ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЙ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ С ОБРАЗОВАНИЕМ СОЛИТОНА

В.П.Житников, Н.М. Шерыхалина

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

Одним из наиболее распространенных численно-аналитических методов решения задач со свободными границами, использующих возможности теории функций комплексного переменного, является метод Леви-Чивиты. Усовершенствование этого метода путем учета поведения решения вблизи особых точек было предложено в ряде работ. В данном сообщении предлагаются приемы, позволяющие сделать следующий шаг в этом направлении, т.е. выделить особенности более высокого порядка. Кроме того ниже изложена методика численной оценки погрешности полученных данных и на ее основе проведен анализ результатов численного эксперимента, который показал, что учет дополнительных особенностей позволяет существенно увеличить скорость сходимости метода и получить более точные данные при меньших затратах времени.

В качестве примера рассматривается плоская задача обтекания донного препятствия ограниченным потоком идеальной несжимаемой весомой жидкости со свободными границами, причем определяются апериодические решения (солитоны). Пусть скорость на бесконечности - V_0 , асимптотическая толщина струи - h, ускорение силы тяжести g действует вертикально вниз. На свободной поверхности CD значение модуля вектора скорости жидкости V связано с высотой точки y уравнением Бернулли.

Задачи обтекания тел с криволинейной границей (круглой, эллипсоидальной и других форм) потоком весомой жидкости со свободной поверхностью являются, вообще говоря, существенно более сложными для решения, чем задачи обтекания точечных препятствий (вихря, диполя и т. п.). Это вызвано тем, что условие обтекания криволинейной поверхности в общем случае нелинейно и может быть удовлетворено только приближенно, например, методом коллокаций, как и уравнение Бернулли, за счет введения ряда с неизвестными коэффициентами. Таким образом, в этих задачах имеется два участка границы со сложными условиями. Обычно такие задачи решаются следующим образом. Область течения отображается на сектор кольца (например, на четверть или половину кольца). На внутреннюю и внешнюю дуги окружностей отображаются границы со сложными условиями. Решение представляется в виде сумм аналитических функций с известными особенностями и ряда Лорана.

Основная идея модификации метода решения, позволяющая избежать существенных затруднений, заключается в следующем. Образ области течения, определяемый конформным отображением плоскости комплексного потенциала $w(\zeta)$, построенным для задачи обтекания диполя является криволинейным кольцом, в котором внешняя граница – дуга окружности, а внутренняя – некоторая криволинейная дуга. Путем численного исследования было установлено, что эта криволинейная дуга очень мало отличается от дуги окружности. Возникает возможность, не меняя конформного отображения $w(\zeta)$, поставить условие о форме границы обтекаемого тела на этой криволинейной границе.

Это позволяет обойтись минимальными изменениями при переходе от задач обтекания точечных препятствий к препятствиям конечных размеров и построить весьма простые алгоритмы решения задач.

В сообщении приводятся результаты расчета с помощью методов двух типов - прямого конформного отображения $z(\zeta)$ и с использованием функции Жуковского $\omega(\zeta)=ln[dw/dz(\zeta)]$. Метод прямого конформного отображения не требует численного интегрирования, что снижает требования к вычислительным ресурсам как по времени, так и по памяти. Однако метод второго типа позволяет учитывать особенности решения более высокого порядка на бесконечности и в точках излома поверхности. Это приводит к увеличению порядка точности метода и, как следствие, предпочтительности использования таких методов при вычислениях с высокой точностью.

Приводятся результаты расчетов методами обоих типов и их модификациями, а также сравнительный анализ этих методов. В результате решения одной задачи разными способами, кроме того, повышается достоверность результатов. Предлагается методика оценки степени достоверности как вероятности получения результатов, погрешность которых выходит за предписанные пределы. Найдена оценка зависимости этой вероятности от точности вычислений σ и числа методов m в виде $P_{ошибки}=\sigma^{m-1}$.

На рис. 1 приведены результаты расчетов обтекания донного препятствия в виде половины эллипсоидального цилиндра.

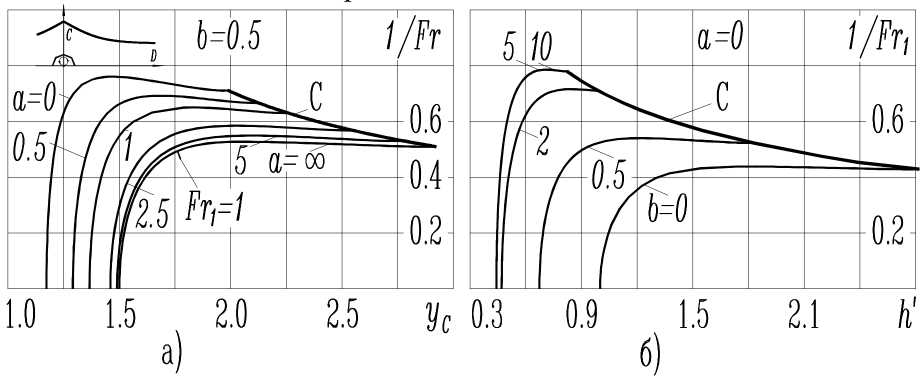

Рис. 1. Зависимости числа Фруда от высоты волны. $Fr=\frac{V_0}{\sqrt{gh}}$ -число Фруда; y_C - высота волны; $Fr_1=\frac{V_1}{\sqrt{g(y_c-b)}}$ - "местное значение числа Фруда; V_1 – скорость на свободной поверхности в точке, ордината которой совпадает с максимальной ординатой обтекаемого препятствия b; $h'=\frac{(y_c-b)V_1}{hV_0}$ - приведенная высота волны.

На рис. 1а рассмотрен случай, когда вертикальная полуось b фиксирована *(b=0.5)*, а горизонтальная a изменяется от нуля до бесконечности (все линейные размеры отнесены к h), на рис. 1б - наоборот, $a=0$, а b переменна. Нетрудно видеть, что картины зависимостей качественно совпадают: Каждая кривая для конкретных значений a и b начинается при $Fr=\infty$, что соответствует случаю обтекания невесомой жидкостью, а заканчивается на кривой, отвечающей волне предельной высоты с изломом свободной поверхности на угол 120° (волне Стокса).

Таким образом с помощью предложенного метода удалось решить задачи обтекания неровности на дне в виде полукруга и полуэллипса. Расчеты показали, что в весьма широком диапазоне изменения длинны полуосей эллипса при точности порядка 10^{-5} количество добавочных слагаемых в решении не превышает 12–18.