

Моделирование наката длинных волн в условиях динамически изменяющегося дна ¹

З.И. ФЕДОТОВА¹, Л.Б. ЧУБАРОВ², С.А. БЕЙЗЕЛЬ³

¹*Институт вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
e-mail: zf@ict.nsc.ru*

²*Институт вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
e-mail: chubarov@ict.nsc.ru*

³*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

The process of the runup on a coast of long waves formed as a result of slipping of a ground is investigated. The modeling is carried out within the framework of the assumptions about the long-wave character of the phenomenon, thus the landslide is considered as a thin long body, which protrudes for the initial time partially from water. The numerical algorithm is based on a method of finite differences, thus finite-difference schemes of the various order of approximation are tested with the purpose to choose the most suitable one.

1 Введение

В работе исследуется круг вопросов, возникающих при численном моделировании процессов трансформации и наката на берег длинных поверхностных волн в прибрежных акваториях, образовавшихся под воздействием крупномасштабного гравитационно-оползневого процесса.

Актуальность такого рода задач обусловлена интересом к несейсмическим механизмам генерации волн цунами, а именно, к механизму порождения поверхностных волн оползнями. Как показывает анализ эмпирических данных, подобные процессы позволяют объяснить происхождение аномальных цунами, когда незначительные по мощности землетрясения порождают весьма серьезные по своим последствиям катастрофические волны. Накопление больших масс грунта в прибрежных зонах происходит, в частности, за счет наносов, перемещаемых впадающими в акваторию реками, сходом лавин с прибрежных возвышенностей, падением скальных фрагментов и т.п. В последних случаях возможны ситуации, когда оползневые массы в начальный момент являются затопленными лишь частично и тогда процесс генерации волн происходит одновременно с процессом их наката на движущуюся сушу. Волны оползневого происхождения зарождаются и накатываются на берег в условиях малой глубины, так что нелинейные эффекты проявляются на первых стадиях процесса.

В работе разработаны основные подходы к построению вычислительного алгоритма, обладающего достаточной универсальностью для моделирования упомянутого выше сложного физического процесса, который сопровождается изменением донной поверхности и перемещением линии уреза – границы «вода–суша». В рамках нелинейной теории мелкой были построены алгоритмы двух типов, один из которых реализует известную схему Мак-Кормака, а второй построен на основе схемы Адамса (четвертого

¹Работа поддержана РФФИ (проект 03-05-64108), Программой интеграционных исследований СО РАН (грант 2003-5) и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-2314.2003.1)

порядка точности во внутренних точках). Для аппроксимации подвижной границы (линии уреза) рассмотрены два алгоритма – «сквозного счета» и «экстраполяции». Для исследования упомянутых разностных схем привлечены аналитические решения уравнений мелкой воды, что позволило оценить величину погрешности и порядок точности построенных схем.

Анализ результатов показывает, что по совокупности свойств метод, основанный на консервативной схеме Мак-Кормака, в котором линия уреза трактуется как внутренняя граница области "вода-суша", является более предпочтительным, так как он наименее чувствителен к возможному нарушению гладкости течения и неоднородностям дна.

2 Математическая модель

Для описания инициированного оползнем волнообразования надо сформулировать математическую модель течения воды со свободной поверхностью, согласованную с моделью движения грунта. В настоящее время известно несколько подходов к описанию оползневых процессов, но мы ограничимся здесь простейшим случаем, а именно, будем рассматривать оползень в виде длинного тонкого тела, которое в начальный момент времени $t = 0$ покоится, а при $t > 0$ равноускоренно движется вдоль откоса постоянного наклона.

Для учета выхода волны на берег в модель следует включить линию уреза, которая является границей раздела воды и суши и со временем меняет свое положение. Тем самым описывается процесс затопления берега (накат волн) или осушения донной поверхности (откат волн). Используемая здесь терминология является общепринятой в задачах прибрежной волновой гидродинамики. Способы моделирования наката волн на берег подробно описаны в [1].

Предположим, далее, что рассматриваемое явление имеет длинноволновую природу. Сделанные допущения и их адекватность реальным процессам неоднократно обсуждались в литературе (например, в работах [2, 3] и др.), что позволяет аргументированно рассматривать поставленную задачу в рамках уравнений мелкой воды с зависящей от времени правой частью, обеспечивающей учет динамики донной поверхности. Пусть система координат выбрана так, что ее начало совпадает с точкой уреза (граница воды и суши) невозмущенной водной поверхности, ось Ox направлена в сторону открытого моря, вдоль вертикальной координаты измеряется высота свободной поверхности η — превышение уровня жидкости над ее невозмущенным состоянием. Выпишем уравнения мелкой воды в форме законов сохранения:

$$W_t + F_x = Q, \quad (1)$$

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ ghH_x \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где u — усредненная скорость течения, h — полная глубина жидкости: $h = \eta + H$, η — возвышение свободной поверхности, H — глубина канала. Все перечисленные величины зависят от переменных x, t . Такой вид уравнений используется для учета волн, близких к обрушающимся; однако в ряде работ, где используются схемы высокого порядка аппроксимации, в качестве основных переменных рассмотрены η и u (см. [4, 5]). Тогда

соответствующие W , F и Q в системе (1) принимают форму:

$$W = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} (H + \eta)u \\ u^2/2 + g\eta \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} H_t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Будем рассматривать естественную для волновой гидродинамики начально-краевую задачу на отрезке $[-x_l, x_r]$, когда в начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя: $u(x, 0) = 0$ и $\eta(x, 0) = 0$, а на границах задано по одному краевому условию. В начальный момент времени координата линии уреза x_{sh} при наличии полупогруженного оползня сдвинута вправо от начала координат $x = 0$, то есть $x_{sh0} > 0$. В точке x_r (правая граница) поставлены условия свободного выхода волны за пределы области, а в точке x_l (левая граница, находящаяся в области суши) моделируется полное отражение волны ($u(-x_l, t) = 0$). Схема задачи показана на рис. 1.

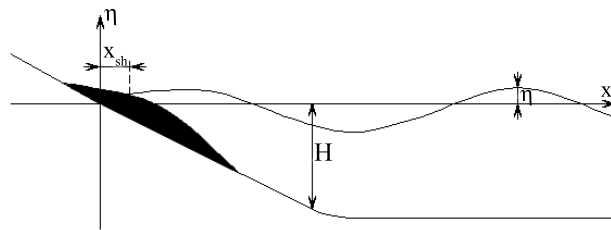


Рис. 1. Схема задачи о накате

Задача состоит в нахождении величин u и η и определении положения линии уреза для любого момента времени.

3 Численная модель

Численное решение квазилинейной системы уравнений (1) не составляет труда, если правая часть системы - гладкая, не зависящая от t функция, а область решения фиксирована и для всех ее точек полная глубина жидкости строго положительна. Сформулированная выше задача относится к более сложным задачам из-за выраженной нелинейности процесса в прибрежной полосе и наличия подвижной границы, на которой вырождаются основные характеристики течения: полная глубина жидкости h и скорость распространения возмущений $c = (gh)^{\frac{1}{2}}$ обращаются в нуль. Различные постановки задач такого рода и методы их решения рассмотрены в ряде публикаций (см., например, [1, 5]).

Конечно-разностный метод решения задачи о накате состоит из двух этапов: расчет величин во внутренних точках области, где $h > 0$ ("вода"), и определение положения линии уреза, на которой $h = 0$. В работе были рассмотрены две разностные схемы. Это известная схема Мак-Кормака второго порядка аппроксимации и схема Адамса-Мултона - четвертого порядка. Обе схемы ранее применялись для моделирования наката в случае стационарного дна [1, 5].

Опишем эти конечно-разностные схемы. Пусть на отрезке $[-x_l, x_r]$ построена равномерная разностная сетка с шагом Δx . По оси t рассматривается в общем случае неравномерная сетка, соответствующий шаг по времени Δt^n выбирается из условия

устойчивости. Сеточную функцию с n -го слоя по времени в m -ом узле по пространству будем обозначать f_m^n : $f_m^n = f(x_m, t^n)$, $x_m = m\Delta x$, $t^n = \sum_0^{n-1} \Delta t^k$, $m = -M_1, \dots, M_2$, $M_2 + M_1 = N$, $M_1 = x_l/\Delta x$, $M_2 = x_r/\Delta x$.

Схема Мак-Кормака применительно к решению задач о выходе волн на берег была подробно исследована в [1]. Запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{W}_m^{n+1} - W_m^n}{\Delta t^n} + \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{\Delta x} &= Q_m^n, \\ \frac{W_m^{n+1} - (\tilde{W}_m^{n+1} + W_m^n)/2}{\Delta t^n/2} + \frac{\tilde{F}_{m+1}^{n+1} - \tilde{F}_m^{n+1}}{\Delta x} &= \tilde{Q}_m^{n+1}, \quad F_m^n = F(W_m^n). \end{aligned} \quad (4)$$

Эта схема является явной, при ее реализации не требуется дополнительных граничных условий на шаге “предиктор”. Неявная схема Адамса-Мултона использует четыре слоя по времени:

$$\frac{W_m^{n+1} - W_m^n}{\Delta t^n} + \frac{1}{24}(9G_m^{n+1} + 19G_m^n - 5G_m^{n-1} + G_m^{n-2}) = 0, \quad G = F_x - Q, \quad G_m^n = G(W_m^n). \quad (5)$$

Производная по пространству аппроксимирована с четвертым порядком аппроксимации:

$$(F_x)_m = \frac{F_{m-2} - 8F_{m-1} + 8F_{m+1} - F_{m+2}}{12\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

Для решения неявных уравнений используется метод простой итерации, причем для нахождения нулевого приближения $W_m^{n+1,0}$ используется схема Адамса-Бэшфорта:

$$\frac{W_m^{n+1,0} - W_m^n}{\Delta t^n} + \frac{1}{12}(23G_m^n - 16G_m^{n-1} + 5G_m^{n-2}) = 0. \quad (6)$$

Далее схему Адамса-Мултона-Бэшфорта будем называть для краткости схемой Адамса. Для исследования разностных схем была выполнена серия расчетов течений в канале с ровным дном с целью исследовать глобальный порядок точности в расчетной области с учетом граничных условий. Были рассмотрены границы двух типов: вертикальная непроницаемая стенка и “прозрачная граница”, выпускающая во вне подходящие к ней возмущения. Как и следовало ожидать, в схеме Адамса, требующей из-за расширенного шаблона дополнительных граничных условий, глобальный порядок сходимости может существенно снизиться, тогда как схема Мак-Кормака имеет порядок точности, близкий ко второму, при граничных условиях как первого, так и второго порядка аппроксимации.

Обе схемы являются схемами четного порядка аппроксимации, что в случае значительной нелинейности или негладкой правой части уравнений $H = H(x, t)$ приводит к появлению выраженной немонотонности. Поэтому в случае необходимости использовались численные фильтры.

Для обработки линии уреза используются два алгоритма – метод сквозного счёта, позволяющий не выделять положение границы между сушей и водой во время вычислений, и метод линейной экстраполяции. Первый из указанных методов развит и обоснован в работе [1], и его суть заключается в том, что задача рассматривается в стационарной области $X = X^{(0)}(t) \cup X^{(1)}(t)$, где $X^{(0)}(t)$ и $X^{(1)}(t)$ (соответственно, “суша” и “вода”), граничащие вдоль линии уреза, изменяются с течением времени. Использование

консервативной формы уравнений (1) является принципиальным моментом. В области $X^{(0)}$ скорость u и полная глубина h полагаются нулевыми, а в области $X^{(1)}$ u и h являются решениями уравнений мелкой воды. В работе [1] показано, что так определенные “расширенные” функции удовлетворяют уравнениям мелкой воды в интегральной форме, распространенной на всю область X , при этом линия уреза становится внутренней границей области течения. Второй способ обработки линии уреза применим при слабых, мягких колебаниях береговой линии [5]. Суть его заключается в том, что возвышение свободной поверхности η и скорость u экстраполируются из области, занятой водой, в “сухую” область. При этом, согласно шаблону схемы Адамса, требуется экстраполяция в две “сухие” точки: $f_{i-1} = 2f_i - f_{i+1}$, $f_{i-2} = 3f_i - 2f_{i+1}$ (при условии, что i -ый узел — последний, где полная глубина положительна). В работах [4, 5] использована неконсервативная форма уравнений.

4 Сравнение с аналитическим решением

Для изучения наиболее выраженных черт поведения волны в прибрежной зоне, когда происходит погружение в воду части берега, использовано аналитическое решение для $x > 0$ волнового уравнения со специальной формой донной поверхности, описанное в статье [4]. Если ввести безразмерные переменные

$$\acute{x} = x/l, \quad \acute{\eta} = \eta/\delta, \quad \acute{t} = \sqrt{g/\delta\mu}t,$$

где l — длина оползня, δ — его максимальная толщина, $\mu = \delta/l$, и опустить штрихи, то линейные уравнения мелкой воды после исключения скорости с помощью перекрестного дифференцирования примут вид

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\tan \theta}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где $H_0(x, t)$ описывает меняющееся во времени отклонение донной поверхности от бесконечного склона, образующего с осью Ox постоянный угол θ , так что форма дна задается функцией $H(x, t) = \tilde{H}(x) - H_0(x, t)$ с $\tilde{H}(x) = x \tan \theta / \mu$. В [5] показано, что для

$$H_0(\xi, t) = \exp^{-(\xi-t)^2}, \quad \xi = 2\sqrt{\frac{\mu x}{\tan \theta}}$$

волновое уравнение (7) имеет аналитическое решение вида

$$\eta(\xi, t) = \eta_0(\xi, t) + \eta_1(\xi, t),$$

где $\eta_0(\xi, t)$ и $\eta_1(\xi, t)$, соответственно, общее решение однородного уравнения и частное решение уравнения (7):

$$\begin{aligned} \eta_0(\xi, t) &= -\frac{1}{12} \int_0^\infty J_0(\omega\xi) \cos(\omega t) \omega(6 - \omega^2) \exp^{-\omega^2/4} d\omega \\ &+ \frac{2}{3} \int_0^\infty J_0(\omega\xi) \sin(\omega t) \int_0^\infty J_0(\omega\xi) \xi^2 (3 - 2\xi^2) \exp^{-\xi^2} d\xi d\omega, \\ \eta_1(\xi, t) &= \frac{1}{3} \{1 + 2\xi(\xi - t)\} \exp^{-(\xi-t)^2}. \end{aligned}$$

Здесь $J_0(\omega\xi)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Это аналитическое решение было использовано для того, чтобы уяснить основные черты процесса генерации волны движущимся телом и проверить работоспособность численных алгоритмов. Задача рассмотрена при следующих параметрах: $\theta = 5^\circ$, $\mu = \Delta/l = 0.1$. Расчет проводился в области длиной 10 единиц до времени $T = 5$, $N = 100, 200, 400$, $N + 1$ — число узлов в расчетной области.

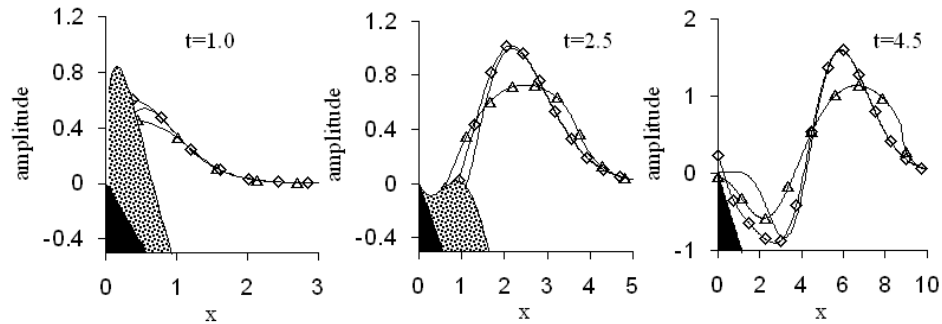


Рис. 2. Сравнение с аналитическим решением

На рис. 2 показаны результаты расчета при $\Delta x = 0.025$, сплошная линия показывает аналитическое решение, полученное методом трапеций, “ромбиками” и “треугольниками” отмечены численные решения, соответственно, линейных и нелинейных уравнений мелкой воды. Расчеты проведены по схеме Адамса с экстраполяцией на линии уреза. Черным цветом показан берег, движущийся оползень показан “краплением”. Рисунки показывают, что нелинейность проявляется как в виде уменьшения амплитуды по всей области течения, так и погрешностью локализации линии уреза. Отметим также, что решение схемы Адамса хорошо приближает аналитическое решение на удалении от берега, однако вблизи уреза погрешность, связанная с низкой точностью экстраполяции, хорошо заметна. Отметим, что при увеличении угла наклона берега погрешность уменьшается. Детальный анализ поведения линии уреза показывает, что на грубой сетке метод сквозного расчета со схемой Мак-Кормака по точности уступает методу, основанному на схеме четвертого порядка аппроксимации, но с измельчением сетки численные траектории линии уреза, полученные разными методами, сближаются, что говорит о том, что метод экстраполяции понижает глобальный порядок точности схемы Адамса.

5 Моделирование в случае “реального” оползня

Процесс генерации волны сползающим по склону оползнем, который моделируется твердым полуэллипсом, полностью погруженным в воду, изучался численно и экспериментально в ряде работ (см., например, [2, 3]). Интересным представляется изучение поведения возникшей таким образом волны вблизи берега. Ниже будет рассмотрен процесс наката волны на берег, в том числе, для случая, когда оползень в начальный момент частично выступает из воды, и процесс его погружения в воду происходит почти одновременно с набеганием волны на берег. Геометрия задачи показана на рис. 3: наклонная плоскость формирует береговой склон, начало координат расположено в точке пересечения наклонного дна и горизонтальной невозмущенной поверхности воды, положительное направление оси Ox ориентировано в сторону моря. Верхняя половина эллипса аппроксимирует профиль оползня.

В численном эксперименте была рассмотрена задача, обезразмеренная с помощью характерных значений глубины канала и длины оползня. Все геометрические размеры задавались в соответствии с параметрами работ [2, 3]: глубина канала $H = 1$, длина движущегося тела $l = 1$, его толщина $\delta = 0.1$. Угол наклона θ равен 15° . Длина канала равнялась 7 единицам, а число узлов расчетной сетки менялось от 50 до 200 на единицу длины.

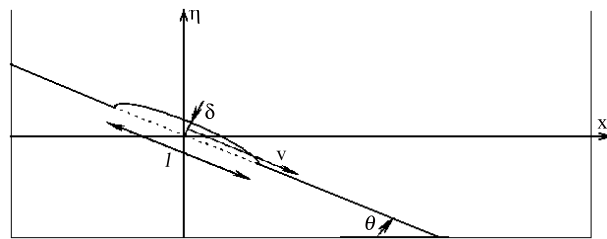


Рис. 3. Эллипсовидный оползень

Расчеты показывают, что с течением времени монотонность численного решения нарушается. Это, в частности, связано с тем, что в случае моделирования оползня “половинкой” эллипса дно задаётся уже не гладкой функцией, как в предыдущем случае (когда он представлял собой экспоненциальную шапочку), а с разрывами производных – в местах склейки эллипса и наклонного дна и в точке перехода наклонного берега в ровное дно. В результате в окрестности точки уреза метод экстраполяции приводит к развитию неустойчивых колебаний. К таким изломам дна оказались чувствительны обе используемые схемы, но схема Адамса – в гораздо большей степени, так что ее решение без процедур сглаживания становилось неустойчивым и разваливалось. Но и в случае применения фильтров в схеме Адамса для сходимости решения требуется значительное число итераций, что делает ее неэкономичной.

Для изучения режима наката волны на сушу мы рассмотрели две задачи, которые отличались начальным расположением оползня. В первом случае (задача 1) середина большой оси эллипса совпадает с центром координат, а во втором (задача 2) – эллипс полностью погружен в воду, так что его левый край отстоит на единицу от начала координат вдоль откоса. Движение тел считалось равноускоренным с ускорением $a_0 = 0.2$. В обоих случаях тело останавливалось, не дойдя до конца откоса одно и то же расстояние. Анализ расчетов выполнялся по данным виртуальных датчиков, расположенных в трех точках: $x = 0$, $x = 0.3098$, $x = 1.9577$. Это начальное положение точек уреза для двух рассмотренных случаев (погруженное и полупогруженное тела), а третья точка расположена над “верхушкой” погруженного полуэллипса при $t = 0$ (этот датчик рассмотрен в работе [2]). Результаты показаны на рис. 4–7. “Кружками” отмечены мареограммы для второй задачи. Расчеты выполнены по схеме Мак-Кормака, при этом линия уреза трактуется как внутренняя граница. На рис. 4 показаны траектории точек уреза, а рис. 5–7 демонстрируют динамику волнового процесса. В первом случае точка уреза начинает перемещаться одновременно с движением эллипса, монотонно выходя на берег, затем начинается процесс отката волны. Во втором случае точка уреза некоторое время покоится, затем происходит значительное осушение дна ($x > 0$), наконец, при $t > 6.8$ начинается накат волны на берег. Из рисунков нетрудно увидеть, что несмотря на непохожесть поведения волн в начальный период времени, процессы наката в обоих случаях по амплитуде и периоду волн очень похожи, отличаясь лишь временем подхода.

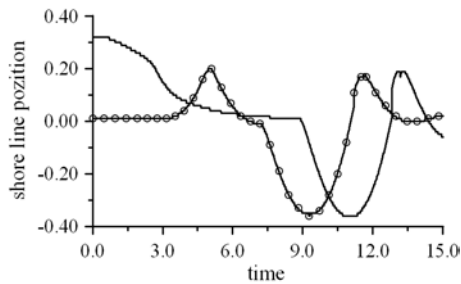
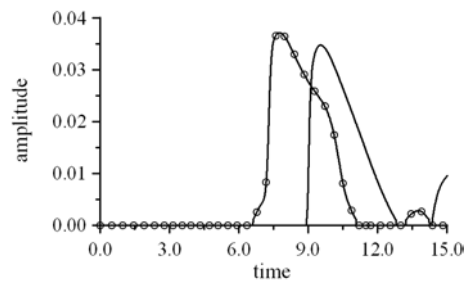
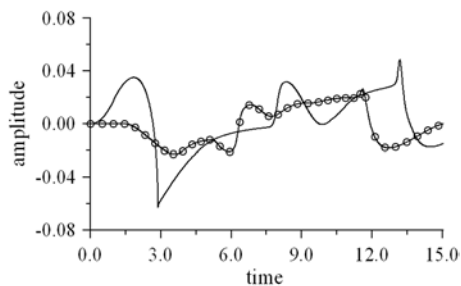
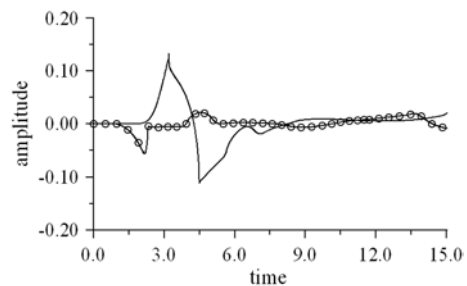


Рис. 4: Траектория точки уреза

Рис. 5: Мареограммы в точке $x = 0$ Рис. 6: Мареограммы в точке $x = 0.3098$ Рис. 7: Мареограммы в точке $x = 1.9577$

Видимо, это связано с тем, что отраженная волна формируется при остановке оползня, что в данном эксперименте происходит в одном и том же месте. Укажем также, что величина максимальной высоты заплеска R , вычисляемая по формуле $R = -x_{max} \tan \theta$, составляет 0.096 единиц, то есть почти равна толщине оползня.

Список литературы

- [1] Федотова З.И. Обоснование численного метода для моделирования наката волн на берег // Вычислительные технологии. – 2002, - Т.7, - N5. – С. 58-76.
- [2] Watts P., Imamura F., Grilli S.T. Comparing model simulations of three benchmark tsunami generation cases // Science of Tsunami Hazards. – 2000, - V.18, - N2. – P.107-123.
- [3] Чубаров Л.Б., Федотова З.И., Елецкий С.В. Численное моделирование генерации волн движением затопленного грунта // Вычислительные технологии. – Т.8; Региональный вестник Востока. – Т.3. Совм. вып. по мат. Межд. конф. “Выч. и инф. технологии в науке, технике и образовании”, Усть-Каменогорск, Казахстан, 11-14 сентября 2003, Ч. 3. – 2003. – С. 272 – 281.
- [4] Lui P.L.-F., Lynett P., Synolakis C.E. Analytical solutions for forced long waves on a sloping beach // J. Fluid Mech. – 2003, - V.478. – P.101–109.
- [5] Lynett P.J., Wu T.-R., Liu P.L.-F. Modeling wave runup with depth-integrated equations // Coastal Engineering. – 2002, - V.46(2). – P.89-107.