XV Международная школа-семинар « Информационные технологии в задачах математического моделирования»

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ЯВНЫМ КВАДРАТУРНЫМ ФОРМУЛАМ И НЕЯВНЫМ АЛГОРИТМАМ , ПОСТРОЕННЫМ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Киреев В.И. ,Цирков Г.В.

Московский государственный авиационный институт (МАИ) , Москва, Россия .

Для численного интегрирования формульных и сеточных функций одной переменной $y_i = f(x_i), x \in [a,b], i = 0,1...n$, заданных или представляемых в общем случае на нерегулярной сетке и имеющих особенности, требующих мельчения шага интегрирования , разработаны несколько классов новых квадратурных формул (КФ). Один из этих классов имеет традиционно явный тип и выражается через значения функций $f(x_i)$ и их производные $f^{(p)}(x_i)$ (функционально- дифференциальные формулы типа Эйлера). Другой класс алгоритмов численного интегрирования имеет неявный тип , и эти алгоритмы основаны на определении интегралов на всех внутренних отрезках $I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, (i = 0,1,...,n-1)$, путем решения систем линейных алгебраических уравнений относительно I_i^{i+1}.

Например, двухинтервальная КФ парабол,имеющая порядок $o(h^4)$, записанная через параметр нерегулярности трехточечного шаблона $\Delta_{i+!} = \dfrac{h_{i+1}}{h_i}, (h_{i+1} = x_{i+1} - x_i)$ имеет следующий вид:

$$\hat{I}_i^{i+1} = \frac{h_i(\Delta_{i+1}+1)}{6}[(2-\Delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(\Delta_{i+1}+1)^2}{\Delta_{i+1}} f_i + (2-\frac{1}{\Delta_{i+1}})f_{i+1}].$$

При выполнении условия $0.5 < \Delta_{i+1} < 2$ в данной формуле выполняется свойство положительности ее коэффициэнтов.

Для вычисления интегралов по различным типам КФ Эйлера в работе предложены явные аппроксимационные операторы и неявные алгоритмы вычисления производных $f^{(p)}(x_i)$ различных порядков. Для получения всех алгоритмов вычисления интегралов, а также производных $f^{(p)}(x_i)$ в работе использован анализ параметрических соотношений интегро-дифференциальных параметрических и кубических сплайнов четвертой степени.

Так, из параболических и кубических сплайн-функций получены следующие системы алгебраических уравнений относительно интегралов:

$$\frac{\hat{I}_{i-1}^{i}}{h_i^2}+2\frac{\hat{I}_{i}^{i+1}}{h_{i+1}^2}+\frac{\hat{I}_{i+1}^{i+2}}{h_{i+2}^2}=\frac{1}{3}[\frac{1}{h_i}f_{i-1}+(\frac{3}{h_i}+\frac{2}{h_{i+1}})f_i+(\frac{2}{h_{i+1}}+\frac{3}{h_{i+2}})f_{i+1}+\frac{1}{h_{i+1}}f_{i+2}],$$

$$\frac{h_{i+1}^3}{3h_i^2H_i^{i+1}}\hat{I}_{i-1}^{i}+(1-\frac{h_i}{3H_i^{i+1}}-\frac{h_{i+2}}{3H_{i+1}^{i+2}})\hat{I}_{i}^{i+1}+\frac{h_{i+1}^3}{3h_{i+2}^2H_{i+1}^{i+2}}\hat{I}_{i+1}^{i+2}=$$
$$\frac{h_{i+1}^3}{12h_iH_i^{i+1}}f_{i-1}+\frac{h_{i+1}}{2}(1-\frac{h_{i+2}}{6H_{i+1}^{i+2}}+\frac{h_{i+1}^2-h_i^2}{2h_iH_i^{i+1}})f_i+\frac{h_{i+1}}{2}(1+\frac{h_{i+1}^2-h_{i+2}^2}{2h_{i+2}H_{i+1}^{i+2}}-\frac{h_i}{6H_i^{i+1}})f_{i+1}+$$
$$\frac{h_{i+1}^3}{12h_{i+2}H_{i+1}^{i+2}}f_{i+2},\quad (i=0,1...i-2),\quad (H_k^s=h_k+h_s).$$

При h=const эти формулы упрощаются:

$$\hat{I}_{i-1}^{i}+2\hat{I}_{i}^{i+1}+\hat{I}_{i+1}^{i+2}=\frac{h}{3}[f_{i-1}+5(f_i+f_{i+1})+f_{i+2}],$$

$$\hat{I}_{i-1}^{i}+4\hat{I}_{i}^{i+1}+\hat{I}_{i+1}^{i+2}=\frac{h}{4}[f_{i-1}+11(f_i+f_{i+1})+f_{i+2}]$$

На основе приведенныхформул легко строятся устойчивые неявные алгоритмы численного интегрирования функций $f(x_i)$ *на* $[a,b]$ с точностью $O(h^2)$ и $O(h^3)$.

Для всех разработанных алгоритмов численного интегрирования проведены исследования по оценкам погрешностей их аппроксимаций. В числе квадратурных формул имеются формулы повышенного порядка точности ($O(h^5)$ *на* $[a,b]$), а также обобщенные дифференциальные квадратурные формулы Эйлера , полученные из разложения первообразных функций в ряды Тейлора. Например, одноинтервальная КФ Трапеций имеет вид:

$$\hat{I}_{i}^{i+1}=h_{i+1}\frac{f_i+f_{i+1}}{2}-\frac{h_{i+1}^2}{4}(f'_{i+1}-f'_i)+\frac{h_{i+1}^3}{12}(f''_{i+1}+f''_i)-\frac{h_{i+1}^4}{48}(f'''_{i+1}-f'''_i)+...=$$
$$\frac{h_{i+1}}{2}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{h_{i+1}^k}{(k+1)!}[f_{i+1}^{(k)}+(-1)f_i^{(k)}]$$

В работе выполнены также исследования по применению некоторых из предложенных алгоритмов для численного интегрирования формульных функций , имеющих локальные особенности и показана их эффективность по сравнению с традиционными алгоритмами.