Математика в XXI веке
Новосибирск, 25–28 июня 2003
(Тезисы докладов)

О классификации банаховых и йордановых банаховых алгебр

Ф. Н. Арзикулов

В теории операторных алгебр важную роль играет наличие в алгебре элементов — проекторов. Развита большая теория относительно проекторов. Построена классификация алгебр фон Неймана, AW*-, JBW- и AJW- алгебр по типам I, II, III, II_1, II_∞, I_n, n — кардинальное число. Для общих же C*- и JB-алгебр аналогичная классификация по типам не построена. Причина — отсутствие достоточного количества проекторов.

В данной работе предлагается некоторый аналог классификации по типам I, II, III для C*- и JB-алгебр. Для этого вводится понятие аннулятора подмножества S положительных элементов JB-алгебры A как $Ann_A(S) = \{a \in A : a \cdot b = 0, \forall b \in S\}$. В данной работе доказано, что множество всевозможных аннуляторов P, т. е. $P = \{Ann_A(S) : S \in A_+\}$, факторизованное по равенству множеств, образует порядково полную решетку. Данная работа показывает, что решетка аннуляторов P в случае общих C*- и JB-алгебр вполне может заменить решётку проекторов. Для получения основного результата вводится понятие алгебраической плотности подмножества $S \subseteq A_+$ в JB-алгебре A: S *алгебраически плотно* в A,если $Ann_A(S) = 0$. Также мы скажем, что B *разделяет некоторое подмножество* F пространства A^*, если $(\forall \rho \in F)(\exists b \in B)\rho(b) \neq 0$. Тогда для всякого подмножества S пространства A_+ множество $Ann_A(S) \cup S$ алгебраически плотно в A^{**} тогда и только тогда когда $Ann_A(S) \cup S$ разделяет A^{***}. Примером того, когда C*-алгебра A не будет алгебраически плотным в A**, является алгебра фон Неймана $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве H. При этом если $\dim(H) = \aleph$, где $\aleph$ — бесконечное кардинальное число, то $B(H)^{**}$ является алгеброй фон Неймана типа $\mathrm{I}_{2^{2^\aleph}}$ (здесь для произвольного бесконечного множества X с $|X| = \aleph$ имеет место $2^{2^\aleph} = |P(P(X))|$, где $P(P(X))$ — множество всех подмножеств множества всех подмножеств множества X).

Пусть A — JC-алгебра и $A \subseteq B(H)$, для некоторого комплексного гильбертого пространства H, B — подмножество A. Тогда как $\pi(B)$ мы обозначим слабо-$*$ замыкание множества B в $B(H)_{sa}$. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $S \subseteq A_+$. *Тогда* ${}^d(Ann_A(Ann_A(S))) \cup^d (Ann_A(S))$ *является банаховым пространством, множества* $Ann_A(S)$, $Ann_A(Ann_A(S))$ *и*

$Ann_A(S) \oplus ({}^d(AnnA(AnnA(S))) \cap {}^d(AnnA(S))) \oplus Ann_A(Ann_A(S))$ *являются* JB-*подалгебрами* JB-*алгебры* A, *где* ${}^dX = \{a \in A : xay = (xa)y + x(ay) - a(xy) = 0, \forall x, y \in X\}$, $X \subset A$. *Более того, существуют проекторы* f, e *в* A^{**} *такие, что* $[Ann_A(Ann_A(S))]^{**} = U_e(A^{**})$, $[{}^d(Ann_A(Ann_A(S))) \cap {}^d(AnnA(S))]^{**} = \{eA^{**}f\}$, $Ann_A(S)^{**} = U_f(A^{**})$, *и* $e+f = 1$, *если и только если* $Ann_A(Ann_A(S)) \cup Ann_A(S)$ *является алгебраически плотным в* A^{**}. *В случае* JC-*алгебры* A *мы имеем* $\pi(A) = \pi({}^d(Ann_A(Ann_A(S)))) \oplus \pi({}^d(Ann_A(Ann_A(S))) \cap {}^d(Ann_A(S))) \oplus \pi(AnnA(AnnA(S)))$.

Пример. Пусть $C_{1/2}([0,1/2])$ — пространство таких функций f в $C([0,1/2])$, что $f(1/2) = 0$. Тогда множество $Ann(C_{1/2}([0,1/2])) \cup C_{1/2}([0,1/2])$ не разделяет множество $C([0,1])^*$. Следовательно, $Ann(C_{1/2}([0,1/2])) \cup C_{1/2}([0,1/2])$ не является алгебраически плотным в $C([0,1])^{**}$.

Пусть A — JB-алгебра. Через P обозначим множество всех аннуляторов подмножеств JB-алгебры A с порядком $X \leq Y$, если $X \subseteq Y$, $X, Y \in P$. Тогда $(P, \leq)$ является полной решёткой. Мы скажем $X \in P$ является центральным, если ${}^d(Ann_A(S)) \cap d(Ann_A(Ann_A(S))) = 0$, где $S \subseteq A_+$ и $X = Ann_A(Ann_A(S))$. Множество всех центральных аннуляторов подмножеств JB-алгебры A обозначим через $Z(P)$. Аннуляторы X и Y называются *ортогональными*, если $X \cdot Y = \{0\}$, где $X \cdot Y = \{ab : a \in X, b \in Y\}$. Аннулятор $X \in P$ называется абелевым, если X ассоциативная JB-подалгебра A. Аннулятор X называется модулярным, если P_X модулярная подрешётка решётки P, где $P_X = \{Y \in P : Y \in X\}$. Пусть $c(X) = \inf\{Y \in Z(P) : X \subseteq Y\}$.

JB-Алгебра A назвается типа I, если существует абелев аннулятор $X \in P_A$ такой, что $c(X) = A$. JB-Алгебра A называется типа II, если существует модулярный аннулятор $X \in P_A$ такой, что $c(X) = A$ и не существует никакого ненулевого абелев аннулятора. JB-Алгебра A называется типа III, если не существует ненулевого модулярного аннулятора в P. Тогда мы можем утверждать

Теорема. *Пусть* A — JB-*алгебра. Тогда существуют такие единственные* JB-*подалгебры* A_I, A_{II}, A_{III} JB-*алгебры* A *типа* I, II *и* III *соответственно, что* $A_I \oplus A_{II} \oplus A_{III}$ *является алгебраически плотной в* A JB-*подалгеброй, и* $A^{**} = A_I^{**} \oplus A_{II}^{**} \oplus A_{III}^{**}$ *тогда и только тогда, когда* $A_I \oplus A_{II} \oplus A_{III}$ *алгебраически плотно в* A^{**}. *В случае* JC-*алгебры* A, *также,* $\pi(A) = \pi(A_I) \oplus \pi(A_{II}) \oplus \pi(A_{III})$.

Если W является AJW-алгеброй типа I и X является экстремально несвязанным компактным пространством, тогда $C(X, W)$ является JB-алгеброй типа I. Всякая AJW-алгебра типа I (II, III) является JB-алгеброй типа I (соответственно II, III). Пусть A — C*-алгебра. Известно, что множество $A_{sa} = \{x \in A : x^* = x\}$ с операцией йорданова умножения $x \cdot y = 1/2(xy + yx)$, $\forall x, y \in A_{sa}$ является JB-алгеброй. Пусть $A \subseteq B(H)$, для некоторого комплексного гильбертого прстранства H, B — подмножество A. Тогда в силу $\pi(B)$ мы обозначим слабо-* замыкание B в $B(H)$. Скажем, что C*-алгебра A является типа I (II, III), если A_{sa} является JB-алгеброй типа I (соответсвенно II, III). Как следствие предыдущей теоремы имеем

Теорема. *Пусть* A — *произвольная* C*-*алгебра. Тогда существуют такие единственные* JB-*подалгебры* $\mathcal{A}_I$, $\mathcal{A}_{II}$, $\mathcal{A}_{III}$ *C*-алгебры* A *типа* I, II *и* III *соответственно такие, что* $[\mathcal{A}_I \oplus \mathcal{A}_{II} \oplus \mathcal{A}_{III}]_{sa}$ *алгебраически плотная* *в* $\mathcal{A}_{sa}$ JB-*подалгебра, и* $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}_I^{**} \oplus \mathcal{A}_{II}^{**} \oplus \mathcal{A}_{III}^{**}$ *тогда и только тогда, когда* $[\mathcal{A}_I \oplus \mathcal{A}_{II} \oplus \mathcal{A}_{III}]_{sa}$ *алгебраически плотна в* $\mathcal{A}_{sa}^{**}$. *А также,* $\pi(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}_I) \oplus \pi(\mathcal{A}_{II}) \oplus \pi(\mathcal{A}_{III})$.

Всякая AW*-алгебра A типа I (соответственно II и III) является C*-алгеброй типа I (соотвественно II и III). Пусть W — AW*-алгебра типа I и X — компакт. Тогда C*-алгебра $C(X, W)$ всех непрерывных отображений является C*-алгеброй типа I.

Андижанский госуниверситет
E-mail: arzikulovFN@rambler.ru