ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.И. Литвин, В.Б. Кусков, А.И. Май

Институт оптического мониторинга СО РАН,

Томск, Россия

Рассматриваются варианты двумерного уравнения теплопроводности; хотя возможны и обобщения рассматриваемых уравнений на трехмерный случай.

1. Использование ОДП для решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

Пусть для уравнения с постоянными коэффициентами

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \mu u(x, y) = -f(x, y) \qquad (1.1)$$

поставлена первая краевая задача в прямоугольной области. Введем равномерную сетку $x_n = \{nh_1, y_m = mh_2, 0 \le n \le N, 0 \le m \le M\}$, где N и M – числа, равные степеням двойки. Для уравнения (1.1) разностные решения будем искать в виде разложения в ряд Фурье [1-3]:

$$u_{n,m} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} a_{p,q} W_1^{np} W_2^{mq}; \; W_1 = \exp(2\pi i / N), W_2 = \exp(2\pi i / M).$$

Коэффициенты Фурье будут иметь вид [1]:

$$a_{p,q} = b_{p,q} \Big/ \left(\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi p}{N} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi q}{M} + \mu \right), \text{ где} \qquad (1.2)$$

$$b_{p,q} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_{n,m} W_1^{-np} W_2^{-mq}, \text{ или } b_{p,q} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \beta_{n,q} W_1^{-np}, \;\; \beta_{n,q} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_{n,m} W_2^{-mq}.$$

Представим решение уравнения в виде:

$$u_{n,m} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} a_{p,q} wal_p(n,p) wal_p(m,q), \qquad (1.3)$$

$$a_{p,q} = b_{p,q} / (\alpha_p + \alpha_q + c); \; b_{p,q} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} wal_p(n,p) wal_p(m,q), \quad \text{или}$$

$b_{p,q} = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \beta_{n,q} wal_p(n,p), \beta_{n,q} = \dfrac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} wal_p(m,q)$, где $wal_p(n,p)$ - функции Уолша-Пэли. Величины α_p и α_q имеют вид [2, 3]:

$$\alpha_p = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le p \le N/2 - 1; \\ 4/h_1^2, \text{ если } N/2 \le p \le N-1; \end{cases} \qquad \alpha_q = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le q \le M/2 - 1; \\ 4/h_2^2, \text{ если } M/2 \le q \le M-1. \end{cases}$$

Из решения следует, что двумерная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца с постоянными коэффициентами сводится к одномерной задаче ввиду того, что ОДП Фурье и Уолша являются разделимыми преобразованиями [2, 3].

2. Численное решение уравнения теплопроводности.

Пусть для уравнений с постоянными коэффициентами

$$\partial u / \partial t + \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \mu u = -f(x, y) \qquad (2.1)$$

поставлена первая краевая задача в прямоугольной области:

$\{0 \le x \le a; \quad 0 \le y \le b; \quad 0 \le t \le \mathrm{T};\}$; $u(x, y, t)_\Gamma = 0$; $\quad u(x, y, t)_\Gamma = \varphi(x, y)$,

Где Γ – граница прямоугольной области.
Зафиксируем $t_0 = 0$ и сначала рассмотрим задачу для уравнения Гельмгольца:

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \mu u(x, y) = -f(x, y) \tag{2.2}$$

решение которой приведено выше. Ввиду того, что уравнение (2.1) является параболическим, решение $u(x, y, t)$ на слое $t_1 = t_0 + \Delta t$ может быть определено, если известны его значения в предшествующем слое $t = t_0$. Дискретное преобразование Фурье от уравнения (2.1) представим в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{mn}(t) \exp\big(i(p_n x + q_m y)\big), \tag{2.3}$$

где величины p_n и q_m равны: $2\pi n/a$; $2\pi n/b$; $p_\tau = \tau/\mathrm{T}$, $\tau = 0,1,\ldots,L-1$, где L – число точек сетки по переменной t.
Подставляя выражение (2.2) в уравнение (2.1), получим:

$$dC^*_{nm}/dt = (p_n^2 + q_m^2 + \mu)C^*_{nm}.$$

Отсюда, $C^*_{nm}(t_0 + \Delta t) = C^*_{nm} \exp\big(p_n^2 + q_m^2 + \mu\big)\Delta t.$

Решение $u(x, y, t_0 + \Delta t)$ следует из обратного преобразования Фурье, использующего известные коэффициенты [2,3]. В случае переменного коэффициента в уравнении (2.1) вместо коэффициента μ в выражении (2.5) нужно проставить соответствующее значение $c(x, y)$. Возможно можно более точно составить уравнение (2.4) (при определенной надобности), учитывая функцию $f(x, y)$.

Литература

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1976, 512 с.
2. Коваленко И.Л., Ленивцева Л.Ю., Литвин А.И., Симонженков С.Д. Применение к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца неявного вариационно-градиентного метода //Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1995, т. 35, № 4, с. 611-615.
3. Литвин А.И., Солдатов В.Н. Численное решение уравнения теплопроводности // Методы алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса. М.: МГЗПИ, 1985. Вып. 3. с. 148-153.