ОБ ОДНОМ БЕЗИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И АНИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Формалев В.Ф., Голованов В.А.

Московский государственный авиационный институт (технический университет), Москва, Россия

При решении сопряженных задач теплообмена от пограничных слоев и многомерной теплопроводности используются итерационные процедуры, связанные с сопряженностью задач. При наличии анизотропии свойств обтекаемого тела, кроме локальных итераций, связанных с нелинейностью, возникает необходимость использовать глобальный итерационный процесс, связанный с сопряженностью задач.

В работе предлагается численный метод безитерационного решения сопряженных задач пограничного слоя и анизотропной теплопроводности. Основу метода рассмотрим в системе координат (x,y) для следующей сопряженной задачи теплообмена в пограничном слое и анизотропной теплопроводности в пластине ($0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$):

$$\frac{\partial\left(\rho\cdot u\cdot r\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\cdot v\cdot r\right)}{\partial y}=0; \tag{1}$$

$$\rho\cdot u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\cdot v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{2}$$

$$\rho\cdot u\cdot\frac{\partial I}{\partial x}+\rho\cdot v\cdot\frac{\partial I}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\Pr}\cdot\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{\mu}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)\cdot\frac{\partial u^2}{\partial y}\right]; \tag{3}$$

$$p=\rho\cdot R\cdot T. \tag{4}$$

Для задачи пограничного слоя в начальном сечении задаются распределения вдоль оси y продольного компонента вектора скорости и температуры (или энтальпии). На наружной границе пограничного слоя вдоль переменной x задается распределение скорости невязкого потока (или давление):

$$y=0_\Gamma\ :\ u\left(x,0_\Gamma\right)=v\left(x,0_\Gamma\right)=0; \tag{5}$$

$$y=\delta_e(x)\ :\ u\left(x,\delta_e(x)\right)=u_e(x),\ \ T\left(x,\delta_e(x)\right)=T_e(x)\ ;\quad \frac{\mathrm{d}p_e}{\mathrm{d}x}=-\rho\cdot u_e\cdot\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\ ; \tag{6}$$

$$x=0:\quad u(0,y)=u_0(y)\ ,\ \ v(0,y)=v_0(y)\ ,\ \ T(0,y)=T_0(y); \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{11}=\lambda_\xi\cdot\cos^2\varphi+\lambda_\eta\cdot\sin^2\varphi\ ,\\ \lambda_{22}=\lambda_\xi\cdot\sin^2\varphi+\lambda_\eta\cdot\cos^2\varphi\ ,\\ \lambda_{12}=\lambda_{21}=\left(\lambda_\xi-\lambda_\eta\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\ .\end{gathered} \tag{8}$$

$$\lambda_{11}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+2\lambda_{12}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x\ \partial y}+\lambda_{22}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0\ ,\ \ 0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\ . \tag{9}$$

В теле на левой границе задается распределение температур, на правой и нижней - однородные краевые условия 2-го рода (нулевые тепловые потоки)

$$T(0,y)=T_{w2}(y),\ x=0,\ 0\le y\le l_2\ ; \tag{10}$$

$$\lambda_{11}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{21}\frac{\partial T}{\partial y}=0,\ x=l_1,\ 0\le y\le l_2\ ; \tag{11}$$

$$\lambda_{12}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}=0,\ 0\le x\le l_1,\ y=l_2. \quad (12)$$

На границе сопряжения задаются непрерывность тепловых потоков и температур (краевые условия 4-го рода по Лыкову А.В.), причем тепловые потоки спроектированы на направление внешней нормали, в качестве которой для пластины принимается ось y

$$\lambda_{\Gamma}\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0_{\Gamma}}=\left.\left(\lambda_{12}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right|_{y=0_{\mathrm{T}}},\ 0\le x\le l_1,\ y=0; \quad (13)$$

$$T(x,0_{\Gamma})=T(x,0_{\mathrm{T}})=T_w(x),\ 0\le x\le l_1,\ y=0. \quad (14)$$

В выражениях (1)-(14) $\left[\lambda_{ij}\right],\ i,j=1,2$ - компоненты тензора теплопроводности, w - относится к границе сопряжения «газ-тело», Г - к газу, Т - к телу.

Существо метода заключается в том, что на введенных конечно-разностных сетках задача анизотропной теплопроводности в теле и задача для уравнения энергии в пограничном слое решаются с помощью скалярных прогонок, причем прямой ход прогонок по определению прогоночных коэффициентов осуществляется в направлении от наружных границ пограничного слоя и тела к границе сопряжения, на которой в качестве краевого условия в виде параметра используется температура границы сопряжения $T_w(x)$.

Тогда эта температура в качестве параметра войдет в прогоночные коэффициенты в узлах, непосредственно примыкающих к границе сопряжения как со стороны тела, так и со стороны газа. Это дает возможность со вторым порядком численно продифференцировать по переменной y температурные поля на границе сопряжения и эти производные подставить в условия сопряжения (13), в результате чего получаем следующую связанную систему задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно $T_w(x)$, $x\in\left[x_{i-1},x_i\right],\ i=1,2,\ldots$.

$$\frac{\mathrm{d}T_w(x)}{\mathrm{d}x}+pT_w(x)=q,\ T_w(x_{i-1})=T_{wi-1},\ x\in\left[x_{i-1},x_i\right],\ i=1,2,\ldots, \quad (15)$$

где коэффициенты p и q зависят от прогоночных коэффициентов соответственно, в газе и теле

$p=\frac{\lambda_{22}\alpha_{\mathrm{T}}}{2h_{\mathrm{T}}\lambda_{12}}-\frac{\lambda_{\Gamma}\alpha_{\Gamma}}{2h_{\Gamma}\lambda_{12}}$, $q=\frac{\lambda_{\Gamma}\beta_{\Gamma}}{2h_{\Gamma}\lambda_{12}}-\frac{\lambda_{22}\beta_{\mathrm{T}}}{2h_{\mathrm{T}}\lambda_{12}}$, $\alpha=-3+4A_{\Gamma1}-A_{\Gamma1}A_{\Gamma2}$, $\alpha=-3+4A_{\mathrm{T}1}-A_{\mathrm{T}1}A_{\mathrm{T}2}$, $\beta=4B_{\Gamma1}-A_{\Gamma2}B_{\Gamma1}-B_{\Gamma2}$, $\beta=4B_{\mathrm{T}1}-A_{\mathrm{T}2}B_{\mathrm{T}1}-B_{\mathrm{T}2}$, где $h_{\mathrm{T}},h_{\Gamma}$ - шаг по переменной y в теле и газе соответственно.

Решением задач (15) являются функции

$$T_w(x)=T_{wi-1}\cdot\exp(-px)+\frac{q}{p}\left(1-\exp(-px)\right),\ x\in\left[x_{i-1},x_i\right],\ i=1,2,\ldots. \quad (16)$$

Значение температуры в конце промежутка $\left[x_{i-1},x_i\right]$ является начальным значением для следующего промежутка.

Значения температуры (16) подставляются в прогоночные коэффициенты со стороны газа и тела, после чего обратным ходом метода прогонки получаем распределение температур в газе и теле.