VI Международная конференция по вычислительным методам в задачах волновой гидродинамики

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Ким Д.Ч.

Новосибирск. Россия.

Жидкость с пузырьками газа является сложной нелинейной распределенной динамической системой. Сильная нелинейность и дисперсия обусловлены присутствием газовой фазы. При вынужденных колебаниях одиночного пузырька в поле звуковой волны обнаружены гистерезис, генерация кратных и комбинационных частот, бифуркация удвоения периода и странный аттрактор [1-2]. Исследование этих явлений при распространении ударных волн в газожидкостной среде является фундаментальной задачей волновой гидродинамики.

Течение жидкости, содержащей пузырьки газа, описывается уравнениями Иорданского [3]. Гидродинамическая нелинейность меньше нелинейности, обусловленной пузырьками. В линейном приближении Кедринский получил неоднородное волновое уравнение, правая часть которого учитывает наличие газовых пузырьков [4]. Уравнение Релея монопольных колебаний пузырька имеет известные ограничения. В данной работе используется также модель пузырька Келлера - Миксиса [5]. Кроме того, используется неоднородное волновое уравнение в форме, предложенной Grighton и Williams [6]. Окончательно, система уравнений имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}lg(1-\varphi)\right) \qquad (1)$$

$$P=(\rho-\rho_0)c^2 \qquad (2)$$

$$\varphi=\frac{4}{3}\pi R^3 N \qquad (3)$$

$$R\left(1-\frac{\dot{R}}{c}\right)\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{\dot{R}}{3c}\right)=\frac{\bar{P}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(R\bar{P}\right) \qquad (4)$$

где $\bar{P}=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}-\frac{2\sigma}{R}-4\mu\frac{\dot{R}}{R}-P_0-P$

Здесь t - время; x - пространственная координата; P - давление в волне; ρ - плотность жидкости; μ - вязкость; σ - поверхностное натяжение; φ - объемное газосодержание; c - скорость звука в жидкости; R - радиус пузырька; N - число пузырьков в единице объема, которое считается постоянным. Индекс (0) означает невозмущенное состояние среды.

Для интегрирования системы уравнений (1) - (4) ставится краевая задача. Начальные условия при t=0 соответствуют невозмущенной среде, а граничные условия при x=0 - появлению с левого края области интегрирования заданного входного импульса

$$P(x,0)=P_0;\quad P(0,t)=P_V t^2 \exp\left(\frac{t^2}{\tau^2}\right);\quad P(\ell,t)=P_0; \tag{5}$$

$$\varphi(x,0)=\varphi_0; \tag{6}$$

$$R(x,0)=R_0;\quad \frac{dR}{dt}=0. \qquad (7$$

Для решения сформулированной задачи разработан и программно реализован конечноразностный алгоритм. Он является модификацией неявно-явного разностного метода. Процедура численного интегрирования написанной выше системы уравнений расщепляется на два этапа. На первом этапе решается неоднородное волновое уравнение. Используется неявная схема для аппроксимации линейных членов и явное усреднение для нелинейных членов. Согласно линейному анализу устойчивости эта схема безусловно устойчива. Порядок погрешности аппроксимации равен $O((\Delta t)^2)+O((\Delta)^2)$. На каждом временном шаге решается система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки. С целью экономии времени центрального процессора правая граница двигается со скоростью звука в чистой жидкости. На втором этапе решается уравнение колебания пузырька в каждом узле пространственной сетки методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Проведенное численное моделирование позволяет выделить в возмущенной части среды три волновые структуры : упругий предвестник, движущийся со скоростью звука в жидкой фазе, акустический солитон, движущийся со скоростью меньшей, чем предвестник и “хвост” солитона. Нами обнаружено колебание амплитуды солитона на частоте кратной гармоники, генерация субгармоники в “хвосте” солитона. Причем субгармоника также модулирована на частоте кратной гармоникой.

Литература

1. Е.А. Заболотская. Генерация второй гармоники звуковой волны в жидкости с равномерно распределенными воздушными пузырьками.// Аккуст. ж., 1975, **Т.21**, N6, С. 934-937.
2. W. Lauterborn and U. Parlitz. On the bifurcation structure of bubble oscillators // in Proseedings of the XI th International Symposium on Nonlinear Acoustics, edited by V. Kedrinskii (Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, 1987), pp. 71-80.
3. Иорданский С.В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. №3. С. 102-110.
4. Кедринский В.К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1968. №4. С. 29-34.
5. J.B. Keller and M. Miksis. Bubble oscillation of large amplitude. J. Acoust. Sos. Am. **68**, 628-633 (1980).
6. Grighton O., Flowes Williams J. Sound generation by turbulent two-phase flow. - J. Fluid Mech. , 1969, vol. 36, N3, p. 585-603.