Математика в XXI веке
Новосибирск, 25–28 июня 2003
(Тезисы докладов)

Об обёртывающих AW*-алгебрах AW-алгебр

Ф. Н. Арзикулов

Данная научная работа посвящена построению обертывающей AW*-алгебры произвольной AJW-алгебры и исследованию связи между типами AJW-алгебры и её обертывающей AW*-алгебры. AJW-алгебры были введены в рамках класса йордановых операторных алгебр Топпингом в 1965 году. Одно из определений AJW-алгебры следующее: JB-алгебра A называется AJW-алгеброй, если для произвольного $S \subseteq A_+$ существует проектор e в A такой, что $S^\perp = \{a \in A : U_a x = 0, x \in S\} = U_e(A)$. Ряд вопросов теории AJW-алгебр решены, в частности, построена классификация AJW-алгебр. В связи с этим, и не только, рассматриваемые в данной работе вопросы актуальны. Один из основных результатов данной работы является

Теорема. *Обертывающая* C*-*алгебра* $C^*(A)$ *обратимой* AJW-*алгебры* A, *т. е.* C*-*алгебра* $C*(A)$, *порожденная обратимой* AJW-*алгеброй* A, *является* AW*-*алгеброй.*

Чтобы доказать этот факт рассмотрен проектор $p \in C*(A)$. Существуют x, $y \in R*(A)$, $R*(A)$ — порожденная A, вещественная C*-алгебра, такие, что $p = x + iy$. Доказано, что $C^*(x,y) = C^*(x) + iC^*(x)$, $R^*(x,y)_{sa} = C^*(x)_{sa} + iC^*(x)_{sa}^{-y}$, где $R*(x,y)$ — порожденная элементами x, y вещественная C*-алгебра, $C^*(x)$ — порожденная элементом x C*-алгебра, $C^*(x)_{sa}^{-y} = \{g(x) \in C^*(x)_{sa} : yg(x) = -g(x)y\}$, и элементы множества $C^*(x)_{sa}^{-y}$ попарно коммутируют. Отсюда получено, что, если $a \in C*(A)$, $a = x + iy$, x, $y \in R^*(A)$, то $R^*(x,y)_{sa} = C^*(x)_{sa} + iC^*(x)_{sa}^{-y}$, и элементы множества $C^*(x)_{sa}^{-y}$ попарно коммутируют. Отсюда следует, что существуют локально компактные Хаусдорфовы пространства K_1 и K_2 такие, что $R^*(x,y)_{sa} = C(K_1) \oplus C(K_2, H_2(R))$. Последний факт в свою очередь позволил нам установить: для всякого проектора $p \in C^*(A)$, существуют проекторы e, f, $q \in P(A)$ и симметрия $s \in A$ такие, что $e \cdot f = e \cdot q = f \cdot q = 0$, $s^2 = e + f$, $e = U_s f$, а также существуют элементы x, y_1, y_2, z в A такие, что $p = xe + zf + i((y_1 + iy_2)es - (y_1 - iy_2)fs) + q$, более того элементы x, y_1, y_2, z, q коммутируют попарно и с элементами e, f, s. Надо сказать, что во всех формулах берется ассоциативное умножение. Используя это мы установили, что всякое ортогональное множество $\{p_i\} \subset C^*(A)$ проекторов имеет супремум в $C^*(A)$ и для всякого элемента $a \in C^*(A)_{sa}$ существует проектор — носитель $r(a)$ этого элемента в $C^*(A)$. Отсюда следует, что $C*(A)$ есть AW*-алгебра. Далее, вводятся понятия центрозначного квазиследа и квазилинейного функционала в случае AW*- и AJW-алгебр и доказывается, что

AJW- алгебра A модулярна тогда и только тогда когда A имеет центрозначный точный квазислед. Этот факт используется в доказательстве следующего результата:

Теорема. *Тип произвольной обратимой* AJW*-алгебры A совпадает с типом её обертывающей* AW**-алгебры $AW^*(A)$.*

Чтобы доказать этот факт, вводятся следующие объекты: пусть n — бесконечное кардинальное число, Ξ — множество индексов такое, что $|\Xi| = n$, $\{e_{ij}\}$ — семейство матричных единиц такое, что e_{ij} — матрица, (i, j)-я компонента которой равна 1, а остальные — нули. После некоторых очевидных условных обозночений введем следующее.

$$C(X) \otimes H_n(R) = \{\sum_{ij\in\Xi}(x)e_{ij} : (\forall ij)\lambda_{ij}(x) \in C(X), \lambda_{ij}(x) = \lambda_{ji}(x),$$
$$(\exists K \in R)(\forall m \in N)(\forall\{e_{kl}\}_{kl=1}^m \subset \{e_{ij}\}\|\lambda_{kl}(x)e_{kl}\| < K\},$$

где X — экстремальный несвязанный компакт. Доказывается, что $C(X) \otimes H_n(R)$ является AJW-алгеброй типа I_n. Алгебраические операции в $C(X) \otimes H_n(R)$ вводятся естественным образом поточечно, например, если $x = \sum_{ij\in\Xi}\lambda_{ij}(x)e_{ij}$, $y = \sum_{ij\in\Xi}\lambda_{ij}(x)e_{ij}$ и x, $y \in C(X) \otimes H_n(R)$, то $x \cdot y = 1/2[\sum_{ij\in\Xi}(\lambda_{ij}(x)\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ij}(x)\lambda_{ij}(x))]e_{ij}$. Далее, имеем, что для всякой обратимой AJW-алгебры типа I_n A имеет место изоморфизм

$$A \cong (C(X_1) \otimes H_n(C)) \oplus (C(X_2) \otimes H_n(R)) \oplus (C(X_3) \otimes H_n(H)),$$

где $\forall j = 1, 2, 3$ X_j — экстремальные несвязанные компакты. Заметим, что

$$C*(A) \cong (C(X_1) \otimes M_n(C)) \oplus (C(X_2) \otimes M_n(C)) \oplus (C(X_3) \otimes M_{2n}(C)).$$

Отсюда видно, что $C^*(A)$ является AW*-алгеброй. А также, для доказательства второго основного результата используется следующий факт: *если для JB-алгебры, некоторое её множество $\{e_i\}$ ортогональных минимальных проекторов имеет точную верхнюю границу и всякое ортогональное множество проекторов имеет супремум в этой JB-алгебре, то эта JB-алгебра является JW-фактором типа I_n, где $n = |\Xi|$.*

Андижанский госуниверситет
E-mail: arzikulovFN@rambler.ru