Приоритетное направление I.1. Теоретическая математика

Программа I.1.1. Алгоритмические и аналитические проблемы алгебры, теории моделей и теории вычислимости (координатор докт. физ.-мат. наук Е. П. Вдовин)

В Институте математики им. С. Л. Соболева доказано, что автоморфизм дистрибутивной решетки определяется неподвижными элементами тогда и только тогда, когда он является инволюцией. Получено полное описание подалгебр булевых алгебр, которые являются неподвижными подалгебрами автоморфизмов, определяемых неподвижными элементами.

Решен вопрос, поставленный С. С. Гончаровым: когда по подалгебре булевой алгебры однозначно восстанавливается автоморфизм, для которого данная подалгебра является подалгеброй неподвижных элементов.

Получено полное описание подалгебр булевых алгебр, которые являются неподвижными подалгебрами автоморфизмов, определяемых неподвижными элементами; показано, что класс таких булевых алгебр с выделенной подалгеброй является конечно аксиоматизируемым.

Исследованы подалгебры неподвижных элементов автоморфизмов атомных и суператомных булевых алгебр; показано, что подалгебра неподвижных элементов автоморфизма атомной булевой алгебры определяет его тогда и только тогда, когда она имеет ширину 2. Получен критерий элементарной эквивалентности таких булевых алгебр с выделенной подалгеброй.

В этом же Институте описаны условия сильной конструктивизируемости булевых алгебр в терминах вычислимости последовательности канонических предикатов Ершова–Тарского на булевых алгебрах. Решена известная задача о связи сильной конструктивизируемости булевых алгебр фиксированной элементарной теории и вычислимости некоторых наборов канонических предикатов на них, куда входят идеалы из последовательности Ершова–Тарского, а также множества, соответствующие множествам атомов, идеалам безатомных, идеалам атомных элементов фактор-алгебр по идеалам последовательности Ершова–Тарского. Задача решена для булевых алгебр всех элементарных характеристик, для булевых алгебр элементарной характеристики (infinity, 0, 0) дополнительно налагается условие равномерной вычислимости рассматриваемой последовательности предикатов.

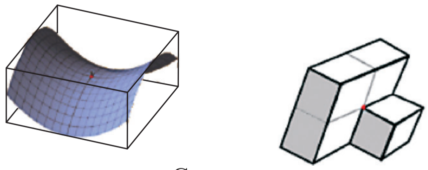
Программа I.1.2. Актуальные проблемы и приложения геометрического анализа и топологии (координатор акад. И. А. Тайманов)

В Институте математики им. С. Л. Соболева доказано утверждение теоремы Морса–Сарда для соболевских классов.

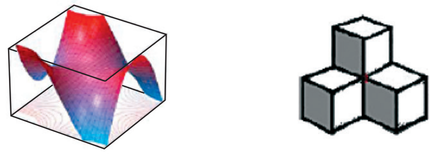
В этом же Институте разработан алгоритм вычисления топологических характеристик трехмерных тел, основанный на дискретизации теории Морса. Полученный результат вычислительной топологии может быть использован в различных прикладных областях современной науки, где возникает задача вычисления топологических характеристик геометрических объектов сложной формы, т. е. рангов групп гомологий.

В частности, предложен метод вычисления чисел Бетти трехмерных тел, при котором тела задаются посредством объединения единичных кубиков с целочисленными координатами вершин в трехмерном евклидовом пространстве. Главной особенностью данного подхода является использование дискретных аналогов гладких функций, которые кроме стандартных невырожденных (морсовских) критических точек имеют также простейшие вырожденные критические точки – точки типа «обезьяньего седла».

Разработанный алгоритм был применен для вычисления топологических характеристик реализаций случайных полей, используемых при численном моделировании нефтегазовых коллекторов (рис. 1).



Седло



«Обезьянье седло»

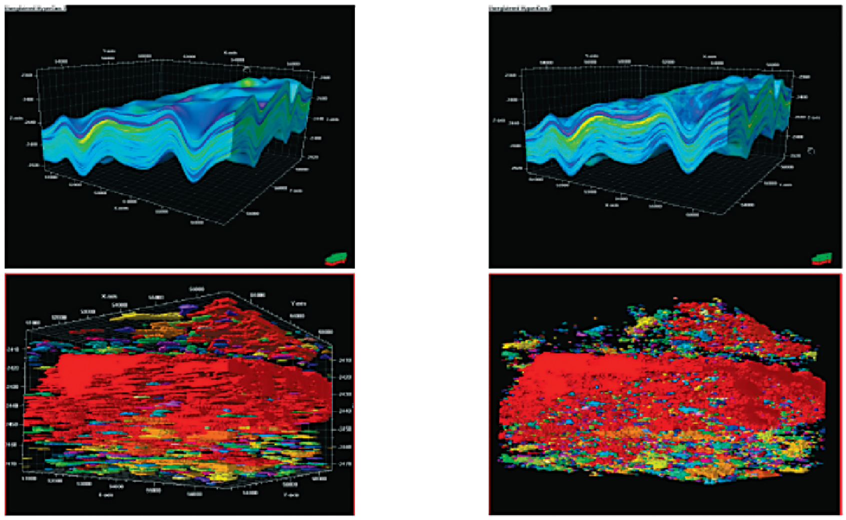


Рис. 1. Типы критических точек, возникающие при дискретизации теории Морса (вверху) и различные реализации случайного поля, моделирующего нефтяной коллектор, для которых считались топологические характеристики (внизу).

Программа I.1.3. Асимптотические методы теории вероятностей и математической статистики и их приложения (координатор докт. физ.-мат. наук А. И. Саханенко)

В Институте математики им. С. Л. Соболева предложен подход, позволяющий исследовать асимптотическое поведение распределений двухшаговых статистических оценок при близких к минимальным ограничениях как на точность оценки первого шага, так и на гладкость функций, определяющих оценки второго шага. Двухшаговые статистические оценки находят широкое применение в прикладных статистических исследованиях при оценивании неизвестного параметра. Однако, зачастую они используются без соответствующего теоретического обоснования, поскольку принято считать, что они дают достаточно точные приближения для оптимальных в некотором смысле оценок. Ранее при доказательствах асимптотической нормальности таких оценок предполагалось существование достаточно гладких производных у основных функций, которые определяют оценки второго шага, и накладывались серьезные ограничения на точность оценки первого шага. Полученные асимптотически нормальные двухшаговые статистические оценки справедливы также в ряде задач регрессии при более слабых ограничениях, когда не нужно существования производных у основных функций, а от оценок первого шага часто требуется лишь обычная состоятельность.

В этом же Институте завершен цикл работ, связанных с исследованием распределения времени пребывания случайного блуждания в отрезке и на полуоси. Получены полные асимптотические разложения в локальной предельной теореме о времени пребывания случайного блуждания на полуоси с удаляющейся границей. Как правило, одним из следующих шагов после получения предельных теорем является нахождение асимптотических разложений. Сначала с помощью факторизационного метода, успешно применяемого для решения ряда граничных задач для случайных блужданий и процессов, удалось найти факторизационные представления для интегральных преобразований над искомыми распределениями, а затем выполнить асимптотический анализ этих представлений при выполнении условия Крамера на распределение скачков блуждания, что позволило получить полные асимптотические разложения для распределения времени пребывания случайного блуждания на полуоси с удаляющейся границей.

Программа I.1.4. Исследование задач динамики и управления: качественный и численный анализ (координатор член-корр. РАН А. А. Толстоногов)

В Институте динамики систем и теории управления исследована вариационная устойчивость задач оптимального управления системами типа Вольтерра, включающих в себя обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с запаздыванием, систему Гурса–Дарбу, начально-краевые задачи для волнового уравнения, полулинейные гиперболические уравнения первого порядка. Полученные результаты позволяют упрощать задачи оптимального управления, содержащие малый параметр, и обосновывают возможность замены негладкой правой части управляемой системы на некоторую ее гладкую аппроксимацию.

Получено необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями спуска по целевому функционалу для классической нелинейной задачи оптимального управления. Это условие формулируется с произвольным верхним решением уравнения Гамильтона–Якоби,

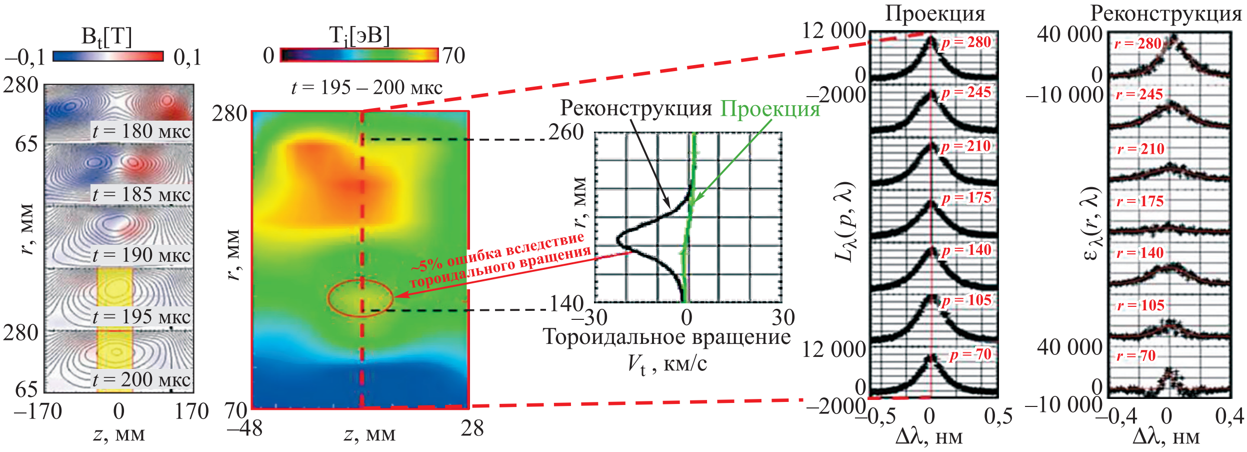


Рис. 2. Реконструкция двумерного распределения ионной температуры по результатам спектральных (доплеровских) измерений.

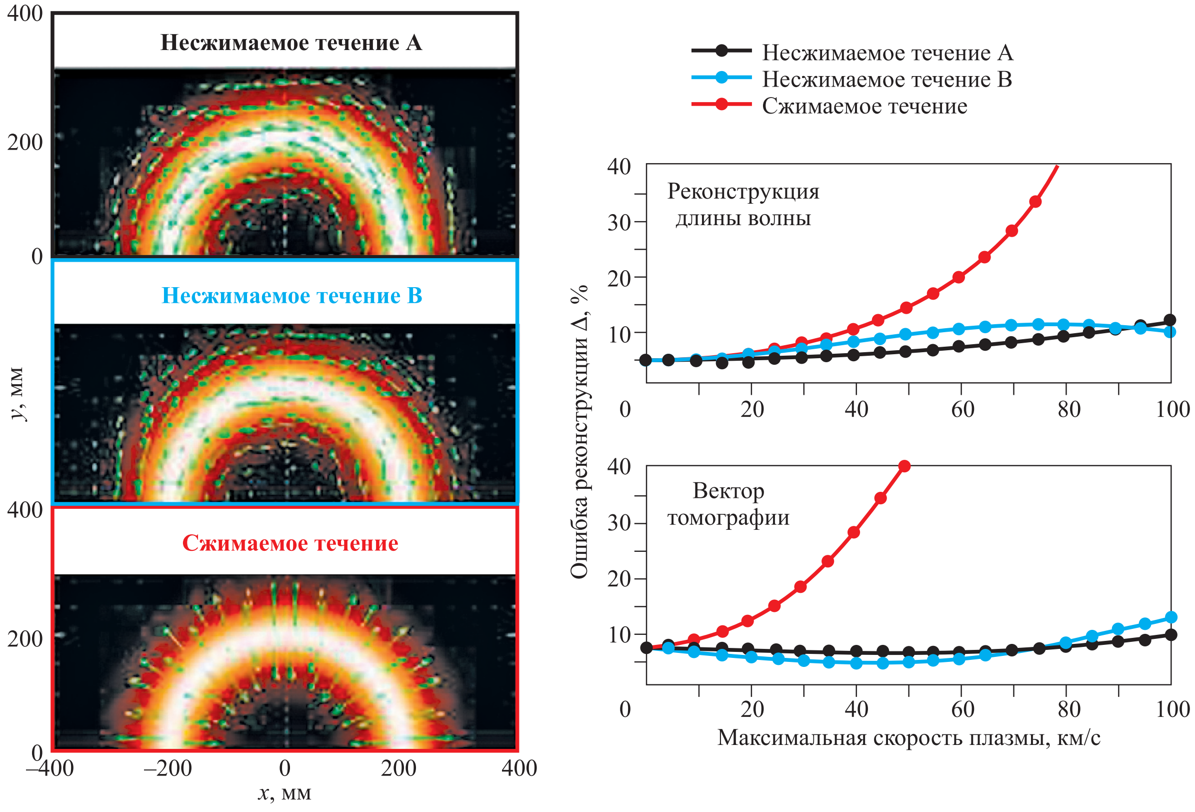


Рис. 3. Результаты реконструкции 2D векторного поля скоростей.

функционально-параметрически зависящим от выбора опорной мажоранты целевой функции задачи, задающей краевое условие для дифференциального неравенства.

Выработан позиционный принцип минимума для классической нелинейной задачи оптимального управления без фазоограничений в виде нелокального необходимого условия оптимальности вариационного характера, формулируемого в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина, но существенно его усиливающего позиционным варьированием управления. Доказательство основано на использовании линейных верхних решений уравнения Гамильтона–Якоби, порожденных опорными решениями сопряженной системы. Такие решения всегда существуют в задачах с вогнутой или дважды гладкой целевой функцией даже при негладкой динамике системы.

В этом же Институте разработаны методы диагностики высокотемпературной плазмы с использованием методов скалярной и векторной томографии. Проведено численное моделирование реконструкции полоидального поля скоростей с целью определения минимально необходимого числа ракурсов регистрации для томографической системы на установке сферический токамак (TS-4).

Представлены результаты реконструкции двумерного распределения ионной температуры в эксперименте по магнитному пересоединению по результатам спектральных (доплеровских) измерений (рис. 2), а также результаты реконструкции 2D векторного поля скоростей (рис. 3). Результаты томографической реконструкции хорошо согласуются с результатами, полученными другими методами.

Программа I.1.5. Теория дифференциальных уравнений и ее приложения к задачам естествознания (координатор докт. физ.-мат. наук Г. В. Демиденко)

В Институте математики им. С. Л. Соболева найден симметрический вид уравнений релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД) в терминах физических переменных. Построено семейство так называемых вторичных симметризаций системы РМГД. С помощью полученных симметризаций указаны достаточные условия корректности в соболевских пространствах задачи с релятивистской свободной границей плазма–вакуум и задачи для релятивистского тангенциального МГД-разрыва. Найденный вид симметрических матриц важен для исследования начально-краевых задач для системы РМГД.

В этом же Институте установлены новые условия экспоненциальной дихотомии систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Условия дихотомии формулируются в терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. С использованием свойств решений этой задачи доказаны теоремы о возмущении, получены оценки параметров дихотомии и мультипликаторов системы. На основе полученных результатов доказан ряд теорем об асимптотической устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Из этих теорем, в частности, вытекает еще одно доказательство теоремы Н. Н. Боголюбова об устойчивости колебаний перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса (рис. 4). В дополнение к теореме Н. Н. Боголюбова получены новые оценки области притяжения верхнего положения маятника, оценки скорости стабилизации, а также условия устойчивости при нарушении синусоидального закона колебаний точки подвеса.

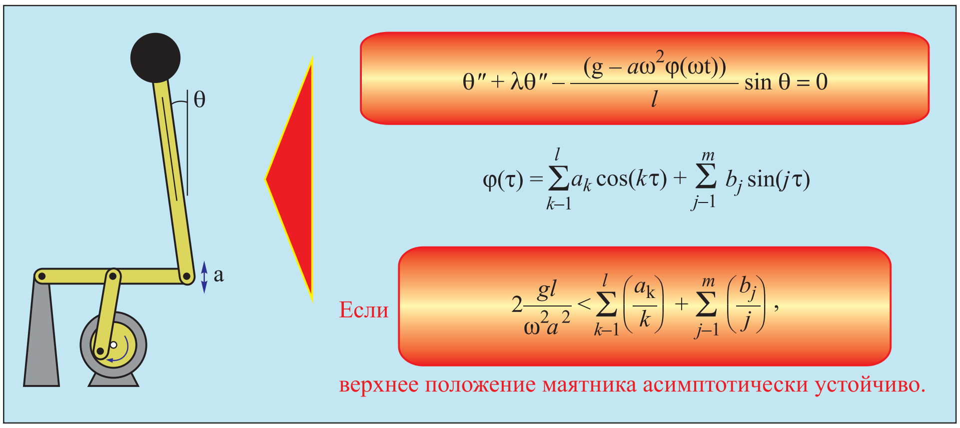


Рис. 4. Условия устойчивости колебаний перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса.