Математика в XXI веке
Новосибирск, 25–28 июня 2003
(Тезисы докладов)

Тип произвольной JBW-алгебры A совпадает с типом JBW-алгебры A^{**}

Ф. Н. Арзикулов

Данная научная работа посвящена изучению вторых сопряженных пространств JBW-алгебр. Как из теории йордановых операторных алгебр известно, второе сопряженное пространство A^{**} произвольной JB-алгебры A является JBW-алгеброй. В начале научной работы рассматривается йорданова алгебра $B(H)_{sa}$ самосопряженных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Если для минимального проектора q допустим, что $\phi(\lambda q) = \lambda$, $\lambda \in R$, то отображение $\phi \cdot U_q : B(H)_{sa} \to R$ является нормальным состоянием на $B(H)_{sa}$. Пусть H — гильбертово пространство над F и $F = C$, R, H, где H — тело квартенионов, $\dim(H) = \aleph$, $\aleph$ — бесконечный кардинал. Известно, что для максимальной ассоциативной подалгебры A_o алгебры $B(H)_{sa}$ существует гиперстоуновский компакт X такой, что $A_o \cong C(X)$. Тогда изолированным точкам X соответствуют минимальные проекторы алгебры A_o и существует гиперстоуновский компакт Y такой, что $C(X)^{**} \cong C(Y)$, при этом можно предполагать, что $X \subseteq Y \subseteq C(Y)^*$. Имеем X всюду плотно в Y и все точки Y, не лежащие в X, являются неизолированными точками. Кроме того $|X| = 2^{2^{\aleph}}$. Эти факты использованы в доказательстве следующей теоремы:

Теорема. JW-*алгебра* $B(H)_{sa}^{**}$ *является JW-фактором типа* I_n, *где* $n = 2^{2^{\aleph}}$ *(здесь для произвольного бесконечного множества* X *с* $|X| = \aleph$ *имеет место* $2^{2^{\aleph}} = |P(P(X))|$, *где* $P(P(X))$ *— множество всех подмножеств множества всех подмножеств множества* X*), кроме того, если* A_o *— максимальная ассоциативная подалгебра алгебры* $B(H)_{sa}$*, то для максимальной ассоциативной подалгебры* A_1 *алгебры* $B(H)_{sa}^{**}$*, содержащей* A_o*, имеет место* $A_o^{**} = A_1$*, и существует гиперстоуновский компакт* Y *такой, что* $A_1 \cong C(X)$*,* $X \subseteq Y$*,* X *всюду плотно в* Y*, множество всех изолированных точек* Y *совпадает с* X*.*

Далее доказывается

Теорема. *Типы* JBW-*алгебры* A *и её второго сопряженного пространтсва* A^{**} *как* JBW-*алгебры совпадают для всякой* JBW-*алгебры* A*.*

Для этого предварительно доказываются следующие факты: пусть n — бесконечное кардинальное число, $\aleph$ — множество индексов такое, что $|\aleph| = n$, $\{e_{ij}\}$ — матрица, (i, j)-я компонента которой равна 1, а остальные компоненты суть нули. После некоторых очевидных условных обозначений введем следующее:

$$C(X) \otimes H_n(R) = \{\sum_{ij\in\Xi} \lambda_{ij}(x)e_{ij} : (\forall ij)\lambda_{ij}(x) \in C(X), \lambda_{ij}(x) =$$

$$\lambda_{ji}(x)(\exists K \in R)(\forall m \in N)(\forall\{e_{kl}\}_{kl=1}^{m} \subseteq \{e_{ij}\})\| \sum_{kl=1}^{m} \lambda_{kl}(x)e_{kl} < K\},$$

где X — гиперстоуновский компакт. Тогда относительно естественным, поточечным образом введенных алгебраических операций $C(X) \otimes H_n(R)$ является AJW-алгеброй типа I_n. Доказана следующая

Теорема. *$[C(X)\otimes H_n(R)]^{**} = C(Q)\otimes H_n(R)^{**}$ и $C(X, H\oplus R)^{**} = C(Q, H\oplus R)$, а также $[C(X) \otimes M_3^8]^{**} = C(Q) \otimes M_3^{8**}$, где Q — гиперстоуновский компакт такой, что $C(Q) = C(X)^{**}$.*

В свою очередь, чтобы доказать эту теорему, используется следующее утверждение: пусть V — множество функционалов вида $\phi = \sum_i \lambda_i\phi_i \cdot U_{q_i} \cdot p_x$, где $\{\lambda_i\}$ — семейство из R такое, что $\sum_i \lambda_i = 1$, $\{q_i\}$ — ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $H_n(R)$ или $H \oplus R$, $p_x(f) = f(x)$, $\forall f \in C(X) \otimes H_n(R)$ (или $C(X, H \oplus R)$), $x \in X$. Тогда, если количество ненулевых элементов суммы $\sum_i \lambda_i$ счётное число, то ϕ является функционалом, который не является нормальным, и $A^* = Cl(Ln(V))$, если $A = C(X) \otimes H_n(R)$ или $C(X, H\oplus R)$. Причём все функционалы алгебр $C(X)\otimes H_n(R)$ и $C(X, H\oplus R)$ неявляюшиеся нормальными лежат в замыкании линейной оболочки функционалов вида $\phi = \sum_i \lambda_i\phi_i \cdot U_{q_i} \cdot p_x$ со счётным количеством ненулевых слагаемых в сумме $\sum_i \lambda_i = 1$. Чтобы установить идентичность типов в случаях JBW-алгебр типов II_1, II_∞, III доказывается также следующий факт: пусть ψ точный нормальный центрозначный след на JBW-алгебре A. Тогда на A^{**} существует точный нормальный центрозначный след Ψ, сужение которого на A совпадает с ψ.

Андижанский госуниверситет
E-mail: arzikulovFN@rambler.ru