, ЦК) и их детализация «вниз».*

4. *Главное в системе планирования – обмен информацией о возможном и невозможном в получениях ресурсов, в производстве.*

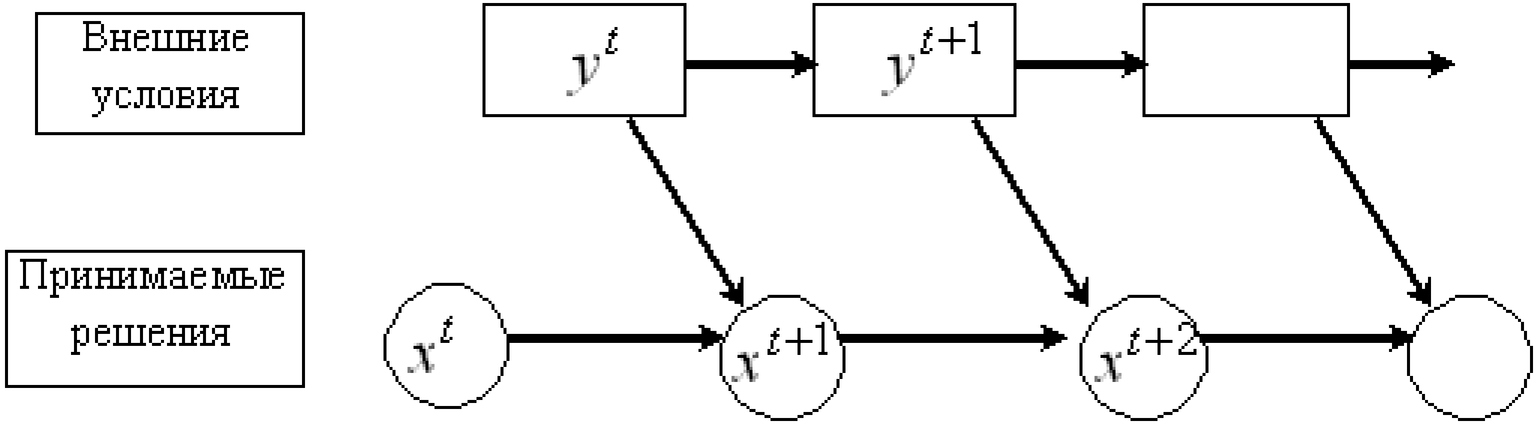
Система планирования производства и распределения действовавшая в СССР

- **Долгосрочные программы раз в пять лет примерно на 20 лет:**
- -Программа научно-технического развития;
- -Схемы размещения и развития производства.

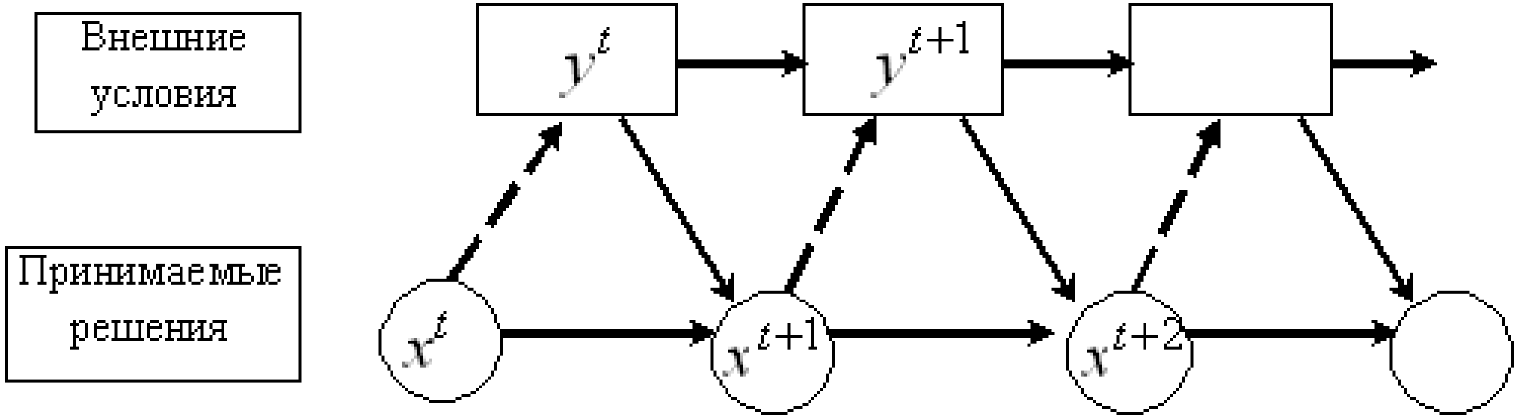
- -**Среднесрочные пятилетние планы**. «Директивы», которые корректировались в процессе выполнения.
- -**Годовые (текущие) и квартальные планы.**
- - Постановления по подготовке к зиме (примерно март).
- -**Выделяемые фонды и лимиты** (Госснаб и др снаб. органы).



Многоэтапный во времени процесс принятия решений в зависимости от реализации экзогенных условий (значения которых обозначены *y*) и решений предыдущих этапов



Многоэтапный процесс принятия решений, в котором реализация внешних условий в каждом моменте времени зависит от их реализации в предыдущие моменты времени.



Многоэтапный процесс принятия решений, в котором реализация внешних условий зависит от принимаемых в предыдущие моменты периоды решений

Спасибо

за

проявленный интерес!

В. И. Зоркальцев

Свойства и взаимосвязи методов аппроксимации

Иркутск, 2024