ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ С ДАННЫМИ НА ДВУХ ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ.

Казаков А.Л.

Уральская государственная академия путей сообщения, Екатеринбург

Рассматривается начально-краевая задача для квазилинейной системы уравнений с частными производными:

$$\vec{U}_x + A_0\vec{U}_y = \sum_{k=1}^{l} A_k\vec{U}_{z_k} + \vec{f}. \tag{1}$$

$$u_i|_{x=0} = \phi_i(y,\vec{z}),\ i=1,\ldots,p;\ u_j|_{y=0} = \phi_j(x,\vec{z}),\ j=p+1,\ldots,m,\ 0\le p\le m. \tag{2}$$

Здесь $\vec{U} = \{u1,\ldots,u_m\}$ – вектор искомых функций, $x,y,\vec{z}$, где $\vec{z} = \{z_1,\ldots,z_l\}$ – независимые переменные, $A_k = (a_{ij})_k,\ i,j=1,\ldots,m,\ A_k = A_k(x,y,\vec{z},\vec{U}),\ k=0,\ldots,l,\ \vec{f} = \{f_1,\ldots,f_m\},\ \vec{f} = \vec{f}(x,y,\vec{z},\vec{U})$.

Будем предполагать, что $\det A_0|_{x=0,y=o} \neq 0$, более того, над полем вещественных чисел матрица $A_0|_{x=0,y=o}$ приводится к диагональному виду, т.е. найдется матрица C_0 такая, что

$$C_0^{-1}A_0|_{x=0,y=0}C_0 = B_0,$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$C_0 = (c_{i,j}(\vec{z})),\ \lambda_i = \lambda_i(\vec{z}) \neq 0,\ i,j=1,\ldots,m.$$

Не теряя общности, можем предполагать, что $1 > |\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_m|$.

Введем последовательности

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{11} & a_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & a_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pm} \\ \lambda_1^n c_{p+1,1} & \lambda_2^n c_{p+1,2} & \ldots & \lambda_m^n c_{p+1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n c_{m1} & \lambda_2^n c_{m2} & \ldots & \lambda_m^n c_{mm} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_n = \det C_n.$$

Теорема 1. Если все входные данные являются аналитическими в некоторой окрестности точки $O(x = 0,\ y = 0,\ \vec{z} = 0,\ \vec{z} = 0,\ \vec{U} = 0)$,

$$\Delta_n \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta_n}{|\lambda_1 \ldots \lambda_{m-p}|^n} \neq 0,$$

то у задачи (1), (2) существует в некоторой окрестности точки O единственное локально аналитическое решение.

Замечание. Если $p = 0$ или $p = m$, т.е. все начальные условия проставлены на одной поверхности, то задача (1), (2) является задачей Коши. В этом случае, если $\det C_0 \neq 0$, то $\Delta_n \neq 0,\ n \in N$, т.е. условия теоремы 1 выполнены.

Задача (1), (2) для системы 2-го порядка (при $m = 2,\ p = 1$) решается при описании течений газа, возникающих при резком вдвижении в газ непроницаемого поршня [2]. Задача (1), (2) для системы 4-го порядка (при $m = 4,\ p = 2$) решается при описании течений газа, возникающих при распаде разрыва, сосредоточенного в начальный момент времени на криволинейной поверхности, в случае, когда возникает конфигурация Б: две ударных волны и контактный разрыв [4].

Литература

[1] Леднев Н.А. *Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными.* // Математический сборник, 1948, вып. 2.

[2] Тешуков В.М. *Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне* // Динамика сплошной среды, 1978, вып. 32.

[3] Баутин С.П. *Задача Коши с начальными данными на разных поверхностях.* // ДАН, 1995, 5.

[4] Тешуков В.М. *Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности* // ПМТФ, 1980, 2.

[5] Тешуков В.М. *О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки* // ПММ, 1982, вып. 2.

[6] Баутин С.П., Казаков А.Л. *Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии.* // ПММ, 1996, вып. 3.