

# О ПОГРЕШНОСТИ В РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ ДЛИННЫХ ВОЛН ПРИ УПРОЩЕНИИ ФОРМЫ БЕРЕГОВОГО СКЛОНА

З. И. Федотова, Л. Б. Чубаров  
Институт вычислительных технологий СО РАН  
Россия, Новосибирск  
e-mail: zf@ict.nsc.ru

## Аннотация

При численном моделировании наката длинных волн на берег часто применяются различные способы упрощения геометрии прибрежной области. В работе исследован вопрос о допустимости упрощающих подходов. Количественные результаты получены для задачи о взаимодействии уединенной волны с коническим островом. Показано, что при значительной нелинейности процесса приближение берегового откоса вертикальной непроницаемой стенкой приводит к искажению волновой картины и погрешностям в вычислении динамических характеристик.

## 1 Введение

Интерес к задачам о поведении длинных волн вблизи берегов вызван в первую очередь необходимостью защитить освоенное человеком морское побережье, а также обеспечить грамотный прогноз при строительстве новых сооружений различного назначения в прибрежной зоне.

В длинноволновой гидродинамике наиболее интересными и трудными для моделирования являются процессы наката волн на берег. Такие задачи выделяются присутствием подвижной границы (линия уреза), на которой вырождаются основные характеристики течения: полная глубина жидкости  $H$  и, как следствие, скорость распространения возмущений  $c = (gH)^{\frac{1}{2}}$  обращаются в нуль. При решении подобных задач сеточными методами в окрестности линии уреза часто возникает численная неустойчивость. Применение процедур сглаживания, фильтрующих высокочастотные колебания, приводит к потере точности. Особенно ярко это проявляется при использовании грубых сеток, когда для аппроксимации береговой зоны применяется мало точек (например, ввиду недостаточной информации при составлении батиметрии акватории и топографии берега). Трудности возрастают при моделировании течений в областях с существенно батиметрией и сложными очертаниями береговой линии.

Поэтому при численном моделировании практически интересных задач часто “подправляют” геометрию области течения. Цель таких модификаций — упрощение математической формулировки задачи, состоящее в том, что, во-первых, граница “вода—суша” становится стационарной и, во-вторых, полная глубина жидкости во всей расчетной области с течением времени не вырождается (за исключением случая, когда происходит осушение дна).

Ввиду сложности решения двумерной задачи на этапе предварительного изучения процессов часто прибегают к рассмотрению одномерных вариантов, применяя всевозможные упрощения как прибрежного рельефа, так и математических моделей.

Ниже мы приведем результаты решения двумерной в горизонтальной плоскости задачи, а затем проведем анализ одномерного варианта этой задачи при различных модификациях батиметрии. Цель такого исследования — оценить возможные потери при упрощениях, часто применяемых на практике.

В качестве основной здесь будет рассмотрена задача о взаимодействии уединенной волны с коническим островом. Отметим, что описание волнового режима, вызванного взаимодействием набегающей волны с препятствием, является одной из типичных задач гидродинамики длинных волн. Ранее к исследованию этой задачи привлекались аналитические методы, а также лучевые методы, основанные на теории геометрической оптики. Достаточно полный обзор результатов, связанных с математическим моделированием задачи о взаимодействии длинных волн с препятствиями, приведен в книге [3]. В настоящее время для описания указанного взаимодействия активно применяются численные методы.

## 2 Описание задачи, математическая модель и решение

В данной работе мы воспользовались материалами Международной рабочей группы по моделям наката длинных волн, содержащими экспериментальные данные, сопровождающиеся детальным описанием лабораторного бассейна, характеристик исходного возмущения, условий и результатов наблюдений<sup>1</sup>. Ниже кратко опишем рассматриваемую задачу (полное описание содержится в [3]).

Модельная акватория, сооруженная в Инженерной экспериментальной станции водного транспорта вооруженных сил США, представляет собой прямоугольный бассейн шириной  $L_y = 30$  метров и длиной  $L_x = 25$  метров; глубина невозмущенного слоя воды  $h_0$  равна 0.32 метра. Примерно в центре бассейна расположен остров, по своей форме представляющий усеченный прямой конус с радиусом нижнего основания  $R_0 = 3.6$  метра, верхнего  $R_1 = 1.1$  метра. Высота конуса от основания равна 0.625 метра, угол наклона образующей при основании  $\alpha = 14^\circ$  ( $\tan \alpha = 1/4$ ). Боковые стенки бассейна сделаны из специального материала, обеспечивающего поглощение подходящих к ним волн. Входящая в бассейн одиночная длинная волна генерируется управляемым с помощью специального электронного устройства волнопродуктором.

Для математической формулировки задачи вводится правосторонняя система координат, ось  $Oy$  которой направлена параллельно волнопродуктору, а  $Ox$  — перпендикулярно ему в сторону острова. Предполагается также, что начало системы координат совпадает с краем волнопродуктора (см. рис. 1). Таким образом, область течения задана как прямоугольник  $25 \times 30$ , внутри которого в точке с координатами  $x_0 = 13.0$ ,  $y_0 = 15.0$  располагается центр модельного острова. На рисунках 1 и 2 показано схематическое изображение исследуемой акватории и профиль модельного острова.

Лабораторные данные, подготовленные для сравнения и оценки результатов численного моделирования, представляют собой записанные с помощью датчиков мареограммы (временные зависимости уровня свободной поверхности, наблюдаемые в заданной точке акватории). На рисунках 1, 2 показаны четыре характерные точки установки мареографов. Кроме этого, зафиксированы максимальные заплески по периметру острова с угловым

---

<sup>1</sup>International Workshop on Long-Wave Runup Models, September 12-16, 1995, Friday Harbor, San Juan Island, Washington, USA

шагом  $22.5^\circ$  (центр угла совпадает с центром острова).

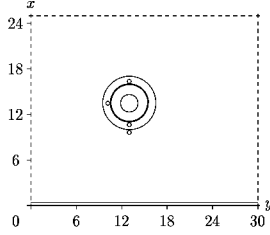


Рис. 1: Схема акватории (— – контуры острова, === – волнопродуктор, - - - – поглощающие границы, o – мареографы, утолщенная линия – берег острова).

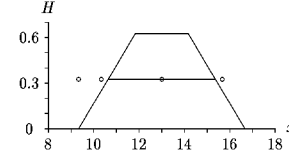


Рис. 2: Профиль острова (— – контуры острова, o – мареографы, утолщенной линией показана береговая линия).

Для численного моделирования описанного эксперимента сформулирована следующая задача. В бассейн с ровным дном, заполненный в начальный момент времени невозмущенной жидкостью, со стороны одной из границ входит плоская уединенная волна, амплитуда которой  $\eta_0$  соответствует амплитуде волны, зарегистрированной в ближайшей к волнопродуктору мареографной точке:

$$(1) \quad \eta(x, y, t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \left( \frac{3\eta_0}{4h_0^2(h_0 + \eta_0)} \right)^{\frac{1}{2}} (x - x_0 - ct) \right\}, \quad c = \sqrt{g(h_0 + \eta_0)}.$$

Соответствующее значение скорости  $u(0, y, t)$ , требуемое для граничного условия трехточечной в направлении оси  $x$  разностной схемы, определяется с помощью соотношения  $u = c\eta/(h + \eta)$ , следующего из уравнения неразрывности для прогрессивной волны, распространяющейся с постоянной скоростью  $c$  в положительном направлении оси  $x$ . Вторая компонента вектора скорости  $v$  на этой границе вычисляется из соотношения  $u_y = v_x$ , являющегося следствием квазипотенциальности вектора скорости. На трех оставшихся границах прямоугольной области используются поглощающие граничные условия, моделируемые известным уравнением излучения по направлению внешней нормали к границе (условие Зоммерфельда). Ввиду специфики рассматриваемого численного метода на линии уреза, являющейся внутренней границей области, никакие условия не ставятся, а сама граница автоматически аппроксимируется ломаной линией.

В данной работе, как и в большинстве публикаций, посвященных решению подобных задач (см., например, библиографию из книги [2]), в качестве основных дифференциальных уравнений рассматриваются классические нелинейные уравнения мелкой воды

$$(2) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \Phi,$$

где

$$W = \begin{pmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + \frac{g}{2}H^2 \\ Huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} Hv \\ Huv \\ Hv^2 + \frac{g}{2}H^2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x - ru(u^2 + v^2)^{1/2} \\ gHh_y - rv(u^2 + v^2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $x, y$  — точки на горизонтальной плоскости  $XOY$ ,  $t$  — время,  $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$  — компоненты усредненной по вертикали скорости жидкости в направлениях  $x, y$ , соответственно,  $H = H(x, y, t)$  — полная глубина жидкости,  $h = h(x, y)$  — глубина невозмущенной жидкости,  $r$  — коэффициент трения,  $g$  - ускорение свободного падения.

Численное моделирование динамики волны с начальной амплитудой  $\eta_0 = 0.032$  метра выполнено с помощью конечно-разностного метода, описанного в [1]. Параметры сетки  $\Delta x = \Delta y$  обеспечили достаточную разрешающую способность алгоритма, так что на одну эффективную длину волны, распространяющейся по дну постоянной глубины, приходилось не менее 35 узлов расчетной сетки. Анализ расчетов показывает, что достаточная детальность вычислений может быть достигнута с использованием шага по пространству  $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0.1 - 0.2$  метра, при котором число узлов разбиения в каждом из направлений равнялось 125–251.

Рис. 3 показывает общую картину течения в виде изолиний, рассчитанных в последовательные моменты времени. На рис. 4 приведено распределение максимального заплеска вдоль полупериметра острова.

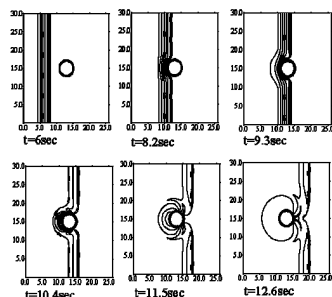


Рис. 3: Изолинии возвышения свободной поверхности.

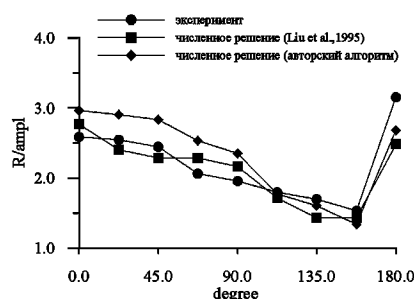


Рис. 4: Распределение максимального заплеска по полупериметру острова.

Рис. 5 демонстрирует изменение свободной поверхности в четырех близких к берегу фиксированных точках, положение которых показано на рисунках 1, 2. Сравнение мареограмм в выделенных точках демонстрирует вполне допустимое качественное и количественное расхождение численных и экспериментальных данных. Следует обратить внимание на то, что в численной модели почти идеально работают неотражающие граничные условия, тогда как поглощение волн в эксперименте происходит со значительным коэффициентом отражения. Таким образом, решена задача, включающая подвижную линию уреза, то есть описано распространение волны по сухому берегу. При решении подобных задач возникает ряд трудностей, и в большинстве работ, посвященных практическим задачам, прибегают к различным приемам, позволяющим упростить математическую модель. Чаще всего применяется какая-либо аппроксимация берега. Например, на некоторой глубине от линии уреза “выстраивается” вертикальная непроницаемая стенка, полностью отражающая подступающую к суше волну. К подобным приемам прибегают также в случаях, когда для описания волнового процесса в прибрежной зоне применяют более сложные по сравнению с уравнениями (2) модели мелкой воды или используют более трудоемкие по сравнению с методом конечных разностей численные модели (например, метод конечных элементов).

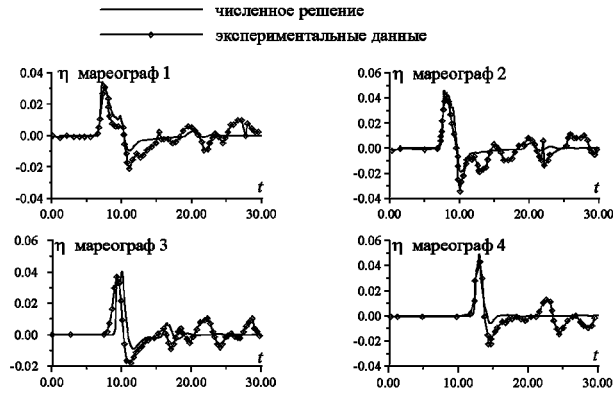


Рис. 5: Динамика свободной поверхности в фиксированных пунктах. Сравнение численного решения с экспериментальными данными.

В следующем параграфе будут рассмотрены вопросы допустимости тех или иных упрощений геометрии области течения.

### 3 Исследование одномерной задачи

В одномерной постановке схема задачи наката уединенной волны на откос, сопряженный с ровным дном, показана на Рис. 6, где  $h = h(x)$  — глубина воды,  $h_0 = 0.32$  — глубина ровной части канала,  $\tan \alpha = 1/4$ ,  $\eta_0$  — амплитуда входящей с левой границы уединенной волны. Длина расчетной области здесь равна 13, расстояние от левой границы до начального положения точки уреза равно 10.68. На расстоянии 9.4 и 10.4 единиц от левой границы, в соответствии с рис. 1, зафиксируем два мареографа. Таким образом, в определенном смысле поставленную задачу можно считать одномерным аналогом сформулированной в первом параграфе задачи.

Все приведенные здесь результаты получены с помощью одномерного аналога численного алгоритма, использованного выше для решения двумерной задачи.

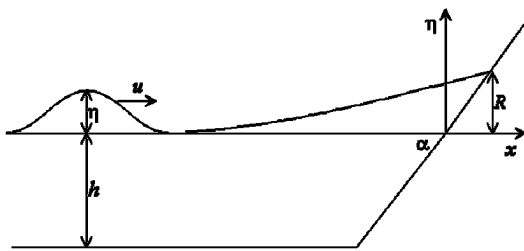


Рис. 6: Схема задачи.

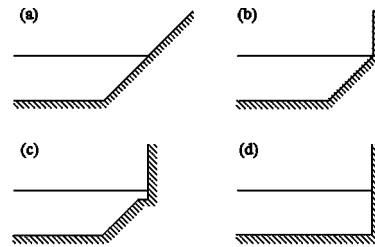


Рис. 7: Варианты аппроксимации склона.

Далее будем рассматривать четыре варианта задачи:

- Равномерный откос, сопряженный с ровным дном (тангенс угла равен  $S = \tan \alpha$ )
- Вертикальная непроницаемая стенка, установленная в точке начала откоса.
- Вертикальная непроницаемая стенка на некоторой глубине  $\epsilon$  на границе с сухой.
- Вертикальная непроницаемая стенка, установленная в начальной точке уреза.

Указанные конфигурации показаны на рис. 7. В случае (а) надо решать задачу о движении воды по сухому наклонному берегу. Случаи (b) и (c) чаще всего встречается на практике (при этом применяются разнообразные способы корректировки формы дна вблизи вертикальной стенки). Случай (d) - это самостоятельная задача, которую можно решить, например, методом характеристик. Первый и четвертый случаи при малой крутизне волны ( $\eta_0/L \rightarrow 0$ ) и  $\alpha \rightarrow \pi/2$  (очень крутые откосы) связаны хорошо известной формулой

$$R/\eta_0 = \sqrt{2\pi/\alpha}.$$

Этот вклад в величину заплеска обусловлен линейной аппроксимацией процесса наката. Формула может быть уточнена, если учесть дисперсию.

Отметим, что процесс наката волны на наклонный берег, как процесс движения воды по сухому берегу, имеет нелинейную природу, и скорость движения уреза в рамках нелинейных уравнений мелкой воды задается формулой  $dx/dt = u_s$ . Постановка аналогичной задачи в рамках линейных уравнений мелкой воды приводит к формуле  $dx/dt = 0$ , то есть точка уреза всегда неподвижна. Максимальным заплеском в линейной теории принято называть максимальное значение амплитуды в неподвижной точке уреза (т.е. в точке  $x = 0$ ). Известен важный нетривиальный случай, когда определить максимальный заплеск можно исходя из линейной теории.

Оказывается, некоторые величины, связанные с накатом длинных волн, являются инвариантами по отношению к линейной и нелинейной теории. Таковы величина максимального наката и минимального отката. Это свойство впервые было замечено в работе [5], широко использовано в книге [2] (см. также цитированную в монографии литературу), а в работе [4] для рассматриваемого случая (конфигурация (а)) явно выписана формула для величины максимального заплеска:

$$(3) \quad \frac{R}{h_0} = 2.831(\cot \alpha)^{1/2} \left( \frac{A}{h_0} \right)^{5/4}.$$

Формально это соотношение верно для необрушающихся волн при условии  $(\eta_0/h_0)^{1/2} \gg 0.288 \tan \alpha$ . Применительно к данной задаче это условие выполнено для всех рассмотренных ниже амплитуд. Например, при  $\eta_0 = 0.032$  левая и правая части неравенства принимают значения  $(\eta_0/h_0)^{1/2} \approx 0.3162$  и  $0.288 \tan \alpha \approx 0.0720$ , соответственно. Если

$$(4) \quad \eta_0 > 0.8183(\tan \alpha)^{10/9} h_0,$$

то волна в процессе наката не обрушается. Подчеркнем, что все вышеприведенные формулы являются асимптотическими и получены в методе Карриера - Гринспана в работе [4]. В силу специфики применяемого численного алгоритма величина заплеска определяется в интервале шириной  $\tan \alpha \Delta x$ , где  $\Delta x$  — шаг разностной сетки по пространству, так что из формулы (3) следует критерий выбора допустимого шага сетки:  $\Delta x \ll 2.831 \cot \alpha^{3/2} \eta_0^{5/4} h_0^{-1/4}$ .

На рис. 8 приведены величины максимальных заплесков для четырех начальных амплитуд:  $\eta_0 = 0.016, 0.032, 0.048, 0.064$ . Согласно условию (4), при  $\eta_0 < 0.0561$  волны на откосе при накате не обрушаются. Как видно из рис. 8, значения  $R$  для необрушающихся волн, полученные по формуле (3), действительно близки к величинам, вычисленным в рамках нелинейной модели, а при  $\eta_0 = 0.064$  формула (3) не верна.

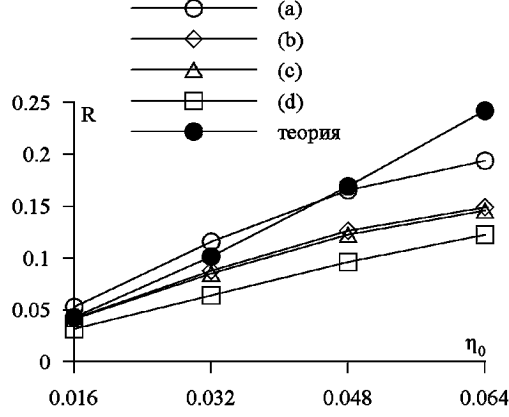


Рис. 8: Зависимости рассчитанных величин заплеска волны от начальной амплитуды для разных представлений берега (случаи (a)–(d)) и теоретическая кривая.

В таблицу 1 помещены относительные погрешности величин заплесков, вычисленных для случаев (b), (c), (d) и определенных по формуле (3). Соответствующие расчеты были вы-

Таб. 1: Относительная погрешность вычисления величины заплеска

	(b)	(c)	(d)	формула (3)
$\eta_0/h_0 = 0.05$	0.209	0.217	0.395	0.194
$\eta_0/h_0 = 0.1$	0.241	0.266	0.448	0.121
$\eta_0/h_0 = 0.15$	0.237	0.259	0.418	0.019
$\eta_0/h_0 = 0.2$	0.231	0.247	0.368	—

полнены на очень мелкой сетке (число узлов, приходящихся на область в 13 единиц, было равно 1041 ( $N = 1041$ ), то есть  $\Delta x = 0.0125$ ). Вычисления на сетках с  $N = 260$ ,  $N = 130$  и даже  $N = 65$  принципиально значения в таблице не поменяли. На рис. 9 — 11 показаны мареограммы в точках, расположенных перед конусом (см. рис. 2, нумерация начинается слева). На рис. 9 предоставлены результаты расчетов для средней начальной амплитуды ( $\eta_0 = 0.032$  :  $\eta_0/h_0 = 0.1$ ). Отметим, что этот вариант соответствует расчетам, обсуждавшимся в предыдущем разделе (см. рис. 5). Видно, что при времени  $t < 12$  двумерные эффекты почти не проявляются. Отметим, что в масштабах графиков случаи (b) и (c) практически неразличимы, в то время как с точки зрения работоспособности численных алгоритмов вариант (c) более предпочтителен из-за строгой положительности глубины. На рис. 10, 11 для сравнения приведены расчеты для малой ( $\eta_0 = 0.016$  :  $\eta_0/h_0 = 0.05$ ) и относительно большой ( $\eta_0 = 0.064$  :  $\eta_0/h_0 = 0.2$ ) начальных амплитуд (мареограф 2). При ( $\eta_0 = 0.064$  видно значительное проявление нелинейности (на ранней стадии формируется решение типа бора) и динамика поведения волны сильно зависит от формы берега. На этих рисунках использованы те же обозначения, что и на рис. 9.

## 4 Заключение

В работе предоставлены результаты экспериментального анализа некоторых подходов к упрощению задачи о взаимодействии волны с берегом. Показано, что при значительной не-

линейности процесса полная замена откоса вертикальной непроницаемой стенкой приводит к искажению волновой картины и погрешностям в вычислении динамических характеристик процесса. Однако более тонкие модификации берегового склона вполне допустимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 00-01-00899.

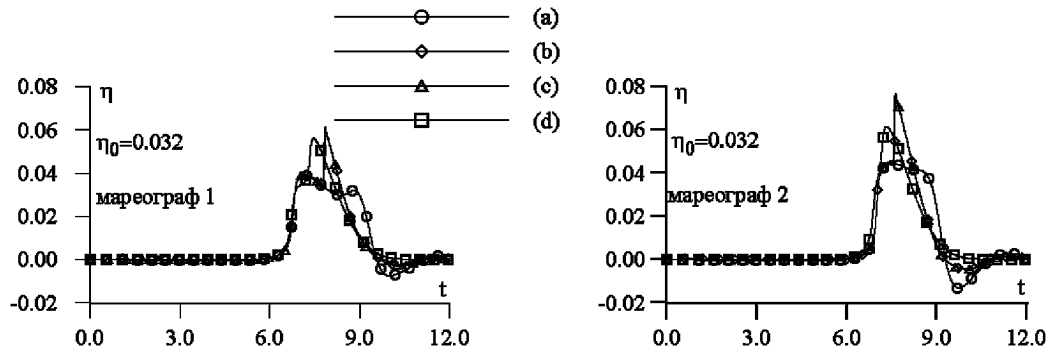


Рис. 9: Динамика свободной поверхности вблизи склона для разных аппроксимаций берега (случаи (a)-(d)). Случай умеренной амплитуды.

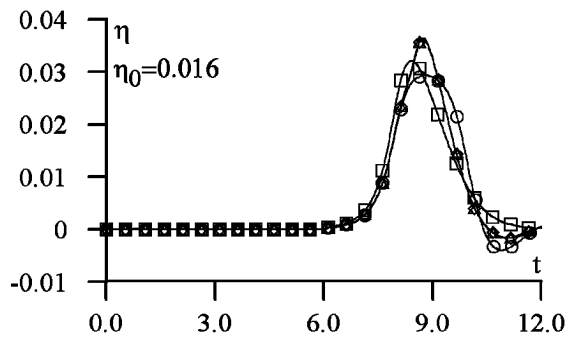


Рис. 10: Случай непрерывного течения.

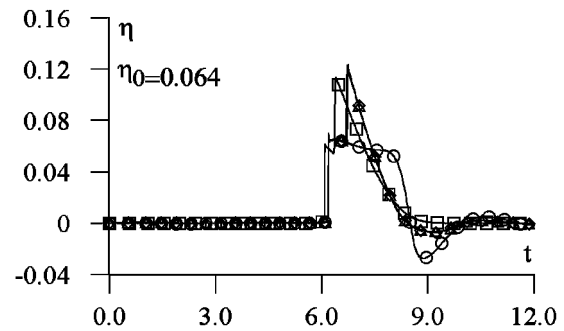


Рис. 11: Нелинейный случай.

## Список литературы

- [1] Федотова З.И., Чубаров Л.Б. Численное моделирование наката цунами // Вычислительные технологии. Труды Международной конференции RDAMM-2001. 2001. Т. 6. Ч. 2. Специальный выпуск. С. 380–396.
- [2] Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. 1989. Гидрометеоиздат, Ленинград.
- [3] Yeh H., Liu Ph., and Synolakis C. (Eds.) Long-wave runup models. 1996. World Scientific Publishing, Singapore.
- [4] Synolakis C.E. The run-up of solitary waves // J.Fluid Mech. 1987. V. 185. P. 523–545.
- [5] Carrier G.F. Gravity waves of water of variable depth // J.Fluid Mech. 1966. V. 24. P. 641–659.