ДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ДВУМЕРНЫМ ПОТОКОМ ГРУНТОВЫХ ВОД

Н. К. Корсакова, В. И. Пеньковский
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: kors@hydro.nsc.ru

Методом конечных элементов с использованием итерационного процесса решается задача потенциального двумерного движения грунтовых вод в пласте, содержащем изолированные замкнутые неподвижные включения несмешивающейся с водой жидкости. Водопроводимость включения неоднородна, зависит от распределения в нем насыщенности несмешивающейся фазой и является одной из искомых функций. Подобного рода задачи встречаются в практике нефтедобычи и при исследовании явлений загрязнения водоносных горизонтов нефтепродуктами.

Введение

Первые теоретические и экспериментальные исследования явлений внутреннего капиллярного запирания при фильтрации несмешивающихся жидкостей были опубликованы в работе [1]. Было обнаружено, что в фильтрационном потоке одной из жидкостей, например, смачивающей скелет пористой среды, при определенных условиях могут находиться включения другой, несмачивающей жидкости. Примерами таких включений могут служить загрязнения водонасыщенных водоносных горизонтов углеводородными пятнами, возникающими в результате утечки из нефтепроводов и бензохранилищ, целики нефти при разработке месторождений методом внутриконтурного заводнения, захоронения в глубокие водоносные пласты земли иных несмешивающихся с водой жидкостей.

Динамическое равновесие включения с потоком достигается в результате соответствующего силам сопротивления распределения в нем насыщенности порового пространства несмачивающей фазой, благодаря которому давление в этой фазе сохраняется постоянным в каждой точке с одновременным выполнением условия скачка давлений на границе фаз. Фильтрационный поток частично обтекает капиллярно-запертое включение, водопроницаемость которого гораздо ниже водопроницаемости окружающей пористой среды, и частично протекает сквозь него.

В работе [4] дано представление точного аналитического решения задачи о динамическом равновесии включения круговой формы с двумерным потоком грунтовых вод. Получено условие, при выполнении которого достигается состояние критического равновесия. Нарушение этого условия, например, путем увеличения скорости набегающего потока, приводит, как это показывают и экспериментальные данные, к разрушению включения. Расчеты распределения насыщенности в таком включении и исследование факторов, влияющих на это распределение, представлено в статье [5]. Аналитическое решение задачи для включений иных форм, отличных от круговой, получить не удается. В данной работе предлагается численное решение, основанное на применении метода конечных элементов с использованием итерационного процесса, который можно интерпретировать как процесс построения последовательных приближений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся плоское движение грунтовых вод в пласте, границы которого являются либо контуром питания (кривые γ_1, γ_3), либо непроницаемым участком (кривые γ_2, γ_4 на рис. 1). Пусть замкнутый контур γ обозначает границу области D^+, содержащейся внутри пласта, в которой наряду с движущимися частицами воды имеются частицы углеводородной жидкости (нефти). Обозначим функцией $s(x, y) \geq 0$ — насыщенность порового пространства нефтяной фазой, так что функция $s_1 = 1 - s(x, y) \geq 0$ представит насыщенность пор водой. Вне D^+, в области D^-, частиц нефти нет, $s \equiv 0$, и движение воды подчиняется обычному закону Дарси

$$v_1^- = -K_1 \bigtriangledown h_1^-. \tag{1}$$

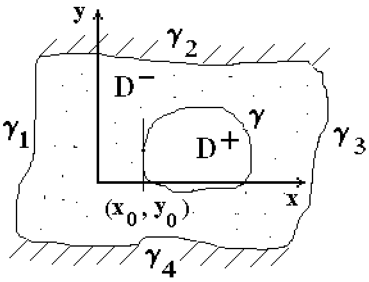

Рис. 1.

Здесь v_1^- вектор скорости фильтрации воды, K_1 — коэффициент фильтрации, $h_1^-(x, y)$ — давление (в м. столба воды) в области D^-, (x, y) — декартовы координаты, $\bigtriangledown \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ — векторный оператор градиента. Из закона сохранения массы воды

$$\mathrm{div} v_1^- = 0$$

следует, что в области D^- функция h_1^- должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\triangle h_1^- = 0, \tag{2}$$

где $\triangle \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

В области D^+ пятна систему уравнений двухфазной установившейся фильтрации Раппопорта–Лиса составляют:

уравнения движения (обобщенные законы Дарси)

$$v_1^+ = -K_1 f_1(s) \bigtriangledown h_1^+, \;\; v^+ = -K f(s) \bigtriangledown h^+, \tag{3}$$

законы сохранения масс

$$\mathrm{div} v_1^+ = \mathrm{div} v^+ = 0 \tag{4}$$

и уравнение капиллярного скачка давлений на границе фаз

$$h^+ - h_1^+ = h_k^0 \phi(s). \tag{5}$$

В этих уравнениях обозначено h^+, h_1^+ — давления, v^+, v_1^+ — скорости, K, K_1 — коэффициенты фильтрации, $f(s)$, $f_1(s)$ — заданные относительные фазовые проницаемости для нефти и воды соответственно, h_k^0 — характерная высота капиллярного поднятия, функция $\phi(s)$, — аналог j–функции Леверетта [2], — предполагается заданной. Будем также считать, что значение неотрицательных функций $s(x, y)$, $f(s)$, $f_1(s)$, $\phi(s)$ принадлежат промежутку [1, 0], причем $f(0) = f_1(1) = \phi(0) = 0$, $f(1) = f_1(0) = \phi(1) = 1$ и $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s > 0$, $\mathrm{d}f_1/\mathrm{d}s < 0$.

В режиме капиллярного запирания нефть неподвижна $v^+ \equiv 0$, поэтому $h^+ \equiv h_0 = \mathrm{const}$ и система уравнений (3) – (4) сводится к двум уравнениям

$$\mathrm{div}[f_1(s^{-1}(\phi) \bigtriangledown h_1^+] = 0, \tag{6}$$

$$\phi = (h_0 - h_1^+)/h_k^0, \tag{7}$$

в которой $s^{-1}(\phi)$ — обозначает монотонно возрастающую функцию, обратную к функции $\phi(s)$, а параметр h_0 должен быть задан.

Положим

$$H(x, y) = \begin{cases} h_1^-, & \text{если} \;\; (x, y) \in D^- \\ h_1^+, & \text{если} \;\; (x, y) \in D^+ \end{cases}$$

и обозначим $F_1(\phi) = f_1(s^{-1}(\phi) \geq 0$ — заданную, монотонно убывающую с ростом ϕ функцию, определяющую водопроницаемость пятна, если известна зависимость $\phi(x, y)$. При переходе через кривую γ, отделяющую области D^+ и D^-, должны оставаться непрерывными давления и нормальные проекции потоков воды.

Таким образом, математическая формулировка исходной физической задачи сводится к следующему.

Найти функции $H(x,y)$, $s(x,y)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\triangle H(x,y) = 0\ ,\quad (x,y) \in D^- \tag{8}$$

$$\operatorname{div}(F_1(\phi) \bigtriangledown H(x,y)) = 0\ ,\quad \phi = (h_0 - H)/h_k^0,\quad (x,y) \in D^+ \tag{9}$$

условиям на внешних границах

$$\begin{aligned} H &= H_1(x,y)\ ,\ (x,y) \in \gamma_1 \\ H &= H_3(x,y)\ ,\ (x,y) \in \gamma_3 \\ \frac{\partial H}{\partial n} &= 0\ ,\ (x,y) \in \gamma_2, \gamma_4 \end{aligned} \tag{10}$$

и условиям сопряжения

$$H^+ = H^-\ ,\ \frac{\partial H}{\partial n} = K(\phi)\frac{\partial H^+}{\partial n}\ ;\ (x,y) \in \gamma. \tag{11}$$

Задача (8) – (11) содержит пока неопределенный параметр h_0 — давление в нефтяной фазе, содержащейся в пятне. Как показывают эксперименты, минимальная насыщенность $s_0 > 0$ в пятне достигается в некоторой передней по отношению к набегающему потоку точке (x_0, y_0) кривой γ. Пусть $\phi_0 = \phi(s_0)$ — соответствующее этой насыщенности значение j-функции Леверетта. Тогда, учитывая второе уравнение в (9), получим

$$h_0 = \phi h_k^0 + H(x_0, y_0),$$

а само уравнение (9) перепишем в виде

$$\phi = \phi_0 + [H(x_0, y_0) - H(x,y)]/h_k^0. \tag{12}$$

Из этого уравнения следует, что решение задачи (8) – (11) существует не для произвольно заданных краевых условий (10) и размеров пятна, поскольку в области D^+ должны выполняться ограничение $\phi \leq 1$, вытекающее из физического смысла рассматриваемого процесса фильтрации.

2. Численный алгоритм и результаты расчетов

Вместо уравнений (8) – (9) рассмотрим задачу

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(K(s) \bigtriangledown H(x,y)), \tag{13}$$

решение которой методом установления сходится к стационарному и соответствует решению задачи (8) – (11).

Двумерная задача фильтрации (13) с переменным коэффициентом гидравлической проводимости решалась локально-балансовым методом конечных элементов, описанном ранее в работе [3]. Метод заключается в следующем.

Области решения задачи D^+ и D^- разбиваются на треугольные элементы. Внутри каждого элемента вводятся средние точки и вокруг каждого узла формируется область d_i, в которой вычисляется массовый баланс (рис. 2). Решение в произвольном элементе e представляется в виде

$$\hat{H}(x,y,t) = \sum_e N_i(x,y) H_i(t), \tag{14}$$

где N_i — линейные двумерные базисные функции.

Локально-массовый баланс для уравнения (13) имеет вид

$$\iint\limits_{d_i} \frac{\partial H}{\partial t}\, d\Omega = \iint\limits_{d_i} \operatorname{div}(K(s) \bigtriangledown H(x,y))\, d\Omega. \tag{15}$$

Подставляя представление (14) и интегрируя (15) по всей области, получим систему дифференциальных уравнений, которая после конечно-разностной аппроксимации производной по t приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$[A]\{\hat{H}\} = \{R\}. \tag{16}$$

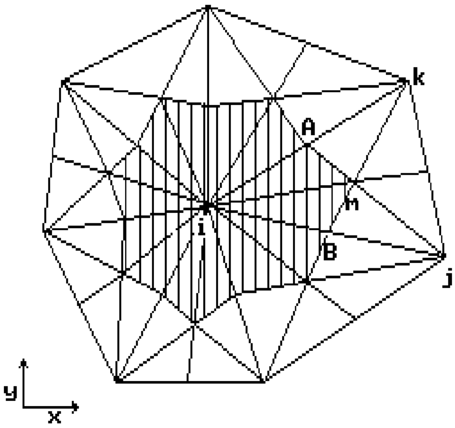

Рис. 2.

Для решения системы (16) использовался итерационный метод Гаусса — Зейделя, который является наиболее эффективным в задачах подобного типа. Гидравлическая проводимость задавалась для каждого элемента в виде

$$K_e(s) = \begin{cases} (K_i + K_j + K_k)/3 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D^+ \ (i,j,k - \text{вершины элемента}), \\ 1 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D^- \end{cases} \tag{17}$$

Для численных расчетов была выбрана прямоугольная область размером 10×5 м. В качестве области D^+ был задан участок размером 2×2 м. Слева был задан постоянный напор $H = H_0 = 10$ м, справа $H = H_1 = 0$, остальные границы были непроницаемы. Связь между насыщенностью s и водопроницаемостью K в области D^+ была представлена в виде $K(s) = K(1-s)^{3,5}$.

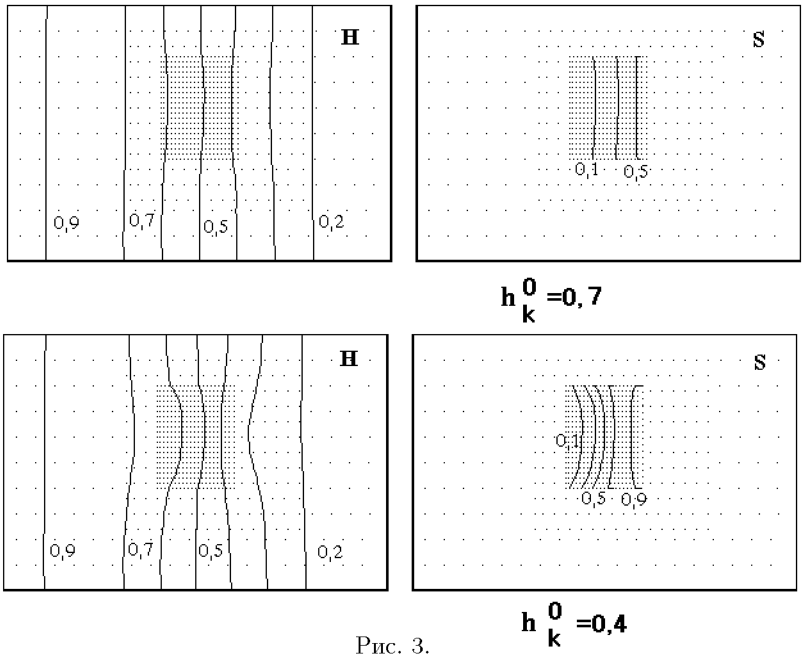

Рис. 3.

Численный алгоритм решения совместной задачи основан на применении итерационного процесса, являющегося по существу методом последовательных приближений. Начальное приближение насыщенности бралось в виде $s^{(0)} = 0$, а проницаемости $K(\phi^{(0)}) = 1$. На каждом шаге n стационарное решение уравнения (13) $H^{(n)}(x,y)$ с учетом (12) использовалось для вычисления функции

$$\phi^{(n)} = (H^{(n)}(x_0, y_0) - H^{(n)}(x,y))/h_k^0.$$

Распределение насыщенности в области D^+ вычислялось в виде

$$s^{(n)} = (1,1(\phi^{(n)})^2)/(0,1 + (\phi^{(n)})^2),$$

что соответствует j-функции Леверетта в виде экспериментально определяемой аппроксимации [1]: $\phi(s) = [0,1s/(1,1-s)]^{0,5}$. Результат сравнивался с распределением, полученным на предыдущем шаге. Далее по распределению $s^{(n)}$ получали новые значения проницаемости $K^{(n+1)}$, и искалось стационарное решение задачи (13) на следующем шаге. Расчеты прекращались, если при некотором $n = N$ условие $|s^{N+1} - s^N| < \varepsilon$ выполнялось для всех узлов области D^+. Здесь ε — заданная малая величина.

На рис. 3 представлены результаты расчетов в виде изолиний напора грунтовых вод $H(x, y)$ во всей области D и распределений насыщенности s в пятне D^+ при различных значениях h_k^0. Видно, что с уменьшением h_k^0 изменяется линейный характер распределения давления, изолинии H в области D^+ сильно искривлены. При этом, если при $h_k^0 = 0,7$ насыщенность в пятне меняется от 0,1 до 0,5 в направлении потока воды, то уже при $h_k^0 = 0,4$ ее значения возрастают до 1 к выходу из области D^+. Полученные расчеты качественно согласуются с экспериментальными данными [1].

Список литературы

[1] Антонцев С. Н., Доманский А. В., Пеньковский В. И. Фильтрация в прискважинной зоне пласта и проблемы интенсификации притока. ИГиЛ СО АН СССР, Новосибирск, 1989.

[2] Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964.

[3] Корсакова Н. К. Численное моделирование переноса консервативных и неконсервативных примесей в пористой среде. Водные ресурсы. 1996. Т. 23, №6. С. 672–678.

[4] Пеньковский В. И. Углеводородные включения в водонасыщенных пористых средах. Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1994. Т. 108. С. 27–37.

[5] Солнцева Л. В. К задаче о распределении остаточной нефти в плоско-параллельном фильтрационном потоке. Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1994. Т. 108. С. 63–79.