СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. [1]

З.И. Федотова, Л.Б. Чубаров, Д.А. Шкуропацкий

Институт вычислительных технологий СО РАН
Сибирское отделение Российской академии наук, Новосибирск, Россия

В докладе приводятся результаты исследований ряда одномерных нелинейно-дисперсионных моделей волновой гидродинамики, достаточно полно представляющих этот класс моделей волновой гидродинамики.. Основное внимание сосредоточено на уравнениях, предложенных Дж. Перегрином [1], М. Железняком и Е. Пелиновским [2], К. Кимом, Р. Райдом и Е. Витакером [3], З. Федотовой и В. Пашковой [4], а также Ю.З. Алешковым[5]. Исследуются основные свойства этих моделей, устанавливается их связь с другими известными моделями. В частности, предлагается обобщенная форма записи, объединяющая модель Железняка-Пелиновского с моделями из работ А. Грина и Д. Нагди [6], С. Базденкова, Н. Морозова, О. Погуце [7], Ф. Себра-Сантоса, Д. Ренуара, А. Темпервиля [8].

Обсуждаемая серия вычислительных экспериментов проводилась с целью сравнения ряда упомянутых выше математических моделей на материале лабораторных экспериментов. Основные результаты были получены с привлечением нелинейно-дисперсионной модели Железняка-Пелиновского, уравнений Перегрина, Кима-Райда-Витакера и Федотовой-Пашковой (R-модель). В первой группе расчетов для сравнения приводятся результаты моделирования с использованием модели Ю. З. Алешкова.

Для аппроксимации NLD-уравнений Железняка-Пелиновского, Перегрина и Федотовой-Пашковой, записанных в специальной форме, были использованы однотипные разностные схемы. Подход к построению вычислительных алгоритмов иллюстрируется на примере модели Перегрина, которая может быть записана в двух эквивалентных формах. В первом случае система будет иметь вид

$$\eta_t + (hu)_x = 0\,,\ u - \frac{1}{6}\sigma(\Psi[u]) = U\,,\ U_t + \eta_x + \frac{1}{2}\varepsilon(u^2)_x = 0\,. \tag{1}$$

Здесь и далее $\Psi[V] = 3H(HV)_{xx} - H^2 V_{xx}$ для любой функции V.

Вторая форма записи такова:

$$\eta_t + (hu)_x = 0\,,\ u_t = U\,,\ U - \frac{1}{6}\sigma(\Psi[U]) = -\eta_x - \frac{1}{2}\varepsilon(u^2)_x\,. \tag{2}$$

Пусть на плоскости переменных $x,\ t$ построена равномерная разностная сетка с шагами Δx, Δt по пространству и времени, соответственно, E – тождественный оператор, $T_{\pm k}$ – оператор сдвига по переменной x на $\pm k\Delta x$, $T^{\pm k}$ –оператор сдвига по времени на $\pm k\Delta t$, $\Delta_1 = T_1 - E$, $\Delta_{-1} = E - T_{-1}$, $\Delta^1 = T^1 - E$, $\Delta^{-1} = E - T^{-1}$, $\mu = (E + T_{-1})/2$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_{-1}$.

Для сеточной функции $\psi_j^n \equiv \psi(n\Delta t, j\Delta x)$ определяются также соотношения

$$\delta\psi = \frac{\Delta\psi}{2\Delta x}\,,\ \Lambda\psi = \frac{\Delta_1\Delta_{-1}\psi}{(\Delta x)^2}\,.$$

Предположим, что в начальный момент времени на отрезке [0,L] жидкость находится в состоянии покоя, а на границах задано по одному краевому условию.

Конечно-разностная схема, аппроксимирующая систему (1) со вторым порядком точности имеет вид

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (Гранты № 97-01-00819, № 96-15-96265)

$$\frac{\Delta^1 \eta_j^n}{\Delta t} + \delta\Big(\big(\varepsilon\eta_j^{n+1} + H_j\big)u_j^n\Big) = 0\,,\quad \frac{\Delta^1 U_j^n}{\Delta t} + \delta\Big(\eta_j^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\big(u_j^n\big)^2\Big) = 0\,, \tag{3}$$

$$u_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2} H_j \Lambda\big(H_j u_j^{n+1}\big) + \frac{\sigma}{6} H_j^2 \Lambda u_j^{n+1} = U_j^{n+1}.$$

Что касается системы (2), то соответствующая конечно-разностная схема записывается следующим образом:

$$\frac{\Delta^1 \eta_j^n}{\Delta t} + \delta\Big(\big(\varepsilon\eta_j^{n+1} + H_j\big)u_j^n\Big) = 0\,,\quad U_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2} H_j \Lambda\big(H_j U_j^{n+1}\big) + \frac{\sigma}{6} H_j^2 \Lambda U_j^{n+1} = \delta\Big(\eta_j^{n+1} - \frac{\varepsilon}{2}\big(u_j^{n+1}\big)^2\Big)\,,$$

$$\frac{\Delta^1 u_j^n}{\Delta t} = U_j^{n+1}. \tag{4}$$

Источником лабораторных данных в задачах о взаимодействии уединенной волны со ступенчатым шельфом и с изолированным модельным затопленным препятствием стала работа [8], а в задачах о трансформации уединенной волны над модельным неоднородным рельефом дна – материалы Международной рабочей группы по моделям наката длинных волн, состоявшейся в 1995 году в США.[2]

Анализ результатов и сопоставление расчетных данных с экспериментальными позволили оценить возможности различных моделей по воспроизведению отдельных стадий взаимодействия волн с препятствиями. Полученные оценки в целом совпадают с предположениями, основанными на учете относительной важности допущений и упрощений, сделанных при выводе тех или иных моделей.

Наиболее подробно рассмотрена серия из восьмидесяти экспериментов, подробно описанная в работе [8]. Проведенный вычислительный эксперимент на базе вышеперечисленных моделей позволил получить статистические характеристи отклонений расчетных данных от экспериментальных в зависимости от изменения амплитуды входящей волны при фиксированной глубине невозмущенного слоя жидкости, а также анализ тенденций изменения амплитуд в этих условиях.

Во всех рассмотренных экспериментах параметр дисперсии не превосходил 10^{-2}, а числа Урселла изменялись в интервале от 49.3 до 82.0, что позволяет сделать вывод о заметном преобладании нелинейности, которая, в свою очередь, изменялась в наиболее широком диапазоне (0.15÷0.71) для первой прошедшей над шельфом волны, принимала наименьшие значения для отраженных от шельфа и препятствия волн (0.03÷0.09), а также для третьей, прошедшей над шельфом волны (0.02÷0.09). Промежуточные значения параметра нелинейности (0.04÷0.24), наблюдались в экспериментах для второй прошедшей над шельфом волны. При этом значения параметра нелинейности, определяемые по величинам, характеризующим входящую волну принимали наименьшие значения в группе экспериментов по исследованию трансформации прошедших над шельфом волн (0.07 – 0.32), отраженные от шельфа волны изучались в диапазоне нелинейности (0.14 – 0.44) и, наконец, взаимодействие волн с затопленным препятствием рассматривалось в условиях наибольшей нелинейности (0.20 – 0.60).

Подобная ситуация позволяет оценить особенности различных моделей по воспроизведению явлений различной степени нелинейности.

Эксперименты, описывающие характеристики волн, претерпевших взаимодействие с шельфом и после этого взаимодействия продолжавших распространяться вдоль шельфа, демонстрируют трансформацию исходной уединенной волны в последовательность волн аналогичной структуры, причем количество таких различимых волн согласуется с предсказываемой аналитическими соотношениями [8] величиной. Этот результат полностью

---

[2] International Workshop on Long-Wave Runup Models, September 12-16, 1995, Friday Harbor, San Juan Island, Washington, USA

воспроизводится как экспериментальными так и расчетными данными (для всех рассмотренных моделей). Уменьшение глубины в предшельфовой зоне приводит к увеличению числа прошедших волн.

При описании первой прошедшей волны, которая, естественно, имеет наибольшую амплитуду, наилучшее приближение к экспериментальным данным (т.е. наименьшие абсолютные и относительные отклонения) независимо от значения глубины H демонстрируют результаты, полученные по наиболее полной нелинейно-дисперсионной модели (базовой) в форме, предложенной Железняком-Пелиновским. В то же время, наименьшим средним квадратичным отклонением (также абсолютным и относительным) характеризуются результаты, рассчитанные по R-модели.

По воспроизведению второй прошедшей волны модель Железняка-Пелиновского также в целом сохраняет определенное преимущество, хотя в серии экспериментов, выполненных для максимальной глубины H = 30 см наименьшие отклонения от экспериментальных значений показывают результаты, полученные по упрощенной модели Кима-Райда-Витакера. Что касается квадратичных отклонений, то R-модель демонстрирует наименьшее абсолютное значение только в случае H = 30 см. В остальных вариантах абсолютное значение этого параметра оказывается наилучшим у базовой модели, а относительное – у модели Кима-Райда-Витакера.

Наименьшими амплитудами обладают третьи зарегистрированные в эксперименте прошедшие волны. Результаты их численного моделирования показывают, что наиболее точного описания этих волнообразований удается добиться с помощью модели Перегрина, не учитывающей нелинейную дисперсию. Именно эта модель демонстрирует наименьшие относительные и абсолютные отклонения и наименьшее абсолютное квадратичное отклонение в случае H = 18.1 см. Модель Кима-Райда-Витакера обладает здесь наименьшим относительным квадратичным отклонением и наименьшим абсолютным квадратичным отклонением для H = 20 см. Близкие по характеру результаты получены и для экспериментов, описывающих взаимодействие уединенных волн с препятствием.

Моделирование задачи о трансформации уединенной волны над модельным неоднородным рельефом дна позволило оценить возможности моделей и алгоритмов по воспроизведению детальных характеристик формы волн и особенностей их трансформации над модельным неоднородным рельефом дна.

1. Peregrine D.H.. Long waves on a beach.- J. Fluid Mech., 1967, v.27, p.4, pp. 815-827.
2. М. И. Железняк, Е. Н. Пелиновский. Физико-математические модели наката цунами на берег. В сб.: Накат цунами на берег. (Под. ред. Е. Н. Пелиновского), ИПФ СО АН СССР, Горький, 1985, с. 8-33.
3. Kim K.J., Reid R.O., Whitaker E. On an open boundari condition for weakly dispersive thunami waves. - J. Comput. Fhys., 1988, v. 76, pp. 327-348.
4. Z.I. Fedotova, V.Yu. Pashkova, Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1997, № 2, 127–149.
5. Алешков Ю.З. Полная модель процесса распространения длинных волн и их взаимодействие с преградами.-Сб. Исследование цунами, М., 1987, 2, с.113-122.
6. Green A.E.,Naghdi D.M. A derivation of equations for wave propagation in watter of variable depth.- J. Fluid Mech., 1976, v.78, pp. 237-246.
7. Базденков С.В., Морозов Н.Н., Погуцце О.П. Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике. ДАН СССР, 1987, т.293, с.818-822.
8. Seabra-Sanos F.J., Renouard D.P., Temprville A.M. Numerical and experimental studi of the transformation of a solitary wave over a shelf on a isolated obstacle. - J. Fluid Mech., 1987, v.176, pp. 117- 134.