МЕТОД ЭКВИПОТЕНЦИАЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

В. Н. Гребенёв, Ю. И. Шокин
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: vova@lchd.ict.nsc.ru

Используя метод эквипотенциалей изучаются задачи со свободными границами для уравнения нелинейной фильтрации, параболического уравнения с переменным направлением времени. Для модели дальнего турбулентного следа исследуется задача в случае несимметричных начальных условий.

1. Введение

В работе излагаются аспекты применения метода эквипотенциалей (линий уровня) к задачам гидродинамики в которых требуется изучение геометрических особенностей рассматриваемых решений. Отметим, что метод эквипотенциалей нашел широкое применение в аналитических подходах к исследованию задач газовой динамики и гидродинамики, где анализ поведения рассматриваемых функций вдоль линий уровня играет важную роль. В связи с этим укажем одни из последних работ в данном направлениии [1, 2] дающие заметный вклад в топологические методы исследования задач механики.

В данной статье представленны результаты исследований некоторых задач гидродинамики полученные с использованием метода эквипотециалей. Для класса уравнений типа нелинейной фильтрации жидкости или газа в пористой среде будет исследован вопрос о форме профиля функции давления. В задаче о динамике дальнего плоского турбулентного следа найдем решение задачи и исследуем его свойства для модели полученной на основе уравнений баланса количества движения и кинетической энергии турбулентности в случае несимметричных начальных условий. Для уравнения с переменным направлением времени (forward-backward parabolic equation), которое возникает в задачах моделирования сложных гидродинамических потоков жидкости [3, 4, 5] изучим множество (interface) разделяющее области изменения параболичности уравнения (различных фаз решения).

При использовании метода эквипотенциалей мы будем основываться на теореме о нулях решения однородного параболического уравнения (теорема Штурма [6]).

В задаче об исследовании фазовой структуры решения, при аппроксимации границы множества раздела фаз семейством линий уровня рассматриваемого решения, применяется теорема Сарда о критических значениях гладкой функции.

2. Форма профиля функции давления в задаче нелинейной фильтрации

Рассмотрим задачу Коши для вырождающющегося параболического уравнения

$$v_t = vv_{xx} + \gamma(v_x)^2, \tag{2.1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \tag{2.2}$$

где относительно параметра γ предполагается, что $\gamma > -\frac{1}{2}$.

При $\gamma > 0$, вводя функцию плотности $u = v^\gamma$, получаем для u хорошо известное уравнение фильтрации идеального изотропного газа в пористой среде

$$u_\tau = (u^m)_{xx}, \quad m = 1+\gamma^{-1}, \quad \tau = \frac{1}{m}t,$$

где γ — показатель политропы.

Случай $\gamma < 0$ дает уравнение

$$u_t = u^n u_{xx}, \quad n = (1+\gamma)^{-1},$$

которое выводится из исходного подстановкой $u = v^{1+\gamma}$.

Уравнение (2.1) имеет в $R_+ \times R$ хорошо известное автомодельное решение полученное Г. И. Баренблаттом [7] при $\gamma > 0$:

$$v_a(x,t) = \frac{1}{(2\gamma+1)} t^{-1/(2\gamma+1)} f(xt^{-\gamma/(2\gamma+1)}),$$

где $f(\xi) = \max(0, \frac{1}{2}(1-\xi))$. Для автомодельного решения v_a кривые $x = \pm t^{\gamma/(2\gamma+1)}$, где v_a обращается в нуль, являются точками фронта и функция v_a является вогнутой в каждый момент времени t на множестве $\{v_a > 0\}$.

Исследования геометрии профиля решения для уравнения фильтрации идеального изотропного газа ($\gamma > 0$) проводились в работах [8, 9]. Было получено, что функция давления газа $v(x,\tau)$, при $(x,\tau) \in \mathrm{supp} v$, сохраняет вогнутую форму относительно переменной x, если в начальный момент времени $\tau = 0$ давление v является вогнутой функцией. Доказательство основывалось на "расщеплении" уравнения

$$v_\tau = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 \quad m > 1,$$

на два уравнения

$$v_\tau = (m-1)vv_{xx}, \quad v_\tau = v_x^2.$$

Benilan, Vazques доказали в [9], что

$$v_{xx} \le -\frac{C}{1+(m+1)C\tau}, \quad C \ge 0, \quad (x,\tau) \in P_\tau$$

при условии, что $v_{xx}(x,0) \le -C$ при всех $x \in \mathrm{supp} v(x,0)$. Здесь P_τ обозначает множество положительности решения v. Приведем также известную (см., например [9]) в D' оценку

$$v_{xx} \ge -\frac{1}{(m+1)\tau}.$$

Отметим, что доказательство вогнутости функции v исходя только из принципа максимума для функции $p = v_{xx}$, которая удовлетворяет уравнению

$$p_\tau = (m-1)vp_{xx} + 2mv_xp_x + (m+1)p^2, \quad (x,\tau) \in P_\tau$$

не дает необходимой оценки ввиду того, что *a priori* неизвестен знак p на свободных границах P_τ. Для того, чтобы обойти эту трудность в [9] изучались две задачи Коши для уравнений

$$v_\tau = (m-1)vv_{xx}, \quad v_\tau = v_x^2.$$

Для уравнения диффузионного типа $v_\tau = (m-1)v_{xx}$ оценка на v_{xx} получается, как следствие стационарности свободных границ носителя $\mathrm{supp} v(x,t)$. Уравнение $v_\tau = v_x^2$ обладает свойством, что решение сохраняет вогнутую форму профиля решения. Тогда, искомый результат следует из применения, должным образом, формулы Троттера-Като.

Мы проведем исследование вогнутости решения сначала для уравнения (2.1), затем представим результаты возможных обобщений для уравнения $v_t = f(v, v_x, vv_{xx})$. Отметим, что в представленное в данной работе доказательство не использует такой специфической особенности уравнения $u_\tau = (u^m)_{xx}$, $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$, как расщепление оператора $A = (u^m)_{xx}$ на диффузионный оператор и оператор типа Гамильтона-Якоби. Так же отметим, что оценка на v_{xx} в случае, когда $\gamma < 0$ не является следствием полученной оценки для p.

Приведем некоторые сведения из [10], касающиеся гладкости решения задачи Коши для уравнения (2.1), затем сформулируем теорему о нулях решения параболического уравнения известную, как теорема Штурма, и ее следствия.

Рассмотрим функцию $e(\vartheta,t) = v(x,t)$ и новую переменную $\vartheta = \frac{x-M(t)}{R(t)}$, где $2M(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$, $2R(t) = \zeta_2(t) - \zeta_1(t)$, а ζ_i представляют линии фронта вырождения уравнения (2.1). Тогда для (e, R, M) получается следующая система:

$$e_t = R^{-2}\{ee_{\vartheta\vartheta} + \gamma(e_\vartheta)^2 + R(M_t + \vartheta R_t)e_\vartheta\}, \tag{2.3}$$

$$R_t = -\gamma 2R^{-1}(e_\vartheta(1,t) - e_\vartheta(-1,t)), \tag{2.4}$$

$$M_t = -\gamma 2R^{-1}(e_\vartheta(1,t) + e_\vartheta(-1,t)), \tag{2.5}$$

где $-1 \le \vartheta \le 1$, $0 < t \le T$. Этот прямоугольник будем обозначать через G_T.

Под решением системы (2.3) – (2.5) понимается следующее (см. [10]):

a) $e, e_t, e_\vartheta, e_{\vartheta\vartheta}, e_{\vartheta\vartheta\vartheta}$ — непрерывные по Гельдеру в $\overline{G}_T$ функции, причем $e > 0$ в $(-1, 1) \times (0, T]$;

b) e удовлетворяет уравнению (2.3) в области $\{(x, t) : |x - M(t)| < R(t), \quad 0 < t < T\}$;

b) $e(\pm 1, t) \equiv 0$ и $e_\vartheta(\pm 1, t) \neq 0$ для всех $t \in [0, T]$;

c) $M,\ R \in C^1[0, T]$.

Как отмечено в [10], в случае $\gamma > 0$, т. е. когда уравнение (2.1) заменой $v \to u$ и $t \to \tau$ сводится к уравнению нелинейной фильтрации идеального изотропного газа, функция u, определенная с помощью (e, R, M), будет совпадать со слабым решением уравнения (2.1). Справедлива следующая теорема о существовании решения системы (2.3) – (2.5).

Теорема 2.1 ([10]). *Пусть $e_0(\equiv e(\vartheta, 0)) \in C^{3+\alpha}[-1, 1]$, $R_0 > 0$, а M_0 — произвольное конечное число. Если $e_0(\pm 1) = 0$, $e_{0\vartheta}(\pm 1) \neq 0$ и $e_0(\vartheta) > 0$, $\vartheta \in (-1, 1)$, тогда существует решение (e, R, M) системы (2.3) – (2.5) удовлетворяющее начальным условиям:*

$$R(0) = R_0, \quad M(0) = M_0,$$

$$e(\vartheta, 0) = e_0(\vartheta).$$

Причем, $R(\cdot)$, $M(\cdot)$ и $e(\vartheta, \cdot)$ являются аналитическими функциями переменной t при $t > 0$.

При $\gamma > 0$ требование на гладкость e_0 можно ослабить и предполагать, что $e_0 \in C^{2+\alpha}[-1, 1]$.

Приведем некоторые результаты о нулях решения однородного параболического уравнения. Мы будем использовать следующую версию *теоремы Штурма* для параболического уравнения

$$w_t = a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x + c(x, t)w, \quad (x, t) \in R \times (0, T) \tag{A}$$

где

$$a,\ a^{-1},\ a_t,\ a_x \qquad a_{xx} \in L_\infty$$

$$b,\ b_t \qquad b_x \in L_\infty$$

$$c \in L_\infty.$$

Теорема 2.2 ([6]). *Для каждого значения $t \in (0, T]$ множество нулей функции $w(x, t)$,*

$$Z_t = \{x \in R | w(x, t) = 0\}$$

дискретно.

При доказательстве теоремы 2.2 было установлено, что *если w имеет мультипликативный нуль порядка k в точке (x_0, t_0), тогда $w(\cdot, t)$ "вблизи" мультипликативного нуля при $t > t_0$ имеет самое большее один простой нуль и в точности k простых нулей при $t < t_0$*. Отметим, что при $t > 0$, число $z(w(\cdot, t))$ конечно и множество значений t при которых $w(\cdot, t)$ имеет мультипликативные нули является дискретным.

Это утверждение имеет следующее уточнение: *если $k = 2n$, тогда $w(\cdot, t)$ не принимает нулевых значений, а для $k = 2n + 1$ имеет в точности один простой нуль в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) при $t > t_0$*. Доказательство следует из принципа максимума.

Как следствие вышеприведенного и теоремы о неявной функции для гладкой в окрестности $(x_0 - \epsilon,\ x_0 + \epsilon) \times (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$ функции w, получается, что структура $\bigcup_{t<t_0} Z_t$ в достаточно малой окрестности мультипликативного нуля (x_0, t_0) порядка k описывается гладкими кривыми $\beta_i(t)$, $1 \le i \le k, t \le t_0$, выходящими из точки $(x_0,\ t_0)$.

Наш подход в доказательстве вогнутости профиля решения v основывается на следующем наблюдении: на свободной границе, скажем $\zeta_1 = M(t) - R(t)$ ($\zeta_2 = M(t) + R(t)$) справедлива формула $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_x(\zeta_i(t), t) = (1 + \gamma)v_x v_{xx}(\zeta_i(t), t)$. Тогда предполагая, что v_{xx} переменного знака в P_T получим, что значения $v_x(x, 0)$ "переносятся" вдоль линий уровня производной v_x, проходящих через точки, где $v_{xx} = 0$ и оканчивающихся на прямой $\{t = 0\}$ и соответствующей свободной границе ζ_i. Анализ производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_x(\zeta_i(t), t)$ показывает, что $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_x(\zeta_i(t), t) \le 0$, (здесь используется неравенство $v_{xx}(x, 0) < 0$), что дает возможность определить знак $v_{xx}(\zeta_i(t), t)$, следовательно, прийти к противоречию с предположением о знакопеременности v_{xx}.

Пусть неотрицательная непрерывная на R функция $v_0(x)$ является выпуклой на компактном носителе $[-1, 1]$ (положили $M(0) = 0, R(0) = 1$) и $v_0(x) \in C^{3+\alpha}([-1, 1])$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3 ([11]). *При предположениях, сформулированных выше на $v_0(x)$ функция давления $v(x,t)$ является вогнутой при каждом $t > 0$ на множестве $\{v(x,t) > 0\}$.*

Изучим свойства функции v в случае, когда не предполагается ее вогнутость в начальный момент времени.

Теорема 2.4 ([11]). *Пусть $v_0''(x)$ имеет конечное число интервалов перемен знака и $v_0'' \not\equiv 0$ на интервале $(-1,1)$. Тогда существует $0 < t_b < \infty$ такое, что $v(x,t)$ является вогнутой функцией при $t \geq t_b$ на множестве $\{v(x,t) > 0\}$.*

Рассмотрим параболическое уравнение

$$v_t = f(v, v_x, vv_{xx}), \quad f_s(v,p,s) > 0, \tag{2.6}$$

где $f = f(v,p,s)$ - аналитическая функция своих аргументов. Уравнение (2.1) является частным случаем (2.6) при $f(v,p,s) = s + \gamma p^2$. Достаточно общий вид уравнения (2.6) требует, вообще говоря, иную постановку задачи с начальными условиями. Как отмечено в [12], это связано с трудностью определения слабого решения для уравнения (2.6), что ведет к другой технике исследования уравнения, отличной от методов теории уравнений типа нелинейной фильтрации.

В работе [12] предлагалась и изучалась следующая задача: найти $a(t), b(t) \in C^1([0,T])$ и функцию $v(x,t)$ непрерывную вместе с производными v_t, v_x, v_{xx} в $G_{a,b} = \{(x,t)|0 \leq t < T, a(t) \leq x \leq b(t)\}$ такую, что $v_t = f(v, v_x, vv_{xx})$ для $(x,t) \in G_{a,b}$, $v(a(t),t) = v(b(t),t)) = 0, t \in [0,T)$ и $v(x,0) = v_0(x)$, $x \in [a,b]$, $a(0) = a$, $b(0) = b$.

Существование единственного решения рассматриваемой задачи доказывалось в [12], где, в частности, было установлено, что $v(x,t)$ и $a(t)$, $b(t)$ являются аналитическими функциями переменной t. Теорема 2.1, приведенная в п. 1, есть следствие этого результата.

Нас интересует, в какой степени к уравнению (2.6) применимы полученные выше результаты. При доказательстве вогнутости профиля функции $v(x,t)$ ключевые пункты доказательства включали: выполнение условий теоремы Штурма для уравнений на v_x и v_{xx}, гладкость $v(x,t)$ вплоть до границ области $\{v > 0\}$, формулы, которая определяет знак производной $\frac{d}{dt}v_x(\zeta_i(t),t)$ по знаку v_{xx} и аналитичность функций $\zeta_i(t)$ и $v(x,t)$ относительно переменной t.

Функция $\gamma(p)$ в изучении уравнения (2.6) играет важную роль. При $\gamma < 0$ техника исследования уравнения, основанная на регуляризации и построении аппроксимирующей последовательности для решения, не применима. Одной из причин, как отмечено в [12], является неединственность решения для линеаризованного уравнения. Ввиду этого замечания, использование *метода сравнения по пересечениям* [16] не представляется возможным в случае $\gamma < 0$. Другое, более фундаментальное свойство функции $\gamma(p)$ связано с разрешимостью сформулированной выше задачи. В [12] было доказано, что при условии $N + 2\max\{\gamma(v_x(a)), \gamma(v_x(b))\} > 0$ и $v_0(M(0) - R(0)\cos\xi) \in h^{N+2+\alpha}(R)$ решение задачи существует, $v(M(t) - R(t)\cos\xi, t) \in h^{N+2+\alpha}(R)$, $0 < \alpha < 1$, как функция от ξ на интервале $[0,T]$ для некоторого $T > 0$. Здесь $2M(t) = a(t) + b(t)$, $2R(t) = b(t) - a(t)$ и $0 \leq N$ — произвольное целое число. Доказательство основывалось на том, что уравнение (2.6) порождает после перехода к новым координатам (y,t), где $x = M(t) - R(t)\cos y$, инфинитезимальный оператор в пространстве $h^{N+2+\alpha}(R)$, если

$$2\gamma(p(0)) + N > 0, \quad 2\gamma(p(\pi)) + N > 0 \tag{B}$$

Более подробно см. [12]. Результат о разрешимости изучаемой задачи является, вообще говоря, локальным. Отметим, что при $N \leq 2$ из (B) следуют неравенства $1 + \gamma(v_x(a(t),t)) > 0$ и $1 + \gamma(v_x(b(t),t)) > 0$. Таким образом, мы можем сформулировать теорему

Теорема 2.5 ([11]). *Пусть выполнены (приведенные выше) условия, при которых существует решение задачи и $N \leq 2$. Предположим, что $f_{vv}(v,p,s) = 0$, $f_v(0, v_x, 0) \geq 0$ вдоль кривых $a(t)$ и $b(t)$. Тогда $v(x,t)$ в $G_{a,b}$ при каждом $t > 0$ сохраняет вогнутый профиль на всем интервале существования решения, если в начальный момент времени $v(x,0)$ — вогнутая функция на $[a,b]$.*

3. Динамика дальнего турбулентного следа

В этом параграфе для определения характерного масштаба турбулентности используется структура линий уровня функции дефекта скорости осредненного движения, которые изучаются с единых позиций на основе теоремы о нулях решения параболического уравнения.

Для описания течения в дальнем турбулентном следе применяется следующая модель [13, 14]

$$U_\rho \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} < u'v' > + \frac{\partial}{\partial x}(< u'^2 > - < v'^2 >) \tag{3.1}$$

где $U_\rho (= \mathrm{const})$ — скорость набегающего потока, $U_1 = U_\rho - U$ — дефект скорости осредненного движения в направлении оси x; $< u'v' >, < u'^2 >, < v'^2 >$ — касательное и нормальные рейнольдсовы напряжения. Турбулентное число Рейнольдса предполагается достаточно большим. Система координат связана с телом так, что начало координат находится на задней кромке жестко закрепленного тела; ось y направлена вертикально вверх, а направление оси x совпадает с направлением скорости основного потока. Уравнение (3.1) незамкнуто; в настоящей работе, как и в [15] полагается

$$< u'v' > = \nu_T \frac{\partial U_1}{\partial y}, < u'^2 > = < v'^2 > = \frac{2}{3}E.$$

В дополнение к уравнению (3.1) привлекается также уравнение трансформации энергии турбулентности

$$U_\rho \frac{\partial E}{\partial x} = \nu_T \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \nu_T \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2 - \nu_T \frac{E}{L^2}. \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2), c — эмпирическая постоянная (положительная), ν_T — турбулентная вязкость, которая определяется из соотношения $\nu_T = \chi U_{1\max} L$, где χ — эмпирическая постоянная; $U_{1\max}(x)$ — максимальное значение U_1 при каждом фиксированном значении переменной x; $L = L(x)$ — масштаб турбулентности.

При $x = x_0$ полагается

$$U_1(y, x_0) = U_0(y), \quad E(y, x_0) = E_0(y) \tag{3.3}$$

$U_0(y), E_0(y)$ — некоторые положительные "колоколообразные" функции такие, что $U_0(y) \to 0, E_0(y) \to 0$ при $y \to \pm\infty$.

Искомыми переменными задачи являются U_1, E и масштаб турбулентности L, который полагается равным

$$L = \frac{1}{2}(L_1 - L_2), \tag{H1}$$

где L_1 и L_2 определяются из равенств $U_1(L_1(x), x) = \frac{1}{2}U_1(y_{\max}(x), x)$ при $y > y_{\max}(x)$ и $U_1(L_2(x), x) = \frac{1}{2}U_1(y_{\max}(x), x)$ при $y < y_{\max}(x)$. Здесь через $y_{\max}(x)$ обозначаем значение переменной на которой достигается $\max\limits_{y \in \mathbb{R}} U_1(y, x)$.

Изучим следующее: разрешимость и единственность решения задачи (3.1) – (3.3), геометрические свойства решения.

Начнем с рассмотрения автомодельного решения. Эта задача с применением данной математической модели изучалась в работе [15], в которой автомодельное решение искалось в виде

$$F(\eta) = \frac{U_1}{\tilde{U}_1}, \quad \eta = \frac{y}{\tilde{L}}, \quad H(\eta) = \frac{E}{\tilde{E}},$$

с использованием характерных значений скорости $\tilde{U}_1$, полуширины турбулентного следа $\tilde{L}$ и энергии турбулентности $\tilde{E}$. Ниже мы приведем построение автомодельного решения задачи, используя общепринятый подход [16] для параболических уравнений, находя при этом, численное значение константы c.

Введем новую переменную $t = \theta(x) \equiv U_\rho^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \nu_T(s) ds$. Тогда уравнения (3.1), (3.2) перепишутся в виде

$$u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{3.1$'$}$$

$$e_t = \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - c\frac{e}{l^2}, \quad (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{3.2$'$}$$

где $u(y, t) = U_1(y, \theta^{-1}(t)), e(y, t) = E(y, \theta^{-1}(t))$ и $l(t) = L(\theta^{-1}(t))$. Условия (1.3) соответственно примут вид

$$u(y, 0) \equiv u_0(y) = U_0(y), e(y, 0) \equiv e_0(y) = E_0(y). \tag{3.3$'$}$$

Уравнение (3.1′) имеет в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, хорошо известное автомодельное решение:

$$u_a(y,t)=\frac{f_a(\xi)}{\sqrt{1+t}},\quad \xi=\frac{y}{\sqrt{1+t}}, \tag{3.4}$$

где $f_a(\xi)=\frac{F_0}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{\xi^2}{4})$, $\xi\in\mathbb{R}$. Решение u_a реализуется, когда начальная функция $u_0\equiv u_a(y,0)=\frac{F_0}{2\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{\xi^2}{4})$, где F_0 — положительная константа ($F_0=|u_a(y,0)|_{L^1(\mathbb{R})}$). Функция $l=l(t)$ определяется, в силу симметрии u_a, из равенства $u_a(l(t),t)=\frac{1}{2}u_a(0,t)$. По виду решения u_a легко найти l, которую обозначим через l_a и

$$l_a(t)=2\sqrt{\ln 2(1+t)}. \tag{3.5}$$

Автомодельное решение уравнения (3.2′) будем искать в виде

$$e_a(y,t)=(1+t)^\alpha\theta_a(\xi), \tag{3.6}$$

где α — некоторая постоянная, а $\theta_a(\xi)>0$ — дифференцируемая функция. Подставляя (3.5), (3.6) и $u_{ay}=-\frac{F_0}{4\sqrt{\pi}}\xi\exp(-\frac{\xi^2}{4})(1+t)^{-1}$ в (2.2′), получим следущее уравнение

$$\alpha(1+t)^{\alpha-1}\theta_a-\frac{1}{2}(1+t)^{\alpha-1}\xi\theta_{a\xi}=(1+t)^{\alpha-1}\theta_{a\xi\xi}+\frac{F_0^2}{16\pi}\xi^2(1+t)^{-2}\exp(-\frac{\xi^2}{2})-\frac{c}{4\ln 2}(1+t)^{\alpha-1}\theta_a.$$

Отсюда вытекает необходимость равенства $\alpha=-1$, тогда временные множители в уравнении можно сократить и в итоге будем иметь

$$A_c(\theta_a)\equiv\theta_{a\xi\xi}+\frac{1}{2}\xi\theta_{a\xi}+(1-\frac{c}{4\ln 2})\theta_a+\frac{F_0^2}{16\pi}\xi^2\exp(-\frac{\xi^2}{2})=0. \tag{3.7}$$

В силу симметрии необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\theta_a'(0)=0. \tag{3.8}$$

Учитывая свойства $e_0(y)$ на бесконечности, для профиля пульсационной энергии потребуем выполнение краевого условия

$$\theta_a(\infty)=0. \tag{3.9}$$

Итак, проблема построения автомодельного решения e_a свелась к задаче (3.7)-(3.9). Известно, что однородное уравнение (3.7) имеет решения с различной асимптотикой при $\xi\to\infty$ и эти решения зависят от параметра c. Таким образом, построение $\theta_a(\xi)$ связано с выделением параметра c, который предлагается выбирать так, чтобы полученное решение удовлетворительно описывало известные экспериментальные данные работы [13].

Чтобы найти решение рассмотрим семейство краевых задач для уравнения (3.7):

$$A_c(\theta_a)=0,\quad \theta_a(0)=\mu,\quad \theta_a(\infty)=0, \tag{3.6′}$$

где μ — положительный параметр. Положим $\eta=\frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $c=6\ln 2$, $D\equiv\frac{F_0^2}{4\mu\pi}$, $h(\eta)=\frac{1}{\mu}\theta_a(\sqrt{2}\eta)$, тогда уравнение (3.7) примет вид

$$h_{\eta\eta}+\eta h_\eta-h=-D\eta^2\exp(-\eta^2) \tag{3.10}$$

решение которого $h(\eta;\mu)$ с учетом краевых условий $h(0;\mu)=1$, $h(\infty;\mu)=0$ равно

$$h(\eta;\mu)=\eta\left\{\frac{3}{2}D\sqrt{\pi}[1-\Phi(\eta\sqrt{2})]-\frac{(1+2D)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}[1-\Phi(\eta)]\right\}+(1+2D)\exp(-\frac{\eta^2}{2})--2D\exp(-\eta^2),$$

где $\Phi(z)\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z\exp(-\frac{s^2}{2})ds$; $h(\eta;\mu)$ определяет искомое автомодельное решение $\theta_a(\xi)$ при $\mu=\frac{(3\sqrt{2}-4)F_0^2}{8\pi}$ (исходя из условия (3.8) согласно равенству $h'(0;\mu)=3D\frac{\sqrt{\pi}}{2}-(1+2D)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}})$ и, как показано в [15], является близким к экспериментальным данным [13].

Интересным свойством функции h является наличие максимума, расположенного в точке $\eta^*>0$. Найденное численное значение величины c в виде $c=6\ln 2$ будет важным при анализе асимптотической устойчивости.

Построим решение задачи для несимметричных начальных условий.

Рассмотрим положительные непрерывные, вообще говоря, несимметричные функции $u_0(y), e_0(y)$, которые имеют конечные интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(y)dy < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_0(y)dy < \infty. \tag{$H2$}$$

Для u, e легко выписать решение задачи в виде тепловых потенциалов используя формулу Пуассона [16].

Найдем функцию $l(t)$. Для анализа этой проблемы предположим следующее:

$$u_0 \in C^1(\mathbb{R}), \quad u_{0y} > 0 \ (u_{0y} < 0) \qquad y < y_{\max}(0) \ (y > y_{\max}(0)). \tag{$H3$}$$

Обозначим через $p = u_y$, $N_p(t)$ — число изменений знака функции $p(y,t)$ на числовой оси $\mathbb{R}$ при каждом фиксированном t. Относительно функции $p(y,t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$p_t = \frac{\partial^2}{\partial y^2} p \tag{3.11}$$

известно, что при каждом фиксированном $t > 0$, $N_p(t) \leq N_p(0)$. Это утверждение является следствием сильного принципа максимума для параболических уравнений.

Покажем, что при определенных условиях на $u_0(y), N_p(t)$ не меняется с течением времени т. е. $N_p(t) = N_p(0)$. Отметим, что в общем случае это утверждение не является верным. Можно привести пример, когда решение уравнения теплопроводности, имеющее в начальный момент перемену знака, через некоторый промежуток времени становится положительным. Это произойдет, например, если $p(y,0) = M\delta(y+a) - \delta(y) + M\delta(y-a)$, где δ обозначает дельта-функцию, а константа M берется больше $1/2$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3.1 ([17]). *Пусть для функции u_0 выполнены условия (H2), (H3). Тогда $N_p(t) = N_p(0) = 1$ при каждом $t > 0$.*

Из леммы непосредственно вытекает, что определена функция $y_{\max} = y_{\max}(t)$, сопоставляющая каждому $t > 0$ значение $y_{\max}(t)$, на котором реализуется $\max\limits_{y\in\mathbb{R}} u(y,t)$.

Лемма 3.2 ([17]). *Функция $y_{\max}(t)$ является непрерывной при $t \geq 0$ и аналитической при $t > 0$.*

Отметим, что полученная аналитическая при $t > 0$ функция $y(t)$ совпадает с определенной в Лемме 3.1 функцией $y_{\max}$.

Перейдем к нахождению функции $l(t)$, для этого рассмотрим $v(y,t) = u(y,t) - \frac{1}{2}u(y_{\max}(t),t)$. Отметим, что число перемен знака $N_v(0)$ для $v(y,0)$ равно 2.

Лемма 3.3 ([17]). $N_v(t) \equiv N_v(0) = 2$ *для* $t > 0$.

Из леммы 3.3 вытекает, что при $y < y_{\max}(t)$ $(y > y_{\max}(t))$ для каждого $t \geq 0$ определена функция $l_1(t)$ (соответственно $l_2(t)$), как решение уравнения $v(y,t) = 0$.

Применяя теорему о неявной функции к v, нетрудно показать, что справедлива

Лемма 3.4 ([17]). *Функции $l_i(t), i = 1,2$ являются непрерывными при $t \geq 0$ и аналитическими для $t > 0$.*

Тем самым, мы установили, что верна следующая терема.

Теорема 3.1 ([17]). *Если в задаче $(3.1') - (3.3')$ начальные условия удовлетворяют предположениям $(H2), (H3)$, тогда существуют функции $e(y,t)$, $u(y,t)$, $l(t)$ — аналитические при $t > 0$ и непрерывные при $t \geq 0$ такие, что e, u удовлетворяют уравнениям $(3.1'), (3.2')$, начальным условиям $(3.3')$, а $l(t)(\equiv L(\theta^{-1}(t))$ — соотношениям (H1). Причем e, u, l определяются единственным образом.*

4. Фазовая структура решения уравнения с переменным направлением параболичности

Для уравнения

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2 \left(\equiv \frac{1}{2}(u^2)_{xx}\right), \quad (x,t) \in Q_T = R \times (0,T), \tag{4.1}$$

где не предполагается знакоопределенность функции u мы изучаем так называемую фазовую структуру решения уравнения (4.1).

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\mathcal{N} = \{(x,t) \in Q_T \,:\, u(x,t) = 0\}, \mathcal{M}_+ = \{(x,t) \in Q_T \,:\, u(x,t) > 0\}, \mathcal{M}_- = \{(x,t) \in Q_T \,:\, u(x,t) > 0\},$$

которые назовем *переходной, положительной и отрицательной фазами решения* соответственно.

В этом параграфе мы устанавливаем, что *непрерывное слабое решение задачи Коши* для уравнения (4.1) (определение которого будет дано ниже) при некоторых предположениях на заданную непрерывную знакопеременную функцию $u_0(x)$ может быть представленно ввиде $u = u^+ + u_-$ на некотором, вообще говоря достаточно малом промежутке времени, где $u^+(\geq 0)$ и $u^-(\leq 0)$ обобщенные решения соответствующих задач Коши [18] для уравнения (4.1). Далее приводится теорема (полное доказательство которой дано в работе [5]) о локальной разрешимости задачи Коши рассматриваемого уравнения в классе слабых решений, которое ищется ввиде суммы $u = u^+ + u_-$.

Под слабым непрерывным решением уранения в Q_T понимается функция

$$u \in C(Q_T) \cap L^\infty(Q_T), \quad u_x \in L^\infty_{loc}(Q_T),$$

такая что

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)\psi(x,t_2)dxdt - \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)\psi(x,t_1)dxdt - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} u\psi_t - uu_x\psi_x dxdt = 0$$

для произвольных чисел $t_1 < t_2$ *and* $x_1 < x_2$ таких что $[x_1,x_2] \times [t_1,t_2] \in Q_T$, где $\psi \in C^{1,1}Q_T$ имеет компактный носитель для $t \in [t_1,t_2]$.

Верны следующие леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $A \subset Q_T$ открытое множество такое, что $\tilde{A} = int(\partial A \cap \{t = \sigma | \sigma_1 \leq \sigma < T, \sigma_1 \geq 0\})$ есть непустое открытое множество в R. Предположим, что u является положительной на множестве $A \cup \tilde{A}$. Пусть $(x_\epsilon, t_\epsilon) = \epsilon$, где ϵ регулярное значение u на множестве $u^{-1}(\epsilon) \cap A$. Предполохим, что $\epsilon < \min u(x,t)$ на $\partial A \cap \{\sigma_1 \leq t \leq t_\epsilon\}$. Тогда существует гладкая кривая $x = \beta_\epsilon(t), \sigma_1 < t_\epsilon \; inA$, вдоль которой $u = \epsilon$, $u_x \neq 0$ за возможным исключением точки $t = t_\epsilon$.*

Доказательство следует из результатов [19]. Следующие леммы основываются на принципе максимума.

Лемма 4.2. *Пусть B — некоторая подобласть из Q_T ограниченная четырьмя кривыми: интервалом γ_0 на прямой $t = \sigma_2$, интервалом γ_1 на прямой $t = \sigma_3(\sigma_2 < \sigma_3)$, гладкой кривой γ_2 соединяющей "правые" границы интервалов γ_0, γ_1 и лежащей (за исключением этих конечных точек) в прямоугольнике $S_{\sigma_2,\sigma_3}(S_{\sigma_2,\sigma_3} = \{(x,t) \in Q_T | \sigma_2 < t < \sigma_3\})$, гладкой кривой γ_3 соединяющей "левые" границы интервалов γ_0, γ_1 и лежащей (за исключением граничных точек) в S_{σ_2,σ_3}. Предположим, что касательные к γ_2, γ_3 нигде не параллельны оси Ox. Если $u(x,t) > 0$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, тогда $u(x,t) > 0$ в $\bar{B}$.*

Лемма 4.3. *Пусть $P \subset Q_T$ — прямоугольник $\alpha < x < \beta, \tau_1 < t < \tau_2$ такой, что $u(x,t) \geq 0$ в $\bar{P}$ и $u(x,\tau_1) > 0$ для $\alpha < x < \beta$. Тогда $u(x,t) > 0$ в P.*

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия Леммы 4.2, где относительно γ_2, γ_3 требуется только непрерывность. Предположим, что $u(x,t) \geq 0$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, тогда $u(x,t) \geq 0$ в $\bar{B}$.*

Лемма 4.5. *Если в Лемме 4.4 условие $u(x,t) \geq 0$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ заменяется неравенством $u(x,t) \leq 0$ на $\gamma_0 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, тогда $u(x,t) \leq 0$ в $\bar{B}$.*

Доказательство приведенных лемм содержится в [5].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.1) напомним, что относительно начальной функции $u_0(x)$ не предполагается её знакоопределенность. Пусть $u_0(x)$ это заданная непрерывная и ограниченная функция на R^- такая, что $u_0(x) > 0$ при $x < 0$, $u_0(0) = 0$ и $u_0(x) < 0$ для $a < x < \infty$, $u_0(x) \equiv 0$ на отрезке $[0,a]$, $a < \infty$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.1 ([5]). *Пусть существует решение $u(x,t)$ в Q_T задачи Коши для уравнения (4.1) с начальной функцией $u_0(x)$. Тогда при $t \le t_0 < T$, где t_0 некоторое достаточно малое число, верно следующее представление*

$$u(x,t) = u^+(x,t) + u^-(x,t),$$

где $u^+(x,t) = u(x,t) > 0$ для $(x,t) \in Q_T \cap \{x < \xi^+(t)\}$, $u^+(x,t) \equiv 0$ для $(x,t) \in Q_T \cap \{x \ge \xi^+(t)\}$ и $u^-(x,t) = u(x,t) < 0$ для $(x,t) \in Q_T \cap \{x > \xi^-(t)\}$, $u^-(x,t) \equiv 0$ для $(x,t) \in Q_T \cap \{x \le \xi^-(t)\}$; $\xi^\pm$ — непрерывные функции такие, что $\xi^\pm \in \partial\mathcal{M}_\pm$.

Теорема 4.2 ([5]). *Пусть $u_0(x)$ отрицательная функция заданная на R^- такая, что выполнены условия теоремы 4.1. Тогда существует такое продолжение $u_0(x)$ на R^+ в область положительных значений, что задача Коши для уравнения (4.1) с начальной функцией $u_0(x)$ определенной на R, разрешима в малом по t в классе слабых непрерывных решений.*

Список литературы

[1] Arnold V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. Springer, 1998.

[2] Рылов А. И. Математические исновы метода линий уровня в задачах газовой динамики. Диссертация на соискание степени д.ф.-м.н. М., 2000.

[3] Yanenko N. N., Novikov V. A. On a certain model of a fluid with viscosity of variable sign // Chisl. Met. Mekh. Sploshn. Sredy. Novosibirsk. 1973. Vol. 11. C. 142–147.

[4] Plotnikov P. I. Forward-backward parabolic equations and hysteresis, Russian Math. // Dokl. 1993. V. 330. P. 691–694.

[5] Grebenev V. N. Interfacial phenomenon for one-dimensional equation of forward-backward parabolic time // Annali di Matem. Pura ed Appl. 1996. CLXXI. P. 379–394.

[6] Angenent S. B. The zero set of a solution of a parabolic equation// J. Rein Angew. Math. 1988. Vol. 390. P. 79–96.

[7] Баренблатт Г. И. О некотором классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде// Прикл. математ. и механ. 1953. Т. 17. С. 739–742.

[8] Graveleau J. L., Jame P. A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations// SIAM J. Appl. Math. 1971. Vol. 20, No. 2. P. 199–222.

[9] Benilan Ph., Vazquez J. L. Concavity of solutions of the porous medium equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 299. P. 81–99.

[10] Angenent S. B. Large time asymptotics for the porous media equation// In: Microprogram. V.1. Proceedings. Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States (Ed. W.-M. Ni, L.A. Peletier, J. Serrin), (I). 1988. P. 21–34.

[11] Grebenev V. N. Equipotential line method in nonlinear diffusion problems// Russian J. Numer. Anal. Math. Model. 1999. Vol. 14, No. 4. P. 327–338.

[12] Angenent S. B. Analyticity of the interface of the porous media equation after the waiting time// Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 102, No. 2. P. 129–336.

[13] Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.

[14] Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.

[15] Скурин Л. И. Аналитическое представление профиля пульсациионной энергии в следе// Инж. физ. журн. 1970. Т. 18. № 5, С. 916–918.

[16] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[17] Grebenev V. N. Dinamica de una huella plana turbulenta alejada// Revista de Matem.: Teoria y Aplicac. 1998. Vol. 5, No. 1. P. 177–184.

[18] Калашников А. С. Вопросы теории вырождающихся параболических уравнений//Успехи математ. наук. 1987. Т. 42, вып. 2. С. 135–176.

[19] Knerr B. F. The porous medium equation in one dimension// Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 234. P. 381–403.