МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛУБИНЫ

О.А.Терещенко и Г.А. Хабахпашев*
Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
электронная почта: geshev @ otani.thermo.nsk.su

Доклад посвящен построению дифференциальной модели двумерных нелинейных волновых процессов в океане с очень малым скачком плотности и пологим дном произвольной глубины. Предполагается, что двухслойная жидкость является идеальной, несжимаемой и несмешивающейся, стационарная составляющая скорости воды отсутствует, имеющие место осциллирующие течения считаются потенциальными и характеризуются малой, но конечной амплитудой.

Несмотря на интенсивность изучения, данная проблема решена далеко не полностью. Во многих работах выведены и исследованы эволюционные уравнения типа уравнения Кортевега – де Вриза [1–5]. Однако диапазон частот, в котором они применимы, недостаточно широк. Создание приближенных моделей для описания трехмерных возмущений как уровня пикноклина, так и свободной поверхности водоемов (длины волн могут быть не только велики, но и малы по сравнению с глубиной жидкости) является одной из актуальных задач гидродинамики.

В статье [6], подобно тому, как это было сделано в работе [7] для возмущений однородной жидкости, предложена простейшая полиномиальная аппроксимация дисперсионного соотношения для внутренних волн в двухслойной жидкости, находящейся между твердыми горизонтальными дном и крышкой. С помощью указанной аппроксимации удалось получить дифференциальное уравнение для трехмерных слабонелинейных квазистационарных прогрессивных возмущений границы раздела, пригодное при произвольных отношениях глубин слоев и характерной длины волны. Для этого был использован подход, развитый ранее в статьях [8, 9].

В данной работе применение рассматриваемого метода позволило свести исходную систему уравнений гидродинамики к одному эволюционному уравнению для возмущений медленной моды (именно они представляют наибольший интерес в океане). В случае плоских установившихся волн, бегущих над горизонтальным дном, с точностью до членов второго порядка малости имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(1-\frac{A}{U_*^2}\right)\zeta_* = BA\frac{d^2\zeta_*}{d\xi_*^2}+\frac{h_*^2-\rho_*}{h_*^2 h_*^+}\left(1+\frac{A}{2}\right)\zeta_*^2-\left(h_*-\rho_*\right)\frac{B}{2}A\frac{d^2\left(\zeta_*^2\right)}{d\xi_*^2}+\frac{\rho_*'}{2h_*^+}A\left[\left(\frac{d\zeta_*}{d\xi_*}\right)^2+7BU_*^2\left(\frac{d^2\zeta_*}{d\xi_*^2}\right)^2\right] \qquad (1)$$

Здесь $A=1-\frac{2}{3}B\frac{d^2}{d\xi_*^2}$, $U_*^2=\frac{U^2h_*^2}{\rho_*'gh_1}$, $h_*=\frac{h_1}{h_2}$, $\rho_*'=1-\rho_*$, $\rho_*=\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\zeta_*=\frac{\zeta}{h_1}$, $B=\left(\frac{2U_*}{h_*^+}\right)^2$, $h_*^+=1+h_*$, $\xi_*=\xi/h_1$, $\xi=x-Ut$, ζ – возмущение уровня пикноклина, x – продольная координата, U – характерная скорость распространения волны, t – время, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, h – глубина слоя, индексы 1 и 2 относятся к параметрам верхней и нижней жидкостей, соответственно.

Уравнение (1) обладает, в частности, решениями типа волн Стокса, которые в предельных ситуациях, когда равные толщины слоев достаточно мелки или возмущения очень короткие, согласуются с известными результатами [10]. Отметим, что при $h_1 < h_2$ для длинных волн коэффициент при нелинейном члене отрицателен, а для глубокого океана – положителен.

Если возмущения умеренно длинны, то во втором и третьем членах уравнения (1) полагалось, что A=1, а последние два члена целиком опускались. При этом все поправки, которыми мы пренебрегли, имеют порядок малости не ниже третьего. Решения упрощенного уравнения можно выразить через эллиптические функции Якоби, т. е. они являются кноидальными волнами. Найдены уединенные возмущения, которые хорошо описывают экспериментальные данные по лабораторному моделированию таких волн [11, 12]. По первому (линейному) приближению исследована устойчивость двух положений равновесия уравнения (1). Это позволило оценить верхнюю границу амплитуды уединенных возмущений.

Решена задача о плавном переходе линейной моногармонической волны из глубоководной области океана в направлении прибрежной зоны. Выполнено сравнение как с подобными [7, 9], так и с классическими [13] результатами для волн в однородной жидкости.

Пусть внутренние возмущения достаточно длинны по отношению к глубине пикноклина. Тогда для определения волн на свободной поверхности океана η тоже получаем одно дифференциальное уравнение. Плоские установившиеся прогрессивные возмущения границ связаны между собой следующей простой формулой:

$$\frac{\eta}{h_1} = -\rho_*' \frac{U_*^2}{h_*^2}\left(\zeta_* + \frac{U_*^2 h_*^+}{6h_*^2}\frac{d^2\zeta_*}{d\xi_*^2} + \frac{3}{2}\zeta_*^2\right) \quad (2)$$

Найдены решения уравнения (2) типа волн Стокса и длинных уединенных возмущений, распространяющихся над горизонтальным дном.

Всё вышеизложенное позволяет утверждать, что предложенная модель окажется полезной при изучении практических вопросов гидродинамики волн в стратифицированной жидкости, в том числе и с помощью численных методов.

Данная работа поддержана СПГП ВНШ (грант 96-15-96314) и СО РАН (грант ИГ-43-97).

Список литературы

1. **Пелиновский Е.Н., Раевский М.А., Шаврацкий С.Х.** Уравнение Кортевега – де Вриза для нестационарных внутренних волн в неоднородном океане // *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1977. Т. 13, № 3. С. 325–328.
2. **Kakutani T., Jamasaki N.** Solitary waves in two-layer fluid // *J. Physical Soc. Japan.* 1978. Vol. 45, No. 2. P. 674–679.
3. **Миропольский Ю.З.** *Динамика внутренних гравитационных волн в океане*. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 302 с.
4. **Segur H., Hammack J.L.** Solitary models of long internal waves // *J. Fluid Mechanics.* 1982. Vol. 118. P. 285–304.
5. **Leon C., Segur H., Hammack J.L.** Viscous decay of long internal solitary waves // *Physics Fluids* 1982. Vol. 25. P. 942–944.
6. **Борисов А.А., Хабахпашев Г.А.** Динамика слабонелинейных внутренних волн в двухслойном океане // *Доклады АН*. 1993. Т. 330, № 1. С. 105–107.
7. **Пелиновский Е.Н.** «Дифференциальная» модель волн на воде // *Доклады АН СССР*. 1988. Т. 300, № 5. С. 1231–1234.
8. **Борисов А.А., Хабахпашев Г.А.** Приближенные модели для описания слабонелинейных поверхностных волн // *Изв. АН. Физ. атмосферы и океана*. 1993. Т. 29, № 5. С. 661–665.
9. **Хабахпашев Г.А.** Дифференциальный метод моделирования слабонелинейных волн на воде переменной глубины // *Изв. АН. Физ. атмос. и океана*. 1996. Т. 32, № 6. С. 841–847.
10. **Тернер Дж.** *Эффекты плавучести в жидкостях*. – М.: Мир, 1977. – 431 с.
11. **Maurer J., Hutter K., Diebels S.** Viscous effect in internal waves of two-layered fluid with variable depth // *Eur. J. Mech., B/Fluids*. 1996. Vol. 15, No. 4. P. 445–470.
12. **Wessels S., Hutter K.** Interaction of internal waves with a topographic sill in a two-layered fluid // *J. Phys. Oceanogr*. 1996. Vol. 26, No. 1. P. 5–20.
13. **Филлипс О.М.** *Динамика верхнего слоя океана*. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 319 с.